

南开基础数学生存指北

我是爱南开的

Version 0.1

2026 年 8 月 26 日



前言

初次诞生编写这样一个生存手册的念头是在大二开学不久，那时候的我堪堪从进入大学的兴奋劲里缓过神来，才发现早已深一脚浅一脚踩了不少坑，走了不少弯路。那时的我就在想，如果有这么一本手册，可以告诉早点告诉我关于大学，关于数学的各种事情，是不是会更好。又是恍恍惚惚两年过去，来到了大三的暑假，我觉得是时候可以去写这样一本手册了，遂即和一些同学分享了我的想法，得到了他们的支持与建议，于是这份文档就问世了。

关于文档的名字，原本是想叫南开基础数学生存指南的，但转念一想，已在南开，何需指南，遂改南为北。关于指北的内容我有两点想说：

- (1) **请不要把本文档当成选课指南。**文档中有不少关于课程的评价，我们编写这部分内容的目的是让大家对课程有基本的了解，对可能存在的困难有准备，而不是告诉你哪些课事少分高以便你功利地选课。
- (2) **请对本文档的所有话保持质疑。**尽管参与编写的同学们基本上都是大三升大四或者毕业年级，对本科学习与生活有深刻的了解，但是限于每个人发展路径不同，背景不同，性格不同等等各种各样的因素，我们给出的建议未必适合所有人，我们输出的想法也未必是对的。请永远保持独立思考。

指北的第一章叫做“进入大学之前”，花了不少篇幅给大学祛魅，最重要的思想就是第一章的最后一句话，留给大家自己去读。第二章是针对南开大学不同班型给出的一些讨论，但是据我了解，现在又多了不少特殊班型，我们这些老登确实无法得到关于那些新班型的详细信息，无法给出相关建议，所以只罗列了大类伯苓与强基。如果你想从一个班型转到另一个班型，请一定一定要弄清楚培养计划会有什么不同，你需要修的课会发生什么转变，切莫在不了解的情况下就转，否则可能无法按时毕业。第三章是基础数学劝退，是的，我由衷地想劝退大家进入基础数学，在第三章中给出了详尽的理由。第四章是一些基本技能，写得比较粗糙，但总归给出一些大方向上的指引，更加细节的部分我希望大家能够自己去探索。第五章是数学分析与高等代数的学习指导，但我觉得我写的很烂，比较有作用的可能是 5.1.4 与 5.2.3，说到底这两门课是需要大家自己踏踏实实看书学下去的。数学分析和高等代数是构筑大家数学素养的开始，很多年后你可以已经完全忘记了各种定理，但是你学会的数学素养是不会丢掉的。不过尽管我说的这么重要，我还是不希望大家在这两门课的各种题目上面花费过多的时间，数学不是做题，或者说做题是为了让你熟悉概念，如果你真的想做数学研究，请不要花时间在训练各种偏难怪的题目上面，这对你的数学生涯没有意义。

后面的章节我就不再一一赘述了，大家等到对应的学期按需查看即可。注意请不要犯刻舟求剑的错误，我们的文档第一版编写与 2026 年夏季，课程的安排，大纲，授课计划可能都会随着时间而改变，如果你来自未来，请思考我们是否在未来更新了版本，或者询问近几届的学长学姐。但无论如何，课程的主体内容是不会变的，我们给出的参考文献应该足以覆盖任何学校的任何同名课程。请记住，课程是手段，学习是目的，请不要让你的目的变成通过课程。

在我读大学之后，无论是学习上还是生活上都受过来自同学，老师，网友，家人

等的帮助。虽然身份不同，但每当我提及我的困惑，他们总是不吝惜话语，热心地为我解惑与指引方向。我由衷地向他们表示感谢，受他们的影响，我也总是愿意去帮助别人。在这里我想告诉大家，不要害怕发问，要学会向他人寻求帮助，我想只要你足够真诚，学校里的同学和老师都是愿意帮助你的。同时，如果你觉得这份文档帮助了你，希望你也可以把这份友善与帮助传递下去，谢谢。

最后，十分感谢本文档的作者们的辛苦付出，没有他们就没有这份生存指北。文档主体的编撰历经两月有余，且还不断更新一些有趣的东西，涉及的内容比我最早计划的要多出一半，这些都是他们的功劳。最后，再次向作者们表示由衷的感谢。

杨毅涵

2026 年 8 月 12 日

作者名单

本节列出参与编写者、年级与研究兴趣。

排名不分先后，根据入学年份与姓名字典序排出。

- [朱凯](#)：2021 级本科生，低维拓扑方向（规范理论与 Floer 同调）。
- 孟润泽：2022 级本科生，算术几何 Galois 表示方向，欢迎关注微信公众号：左 R 模的小橱窗。
- 曹文哲：2023 级本科生，几何与拓扑方向。
- 陈陆韬：2023 级本科生，稳定同伦论与无穷范畴方向。
- 龙怡锦：2023 级本科生，调和分析与算子代数方向。
- [杨毅涵](#)：2023 级本科生，算术几何方向，欢迎关注微信公众号：Arithmetry。
- 庄逸康：2023 级本科生，主要兴趣方向为调和分析。

有部分作者不愿意透露姓名，故使用下列的假名参与编辑：

- 红绒十字：2022 级本科生，调和分析与 pde 方向。
- cauchy710：2023 级本科生，偏应用方向。
- ly_dly：2023 级本科生，算术几何方向，欢迎关注微信公众号：NeosTheos!!!
- Tony Cheng：2023 级本科生，几何与拓扑方向。
- 孙笑川：2023 级本科生，方向保密。
- 叶明樱：2023 级本科生，调和分析方向。
- 林安澜：202X 级本科生，兴趣方向 PDE 与调和分析。
- 朱婉铮：202X 级本科生，主要兴趣方向为概率论。

我们欢迎任何形式的意见和建议，如果你认为有什么可以修改或者添加的地方，或者有更好的学习路线，有更好的观点，欢迎将你的想法发送到邮箱：matyyh@163.com，如果内容合理，我们会将你的想法添加进来。

目录

1 进入大学之前	1
1.1 规划	1
1.2 选课	2
1.3 自学	3
1.4 学会逃课	5
1.5 考前冲刺	6
1.6 关于绩点	6
1.7 学会生活	8
2 大类？伯苓？还是强基？	9
3 基础数学劝退	11
4 AI, 笔记与资源库	14
4.1 AI 时代	14
4.2 L ^A T _E X 与 Markdown	15
4.3 学会搜索	15
4.4 如何享受地阅读 PDF	16
4.5 资源库	16
5 一切的根基	17
5.1 数学分析	17
5.1.1 数学分析 1	17
5.1.2 数学分析 2	21
5.1.3 数学分析 3	23
5.1.4 主要参考书	28
5.2 高等代数	29
5.2.1 高等代数 1	31
5.2.2 高等代数 2	31
5.2.3 主要参考书	32
6 不得不品的必修课	33
6.1 复变函数	33
6.2 常微分方程	33
6.3 抽象代数	35
6.4 实变函数	37
6.5 概率论	37
6.6 点集拓扑	38
6.7 泛函分析	39
6.8 BOSS: 数学物理方程	42

7 古神的低语：核心选修	44
7.0 引言	44
7.1 数值分析	45
7.2 运筹学	46
7.3 信息与计算数学	49
7.3.1 信息论	49
7.3.2 微分方程数值解	50
7.4 数学与应用数学	52
7.4.1 投资学 & 金融工程	52
7.4.2 组合论	53
7.4.3 离散优化	54
8 开始接触近代的数学：选修与自学	56
8.1 方法论综述	56
8.1.1 关于自学	58
8.1.2 关于工具	59
8.1.3 关于方向与路线	60
8.1.4 展示你自己与寻找小团体	60
8.2 讨论班	60
8.3 分析与方程	62
8.3.1 课程：现代分析基础	62
8.3.2 课程：傅里叶分析	63
8.3.3 课程：变分学	65
8.4 几何与拓扑	65
8.4.1 微分流形	66
8.4.2 黎曼几何	67
8.4.3 代数拓扑 I	68
8.4.4 代数拓扑 II	69
8.4.5 代数拓扑 III	71
8.4.6 微分拓扑	73
8.4.7 辛几何/拓扑	73
8.4.8 低维拓扑	76
8.5 代数与数论	79
8.5.1 交换代数	79
8.5.2 表示论	80
8.5.3 李理论及其表示	81
8.5.4 范畴论与同调代数	81
8.5.5 代数数论	81
8.5.6 代数几何	82
8.5.7 模形式	83
8.5.8 椭圆曲线	83

目录	7
8.5.9 解析数论	83
9 关于转专业	84
9.1 转专业前的准备	84
9.2 笔试和面试	84
10 关于竞赛	86
10.1 数学建模	86
10.2 大学生数学竞赛	86
10.3 丘成桐数学竞赛	86
10.3.1 几何拓扑方向备考经验	86
11 关于考研	87
11.1 考研流程	87
11.2 考研科目	87
11.3 备考建议	87
11.4 备考资源	87
12 关于保研	88
12.1 关于套磁	88
12.2 夏令营流程	89
12.3 关于面试	89
13 关于留学	90
13.1 为何选择留学	90
13.2 一些相关注意事项	90
13.2.1 难度	90
13.2.2 择校	90
13.3 流程与要求	91
13.3.1 英语	91
13.3.2 推荐信	91
13.3.3 绩点	92
13.3.4 时间节点	92
13.3.5 套磁	92
14 DLC: 学长们的学习路径 (仅供参考)	94
14.1 如何成为分析学爱好者?	94
14.2 如何在不会跳宅舞的情况下成为拓扑流形?	98
15 保持心理健康	99
16 杂谈	99
17 美食推荐	100

18 散步放松好去处	101
------------------	-----

1 进入大学之前

昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路。

——晏殊《蝶恋花·槛菊愁烟兰泣露》

大家都说高考之后进入大学就能脱离苦海，但我想大学并不是充满鲜花的彼岸，而是更大更隐蔽的苦海，我们不过是从一座苦海游向另一座苦海，只不过这片苦海乍一看上去并不苦。

九年义务教育，三年高中教育，在进入大学之前的十二年里面，我们每天坐在教室中学习着固定的科目，完成着学校、课外辅导班安排好的作业，为一个固定的目标而努力。太多的人进入大学之后仍旧保持着以前的习惯，将自己的未来完全交付在学校的安排之中。然而须知大学并没有义务给每个人分配最合适的安排，所谓培养计划也不过是所开设的课程列表，你能从中读出的信息仅仅只是毕业的最基本要求，除此之外再读不出何谓培养，更不必说计划。

此外，相比于高中课程内容的标准化，在大学里面，同样一门课程，不同老师、不同教材教出来的东西可能天差地别，故如若仍保有着学习一门课只需上课听听课，课后做作业这种想法，你学到的东西可能会在深度、广度上都远远不足而不自知，等到未来要用的时候才发现捉襟见肘。

在《上海交通大学生存手册》你可以找到这样的文字：

各位同学们，在本书的开始，我不得不遗憾地告诉大家一个消息。国内绝大部分大学的本科教学，不是濒临崩溃，而是早已崩溃。在此，我无意争论是否复旦、中科大、或者清华、北大是否比我们崩溃的更少一些——这种争论是没有意义的。我只是看到了无数充满求知欲、激情、与年轻梦想的同学们，将要把自己的四年青春，充满希望与信任地交给大学来塑造。这使我心中非常不安。

更多的内容大家可以自行去到[《上海交通大学生存手册》](#)中查看，我无意再抨击教育如何如何，这是我们暂时无力改变的现状。如何在当下的大学中生存，或者说是生活下来，才是我们讨论的重点。

1.1 规划

一如前面所言，千军万马过独木桥之后来到大学，等待你的是一片汪洋大海。按照哪条航线走，用什么方式走，要走多快，要走多稳，是一个人走还是跟着大部队走，是尽可能探索更多的区域还是以最快速度到达远方，这些并没有一个固定的答案。但无论如何，在出发之前，或者至少出发后的短时间内确定好方向是正确且必要的。

这里所说的规划，并非要求你在刚进入大学时候就把未来的人生全部想清楚。这既不现实，也没有必要。人的兴趣、能力、眼界、处境都会不断变化，过早地把自己钉死在某一条路上有时反而会成为一种愚蠢。大家需要尽早意识到：大学里的自由，实际上意味着**没有人来帮你兜底**。

高中时代的目标是高度统一的。无论你喜欢什么、擅长什么、未来想成为什么样的人，在高考这件事上，大多数人都被放在同一套评价体系之下。但进入大学以后，

评价体系突然分裂了。有人关心绩点，有人关心竞赛，有人关心科研，有人关心实习，有人关心留学，有人关心保研，有人关心考公，有人关心就业，也有人什么都不关心率性生活。问题在于，大学不会主动告诉你哪一套评价体系适合你，也不会提醒你某些选择之间存在冲突。你可以什么都不想，但选择依旧会发生，只是你的选择会被环境、惯性、同伴和短期欲望裹挟。

所以首先要做的是打破信息差，很多事情不应该等到大三大四才开始准备。想留学的人很早就关心语言成绩、推荐信、课程背景和申请材料；想就业的人很早就关心实习、项目、技能和行业信息；想走学术道路的人更要尽早知道，课堂上的内容通常只够你获得学分，远远不够你真正进入一门学科。想要打破信息差并不是一件容易的事，我在这里能给出的建议是多和老师、同龄人聊天，尤其是多和来自各个学校的同龄人聊天。你可以通过学长、同学、老师推荐进入一些群聊，你不必在其中发言，也不必被聊天中的焦虑裹挟，而是要有效筛选来自各个学校的信息，扩宽自己的认识。这也是我们所谓“开智”的过程。这个过程最好在大一结束之前完成。

比较可行的方式是给自己设定几个目标。长期目标回答“我大致想走向哪里”，例如读研、就业、留学、转专业、考公，或者暂时保留多种可能；中期目标回答“这一学年我需要完成什么”，例如维持排名、学完某些基础课程、完成一次科研训练、做出一个项目、通过某项考试；短期目标回答“这个月、这周、今天我要做什么”，例如读完某本书的某几章，完成某门课的习题，整理一份申请材料，向学长学姐询问经验。长期目标允许模糊，中期目标最好具体，短期目标需要可执行。

当然，规划不是一成不变的。现实中总会出现意外：你可能发现自己并不喜欢原来的专业，可能发现某条道路并不适合自己，可能因为一次课程、一本书、一个老师而改变方向，也可能因为家庭、经济、身体、心理状态而调整选择，这些都很正常。

不要成为羊群效应里面的羊，即身边大多数人怎么做，你也跟着怎么做。比如别人选什么课，你就选什么课；别人准备什么考试，你就准备什么考试；别人说这个方向热门，你就觉得它值得追逐。很多时候跟随大部队并不一定是错的，但在没有思考的情况下跟随大部队，只是把自己的未来外包给周围人的平均判断，把自己的人生交付他人之手。

在大学的最初阶段，你至少应该做几件事。第一，了解本专业的培养方案，但不要迷信培养方案；第二，主动询问高年级同学、老师以及已经毕业的人，尽量弄清楚不同道路分别需要什么准备；第三，尽早建立自己的信息来源，而不是只依赖社群通知和辅导员转发。

大学并不会自动把人培养成他想成为的人。它只是提供了一段相对宽松的时间、一批可以利用的资源、一些可能遇见的人，以及大量**无人提醒的岔路**。能不能利用这些东西，最终取决于你自己。

1.2 选课

我们不在这里讨论一般的选课方法，选课内容，那些通识性的可以搜索微信公众号：枝上进化论 [AzureExpress](#)。下面我们重点讨论一下专业课的选课。

专业课分为专业必修课和专业选修课，对于大类的同学还有核心选修课，我们把核心选修课的问题留在第 7 节来讨论。

首先，专业必修课的选课指的是同一门课会有不同老师开设，而不同的老师由于方向，年龄，性格等各方面因素，所呈现的课堂效果也会有所区别，这种区别有时甚至可能会影响对于一个方向的喜好。所以在选课之前，向学长打听一下每个老师的课堂风格，有的老师侧重直观理解，有的老师侧重严格证明，有的老师选择照本宣科，有的老师也仅仅把教学当成是任务。选择出授课效果更好，风格更适合的老师，是对自己的负责。而由于一个老师的班上人数是有限的，总是会有人被分配到一些效果不是那么好的老师的班上，但无论课堂效果如何，同一门课程的给分依据总是不会相差太大。而我们在下一个小节要讨论的自学就可以很好的消除选课带来的差别。

对于专业选修课而言，每门课的开课老师基本上是固定的。于是选择一门课的理由就是你需不需要这门课以及这个老师讲的如何。但切记一点，你需要学习一门课 $\neq$ 你需要选这门课。比如对于大类的学生，点集拓扑并不是一门必修课，那我就建议你不要选，除非你对你的能力比较有自信，因为南开的点集拓扑的内容有些过多并且考试有相当的难度。你如果学习一些课需要点集拓扑，自学一点或者你干脆旁听就完全足够了，选这门课是纯粹给自己增加准备考试的负担，还有绩点上的负担。

我在此给出一个暴论，即你在大学期间掌握知识的多少基本上绝大多数取决于自学而不是听课。现有的授课体系只能堪堪做到覆盖基础，而远远不能满足工作与科研的要求。认真选课的目的是让自己更轻松地完成毕业要求，拿到保研名额，不陷入无意义的内卷，无意义的消耗中。但注意，我这里绝不是鼓励你全部选事少分高的水课来拿到所谓高绩点，高排名，而是说避免无意义的浪费时间与内卷。

1.3 自学

如果你真的想走上基础数学的道路，自学是你绝不可以缺少的技能¹。学校里面的课程终归是面对大部分人，并且囿于老师个人喜好，课程有限的授课时间，为了照顾绝大多数人的水平基础，能开出来的课程基本上都是只包含最基本的内容，在深度广度上都完全不足以支持你走上学术的道路。并且当你学习稍微升级一点的课程时，你会毫不惊讶地发现南开根本开不出来这些课²。

要弄明白如何自学，首先要弄明白为什么跟着一个好老师上课会比你自己啃书要更轻松。一个好老师上课肯定不是把书上的内容给你挨个读个遍，而是帮你完成筛选、组织、解释。所谓筛选，是告诉你哪些东西是主线，哪些东西只是技术细节，哪些东西现在可以先跳过，哪些东西无论如何都必须掌握。所谓组织，是把一堆看似分散的定义、定理、例子串成一条清晰的逻辑链，让你知道这门课到底在解决什么问题。所谓解释，告诉你一个概念为什么自然，一个构造为什么应该这样定义，一个定理为什么值得证明。

于是我们可以看出自学需要你明白什么东西是重要的思想纲领，什么东西是次要的技术细节，什么东西是无关紧要的废话。你打开一本书，看到的是定义、命题、证明、推论。书当然是有结构的，但这个结构未必会自动进入你的脑子里，你自己读书的时候未必可以能够领会作者的意图。薛航老师在[代数与数论暑期学校](#)表示论讲义中的前言里就讨论了这个问题：

¹实际上无论你想走什么方向，自学都是必不可少的技能。

²2026年秋季学期的课表出来之后，我发现这一现象已经到了令人发指的地步，几乎不让人指望通过学校进一步学习，开出来的几乎只有最基础的课程。

问题来了, 什么叫学懂了? 我想强调一点, 至少是我认为很重要的一点, 把定理的证明都过一遍甚至记住它并不等价于真正意义上的懂. 我认为, 学习最要紧的是建立正确的直观, 正确直观的建立是学懂的标志. 什么是正确的直观? 我觉得意思应该是说当看到某个定义某个定理的时候, 脑袋里能本能地建立下面这些东西: 最具有代表性最能反映问题本质的例子, 定义或者定理的合理性 (为什么是这样定义而不是那样定义), 定义和定理的必要性 (为什么要做这样的定义或者是为什么要做这样的定理), 这个定理为什么是对的 (有没有什么哲学上的原因能解释这个定理) 等等. 举个小例子. 我们看到定理“函数 Riemann 可积分当且仅当函数的间断点集是零测集”的时候会想到什么? 下面是几个重要的方面: (1) 零测集的意思是说集合里的点不太多, 但这个条件又比可数稍微弱一点; (2) Riemann 可积分说明函数连续性不能太差, 这个定理给出了“不能太差”的准确意义, 所以它应该是对的; (3) Riemann 函数是一个在所有有理数点处间断无理数点连续的函数, 所以它是可以积分的. 你也许还能想到别的很多东西, 但我想说的是, 相对于这几样东西, 定理本身的证明并没有那么要紧.

而如若想建立起直观, 我们需要去了解大量的例子, 再抽象的数学理论也是为了具体而服务, 再深刻的数学道理也是从简单的例子讲起. 现在的很多学生, 也包括曾经的我在内, 往往沉溺于抽象而看不起具体, 这是不对的. 当然可以喜欢最抽象最一般的数学道理, 喜欢一堆范畴论神人语言的逻辑堆砌, 但是你不能拿到一个具体例子就无从下手, 数学终究还是要解决问题, 例子是大家阅读的时候一定要积累的东西, 我们还是引用薛航老师的话:

在某种意义上, 例子就等价于直观, 直观是例子的内在本质, 例子是直观的外在表象. 在我们脑子里例子不足的时候, 建立直观是困难的. 所以我们要反复学习, 反复自己研究例子. 大家一定要亲自动手算例子, 看别人算例子那永远是别人的例子不是自己的. 这个就像看别人游泳自己永远也学不会. 只有自己下水扑腾或者喝几口水之后才可能学会游泳. 第一次学不懂算不出来不要紧, 甚至前几次学不懂算不出来也不要紧. 大家千万不要怀疑自己, 大家欠缺的仅仅是例子和经验的积累而已. 例子当然也是相对的. 今天抽象的内容明天就成了更抽象的内容的例子. 就如同矩阵可以作为线性方程组的抽象, 而矩阵本身又是更一般算子的具体例子. 有个很玄学的东西叫做数学成熟度. 我想, 脑子里的例子的丰富程度也算是数学成熟度的重要方面吧.

此外, 为了弄清楚我们为什么要学一门课, 学了这些课有什么用? 我们要面对的对象到底是什么? 需要快速抓住一门课的主干内容, 我们最后一次引用薛航老师的话:

怎么能快速的抓住一门学问的核心内容? 最简单的答案: 让懂行的人给你讲. 从别人那学习, 尤其是学习骨干内容, 是效率最高的方法. 对于这门课, 我尽我最大的努力去做那个懂行的人, 去给大家用尽可能简洁直接的方法描述表示论 (我认为) 最要紧的内容. 稍微复杂一点的答案: 把书读薄. 华罗庚告诉过我们, 读书要先读厚, 再读薄. 我想, 读厚的过程是算例子建立直观的过程, 读薄的过程是抓住主干内容的过程. 我们前面说的都是把书读厚的过程. 怎么把书读薄? 一个简单的练习是, 给你一个小时的时间, 讲讲一门学问最主要的内容. 最重要的研究对象是什么? 最要紧最本质的定理是什么? 这个定理为什么是对的 (注意这不是证明而是哲学)? 这时候我们就要去粗取精, 直捣黄龙, 一切问题只为核心服务.

从上面这些内容看来, 很大程度上决定你自学体验的是学习材料的选择. 一本好书, 一个好的讲义, 一段好的视频都可以在极大程度上提升你的学习体验. 至于如何找好书, 如何分别好坏, 这就需要你先在前人的建议之下学习数学分析与高等代数, 在学习这两门基础的时候慢慢形成自己的判断准则与信息渠道来源. 自学不是闭门造

车，有些人把自学理解为一个人孤独地啃书，这是不准确的。自学的核心是主动安排自己的学习，而不是拒绝外界帮助。你完全可以旁听课程，可以找学长学姐问教材，可以和同学讨论习题，可以向老师请教问题，可以看公开课，可以参考别人的讲义。只要学习的方向、节奏和反馈主要由你自己掌握，这就是自学。相反，即使你每天坐在教室里听课，如果只是被动接受安排，从来不主动补足和扩展，那也不能算真正学习。

自学也不能变成盲目堆书。很多人喜欢收集书单，仿佛书单越长，自己离学术就越近。但书单不会自动变成知识，下载在电脑里的 PDF 也不会自动进入大脑。相比于同时打开十本书，不如认真读完一本合适的书。“开始”这个行为是最难的，一旦你开始读书，我想后面的困难总是可以克服的。

最后需要明白，学习时的痛苦是正常的。读不懂、做不出、忘得快、进度慢，这些都不是你不适合学数学的充分理由，而是学习数学的常态。只要你真的热爱，总会守得云开见月明。

1.4 学会逃课

这里的“逃课”当然不是指睡到中午³、沉迷游戏⁴、把所有责任推给所谓“大学自由”⁵。如果你逃课之后只是把原本上课的时间换成短视频、游戏和无意义的消耗，那并不是我们所倡导的逃课。我们这里说的逃课，是指在你已经判断一门课的课堂收益极低，而你又能够通过自学、阅读教材、完成作业等方式更有效地掌握内容时，主动把时间从课堂中拿回来。

很多人从中学一路走来，会天然形成一种观念：只要是课，就应该去上；只要坐在教室里，就是在学习；只要没有逃课，就算对得起自己。但大学里面，这种观念未必正确。大学课程的质量差异极大，有的课确实值得认真听，老师能够帮你理清主线、补充直观、指出难点、展示思维过程；但也有一些课只是照着 PPT 念，或者把教材上的内容机械地搬运一遍，甚至连基本的逻辑线索都讲不清楚。对于后一类课，坐在教室里只是浪费时间。

低质量的课堂不仅浪费课上的时间，还会消耗你的注意力和学习热情。你在昏昏沉沉的讲授中坐完整节课，表面上完成了一次学习任务，实际上既没有真正理解内容，也没有留下足够的精力去自学。久而久之，你会误以为自己已经很努力，因为你每天都在上课；但等到真正需要使用这些知识时，才发现脑子里只有一些模糊的名词和残缺的印象。

所以，一个大学生必须学会判断一门课值不值得听。判断标准很简单：这门课的课堂是否提供了你自己读书很难获得的东西？比如老师是否讲清楚了概念背后的动机，是否能把零散知识组织成整体，是否补充了重要例子，是否指出了常见误区，是否展示了处理问题的方式。如果有，那么这门课值得认真听。如果没有，只是把教材内容换一种方式念出来，那么你就应该认真考虑：同样的时间，自己看书、做题、整理笔记，会不会更有效？一般而言，三节课就足以判断出来是否值得上。

³睡到中午是没错的，事实上我大三就基本上每天十一点起床。

⁴打游戏也是没错的，事实上我基本上天天打游戏。

⁵只需要记住自己做的选择要自己承担责任。

同时，也要尊重现实规则。有些课有严格考勤，有些老师会把出勤纳入成绩，有些课程的平时作业、课堂测验、课堂展示会直接影响最终成绩。在这种情况下，你不能只凭一句“这课没用”就完全不管后果。你可以选择不去听，但你也必须承担因此带来的风险。你可以不喜欢一门课，可以认为它低效，但请为了自己负责，至少为了绩点负责。还有一种课即使讲得一般，也未必适合完全逃掉。比如一些给分不透明、信息主要在课堂释放、作业要求经常临时变化的课，完全不去可能会带来额外麻烦。对于这种课，更现实的做法是降低投入而不是彻底消失：该知道的通知要知道，该交的作业要交，该准备的考试要准备，必要时去听关键几节课。

尤其对于想走基础数学的同学，必须尽早摆脱一种错误的道德感：仿佛只要没去上课，自己就亏欠了什么。你当然应该尊重好老师，珍惜真正有价值的课堂；但你没有义务把所有低效安排都当成神圣任务完成。你的目标不是成为一个出勤率完美的人，而是成为一个真正学到东西的人。

不要走入低效而正当的忙碌。每天准时上课、按时坐在教室里，最后却没有真正掌握任何东西，这样的努力只是形式上的努力。相比之下，真正的学习有时反而需要一点逃课的叛逆。

1.5 考前冲刺

一些课程并没有什么听课的价值，有时候甚至没有什么学习的价值，它的存在只是为了变成几个学分让你毕业。对于这种课程往往不会在整个学期里面为期均匀地分配时间，而会留到期末考试前的一两周集中冲刺⁶。此外，天然的惰性也会让你会遇到这种情况⁷：[考试周破防](#)。

考前冲刺的窍门就是力大砖飞，首先你需要做的是把这学期学过的东西系统地梳理一遍，如果你有笔记那最好，或者能借到别人的笔记也行，如果没有笔记也借不到笔记的话就只能啃参考教材了，如果这门课甚至都没有一个参考教材，那你最好祈祷有人记了笔记并且你可以借到。

当你完成了对于知识的系统梳理之后，你要开始做题，如果有作业的话把作业全部重做一遍，书上对应的例题要弄清楚到底怎么做，而不是仅仅记住例题的写法，稍微换个形式就不认识了。此外要寻找一些适合的习题，比如书后那些习题，比如往年真题。在这一阶段你应该掌握基本题型的解法，做到看到一道题立刻能明白怎么做，大学考试里面的题目一般题型较为固定，不会像高中那样换着法子考你。

等你梳理完一遍，做完一遍题之后，你会发现可能还是有部分题目不会，有部分知识不熟练，最后的时间里面对这一部分进行加强，再做一遍题，这个时候你应该能弄清楚大部分题应该怎么做，要做到往年题目都烂熟于心，记住老师出题是有惯性的，但也不要完全迷信往年真题，万一老师突然改换风格你也无处诉苦。

1.6 关于绩点

考！考！考！老师的法宝！

分！分！分！学生的命根！

⁶这不代表平时一点不学，而是平时每周跟上进度，做做作业就足够，不额外付出时间。

⁷我希望最好不要遇到，虽然我经常遇到。如果真的遇到了，希望你关关难过关关过。

十几年的教育已经将优绩主义深刻地印在我们的思维里面，一方面我不希望大家被它荼毒，但另一方面我们确实要生活这样的评价体系里面，在生产力没有发展到足以对每个人因材施教之前，我们都难以摆脱这种“方便”的评价体系。所以我们既不能完全被绩点牵着鼻子走，也不能完全不顾绩点放飞自我。

一方面，你的奖学金评选，保研资格等都需要绩点，并且和绩点几乎可以说是强相关关系。在保研夏令营的初审中，绩点排名也是一个重要的参考。所以无论如何，绩点都不可谓不重要。

另一方面，等你保研夏令营过了初审，绩点就几乎成为一个无效的东西。面试老师不会因为你绩点超高就对你高看一眼，录取与否还是要看你面试与笔试的表现。于是你会发现绩点在扮演完了“敲门砖”这个作用后地位就一落千丈，再不能起到任何作用。

绩点重要之处在于它是敲门砖，但绩点不重要之处也因为它只是一块敲门砖，并且是敲开门之后就无人再在意的敲门砖。因此，对绩点最合理的态度是工具化地使用它。

尤其在数学里面，绩点和能力之间的关系并没有很多人想象得那么牢固。有的人可以通过高超的应试技巧拿到很高的课程成绩；但这并不意味着他真的具备继续深入学习的能力。有的人可能在某些课程考试中没有拿到特别漂亮的分数，但他在自学、思考、阅读、解决问题上有更强的后劲。当然这不是给低绩点找借口，只是提醒你不要把绩点神化成某种绝对的指标。

比较健康的做法是，先弄清楚你所在道路对绩点的最低要求。如果你想保研，那么排名就是硬指标，你至少要保证自己稳定处于有资格竞争的位置；如果你想留学，那么 GPA 也是申请材料的重要部分，不能完全放掉；如果你想就业，那么绩点可能没有实习和技能那么重要，但过低的绩点仍然会带来解释成本；如果你只是想顺利毕业，那么要求又完全不同。不同目标对应不同的绩点策略，不存在一个对所有人都适用的标准答案。

对于想走基础数学、尤其是想保研继续读研的人来说，比较现实的策略是：绩点要维持在安全区间，但不要为了冲击每一门课的极限分数而牺牲主线学习。所谓安全区间，就是它足以让你通过大多数初审，足以让你获得本校保研资格，足以让你在简历上不显得难看。进入安全区间以后，多出来的几分当然不是坏事，但它的边际收益会迅速下降。你要认真计算，自己为了这几分付出的时间，是否本可以用来学一门真正重要的课，读一本真正有价值的书。

此外要注意绩点洁癖。有些人无法接受任何不完美的成绩。少拿一分就痛苦，排名下降一点就崩溃。绩点当然重要，但它仅仅只是绩点而已，绩点无法决定你的人生。我很喜欢一句歌词：“也像我很纠结的公事，此际回头看，原来并没有事。”

更何况，绩点本身也并不总是公平。有的老师给分宽，有的老师给分严；有的课程考试简单，有的课程考试阴间；有的人选到了好老师，有的人被分到了差班；有的课程题目重复率极高，有的课程完全不按常理出牌。有人 90 分拿到了满绩，有人 89 分就只有 3.7，这两个人的水平真的相差很多吗？有人 100 分拿到了满绩，有人 90 分也是满绩，这两个人的水平就一定一样吗？绩点是一个有很多缺陷的评价指标，请不要将其奉为圭臬。

1.7 学会生活

无论如何，大学生活绝不应该成为负担。学习、绩点、科研、考试、来自同龄人的压力，对未来的迷茫等都是生活的一部分。你会焦虑，会悲伤，会有压力，会怀疑学习的意义，会怀疑人生的意义。但请记住，大学生活无论如何都不应该成为你的负担。学习学不过来就少学甚至不学，感觉过于焦虑就少看那些信息，找老师或同学聊天来消解这些内耗。感觉实在坚持不下去当然也可以尝试休学，给自己一段 gap 的时间，这都是十分正常的。

人生的容错率总是很大，不会因为你做错一道题、一件事就满盘皆输。一门课没学好，只是一门课没学好；一次考试失利，只是一次考试失利。它们当然可能带来一些后果，但后果通常可以被处理、被弥补。

你也许会看到有人绩点很高，有人竞赛很强，有人很早进组，有人英语很好，有人已经在准备留学，有人实习经历丰富，有人社交能力极强，有人看起来永远精力充沛。但是你不需要和任何人比较，但行好事，莫问前程，至于对你而言什么是好事，这由你来给出定义。

要认识到放松并不是一种奖励，而是一种再正常不过的行为。很多人会把休息理解成一种偷懒，仿佛只有在完成足够多的任务之后，自己才配休息。有些人觉得自己今天打了几个小时游戏，那就要熬夜疯狂学习把这几个小时补回来，仿佛娱乐放松是一种向未来的贷款。这是不对的，这绝对是不对的！真正可持续的学习，一定要允许自己睡觉、散步、运动、看书、聊天、看电影、打游戏、发呆。只要它没有吞噬你的生活，**就没有必要为正常的娱乐感到负罪。**

不要把“痛苦”误认为“努力”。有些人会下意识地觉得，自己越焦虑、越疲惫、越崩溃，就说明自己越认真。但学习不是比谁更痛苦，人生也不是比谁更能忍。有效的努力应该让你逐渐接近目标，而不是只是不断消耗自己。如果一种努力长期只带来绝望、麻木和自我厌恶，那它不是努力，而是错误。

要记住，人生不是只有一条标准路线。四年毕业当然很好，保研成功当然很好，绩点漂亮当然很好，按部就班当然很好，但这些都不是唯一合法的人生。有人需要换专业，有人需要延毕，有人需要休学，有人需要重新选择方向，有人需要先工作再读书，有人需要绕很远的路才知道自己真正想要什么。绕路不等于失败，慢一点不等于落后。不要让所谓的“正常”，他人口中的“成功”裹挟了你的真正想法。

在大学里，学习很重要，前途很重要，竞争也确实存在。但再重要的事情，也不应该重要到让你完全失去生活。你不是绩点的容器，不是简历的载体，不是培养方案上的一个编号。你首先是一个具体的人，有身体，有情绪，有欲望，也应该有快乐。不要等到一切尘埃落定之后才允许自己生活，因为很多生活本来就只能发生在当下。

进入大学之后，最重要的不是学习，而是从十几年的寒窗苦读中脱离出来，真正学会生活，作为一个活生生的人而生活。

2 大类？伯苓？还是强基？

不以物喜，不以己悲。

——范仲淹《岳阳楼记》

对于有志于基础数学的同学，如果你有能力进入拔尖，我们强烈推荐进入拔尖班（即伯苓拔尖班，又名省身班）。由于一些政策上的问题，大类是没有所谓基础数学这个专业的，所以大类同学无可避免地需要接受“核心选修课”的洗礼，而核心选修课里面几乎没有基础数学相关课程，这意味着你将要花费巨量的时间在这些课程上面，这对有志于基础数学的同学无疑是巨大的打击与沉重的负担。

如若你无法进入伯苓班，那也不必心伤，已经有多位前人为你们摸清了道路，关于核心选修的内容请具体参考第 7 节。

如非必要，尽量别通过动态进出进强基，因为进入强基之后就无法再实现外校的保研，进入再退出强基不仅会失去外校保研机会，还会失去本校保研机会。如果你已经拥有保研名额，那几乎是一定可以留在本校读研的。我们推荐满足以下情况的同学通过动态进出考试进入强基班：

- 想读研究生，但绩点不够保研，并且强烈拒绝考研。（需要注意动态进出考试一共有三次，成绩是累加的，分别在大二上学期开学前，大二下学期开学前与大三上学期开学前。如果你第一次没考，只考后面两次是几乎不可能考入的。第一次是最关键的，往年拔尖班都会有一半左右的人被清退，需要引起重视加以特别准备，而且第一次考好了后面就不用担心被清出去了，大二只要认真学后面两次不缺考即可。）
- 南开本校（包括数院，组合数学中心和陈所）有你非常感兴趣的老师，并且你和老师之间已经洽谈过，实现了双向选择。（我们建议至少在大三之前不要完全确定你的方向，你很容易在学习的东西很少的时候受各方面影响误以为自己很喜欢某些方向，但实际学习起来却痛苦不堪。）

我们也建议同学们，要综合了解自己的兴趣，多找老师（包括数院，组合数学中心和陈所）聊天扩宽知识面，不要过早把自己限制在某个方向当中。对于想要留在南开保研的同学们（包括几乎所有的强基同学），如果你在学过足够的内容、和足够多的老师聊过天了解他们方向具体要研究什么之后，真的已经确定自己的研究方向，请尽早与老师联系，深入交谈一下以了解你具体的学习规划与科研前景。

总体来说，这三个班型留给人操作的余地还是比较大的，你可以转来转去。有人大二从伯苓转到大类（**务必注意伯苓/强基和大类的培养计划是不通的，如果你之前都在伯苓/强基并且没有修过大类的核心选修课，那么你务必要思考剩下的时间是否足够你完成培养计划**），排名也许能往前进，或许能保研到更好的学校，有人绩点不行，但是抓住最后一次动态进出从大类考进强基，主打一个一定能保本校。当然已经在强基班的同学是无法操作的，因为强基转出会失去一切国内保研资格，务必慎重。

无论你在大类，伯苓还是强基，走上基础数学这个道路都无疑是具有十分的挑战的，上面所述的可能存在的困难，在学习数学本身的困难面前可能都不值一提。如果

你现在已经无法改变你所在的地方，就心平气和地接受，然后把更多的精力用在数学本身上面，不要让自己因为身处的位置而不断地内耗。

3 基础数学劝退

你要保守你心，胜过保守一切。

——《圣经·旧约·箴言》

如果说爬上数学这座山有很多条路的话，基础数学是其中最迷人但又最危险的那一条。如果你没有做好粉身碎骨的准备，趁早绕道是最好的选择。我在此罗列出诸多理由，某一条说动了你，请不要为你的离开而犹豫。离开并不是逃避与失败，相反，所有人都会笑着和你说：“这是好事啊！”

- 首先请弄清楚你现阶段对数学的兴趣究竟是能把高中那些题目做出来的兴奋感，还是你真的对数学本身感兴趣。就算你学过数学竞赛也是同理，我见过太多的竞赛生从一开始说要做基础数学到最后离开基础数学的过程，他们当中不乏省一，银牌，金牌，乃至集训队。无论如何，请不要把那些已经高度成熟的做题技巧等同于数学研究，天赋或许很重要，但是我想对大部分人来说，对数学本身的兴趣和能够坐住冷板凳的心态是更加重要的。
- 你会承受巨大的朋辈压力，乃至小辈压力。当你辛辛苦苦学了一两年，发现同龄人在讨论的问题你看都看不懂⁸，你现在学习的东西是他们早就了然于胸的基础，然后突然发现一些刚进入大学的学弟学妹，乃至高中生，甚至初中生都拥有着和你一样甚至超过你的数学水平，你是否还能够保持你的初心继续学下去？虽然我们一直在说不要和别人比要和自己比，但是当你看到这些实实在在发生在眼前，你的内心是否还能足够平静？当你看到刚进入大学经常向你问问题的学弟学妹，经过一两年的学习就已经追上你甚至超越你，你是否还能有信心坚持走下去？
- 学校直接摆在你面前的东西是远远不够的。你需要拥有足够的主观能动性去自学，去主动搜索资料，去和别人讨论了解各种问题，去学习那些课堂上从来不会提及的东西。如果单单跟着学校按部就班的走，那你学习得的远远不足以支持你在基础数学的路上走下去。你需要思考自己是否有足够的动力和足够的行动力去执行这些事情，而不是顺从高中的惯性把自己交付给学校安排。这一点面向所有人，不仅仅是想走基础数学的同学。
- 学习数学的正反馈周期极长⁹。你需要评估自己是否能够在长期没有正反馈甚至会有负反馈的情况下继续坚持下去。
- 学习曲线极度陡峭。如果你仅仅满足于期末考试拿到一个不错的成绩，那确实是努努力就能够到的。但是如果你想学习到的是真正足以支撑你走下去的内容，你需要付出巨大的努力，面对一些困难的地方往往一天下来也看不了两三百页¹⁰。你需要有足够强的意志力来度过这些熬人的时光。

以上都是一些主观层面的因素，下面你需要考虑的是现实层面的因素：

⁸当然其中会存在名词党的情况，但事实是确实会有一帮子真正聪明且足够努力的人。

⁹周期长所带来的数值自然也是极高的，不过很多时候只能体现在精神层面而非物质层面。

¹⁰但你啃下来之后的正反馈是极大的。

- 基础数学有着极高的淘汰率。从本科到博士，再到博后，教职，每一个阶段都会筛选掉一批人，其中不乏极度聪明的人。
- 经济回报低。如果你选择了基础数学，那你在很长很长一段时间内是无法获得稳定的经济来源的。你可能会看着当年很多同学因为选了热门专业已经买房买车，而你还在为下个月的房租发愁。如果没有殷实的家境作为后盾，因经济压力而放弃科研的概率很大。
- 非升即走的绞肉机与兴趣变成 KPI 之后的热情消退。现在学界广泛实行 Tenure-track 制度，如果几年内发不出足够的文章就要卷铺盖走人，毫无安全感。当爱好变成需要通过 KPI (发 Paper) 来考核的职业时，你的热情也许很快就会被消磨殆尽。
- 公众的刻板误解与无用之用的社会嘲讽。想象一下以下的场景：过年回家，亲戚会让你给上小学的侄子辅导算术，并且惊讶于“你一个数学博士怎么算账还没有卖菜的大妈快”。在这个极度实用主义的社会里，你很难向别人解释你做的东西到底有什么用。也许你很难得到亲人和朋友的支持。
- 低垂的果实被 AI 收割。现在 AI 已经快速发展，也许在未来十年间就能摘走绝大多数低垂的果实，这些果实可能原本是可以被你解决并且足够支持你拿到教职的。但是你需要考虑如果现在进入数学界，等你能开始产出内容的时候至少已经五到六年过去了，是否还有什么容易的问题留给你？很可能剩下的都是硬骨头。
- 沉没成本巨大。当你真的做不下去想转行的时候，你会发现你已经在数学上花费了太多的时间，想从头学起其他的东西时已经错过了黄金年龄。

对于那些刚刚进入大学的读者，我相信上面的很多条并不足以说服你们，比如难度，比如压力，比如反馈。等你大一结束，乃至大二结束，请再回来看看，相信你可以体会到一些。如果此刻你们还是真的想在基础数学的路上走下去，请移步第 8.1 节，这是另一位学长的肺腑之言。

写了这么多，我并不是在说基础数学的坏话，并不是在阻止你们进入这个世界。相反，我是多么地喜欢她，多么地希望更多的人能够欣赏到她的魅力。但是这终究不适合所有人，以上的劝退理由或多或少都是我亲身或者身边有人亲身经历过的，写在这里是希望大家在迈入这条道路的时候能够早一步预见自己可能会遇见什么。

最后，我想说为数学做贡献未必需要你成为什么学术上特别厉害的人。如果你真的喜欢数学，但是确实因为种种原因退出了数学的研究，那还有很多很多种方式可以为数学做出贡献。

例如 James Harris Simons，在四十多岁时选择离开学术界，创立了量化对冲基金。他在华尔街取得了空前的商业成功后，成立了西蒙斯基金会。他用巨额的财富反哺基础科学，每年投入数亿美元资助无数的数学家、数学研究所以及基础科学项目。他对数学的贡献又岂是几个菲尔茨奖可以衡量的。

再比如创立 Stacks Project 的 Aise Johan de Jong，有人评价他做这个项目无异于学术自杀，但是 Stacks Project 已经是一个超过 7000 页、包含数万个严谨证明的庞

大知识库。全世界几乎每一个做代数几何的数学家，遇到基础问题时，第一反应都是去查一下 Stacks Project。这也是一种极致的浪漫，是属于数学信徒的最高尚的献身。历史或许会忘记许多顶刊论文的名字，但现代代数几何的历史，绝对无法绕过 Stacks Project。

再比如 3Blue1Brown 的创作者 Grant Sanderson 那样，用直观优雅的动画和语言，向数以百万计的大众解释数学的美。你也许没有发现新的定理，但你能在无数年轻的心中种下热爱数学的种子。

你可以致力于数学工具与基础设施的开发。现代数学的推进离不开计算机的辅助。无论是参与开发像 Lean 这样的交互式定理证明器，还是维护 LaTeX 社区，亦或是编写开源的数学软件工具包，你都是在为全世界的数学家打造更锋利的武器。

你也可以走上三尺讲台，成为一名基础教育工作者。去中学里做一名懂得真正数学美的老师，去发现，引导并保护下一个伟大的数学家，帮助他们在最关键的启蒙岁月里少走弯路，这同样是一项极其伟大的事业。

数学是一片极其广袤的海洋，前沿的学术研究只是其中最深邃的海沟，它固然迷人，但也确实只适合一小部分人去探索。我希望每一个读到这里的你，都能在真正了解了它的重量后，再做出属于自己的选择。

愿你们都能找到属于自己的，与数学共处的最好方式。祝好。

4 AI, 笔记与资源库

人猿相揖别，只几个石头磨过，小儿时节。

——毛泽东《贺新郎·读史》

在过去很长一段日子里，学习的核心问题是如何获得知识。而在今天，知识本身已经以前所未有的密度堆积在我们面前。教材、讲义、论文、视频、博客、问答网站、AI 工具，几乎所有东西都可以在几秒钟之内被搜索出来。于是新的问题不再只是“我能不能找到资料”，而是“我能不能找到可靠的资料”“我能不能整理这些资料”“我能不能真正把它们变成自己的东西”。

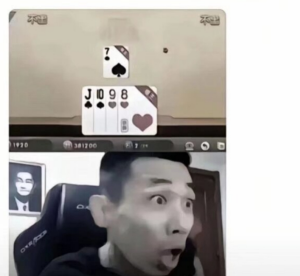
4.1 AI 时代

AI 现在愈发强大，本科阶段中数学的概念性问题和经典结论可以说已经掌握地十分熟练，所以在学习中有 AI 辅助会极大的提升你的学习效率。例如学习定积分，你可以向 ai 提问：“我是一个数学分析的初学者，请你向我详细介绍定积分的概念，介绍定积分发展的历史，告诉我定积分最早是用来干什么的，为什么要发明定积分，关于定积分我需要掌握哪些内容？”这样你可以快速地把握住一门学科的主干，可以防止在技术细节里面迷失。

读教科书的时候也可以把你需要读的几页直接发给 AI，让后让他逐条解释内容，这会极大地提升你的阅读和理解速度。但是缺点是可能会降低一些你本身的思维量，所以即使 AI 真的很好用，也不能放弃思考。要记住，人是一根会思考的芦苇。

但要注意几个原则。第一个原则是：凡是重要的东西，都必须回到可靠来源。尤其是涉及课程作业、论文写作、专业知识时，不要把 AI 输出当作最终依据。千万不能，万万不能完全相信 AI。尤其是在引用文献上，AI 的幻觉在此刻会达到巅峰，经常会出现引用了一堆虚空的书籍虚空的章节虚空的定理然后信誓旦旦告诉你这是对的。使用 AI，但一定要学会质疑 AI。

上一个相信人工智能的人



使用 AI 的第二个原则是多问为什么？相比于传统的网络搜索，AI 可以一层一层地往下给你解释，把一个概念的来龙去脉弄明白在过去是比较困难的，但在今天，有 AI 辅助，会变得愈发简单。

好了，现在你大概明白我们要如何使用 AI，那用哪个 AI 呢？我的回答是至少是 Gemini-3.1-pro, Chatgpt-5.6 及以上。（我用最直白最不绕弯子的办法告诉你）千万

不要使用豆包，偶尔可以尝试 Deepseek¹¹。

4.2 L^AT_EX 与 Markdown

笔记当然可以写在纸上，但是无论如何，掌握 LaTeX 语法和会使用基本的 Markdown 是重要的。

Markdown 的优点是轻量、快速、方便整理。它非常适合日常记录，比如课堂笔记、读书摘录、任务清单、知识索引、临时想法。你只需要记住标题、列表、加粗、引用、代码块、链接这几个基本语法，就已经足够应付大部分场景。它的核心价值不是排版漂亮，而是让你用最小的成本把想法记录下来。学会 markdown 基本语法，然后你会发现 tex 的数学语法和 markdown 的数学语法没有什么本质不同，会一个就会两个。而由于如今 ai 回答内容的格式都是 markdown，所以如果你学会了 markdown，就可以快速利用 ai 回答的语料组织自己的知识库。

L^AT_EX 的优点是严谨、稳定、适合数学与正式文档。只要涉及大量公式、定理、证明、参考文献、交叉引用，L^AT_EX 的优势就非常明显。数学专业的同学尤其应该尽早熟悉 L^AT_EX，因为你迟早会用它写论文、讲义、报告和简历。

关于 Markdown 笔记，可以使用 Notion 或者 Obsidian，关于二者的优劣网上吵得是不可开交，但你要记住，最重要的是“开始写”，而不是选择到底用哪个写。

关于 L^AT_EX，如果你喜欢在线，那就可以使用 Overleaf¹²。如果你喜欢本地运行的话，那有很多选择，在网络上搜索 latex 教程可以找到一堆，选择一个你喜欢的即可。

4.3 学会搜索

作为一个合格的生活在二十一世纪二十年之后的大学生，在网络上找到你需要的一切内容是基本中的基本。尝试自己在网络上搜索教程、检索资源、完成后面的任务。检索很重要，辨别也很重要，要尝试辨别什么样的内容是靠谱的，什么样的内容是不靠谱的，寻找靠谱的教程，以防给电脑上下载一堆病毒或者把电脑环境搞得乱七八糟。

在搜索数学内容时，中英文都要尝试。很多数学术语如果只会中文名，会极大限制你的检索范围；如果能知道它的英文名，就可以找到讲义、教材、论文、问答和课程主页。推荐大家不要使用国内的一些搜索引擎，比如前几页都是广告那种，可以尝试必应国际版和谷歌的搜索引擎，不过可能需要科学上网，平时用必应搜索可能会比较好，这个是纯粹的个人意见。¹³

搜索之后还要判断资料是否可靠。一般而言，教材、课程主页、大学讲义、正式文档、论文和权威手册，比随手复制粘贴的博客更可靠；有完整定义、证明、例子和参考文献的资料，比只给结论的资料更可靠。

学会搜索之后，你会发现很多问题并不需要立刻问别人。你完全可以先自己查十

¹¹本文写作时间为 2026 年 7 月，如果你所处的时代有更强的版本，请使用它。

¹²Overleaf 官方网站的免费用户对于编译时间有限制，你可以使用中国科技云部署的 Overleaf，那个是免费的，并且没有编译时长的限制。

¹³另一笔者注：如果你在查找某书籍或文献，谷歌搜索引擎一般比较好用。如果你想查你国内相关的东西，百度可能更好用。

分钟，再带着更具体的问题去问老师、同学或者 AI。这样问出来的问题质量会高很多，别人也更愿意回答你。

4.4 如何享受地阅读 PDF

大学之后，你会遇到大量 PDF：教材、讲义、论文、习题集、课程资料、说明文档。享受地阅读 PDF 首先需要建立一个稳定的文件管理方式。不要把所有文件都堆在桌面或者下载文件夹里。你至少应该按照课程、主题或者年份建立文件夹，并且给文件改一个能看懂的名字。比如不要保留一堆 `download.pdf`、`123.pdf`、`newfile.pdf`，而应该改成类似 `Algebra_Hungerford.pdf`、`Topology_LectureNotes.pdf` 这样的名字。文件名清楚就是在降低未来的搜索成本。我这里推荐大家使用开源软件 Zotero 来阅读，它本身也可以进行文献管理，并且在你 latex 中写参考文献的时候可以很轻松导出 biblatex 的代码。

不要迷信囤积资料。很多人电脑里有几百本教材、几千页讲义，但真正读过的没有几本。资料太多有时候不是优势，反而会制造焦虑。真正有价值的应该是少而精的。

4.5 资源库

本节仅仅作作为一个入口，对一些大家应当了解的事情做一个简介，详细的使用方法已经在网上星罗棋布，大家请自行探索。南开大学本身购买了一些在线资源，但实测下来可能不是很好用，具体请进入南开大学图书馆的官网了解。下面我们推荐一些具有开源精神的网站：

- Z-library：全球最大的电子书免费下载网站。请记住，免费用户是每天十本书，完全足够你下载，需要付费的都是盗版网站。正版网站需要科学上网的手段进入，也许有一些国内镜像可以直连。由于网站经常会更换网址防止 gank，请锻炼你的搜索能力自行找到网站，或者问学长学姐询问，后面所提到的网站都同理。
- 类似 Zlib 的还有 `anna's archive`、`Libgen`、`Bookzz` 等网站，道理类似，大家自行了解。
- SciHub：开源精神的集大成者，当你发现你要下载的论文需要付费阅读时，请来到这里，这也是完全免费的网站，需要付费的都是盗版。

此外，对于学习数学的你，需要善用：

- Math Stack Exchange 与 Math Overflow：分别简称为 MSE 与 MO，全球最大的数学论坛，相比于偏向高中竞赛的 aops，这两个网站是真正面对数学工作者的。
- arXiv：论文预印本网站，不再过多介绍，大家自行了解。

或者你还可以在 YouTube 上关注 `abel prize` 或某些学校的官网，前者提供了对数学成熟度极其有益的访谈，在后者你可能找到一些高质量的公开课。

此外还有大量的个人主页和神奇小网站供大家探索，但我们不会在此一一列出，当你需要搜索一些东西的时候，会自然地发现这些网站。

5 一切的根基

数学分析与高等代数是现代数学的基础，如果你想要从事基础数学的研究，学好这两门课是重要且必要的。但需要明白，我们这里所说的学好并不等同于要大量地刷题，掌握各种奇技淫巧，能够在各种竞赛中拿奖拿到手软。这些仍然是高考思维。真正重要的是弄清楚这两门课的核心问题有哪些，处理这些问题的思想是什么，标准的技术是什么。只有抓住这些主干，你才能拨开纷乱的外衣，直指问题的本质。

5.1 数学分析

建议教材：南开大学《数学分析》

5.1.1 数学分析 1

数分 1 的内容为教材的 1-7 章，包括

- 预备知识.
- 极限.
- 连续函数.
- 导数.
- 导数的应用.
- 实数理论及其应用.
- 不定积分.

数学分析 1 的核心任务，是学会用严格的语言研究极限过程，并在此基础上理解连续、导数与积分。初学时会见很多新的符号和量词，容易觉得数学分析只是在用复杂的语言描述一些显然的事实。但一些反例会教会你这些复杂的表述是必要的。

第 1 章主要是预备知识。实数、集合、映射以及初等函数中的大部分内容在中学阶段已经接触过，但这里的要求与中学有所不同。你不应当只满足于会画函数图像或者会代入计算，而应当逐渐熟悉定义域、值域、单射、满射、复合映射、反函数等基本语言。以后数学中的许多对象都以集合和映射为基础，因此这一章实际上是在帮助你完成从计算语言到结构语言的过渡。

第 2 章的极限是整个数学分析的语言基础。你首先需要熟悉数列极限的定义，尤其要弄清楚定义中的量词顺序。所谓数列 $\{x_n\}$ 收敛到 a ，就是说对于任意给定的误差 $\varepsilon > 0$ ，总能够找到一个位置 N ，使得所有 $n > N$ 的项都落在 a 的 ε 邻域中。

这里真正重要的不是把定义逐字背下来，而是理解“任意精度”和“最终成立”这两个观念。我们先任意规定一个精度，再说明从某一项开始，后面的所有项都满足这个精度要求。允许 N 依赖于 ε ，但一旦 N 选定，就必须同时控制所有更靠后的项。

学习极限时，应当训练自己在三种语言之间来回转换：直观语言、量词语言和不等式估计。直观告诉你结论为什么可能成立，定义告诉你究竟需要证明什么，而估计则帮助你根据给定的 ε 找到合适的 N 或者 δ 。这三者缺一不可。

极限的运算法则当然需要掌握，但不要只把它们看作简化计算的公式。每一条运算法则都在说明：哪些极限过程可以进行代数运算，以及进行这些运算需要哪些条件。例如，商的极限定理要求分母的极限不为零，这不是多余的限制，而是在保证分母最终不会任意接近零。

数列敛散性的判别定理中，单调有界数列必定收敛并不是纯粹的代数事实，它依赖于实数系的完备性。教材会先使用这一结论，到第 6 章再解释它为什么成立。

函数极限是数列极限的推广。我们说当 x 趋于 x_0 时， $f(x)$ 趋于 A ，意思是只要 x 与 x_0 足够接近，函数值 $f(x)$ 就会与 A 足够接近。用 ε - δ 语言表示，就是对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ ，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

这里的 $0 < |x - x_0|$ 表明函数在 x_0 处的极限只研究点附近的行为，并不关心函数在 x_0 处是否有定义，也不关心它在该点取什么值。这个思想必须尽早弄清楚，否则以后很容易混淆极限与连续。

函数极限存在的各种判别方法，归根到底都是在寻找某种统一控制。Heine 定理把函数极限转化为数列极限：函数在一点处具有极限，当且仅当沿着任意趋于该点的数列，函数值都趋于同一个极限。这个定理十分重要，它把连续变量的问题转化成离散的数列问题，也为构造函数极限不存在的反例提供了标准方法。

无穷大量与无穷小量不应当被理解成某种神秘的“无限大的数”或者“无限小的数”。在经典数学分析中，它们仍然是由极限描述的变量。所谓无穷小量，是极限为零的变量；所谓无穷大量，是其绝对值最终超过任意给定正数的变量。学习这一部分时，应当熟悉等价无穷小、同阶无穷小等基本概念，但不要把无穷小代换当成纯粹的计算口诀，必须明确代换在哪个极限过程中成立。

第 3 章的连续性是函数极限最直接的应用。函数 f 在 x_0 处连续，就是当 $x \rightarrow x_0$ 时有 $f(x) \rightarrow f(x_0)$ 。它的直观意思是：当 x 充分接近 x_0 时， $f(x)$ 就充分接近 $f(x_0)$ 。

初学连续性时，应当同时掌握三种观点。第一种是 ε - δ 定义；第二种是保持数列极限，即若 $x_n \rightarrow x_0$ ，则 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ；第三种是几何上的邻近点被映射到邻近点。以后学习点集拓扑时，连续性还会被表述成开集的原像是开集。这些不是不同的概念，而是同一个现象的不同表达。

连续函数的四则运算、复合与反函数等性质需要熟悉。初等函数的连续性则告诉我们，通常使用的多项式、指数函数、对数函数和三角函数等都具有良好的连续性质。因此在具体计算中，可以通过连续性直接把极限运算代入函数内部。但应当知道，所谓“直接代入”并不是一条无需理由的规则，而是连续性的结果。

闭区间上连续函数的性质是这一章的重点。连续函数在闭区间上有界并能取得最大值和最小值；若端点函数值异号，则在中间至少存在一个零点；连续函数还会取得最大值与最小值之间的每一个值。这些结论把局部的连续性转化成整体的存在性，是分析中最基本的思想之一。

不过，在这一阶段这些定理背后的实数完备性尚未完全展开。教材会在第 6 章利用实数理论重新证明其中一些结论。学习时可以先掌握定理的意义和用法，等到第 6 章再回过头来理解它们为什么成立。

第 4 章研究导数。导数首先描述函数在一点附近的瞬时变化率，也描述函数图像在该点切线的斜率。但从更本质的角度看，导数给出了函数在一点附近最好的线性近

似：

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

这比“导数是切线斜率”更接近导数在现代数学中的意义。

学习导数时，既要会使用定义证明一些简单函数的可导性，也要熟练掌握乘积法则、商法则、复合函数求导法则和反函数求导法则。尤其要理解复合函数求导法则，它表明局部变化率在函数复合时按照乘法规律组合。以后在多元分析中，这一规律会变成线性映射的复合。

高阶导数描述函数局部变化的进一步层次。现阶段需要掌握基本计算和常见函数的高阶导数，但不必把主要精力放在寻找复杂的高阶导数公式上。高阶导数真正重要的用途，会在 Taylor 公式、微分方程以及后续的光滑性研究中逐渐显现。

教材在这一章中还会介绍微分。很多同学会纠结微分 dy 到底是一个数、一个变量还是某种“无限小”。在一元分析中，可以先把微分理解为函数增量的线性主部：当 x 发生增量 Δx 时，函数增量满足

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 $dy = f'(x) dx$ 表示主要的线性变化部分。

这里的微分已经有严格的分析定义，并不只是一个形式记号。不过，它作为线性映射的完整意义会在多元微分学和微分流形中表现得更加清楚。因此现阶段既不必把 dx 想象成某个神秘的无穷小数，也不必过早陷入过度抽象的讨论。重要的是理解：微分是对真实增量的线性近似，而不是增量本身。

第 5 章研究导数的应用。这一章看起来包含大量计算技巧，但其理论主线十分清楚：首先用微分中值定理把局部的导数信息转化为函数在一个区间上的整体性质，然后利用这种联系研究单调性、极值、凹凸性、函数作图、极限和高阶近似。

Rolle 定理、Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理是这一章的基础。中值定理说明，在一定条件下，函数在一个区间上的平均变化率，会在区间内部某一点成为瞬时变化率。它把两个端点之间的整体变化与内部某一点的导数联系起来。

许多熟悉的结论都是中值定理的推论。例如，导数恒为零的函数在区间上必为常数；导数恒正的函数严格递增；两个函数如果导数相同，那么它们只相差一个常数。因此，学习中值定理时，不要只记忆公式，而要熟悉它作为证明工具的标准用法。

函数的单调性、极值与凹凸性，是由导数和二阶导数控制函数图像整体形状的典型例子。学习这些内容时，应当明确必要条件与充分条件的区别。例如，函数在一点取得极值并且在该点可导，可以推出导数为零；但导数为零并不能反过来保证该点是极值点。

洛必达法则是计算某些未定式极限的有效工具，但切记它不是所有极限问题的万能方法。使用前必须检查极限的类型和定理的假设，也应当保留使用等价无穷小、Taylor 公式、夹逼和代数变形等其他标准方法的能力。不要为了使用洛必达法则而反复求导，把本来简单的问题变得越来越复杂。

Taylor 公式是这一学期最重要的结论之一。它说明一个足够光滑的函数在某一点附近可以由多项式逼近，而函数在该点的各阶导数决定了这个近似多项式的系数。

Taylor 公式不是简单地给 ε - δ 语言“套一层壳”，而是把极限、导数和高阶局部近似组织到了一起。

学习 Taylor 公式时，必须重视余项。有限阶 Taylor 公式所说的是

$$\text{函数} = \text{Taylor 多项式} + \text{余项},$$

而不是说任何无穷次可微函数都自动等于自己的 Taylor 级数。只有能够控制余项，才可以说明多项式近似达到了怎样的精度。Taylor 公式以后会在数值计算、微分方程、复分析以及局部几何中反复出现。

第 6 章的实数理论是数学分析 1 中理论上最重要的一章。前面许多极限存在性定理和闭区间上的连续函数定理，归根到底都依赖于实数的完备性。

确界原理是实数完备性的一种基本表达。它说明一个非空有上界的实数集合必有上确界。初学时可能会觉得上确界只是“最小的上界”，但其真正作用是从一个集合的有界性中构造出一个确定的实数。单调有界定理、区间套定理、Bolzano–Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则，都可以看成完备性的不同表现。

子列是分析数列敛散性的标准工具。一个数列即使本身不收敛，也可能存在许多收敛子列。Bolzano–Weierstrass 定理说明，每个有界数列都存在收敛子列。这个结论以后会推广成紧致性理论中的核心原则：从任意序列中抽取一个收敛子列。

有限覆盖定理是闭区间紧致性的另一种表达。所谓从一个开覆盖中选出有限子覆盖，看起来与数列极限没有直接关系，但它与有界数列存在收敛子列本质上描述的是同一种有限性。这一思想以后会在点集拓扑中被抽象为紧致性。

教材利用实数完备性重新证明闭区间上连续函数的有界性、最值定理和一致连续性，这是十分重要的。你应当借此看清证明的逻辑链条：实数的完备性推出闭区间的紧致性，而紧致性再推出连续函数的各种整体性质。

一致连续与逐点连续不同。逐点连续允许所选取的 δ 依赖于点 x_0 ；一致连续则要求同一个 δ 能够同时适用于定义域中的所有点。这种“与点无关的统一控制”是分析中非常重要的思想，会在数学分析 3 的一致收敛中再次出现。

上极限与下极限是描述有界数列长期振荡行为的工具。当数列不收敛时，普通极限无法描述其渐近状态，但上极限与下极限仍然能够记录其尾部可能达到的最高和最低水平。这个概念在后面的级数理论、概率论和测度论中都有重要用途。

从更高的角度看，第 6 章实际上是在学习一维欧式空间的拓扑与完备性。开区间、闭区间、聚点、子列、覆盖、紧致性与一致连续性，都会在点集拓扑中获得统一表述。如果学有余力，可以在这一阶段开始接触一些点集拓扑，这会帮助你理解本章，也会为数学分析 2 中多元函数的极限与连续性做好准备。具体可以参见我们点集拓扑的章节。

第 7 章研究不定积分。不定积分可以理解为求导的逆问题：给定函数 f ，寻找满足 $F' = f$ 的原函数 F 。需要注意，同一个函数的任意两个原函数只相差一个常数，这一结论正是微分中值定理的应用。

换元积分法和分部积分法是最基本的两种计算方法。换元积分法来自复合函数求导法则，分部积分法来自乘积求导法则。因此，这些公式并不是凭空出现的技巧，而是求导法则的逆向使用。学习时应当理解所作变换的来源，而不是只记忆模板。

有理函数的积分具有相对系统的方法，通常可以通过部分分式分解处理。这部分值得认真掌握，因为它展示了如何利用代数结构把复杂问题分解成标准问题。相比之下，某些三角函数和无理函数的积分会涉及较多特殊代换。常见方法应当熟悉，但不必在这方面投入过多时间去追求极其复杂的计算。

在这一学期的最后，你要明白，不定积分的重点不是计算各种奇形怪状的表达式，而是理解求导与求原函数之间的关系，并熟悉换元、分部积分和部分分式分解等标准技术。很多刻意设计的积分题依赖特殊观察或者偶然凑式，对以后的基础数学学习几乎没有帮助。切记不要把大量时间消耗在这类奇技淫巧中。

数学分析 1 学完以后，你至少应当形成以下几种基本能力：能够正确阅读和书写带有量词的极限定义；能够使用不等式进行基本的 ε - N 与 ε - δ 证明；理解连续与导数都是局部概念，而闭区间上的各种定理是从局部性质得到整体结论；知道导数是局部线性近似，Taylor 公式是更高阶的局部近似；理解许多极限存在性结论最终依赖于实数的完备性。

不必要求自己在这一阶段就能解决所有复杂题目。真正重要的是熟悉定义，掌握标准例子与反例，理解核心定理之间的依赖关系，并学会用这些语言亲自组织证明。数学是一门语言，只有真正使用定义和定理去表达、计算和证明，它们才会逐渐成为你自己的工具。

5.1.2 数学分析 2

数分 2 的内容为教材的 8-12 章，以及第 13 章的前四节，包括

- 定积分.
- 定积分的应用.
- 多元函数的连续与极限.
- 多元函数的微分学.
- 重积分.
- 第一型与第二型曲线曲面积分.

数学分析 2 的主线，是把一元函数的微积分推广到多元函数，并逐步建立起积分的几何意义。相比于数学分析 1，这一学期的内容在直观上更加丰富，但在逻辑结构上也更容易显得纷乱。

定积分部分首先要弄清楚积分究竟在做什么。虽然初等数学中常常把积分理解为求面积，但从分析的角度来看，定积分的本质是用有限个局部数据逼近一个整体量。我们把区间切成许多小段，在每个小段上选取一个函数值，再把这些局部贡献相加；当分割越来越细时，如果这些和趋于一个确定的极限，就得到了函数的积分。

因此，学习定积分时最重要的并不是背诵大量积分公式，而是理解 Riemann 和背后的思想，弄清楚为什么连续函数一定可积、单调函数为什么可积，以及函数的可积性究竟控制了它怎样的不连续行为。上和、下和、分割加细等技术是处理这些问题的标准工具，需要熟悉，但不必把它们当成孤立的技巧。它们共同表达的是同一件事情：从上方和下方对一个整体量进行逼近，并证明两种逼近最终相等。

如果你学有余力，可以在这一部分尝试学习 Jordan 测度与 Lebesgue 测度，也可以去了解 Riemann-Stieltjes 积分，当你了解了这些内容之后，你会对积分有更加深刻的理解。

微积分基本定理是这一部分最重要的结论之一。它告诉我们，求导与积分并不是两种毫无关系的运算，而是在适当条件下互为逆运算。你需要弄清楚定理的两个方向分别在说什么：一方面，变上限积分产生了一个原函数；另一方面，原函数可以用来计算定积分。这一结论把局部变化率与整体累积量联系在了一起，是整个微积分的核心。

定积分的应用中会出现面积、弧长、旋转体体积等计算。学习这些内容时，不要把重点放在记忆公式上，而要学会从微元的角度建立模型。所谓微元法，就是先理解一个很小的局部部分贡献了什么，再通过积分把所有局部贡献累加起来。只要理解了微元的构造，就可以重新把公式推导出来。

多元函数的连续与极限是数学分析 2 中第一个真正具有挑战性的部分。在一元函数中，变量只能从左右两个方向接近一个点；但在多元函数中，一个点可以沿着无穷多条路径被接近。因此，沿每一条你能想到的路径都有极限，并不能轻易推出多元极限存在。你需要逐渐建立起距离、邻域、开集等几何直观，明白多元极限真正描述的是：无论以何种方式接近目标点，函数值都必须统一地接近同一个数。

这一章实际上已经在使用欧式空间的拓扑语言。闭集、开集、紧集、连通集以及连续映射等概念，不再只是实数轴上的性质，而是具有了更一般的空间意义。尤其要熟悉 Euclidean 空间中紧致性与有界闭性的关系，以及连续函数在紧集上的一致连续性、最值性质等基本结论。如果你已经学习了一些点集拓扑，会发现这些结论都是一般拓扑思想在欧式空间中的具体表现。

多元微分学的核心，是寻找多元函数在一点附近最好的线性近似。在一元函数中，导数是一个数；在多元函数中，真正的导数应当是一个线性映射。偏导数只能告诉我们函数沿坐标方向如何变化，而全微分则同时描述了函数沿任意方向的局部变化。因此，必须区分偏导数存在与函数可微这两件事情。偏导数全部存在并不一定意味着函数可微，因为若要可微，不同方向上的变化必须能够被同一个线性映射统一地控制。

方向导数、梯度、Jacobi 矩阵等概念也应当在线性代数的框架下理解。梯度并不只是一个由偏数组成的向量，它描述了函数增长最快的方向；Jacobi 矩阵则是多元映射导数在线性坐标下的矩阵表示。复合函数求导法则本质上就是线性映射的复合，而不是一个需要死记硬背的复杂公式。学习这一部分时，要有意识地把数学分析与高等代数联系起来。

隐函数定理与反函数定理是多元微分学中最重要结构性定理。它们告诉我们，当一个非线性映射在某一点的线性部分足够好时，这个映射在该点附近仍然具有类似线性映射的性质。反函数定理讨论局部可逆性，隐函数定理讨论方程组的局部解能否由一部分变量表示成另一部分变量的函数。这两个定理不仅是计算工具，也是以后学习微分流形、微分方程、李群以及代数几何时反复出现的基本思想。

重积分是定积分思想在高维空间中的推广。你需要理解，二重积分和三重积分并不是两个嵌套的一元积分，它们首先是定义在平面区域或空间区域上的整体积分。将重积分化为累次积分，是 Fubini 型定理给出的计算方法，而不是重积分的定义本身。

学习时应当区分积分对象的本质与实际计算的手段。

变量替换公式中 Jacobi 行列式并不是凭空出现的修正因子，它描述了一个映射在局部对面积或体积的伸缩比例。在线性情况下，行列式已经描述了体积的变化；一般的非线性映射则可以在局部用其导数进行线性近似。因此，多重积分的变量替换公式本质上是线性代数中行列式几何意义的分析版本。其证明倒是不重要，无需花费大量时间去验证一遍其繁琐的过程。

5.1.3 数学分析 3

数分 3 的内容为教材的 13-19 章，包括

- 曲线与曲面积分剩下的内容.
- 数项级数.
- 广义积分.
- 一致收敛.
- 幂级数.
- 傅里叶分析.
- 含参变量积分.

数学分析 3 的内容看起来十分繁杂，但实际上可以归结为三条主线。第一条主线是用 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式统一理解曲线积分与曲面积分；第二条主线是研究级数、广义积分、函数列等各种无穷过程；第三条主线是研究函数的展开与表示，包括幂级数、Taylor 级数和傅里叶级数。

其中最重要的是第二条主线。进入数学分析 3 以后，你会不断遇到极限、求和、积分、求导等运算同时出现的情况。这时必须养成一种基本的分析意识：这些运算能不能交换次序？如果能够交换，需要什么条件？如果缺少这些条件，又会出现什么反例？这实际上是整个数学分析 3 反复讨论的核心问题。

第 13 章后半部分是多元积分学的收尾。此前学习的曲线积分、曲面积分、重积分看似是不同的积分，但 Green 公式、Gauss 公式与 Stokes 公式告诉我们，它们之间存在深刻的联系。这些公式共同表达了一个基本思想：区域内部的微分信息，可以通过区域边界上的积分反映出来。

学习这一部分时，不要仅仅把 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式当成计算积分的技巧。真正需要理解的是它们各自在什么几何对象上积分，区域与边界之间是什么关系，以及定向为什么会影响积分的正负号。以后学习微分流形时，这些公式会被统一为一般的 Stokes 公式。现阶段虽然不需要掌握一般理论，但应当意识到这些定理并不是彼此独立的偶然结果。

场论部分出现的梯度、散度与旋度，不应当只看成三个需要记忆的计算公式。梯度描述标量场增长最快的方向，散度描述向量场在一点附近的流出程度，旋度则描述向量场局部的旋转趋势。理解这些几何和物理意义，比熟练计算几个偏导数更为重要。

教材中关于 $\mathbb{R}^3$ 外微分形式的内容带有星号，可以根据时间选学。不过，如果你以后准备学习微分几何、微分拓扑、代数拓扑或者复几何，这一节是很有价值的。外微分形式能够把梯度、散度、旋度以及各种积分公式放进同一个框架中。初学时不必追求熟练计算，但应当了解这种语言为什么能够统一曲线积分、曲面积分和 Stokes 公式。

第 14 章开始研究数项级数。一个级数是否收敛，本质上是它的部分和数列是否收敛。因此，所有级数问题最终都应当回到数列极限。所以你可以尝试在数学分析 1 学习数列极限的时候就顺便学习一些数项级数，这没有什么困难。学习级数时，首先要掌握 Cauchy 收敛准则，因为它不需要预先知道级数的和，而是通过级数的尾部来刻画收敛性。

正项级数的比较判别法、比值判别法、根值判别法和积分判别法等都需要熟悉，但不要把它们变成一张机械的公式表。这些判别法本质上都在做同一件事情：把一个未知级数与某个熟悉的标准模型进行比较。真正重要的是判断通项的主要增长阶，并选择合适的比较对象。

对于任意项级数，要特别区分绝对收敛与条件收敛。绝对收敛意味着级数的收敛不依赖于正负项之间精细的抵消，因此具有更好的稳定性；条件收敛则依赖于各项排列的方式。Riemann 重排定理说明，有限和中可以随意交换次序的运算，在无穷和中未必仍然合法。这是学习无穷过程时必须形成的基本警觉。

组合级数与重排级数的重点，不是掌握多少复杂的排列技巧，而是理解无穷求和中交换顺序可能带来的问题。类似地，累次级数与二重级数研究的核心也是求和次序能否交换。你会在后面的重积分、含参变量积分以及更进一步的测度论中反复遇到同一个问题。

无穷乘积可以看成无穷级数的乘法版本。学习时应当注意，无穷乘积的收敛通常可以通过取对数转化为级数的收敛问题。这一节的具体技巧不是主线，但它体现了一个常见思想：把较难处理的乘法结构转化为较熟悉的加法结构。

第 15 章的广义积分与级数在思想上十分接近。无穷区间上的积分，或者被积函数在某一点附近无界的积分，都不是通常意义下直接完成的积分，而是通过极限定义的。因此，讨论广义积分时，首先要明确究竟是哪一个极限存在。

千万不要因为形式上能够写出一个原函数，就认为广义积分一定收敛。广义积分的值只有在相应极限存在时才有意义。特别是在积分区间有多个奇点，或者区间向两个方向无穷延伸时，应当分别讨论各部分的收敛性，不能让不同部分的发散通过形式上的抵消掩盖起来。

广义积分的比较判别法与正项级数的比较判别法具有平行的结构。可以把级数理解为离散的累积，把积分理解为连续的累积。许多级数的收敛性可以通过积分进行估计，许多积分的性质也可以借助级数理解。在学习时，应当有意识地在二者之间建立类比。

有限区间上无界函数的广义积分尤其需要注意奇点附近的增长速度。无穷远处的收敛性与有限点附近的收敛性表面上不同，经过变量替换以后却可以相互转化。因此，真正需要掌握的是如何分析被积函数在问题点附近的主要阶数。

广义重积分的核心问题依然是积分区域无界或者被积函数无界时，如何通过极限

定义积分，以及不同逼近区域是否会得到相同结果。这部分会为以后学习测度论中的 Lebesgue 积分和 Fubini 定理提供一些直观。

第 16 章的一致收敛是数学分析 3 中最重要的一章。逐点收敛只要求对每一个固定的点，函数值最终接近极限函数；一致收敛则要求从某一个阶段开始，所有点同时达到指定的精度。二者最关键的区别在于：逐点收敛中所选择的指标可以依赖于点，而一致收敛中所选择的指标必须与点无关。

一定要熟练掌握这一量词次序的区别。只要量词顺序真正弄明白了，一致收敛的大部分概念就不会再显得神秘。相反，如果只是机械地使用上确界或者套用判别法，而没有理解统一控制的含义，那么后面的定理会很容易混淆。

研究一致收敛的主要目的，不只是判断一个函数列如何收敛，而是研究极限能否与其他运算交换。如果函数列逐点收敛，那么连续函数的极限未必连续，积分的极限也未必等于极限函数的积分，更不能随意交换极限与求导。适当的一致收敛条件，可以保证连续性和可积性传递到极限函数；对于逐项求导，则还需要对导函数列施加额外条件。

函数项级数可以通过它的部分和函数列来研究，因此函数项级数的一致收敛本质上仍然是函数列的一致收敛。Weierstrass 判别法是最常用的标准工具，其核心是用一个与自变量无关的收敛数项级数统一控制函数项级数。

教材中利用函数项级数构造特殊函数的例子，以及连续但处处不可微函数的例子。它们告诉我们，连续性与可微性之间存在巨大差距，也提醒我们不要把常见的光滑函数误认为所有函数的典型代表。分析学中许多看似技术性的假设，正是为了排除这些病态但真实存在的例子。

逼近定理一节思想十分重要。它讨论的是能否用多项式或者其他简单函数统一逼近一个连续函数。这种思想以后会发展为函数空间中的稠密性问题，是实分析、泛函分析与数值分析中的基本问题。

第 17 章研究幂级数。幂级数是一类性质极好的函数项级数：在收敛区间内部，它绝对收敛并且具有良好的一致收敛性质，可以逐项求导、逐项积分。相比于一般函数项级数，幂级数的行为显得异常规整。

学习幂级数时，不要只满足于会用比值判别法计算收敛半径，还要理解为什么幂级数的收敛区域一定以展开中心为中心形成一个区间。收敛区间内部与端点的行为也需要分开讨论：在区间内部有统一的良好性质，而端点必须逐个判断。

Taylor 级数讨论能否用函数在一点处的全部导数恢复函数本身。这里必须区分 Taylor 公式与 Taylor 级数。Taylor 公式给出有限阶近似及其余项；要证明函数等于它的 Taylor 级数，还必须证明余项趋于零。

特别需要注意，无穷次可微并不意味着函数一定等于自己的 Taylor 级数。能够由 Taylor 级数在局部表示的函数称为解析函数，它比光滑函数具有更强的性质。这一区别在复分析中会变得非常重要：复可微函数自动具有解析性，而实变量中的光滑函数却未必解析。

第 18 章的傅里叶分析研究如何用正弦函数和余弦函数表示周期函数。与 Taylor 展开使用多项式进行局部逼近不同，傅里叶级数使用不同频率的三角函数对函数进行整体分解。

傅里叶分析背后的核心思想是正交性。傅里叶系数并不是凭空出现的公式，而是函数在各个正交方向上的投影系数。应当把高等代数中的内积、正交投影和勾股定理带入这一章。Parseval 等式就是有限维欧式空间中勾股定理在函数空间中的对应形式。

傅里叶级数的收敛性比幂级数复杂得多。你需要区分逐点收敛、一致收敛和均方收敛，不要笼统地说傅里叶级数“收敛于原函数”。当函数在某点发生跳跃时，傅里叶级数通常收敛到左右极限的平均值，而不是简单地收敛到函数在该点预先指定的值。

逐项积分与逐项求导一节再次回到运算次序交换的问题。傅里叶级数在什么条件下可以逐项积分、在什么条件下可以逐项求导，都必须由相应定理保证，不能只依靠形式计算。

傅里叶分析的应用远远超出计算某个三角级数。它是偏微分方程、调和分析、信号处理、概率论以及现代数论中的基本语言。教材最后介绍的傅里叶积分和傅里叶变换虽然带有星号，但如果以后准备学习偏微分方程、泛函分析、调和分析或者解析数论，建议至少了解其基本思想。傅里叶级数处理周期函数，傅里叶变换则把类似的频率分解推广到非周期函数。

第 19 章的含参变量积分可以看成对前面内容的一次总结。一个积分依赖于参数时，我们希望知道它关于参数是否连续、是否可微，以及能否在积分号下求导。这些问题的核心仍然是：是否存在一种不依赖于参数的统一控制。

对于普通含参变量积分，连续性和求导问题相对容易；对于含参变量的广义积分，则需要更谨慎，因为其中同时包含参数变化和广义积分极限两个过程。学习时应当明确看到，这实际上又是两个极限能否交换次序的问题。

在积分号下求导是一种十分重要的标准技术。与其把相关公式看成一种巧妙的计算方法，不如理解为：在适当的一致收敛或者控制条件下，求导运算可以穿过积分号。以后学习实变函数时，这类条件会被控制收敛定理等更一般的结果所替代。

Beta 函数与 Gamma 函数是含参变量积分的重要例子。Gamma 函数把阶乘从正整数推广到更一般的变量，Beta 函数则与 Gamma 函数有密切联系。学习这一部分时，除了掌握基本计算，还应当理解特殊函数是如何通过积分自然产生的，以及函数方程如何将这积分与熟悉的代数对象联系起来。

两个广义积分交换次序的问题，与前面的二重级数、累次级数和重积分具有完全相同的思想背景。在有限和中交换次序通常没有问题，但面对无穷求和和广义积分时，必须有绝对收敛或者其他适当条件。不要只记忆交换次序的结论，而要始终检查保证交换合法的假设。

数学分析 3 还有一条值得提前注意的隐藏主线：本学期后半部分的许多内容，在复分析中都会得到更加自然和完整的解释。数项级数、无穷乘积、幂级数、Taylor 展开、傅里叶级数、广义积分以及 Gamma 函数等内容，并不只是实变量分析中彼此独立的章节，它们都与复函数的解析性有着密切联系。因此我们建议要把复分析的视角不断地代入进数分 3 的学习之中。应当意识到：有些在实变量范围内显得繁琐甚至有些偶然的结论，一旦把变量放到复数域中，就会显现出更清晰的结构。

例如，在实分析中，无穷次可微函数未必等于自己的 Taylor 级数，因此光滑性与解析性之间存在巨大差距。但在复分析中，一个函数只要在复意义下可微，就会自

动无穷次可微，并且在每一点附近都能够展开成收敛的幂级数。换言之，复可微性远远强于实可微性。数学分析中关于幂级数逐项求导、逐项积分和 Taylor 展开的结论，在复分析中不再只是某一类特殊函数的良好性质，而会成为全纯函数的普遍性质。许多结论都会在 Cauchy 积分公式、留数定理、解析延拓以及全纯函数理论中被重新理解。

复级数的绝对收敛、重排和乘积理论与实级数有相似之处，但复数的几何结构会带来更加丰富的现象。研究复函数时，我们会通过函数项级数构造全纯函数，并通过无穷乘积构造具有指定零点的函数。

教材中的无穷乘积目前可能显得较为孤立，但在复分析中，它会发展为 Weierstrass 无穷乘积理论。例如，正弦函数可以由它的零点通过无穷乘积表示，而 Gamma 函数的性质也与无穷乘积密切相关。这反映出复分析中的一个重要思想：一个全纯函数往往在很大程度上受到其零点和极点分布的控制。

广义积分在复分析中会出现一种非常有力的计算方法，即把实变量积分放到复平面中，沿适当选择的闭曲线积分，再利用 Cauchy 积分公式或者留数定理进行计算。许多在实变量范围内需要复杂变量替换、参数技巧或者特殊构造才能算出的积分，在复分析中可以由极点及其留数统一处理。

但需要注意，复分析方法并不是对实分析基础的替代。为了证明大圆弧、小圆弧或者其他辅助路径上的积分趋于零，仍然需要熟练使用实分析中的估计。复分析之所以强大，并不是它消除了估计，而是它把积分的主要贡献集中到了少数奇点上，使问题的结构变得清晰。

一致收敛在复分析中会显得更加重要。全纯函数列的极限是否仍然全纯、幂级数能否逐项求导、积分与无穷求和能否交换，都依赖于某种局部一致收敛。以后会看到，在复分析中，闭圆盘等紧集上的一致收敛，即所谓紧致开拓扑意义下的局部一致收敛，是研究全纯函数族的自然语言。

幂级数是数学分析与复分析之间最直接的桥梁之一。在实分析中，我们首先把幂级数看成一类性质特别良好的函数项级数；在复分析中，幂级数则会成为描述全纯函数局部结构的基本工具。

实变量中，无穷次可微函数未必等于自己的 Taylor 级数。一个典型现象是，函数在某点的各阶导数可以全部为零，但函数在该点附近却不恒为零。因此，仅仅知道函数具有所有阶导数，仍然不能从这些导数恢复函数。

复变量中的情况完全不同。全纯函数在每一点附近都等于自己的 Taylor 级数，而且 Taylor 级数的收敛半径由距离最近的奇点控制。函数在一个点的全部导数不仅给出形式上的近似，而且真正决定了函数在该点附近的取值。这种强刚性是复分析与实分析最显著的区别之一。

因此，学习 Taylor 级数时，应当把“函数为什么等于自己的 Taylor 级数”看成一个真正需要回答的问题，而不能把它与无穷次可微混为一谈。这个问题在实分析中需要对余项作具体估计，在复分析中则会由 Cauchy 积分公式得到统一回答。

傅里叶分析在复数语言下也会得到更简洁的表达。利用 Euler 公式，正弦函数和

余弦函数可以统一写成复指数函数。于是一个周期函数的傅里叶级数可以表示为

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

这种写法不仅使求导、积分和平移等运算更加简洁，也更清楚地揭示了频率的代数结构。

复指数函数把三角函数的正交性统一为指数函数族的正交性，而傅里叶系数可以理解为函数在各个频率方向上的投影。以后无论学习调和分析、偏微分方程还是解析数论，复指数形式都会成为更自然的语言。

另一方面，傅里叶级数与复分析并不是简单的包含关系。傅里叶分析关心的是函数的频率分解和不同意义下的收敛，复分析则关心全纯性、奇点和解析延拓。但二者会频繁交汇。例如，周期全纯函数可以通过 Laurent 级数与傅里叶级数联系起来，Poisson 核可以同时从调和函数、复分析与傅里叶级数的角度理解。

含参变量积分也是通向复分析的重要入口。现在我们主要讨论参数为实数时，积分关于参数的连续性、可微性以及积分号下求导。进入复分析以后，可以让参数取复数值，并研究所得函数是否全纯。证明方法仍然离不开一致收敛、局部一致估计以及积分与极限交换，因此本章的技术会被直接继承。

Gamma 函数尤其能够体现复分析的力量。在实变量范围内，它首先通过广义积分定义，并满足

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

这说明它把阶乘推广到了正实数。但在复分析中，Gamma 函数可以通过解析延拓推广到更大的复平面，并成为一个亚纯函数。它的极点、函数方程、无穷乘积以及与其他特殊函数的关系，只有放在复分析的框架中才能得到完整理解。

Beta 函数与 Gamma 函数之间的关系也不应当只看成一个巧妙的重积分计算。它表明不同形式的含参变量积分背后可能定义着同一个复解析对象。以后学习复分析时，变量替换、积分交换与解析延拓会共同解释这些特殊函数为什么具有如此丰富而稳定的恒等式。

学完数学分析 3 以后，你应当对无穷过程形成基本的敏感性。每当极限、求和、积分、求导同时出现时，都应当主动询问：这些运算能不能交换，交换需要什么条件，缺少条件会发生什么事情。

与此同时，你还应当看到不同章节之间的统一关系：级数是离散的累积，积分是连续的累积；一致收敛提供对整个定义域的统一控制；幂级数和傅里叶级数都是用简单函数表示复杂函数的方法；含参变量积分则集中研究极限、求导与积分之间的相互作用。

5.1.4 主要参考书

- [1] 谢惠民，《数学分析习题课讲义》. 标准的辅导教材，补充各种基本技术，建议学习.
- [2] 汪林，《数学分析中的问题与反例》. 会给你增加不少基本的常识.
- [3] Pólya, Szegő, 《分析中的问题与定理》第一卷. 分析学大师亲身选出的习题集，

附有答案，建议与同学组建讨论班一起学习，内容丰富，推荐对分析学有较大兴趣的同学学习。

- [4] 菲赫金哥尔茨，《微积分学教程》。说是微积分实则讲数学分析的三卷本非常厚超级大词典，中文版的翻译不好，语句不顺，阅读起来会有点痛苦，可以选择性地阅读一些章节以补充各种标准教科书上没有的内容与观点。
- [5] 卓里奇，《数学分析》。李直老师翻译的两卷本，语言比较通顺。卓里奇的书观点比较高，第一卷上来就讲领域基这种比较抽象的东西，但是实际阅读下来还是很舒适的，概念的抽象使得我们不需要分无穷远和有限点的极限反复重复叙述 $\varepsilon - \delta$ 语言。建议在学过一些高数，对微积分略有直觉的前提下阅读。第二卷就比较一般，为了高观点而高观点，个人认为可以直接学泛函分析，实分析和微分流形平替，例如，把 Folland 实分析的前六章和第八章学完，你就已经学会大部分关于一致 xx ，多元积分，泛函分析和傅里叶分析的基本概念了。
卓里奇的习题非常困难，不建议初学者尝试全解习题，虽然第一卷知乎上有人写过选解，但笔者认为初学者没必要写这么难的题目，应该尽快往高阶课程前进。
- [6] Loring Tu. 《An Introduction to Manifolds》Second Edition. 前四章. 推荐想要学习 $\mathbb{R}^n$ 上的微分形式的同学使用。
- [7] Elias M. Stein, 《Fourier Analysis》。推荐想要学习傅里叶分析的同学使用。

最后需要强调，数学分析首先是一门基础语言。前文之所以反复提到它与点集拓扑、复分析、微分几何、泛函分析等后续课程的联系，并不是要求你在初学数学分析时，就把这些更高层次的理论强行塞进现有框架中，也不是要用尚未建立的观点重新解释每一个概念。这些联系的主要作用，是帮助你看清当前所学内容在整个数学体系中的位置，理解这些定义与技术将来会在什么地方发挥作用，从而为学习提供必要的方向感和动机。

因此，在数学分析阶段没有必要在缺乏动机的情况下不断补充更复杂、更一般的理论，也不必把大量时间消耗在偏僻技巧和繁琐计算上。在牢固掌握这些基础之后，应当及时进入后续课程，并在更合适的理论框架中重新审视数学分析中的内容。那时你会发现，许多在初学阶段显得零散、技术性很强的结论，会在更高的观点下获得更加自然、统一而深刻的解释。

5.2 高等代数

高等代数与数学分析给初学者带来的感受很不相同。函数、不等式、导数等内容，大家在中学阶段或多或少已有接触；但对多数学生而言，行列式、矩阵、线性空间和线性变换却几乎是全新的概念。第一次学习高等代数，就像面对一张尚未落笔的白纸，最初画下的那几笔往往会在很大程度上影响此后对整门代数的理解。

关于如何学习高等代数，网上的观点可谓五花八门。其中一种颇有影响的想法认为，初学线性代数时不应从行列式开始，因为行列式的传统定义显得繁复而缺少动机，应当先学习线性空间和线性变换，最后再处理行列式。《Linear Algebra Done Right》正是这一思路的代表：它从线性空间、线性映射和谱理论出发，到全书最后才借助多

重线性代数讨论行列式。《Linear Algebra Done Wrong》采取的路线则不完全相同：它先介绍基本概念和线性方程组，随后便在第三章引入行列式，并着重解释行列式的几何动机。

我们暂且不急于判断哪一种教学顺序最好，先回顾一下相关概念的历史发展：

- (1) 1683 年，日本数学家关孝和研究了相当于行列式的计算方法；1693 年，莱布尼茨在欧洲独立地使用类似的表达式研究线性方程问题。
- (2) 1750 年，Gabriel Cramer 发表了后来被称为 Cramer 法则的求解方法。
- (3) 消元法本身有着更早的历史。Gauss 在十九世纪初的最小二乘计算中推动了消元算法的系统化；今天所谓的 Gauss-Jordan 消元法，则与十九世纪后期 Wilhelm Jordan 和 Clasen 的工作有关。
- (4) 1812 年，Cauchy 对行列式进行了系统研究，奠定了现代行列式理论的重要基础；1841 年，Jacobi 的工作进一步推广并普及了行列式，特别是函数行列式的理论。
- (5) 1844 年，Eisenstein 用单个符号表示线性代换，并研究它们的加法和复合。他已经明确意识到，这种乘法一般不满足交换律。
- (6) 1850 年，英国数学家 James Joseph Sylvester 首次使用“矩阵”一词。
- (7) Cayley 在 1855 年开始发表有关矩阵的先导性工作，并于 1858 年发表《矩阵论研究》，系统讨论矩阵的运算、逆和多项式等问题，通常被视为矩阵理论的主要奠基人之一。
- (8) 1878 年前后，Frobenius 在研究线性代换和双线性型时引入矩阵秩等概念，矩阵理论的基本框架由此逐步建立。

教材会出错，作者会有偏好，但历史是确定的。这段历史至少说明：从数学概念的发生过程来看，行列式并不是在矩阵理论完成以后才人为附加上去的工具。恰恰相反，行列式先从方程消元等具体问题中产生，而现代矩阵理论在相当程度上是在行列式、线性代换和方程组研究的基础上逐渐形成的。

不过，历史顺序并不自动等于最佳教学顺序。因此，不能因为行列式在历史上早于矩阵，便断言所有课程都必须先讲行列式；同样也不能因为某些教材能够把行列式后置，就断言行列式本身是完全不自然的。

我想行列式之所以惹许多人讨厌，是因为教材在缺乏动机的情况下塞入各种定义与技术，让人学来云里雾里不知所云。初学者应当掌握行列式的定义、基本性质、初等变换、展开方法以及它与方程组唯一解、矩阵可逆性之间的关系，但不必在各种技巧性极强的特殊行列式上投入失衡的时间。行列式应当成为理解后续理论的工具，而不是变成出题工具。

我建议的合理的学习路径是通过解线性方程组来接触行列式，然后逐渐接触线性空间，秩的概念，最后再了解所谓“线性变换”是什么东西，而变换在一组基下的具体表达也即矩阵。可惜的是大部分教材都重计算而轻几何，几何直观是教材所缺少的东西。尽管代数会让我们走的更远，但是缺少几何就缺少了前进的动力。大家可以通

过 3Blue1Brown 频道的“线性代数的本质”系列合集以补充这一部分的观点。

此外，高等代数虽然名为高等代数，但实际上并不高等。不知为何国内把数学系的线性代数一律称为高等代数，但无论如何，这门课确实是大家的代数启蒙课。如果你高中学过数学竞赛，那会知道联赛二试有四个板块，分别是：几何，代数，数论，组合。请注意高中联赛里面的代数实际上是分析，并非真正意义上的代数。大家在学习高等代数的过程中会不知不觉地接触到群、环、域、模、代数等代数概念，会真正意义上第一次了解什么是交换律，以及交换律并不会时时存在，比如矩阵乘法就不满足交换律。虽然书上并不会把这些摆在纸面上讲，但意识到这些事情是有必要的。

需要注意的是很多情况下高等代数都是在特征零的域上处理的，大家可能在初期对于正特征的情况理解不多，但这种情况还是很重要的。强烈建议学有余力的同学在学习这门课的同时学习一点抽象代数，逐步建立起代数思维。

建议教材：谢启鸿：《高等代数》

截至 2026 年 7 月，南开大学所用教材为北大第五版高等代数，一言以蔽之：屎。

5.2.1 高等代数 1

高等代数 1 的主要内容包括：

- 多项式理论.
- 行列式理论.
- 线性方程组理论.
- 矩阵理论.
- 一些简单的解析几何.

多项式与行列式的内容相对基础，真正的难点在线性方程组理论。学习时要重点弄清楚线性相关与线性无关、秩、极大线性无关组和基等概念；只要把握住这些概念之间的联系，整门课程的主干便十分清楚。

矩阵理论有一定难度。首先要熟悉矩阵乘法及其运算规律，在此基础上理解分块矩阵，而不是把分块运算当作形式技巧。此外，还要逐渐理解矩阵所构成的代数结构，以及矩阵的秩、乘积和可逆性之间的关系。解析几何部分主要是线性代数在具体几何问题中的简单应用，难度不大。

5.2.2 高等代数 2

高等代数 2 的主要内容包括：

- 二次型.
- 线性空间.
- 线性变换.
- λ -矩阵.
- 欧式空间.

- 更多解析几何.

这一部分的主线是研究各种标准形。无论是二次型的标准形，还是矩阵在相似、合同等关系下的标准形，其目的都是对对象进行分类，并找出决定其类型的不变量。

特征值是其中最重要的概念之一，要熟悉特征值、特征向量和特征子空间的计算与应用，并理解它们与矩阵标准形之间的关系。 λ -矩阵理论则进一步研究矩阵相似分类，其背后更深层的理论是主理想整环上有限生成模的结构定理，学有余力的同学可以自行了解。

无论如何，Jordan 标准型理论要弄清楚，一旦能明白 Jordan 标准型，那很多问题都可以在不妨设某个矩阵为 Jordan 块的情况下迎刃而解。

欧式空间是在向量空间上引入内积，并研究线性变换与内积之间的关系，由此自然产生正交矩阵、酉矩阵等概念。学习这一部分时，应当注意代数运算与几何直观之间的联系。

最后的解析几何的内容就是各种二次曲面的东西，没啥意思但是考试会考，需要花费一定时间熟悉这些概念。

5.2.3 主要参考书

- [1] 复旦大学高等代数，学习方法指导，俗称白皮书. 推荐所有同学学习，理论上这本书囊括了你能遇到的几乎所有题，把这本书弄清楚了那与高等代数相关的各种考试都不在话下.
- [2] B 站有谢启鸿老师在复旦大学的高等代数授课录像，直接搜索就有，喜欢看网课的同学可以看.
- [3] 蓝以中，《高等代数简明教程》. Jordan 标准型的部分值得一看.
- [4] 解析几何相关内容可以参考丘维声老师的《解析几何》.
- [5] 朱富海，《高等代数》. 南开大学老教材，习题难度较大，学有余力的同学可以尝试.
- [6] 李文威，《代数学讲义》，俗称 lww0. 学习起来特别有余力，觉得学校教材难度太低的同学可以尝试，可以让你感受现代语言的美感.
- [7] Linear Algebra Done Right. 中文名：线性代数这样学. 另辟蹊径的教学方法，可以直接在作者主页下载 pdf.
- [8] "Advanced Linear Algebra" by Steven Roman. 利用现代代数语言来讨论线性代数，主题丰富，对初学者而言难度较大，可以选择性阅读或者作为学习抽象代数的前置教材.

最后，大家肯定会欠缺一些仿射几何与射影几何的内容，这些实际上也是线性代数，有兴趣的同学可以自行往这方面学习。线性代数里面许多题目都有李代数背景，大家如果对一些李代数背景的题目感兴趣也可以自行学习李代数相关内容。线性代数会出现在各种数学的方方面面，是有着非常非常重要的地位的，大家一定要掌握好这门课。

6 不得不品的必修课

6.1 复变函数

南开大学的复变函数课程非常简单，其主要内容就是 Laurent 级数与留数定理。几乎是所有必修课里面最简单的一门。但相对而言，你能从课上学到的东西其实是相当少的。

我们给出以下一些参考资料供大家拓展使用，这些资料各有优劣，各自有侧重点，我们推荐选择性地阅读多本书而非从头到尾读完一本书。

- [1] 史济怀，刘太顺. 《复变函数》. 相当经典与全面的中文教材，可以作为南开教材的上位替代.
- [2] Lars V. Ahlfors. COMPLEX ANALYSIS. 复分析领域里面非常经典的教材，可以选择性地读一些感兴趣的章节.
- [3] 《复分析：可视化方法》. 复分析实际上是一门很几何的课程，但是国内的教学惯性导致了几何内容的缺失，这本可视化方法就为你补全了这一方面，相当推荐当做睡前读本读一读，会给你提供很多的几何直观，以至于有些东西虽然你不知道怎么严格证明，但从几何上一看就能看出来.
- [4] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. COMPLEX ANALYSIS. 这是著名的 Stein 分析四卷之一，作为解析数论大师，Stein 的这本复分析其实更像是解析数论的读本. 最前面几章是复分析的基本内容，后面都在讨论解析数论的事情，如果你对解析数论很感兴趣的话可以一看.
- [5] Serge Lang. Complex Analysis. Lang 的教材一般而言就是大而全，但这本书的内容算是比较标准的了，相比于 Conway 这种大部头，Lang 甚至略有缺漏¹⁴. 前面 Part 1 & 2 基本上是本科必知必会，Part 3 算是比较进阶的东西，可以选读。建议当成小字典. 在你想学习一些东西的时候，可以单独看看 Lang 的对应章节.
- [6] John B. Conway. Functions of One Complex Variable I. 比起 Lang 的复变，Conway 的复变内容是真的的大而全，称得上大字典的称号，里面有黎曼面，有 Runge 定理，有皮卡大定理¹⁵ etc. 如果你对复分析十分感兴趣，或者将来想学相关方向，可以试着读。
- [7] 知乎文章：[留数定理解决实积分入门](#). 能遇到的大部分计算方法都在这.

作为复变函数的后续课程，大家有兴趣可以去了解黎曼曲面，主要是紧致黎曼曲面。对微分流形有基本的了解就可以学习。

6.2 常微分方程

有人说 ode 这门课不像一门数学课，这话是有道理的。

¹⁴参见 Conway 一书的描述，但对做大部分分析都不太影响，只需要补充皮卡大定理即可。

¹⁵是的，Lang 居然没有写皮卡大定理，他只有小的。

学数学这件事，如果有动机就学得快，如果没动机就学得慢。ode 这门课主要干了这样几件事：解 ode、ode 的定性理论和动力系统初步。解 ode 的动机当然是十分充分的，这件事在数学分析中导数相关的一些习题中就崭露头角（但尽管动机十分充分，你却没法把解法用十分严谨的语言描述出来，这和数学的特点似乎背道而驰）。后面这两件事情的动机则相对不是这么明显。为了补充动机，我们可以简单地来看这个例子：假如向水中丢一块木头，我能根据水流（这里得稍微微观一点考虑，认为水流指的是每个点处的速度向量）推测出这块木头在某个时刻的位置吗？这里面就涉及了存在性和唯一性。这实际上是流（flow）和积分曲线的问题。找一些 topic 可能会让你对 ode 更有兴趣一些，比如奇点、测地线、流和积分曲线等（不要担心这些内容离你现在所学的知识过于遥远，实际上有数分二的基础基本上就能够理解其中道理了。而且只作为补充动机的话，也并不需要完全弄明白）。实际上在几何中，微分方程是占有重要地位的，且不谈几何分析这种分析几何 pde 正则性问题的方向，有比如 floor 同调等方向也建立在椭圆 pde 的解上。这里多说句题外话，pde 和 ode 不同，是一门十分严谨的数学课（只是有的老师可能教的不好），觉得 ode 学起来没有感觉（这实际上是很正常的）的同学没必要对 pde 产生畏难情绪。

当然，虽然我在这里把他描述得很有意思，但真正作为一门课程学起来还是相对无趣。尽管一般来说考试内容相对简单，但是花一学期时间学习一门多数内容需要背诵的背诵数学无疑是有点折磨的。另一方面，绝大多数中文 ode 教材是一致的烂，写的就没准备让人容易看懂。

下面是一些参考资料：

- [1] 丁同仁，《常微分方程教程》。丁老师的常微分有好几个版本，这里讨论的是高等教育黑皮第三版。使用下来的基本感受是有不少结论没讲，但是在很多地方有图解可以帮助理解。很多地方的证明都省略了，但在某些地方的叙述又异常详细，比如欧拉折线。总体评价是中规中矩。
- [2] 柳彬，《常微分方程》。内容在丁同仁老师书的基础上加入了更多更深更广的东西，部分证明相对而言比较简略，好处是你可以知道更多的东西，坏处是难读。
- [3] 袁荣，《常微分方程》。这本书证明详细，内容友善。并且专门介绍了矩阵分析基础知识，上面提到的两本书都没有这个内容，只是浅浅提一嘴赋范然后就说类似可证，但袁荣老师在书里面把很多理论基础给你证明了出来并且绝大部分定理都有证明。此外袁荣老师的书还有配套的习题解答¹⁶，在你对常微分题目的写法束手无策的时候，一本有答案的书无疑是救命良药。
- [4] b 站刘思齐¹⁷的网课，讲得很好。

多说一句：有些人会觉得 ODE 里面解非齐次方程的“常数变异法”很难理解，这里可以参考 PDE 里的 Duhamel 原理（冲量原理），也就是把非齐次项看成每一个时间上无数“冲量”（初始条件）的叠加。

¹⁶请自行寻找，Zlib 上就有。

¹⁷请在 b 站搜索 up 主“我真的不懂分析”。

6.3 抽象代数

这门课推荐所有有志于基础数学的学生重点掌握。

抽象代数的主要内容是群、环、域、模四个代数对象。大类的抽象代数只有一学期，主要内容是基本的群环域，基本上没有模论¹⁸。拔尖和强基的抽象代数则是两个学期，其中抽象代数 1 是群和环的基本内容，抽象代数 2 则是模论和域论。注意这里抽象代数 2 是半学期的课程。

参考教材：邓少强，朱富海.《抽象代数》

下面给出一些可行的学习资料，请选择适合自己的：

- [1] 肖梁老师的 note, [点击进入课程主页](#). 可以作为主线参考.
- [2] 莫宗坚，蓝以中，赵春来.《代数学》. 讲法与内容与现在一些主流内容有所不同，可以作为额外知识补充.
- [3] 冯克勤、李尚志、章璞.《近世代数引论》. 补充一些群论里面奇奇怪怪的小知识¹⁹.
- [4] Serge Lang. ALGEBRA. 大厚本，当做字典使用.
- [5] D. Dummit, R. Foote, Abstract Algebra, 3rd edition. 内容非常非常多，例子也很多，如果你现在还是大一，或者大二刚开始，并且有充足的时间花费在抽象代数上，可以阅读. 如果时间不多的话请当成字典，或者选择性阅读部分内容.
- [6] Milne 的部分讲义，可以参考 [Milne 的主页](#).
- [7] 李文威.《代数学方法 1》. 如果你对自己的水平没有十分充足的自信，不建议初学使用. 建议作为基础内容学习之后的进阶教材. 这本书可以帮你掌握相对现代的语言.
- [8] 101 计划的《代数学 3》与《代数学 4》. 内容接近[徐彬斌](#)老师的讲义，可以作为主要参考.
- [9] Michael Artin. Algebra. 来自 M. Artin 的经典代数教材，可以作为主要参考.

以上已经列出了足够的参考教材，但是请注意抽象代数终归是语言，而语言最终要落到语境中。请不要在没有充分数学积累之前过渡沉溺于语言本身，健康的状态是掌握了基本的语言就去使用，在使用的过程中逐渐补全你对语言的理解，而不是背字典。此外请警惕藏书千本但是实际上一本不读，也不要每本都要从头到尾读。一定要学会根据自己的需要选择性阅读。

适当的做题对于抽象代数的掌握是有好处的，可以参考：

- [1] 冯克勤，章璞.《近世代数 300 题》. 部分题目的答案可能技巧性过强或者有着一些深刻背景，不要强求背诵掌握. 在 AI 能力强大的现在，可以向 AI 询问题目的背景与技巧的思想.

¹⁸模论是十分重要的.

¹⁹不要快速沉迷进有限群论的技巧中，这并不是说有限群论不值得研究，而是你需要在有足够的数学成熟度的情况下来考虑这些东西.

最后是域论，在这里你需要学习各种域扩张的性质，要去体会早期数学家是如何为了研究多项式的根，一步步抽象出代数扩张以及分裂域等概念的。更多的内容会在选修课 Galois 理论中学习。我推荐有志于基础数学的同学要去学习 Galois 理论。

6.4 实变函数

学习目标和建议：

众所周知，我们在数学分析中学过黎曼积分的概念，但黎曼积分它并不是一个非常完善的积分定义（甚至连测度都没有定义），所以实变函数这门课它的目的就是定义出来 Lebesgue 测度，以及对应的可测函数和积分的概念，包括 Fubini 定理、控制收敛定理等重要定理（实分析的控制收敛定理是本科分析学最重要的定理之一，但是如果用数学分析里的黎曼积分去叙述这个定理，会相当复杂）

关于 Lebesgue 测度的各种性质，还有这个测度为什么要这么定义，很多初学者会感到比较抽象，这时可以同步学一些抽象测度论（比如 Folland）可能会觉得简单很多。

推荐参考书：G.B.Folland. Real Analysis.

这是笔者唯一推荐的实分析参考书籍，它的前 6 章涵盖了许多在基础数学里比较通识的内容²⁰，包括基础的点集拓扑 (Ch.4) 和泛函分析 (Ch.5)，这也是为什么笔者建议尽早上手并掌握这本书 (的前六章)，尽管这本书经常被诟病为偏难，但是对于想要学习基础数学的同学，前六章确实已经相当通识且必须。

6.5 概率论

概率论是一门比较奇怪而且定位暧昧的课。除去概率统计玩应用的和专门做概率的，一方面如果你是做几何或者代数的，很可能这辈子都不会再见到它一面；但另一方面，如果你做点分析或者组合，又会发现概率的东西总是会时不时地跳出来。

关于推荐教材：截至本节写作时间 2026.6.28，拔尖班使用的教材应该是 101 系列的概率论，对于通识性内容来讲已经足够。

对于大类则需注意授课内容的问题，大类概率论由江一鸣老师讲授，但是受限于讲授形式和选用教材，这门课更像应用概率与默写²¹，关于自修，江老师可能会提到考多少给多少，但这个其实有点误导性，指的是不会期末卷面给分上为难你，而不是总评不看平时作业分，所以如果是系统上申请自修，一定要交作业，如果是第二/更多门的交表申请的自修，也建议确认名单上有你的名字，然后提交作业，这样可以统计上你的平时分。

大类教材为李贤平概率论，这本书的写法一言难尽，为了大量向下兼容牺牲了太多内容，按照数学系的标准而言，概率论的基础应该是测度论/实分析，而这本书则完全不涉及，但它却又想讲严格证明，由此可见本书定位确实模糊，不知作者是在什么背景下写的。

²⁰如果志在分析，那么就是前 8 章。后面的每章也可以看，但是都有更好的专门教材。

²¹jym 老师会考一题定理的默写与证明，并且可能不认高等方法。

如果你喜欢的方向将来有可能接触到概率，笔者建议你考虑在具有一定测度论基础的前提下，自学如下书籍²²：

- [1] R.Durrett. Probability: Theory and Examples
- [2] Patrick Billingsley. Probability and Measure
- [3] David Williams. Probability and Martingales

6.6 点集拓扑

参考教材：张德学. 一般拓扑学基础.

南开点集拓扑课程的内容可能包括但不限于：

- 集合、映射与实数公理.
- 度量空间：包括度量意义下的开集，闭集，完备度量空间，序列紧度量空间.
- 拓扑空间：包括拓扑，邻域，内部，闭包，连续映射，同胚，拓扑基，子基，邻域基，网的语言，拓扑与收敛.
- 紧空间、Hausdorff 空间，紧 Hausdorff 空间，正规性与 Baire 性质.
- 乘积空间，Tychonoff 定理，商空间.
- 连通空间与道路连通空间.
- Urysohn 度量化定理与仿紧空间.
- 滤子的语言，Tychonoff 空间，Stone-Čech 紧化，局部紧空间与最小 Hausdorff 紧化，拓扑完备空间.

真正要学习的东西其实要多于所列的这些大纲，其中就包括了很多正常学习拓扑学不太会遇到的点集拓扑定理。一般来说不需要学习这么多拓扑内容，虽然说这些内容可能会在少部分人的未来某个时刻提供帮助，在我个人看来没有对应的数学实体，或者说具体的数学对象之前，毫无动机地学习这些东西是不健康的。

对于大类的同学，如果你不太喜欢数理逻辑和描述集合论，我们不建议你选择这门课。备考的高难度和可能的低绩点是你需要充分考虑的因素。如果你真的想学一点拓扑，可以前半学期旁听，后半学期学点代数拓扑，后者对大部分人来讲都很重要且更加通识、基础。

对于需要必修这门课的拔尖/强基同学而言，后半学期的内容就不得不品。但是靠前的内容可能会更加重要。如果你想对自己进行充分的训练，可以考虑 Folland - Real Analysis 第四章的 80+ 道点拓习题，利用这些题练会基础内容也许能让你稳拿一个看得过去的基础分。如果你想更加稳妥，把张德学的课后习题做一遍也许是一个选择。

²²没有必要全读一遍，按需即可

我们推荐可以直接学习 Munkres 的点集拓扑，相比于偏向形式化从而可读性不高的张德学，Munkres 的点集拓扑部分和 Folland 的第四章可以为你提供一些基本的论证方法和几何直觉。

参考书目：

- [1] James R.Munkres. 拓扑学.
- [2] Armstrong, *Basic Topology*. 适合速通，给出直观，严谨性有缺失.
- [3] 王作勤老师的[拓扑学讲义](#)，在详细程度与内容覆盖上几乎达到一个 maximal，可以作为一个重要的参考.
- [4] 雷锋春，杨志青，李风玲所著的《基础拓扑学及应用》，为 101 计划中的一本书. 内容简明扼要，写的也很清楚，适合只想快速掌握拓扑语言的同学学习.
- [5] Hatcher 写过一本点集拓扑的小册子，叫 Notes on Introductory Point-Set Topology，在他个人主页可以找到。实际上常用的点集拓扑基本就只有这么多。Hatcher 的代数拓扑应该是学习代数拓扑不得不品的一环，早点接触他的语言风格也有好处。
- [6] 尤承业的基础拓扑学写得不错，详略也得当。如果你想学习拓扑（点集拓扑和代数拓扑）的基础内容，这本书应该会比较合适的。

最后，我们认为点集拓扑作为语言性的内容，适当熟悉是非常有益的，但过多地学习则未必无害。除去最为必要和通识的内容外，我们不建议读者在没有动机或需要的时候学习过多之外的内容。一般认为在没有遇到具体应用前掌握以下部分就暂且足够（可以参考 Munkres 的第 1 到 7 章）：

- 基本的集合公理.
- 拓扑空间与连续映射的各种语言.
- 从已有空间构造新空间的方法，如乘积空间与商空间及其性质.
- 度量空间的基本性质.
- 拓扑空间的分离性与可数性，连通性与紧致性.
- 完备度量空间与函数空间的相关性质.

正确而又健康的做法应该是把最基础的语言掌握，剩下的等到遇到的时候再去学，而不是在什么数学实体都没有的情况下疯狂塞入定义与各种技术，这毫无疑问是本末倒置的。

6.7 泛函分析

参考教材：刘炳初，《泛函分析》。

课程内容是标准的，整体难度不大，上课认真听并且完成课后题就基本上不会有什么问题。但是缺点和复变函数一样，内容较少，对于一些同学可能会不够用，所以可以考虑如下的参考书籍。

- [1] 王凯, 姚一隽, 黄昭波. 《泛函分析》. 为 101 计划的泛函教材, 内容比南开教材更加全面, 且内容深浅比较合理, 对于绝大多数学生来说都是十分好的参考, 建议阅读。
- [2] 大类的李磊老师讲义写得不错, 是和台湾的一个老师一起写的, 全英文讲义。
- [3] Conway, A Course in Functional Analysis. 这本书的内容比起南开教材多得多, 想要看的话可以选择部分章节进行阅读。Conway 是教科书式的书籍, 内容写的较为全面, 对泛函分析兴趣不大的话只建议作为参考资料翻阅。

如果你将来会较多地用到泛函分析, 建议在具有一定基础后, 阅读 Rudin, Functional Analysis. 这本书内容写的很好, 但是最开始就从拓扑线性空间出发, 观点有些一般, 初学时是不容易接受的, 建议具有一定基础后再进行阅读。

之后的建议: 在上完这门课程之后, 如果有兴趣的话, 可以去上李磊老师的“拓扑线性空间”课程。这门课程内容是简单介绍一下更一般的泛函概念—拓扑线性空间及其基本性质, 外加弱拓扑的一些内容, 最后再稍微补充一下 Von Neumann 代数的基本知识, 适合作为泛函分析课程的补充。由于课程内容比较基本, 用李磊老师的讲义即可, 写的不清晰的地方如今的 ai 也均能为你讲解。

对于算子代数有兴趣的话, 可以去学习刘锐老师的“抽象函数与 Banach 代数”课程。课程虽叫这个名字, 但截至本节写作时间 2026.8.13, 课程讲授的内容实际上是 Banach 代数与 C^* 代数的基础知识。此课程没有明确的参考教材, 可以参照 Conway, A Course in Functional Analysis 以及许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾所著的《算子代数与非交换 L_p 空间引论》。

杂谈: 实际上, 笔者认为我们的《泛函分析》本科必修课, 讲的还主要是关于拓扑线性空间 (或者说无穷维线性空间) 的基本性质和定理, 实质上更像一门拓扑或者线性代数的后续课。不过, 如果读者想要深入学习分析学, 尤其是 PDE 等对函数性质研究深刻的学科, 你们可能会发现本科的泛函分析基础是比较不够的, 而且最主要的问题是, 从本科上的这门课来说, 我们很难看出来研究泛函分析这门课的动机。

不过, 从它的名字也能看出来 (毕竟, 泛函的本意就是函数的函数), 泛函分析这门课的本质动机, 还是研究函数的变换和性质, 尤其是函数空间和作用在函数空间上的算子, 这也是泛函分析在现代分析课中最重要的应用 (而不是抽象的拓扑线性空间)。举两个简单的例子:

1. 算子半群和 PDE

会看到这里的读者应该熟知, 关于函数 $u(x, t)$ 的发展型 PDE (随时间演化的 PDE) 一般可以写成这个形式:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

其中 A 是函数空间的线性算子。像热方程、色散方程 (包括薛定谔方程、KdV 方程等) 都属于这种形式。

对于这种方程, 传统的方法会用傅里叶变换、找基本解等手段去研究; 不过如果对泛函分析了解比较深刻, 我们可以把 $u(\cdot, 0)$ 到 $u(\cdot, t)$ 的变换看成函数空间上的

线性算子并记为 $S(t)$ ；更进一步，我们还可以证明这一族算子 $\{S(t)\}$ 是关于 t 的单参数算子半群。

这一方法的威力在于，它可以让我们用常微分方程的视角去观察偏微分方程，可以刻画 PDE 理论中的很多问题，在此以 Duhamel 原理（冲量原理）举一个例子：

考虑方程 (6.1) 的非齐次形式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f(t), \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

利用算子半群的平移性质 ($S(t)S(s) = S(t+s)$)，我们可以将非齐次项 $f(s)$ 视为在每一个微小时间层 s 上施加的“瞬时冲量”。这个冲量从时刻 s 开始，由半群 $S(t-s)$ 传播到最终时刻 t 。对所有时间层积分，就得到了 Duhamel 原理的严格数学形式：

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad (6.3)$$

2. 谱定理

谱定理是泛函分析里的一个定理，这一定理的强大之处在于，它断言：任何一个（无界）自伴算子，在某个合适的函数空间上，都“酉等价”于一个简单的乘法算子。

这一思想类似于高等代数里的正定矩阵对角化，不过区别在于，不像有限维矩阵一定只有有限个特征值，这种一般算子的谱可以是无限甚至连续的，这时候就要引入“谱测度”的概念。

谱定理和谱测度的思想在薛定谔方程中的应用尤为深刻。

最后在这里，笔者可以推荐一些关于泛函分析和应用的升级书：

- [1] Philippe G. Ciarlet, Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications. (ps: 感谢陈抱一、叶明樱、柳安宁等几位学长大力推荐这本书)
- [2] 张恭庆, 泛函分析讲义下册
- [3] Haim Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.
- [4] Conway, A Course in Functional Analysis. 这本书前面已经提到了，它的内容非常多非常全面。

当然，上面这些笔者主要说的是线性泛函分析，关于非线性泛函分析的内容可以参考选修课里的《变分学》。

6.8 BOSS：数学物理方程

本节由 本节编写组 于 2026/7/21 编辑。

1. **任课教师：**魏雅薇
2. **难度等级：**中高难度²³(本研合上 **极度危险**)，魏老师对大类的同学很好，所以大类同学无需过分担心，认真上课即可。相比于一般课程，本课存在以下困难：
 - (a) 参考书籍写的很烂，并且存在一些隐蔽的错误。²⁴
 - (b) 作业/期末考试不承认非标准²⁵证明。
 - (c) 期末考试书写量极大²⁶，背诵量更大²⁷。
 - (d) 改卷给分存在争议。

建议充分细致地学习（背诵）考纲上的所有内容并确保没有遗漏。我们不建议任何一位还想保研的同学尝试速通本课程。
3. **考察方式：**平时作业 + 考试，有 2-3 次随堂小测，没有大作业/论文。
4. **参考教材：**
 - [1] 齐民友，《广义函数与数学物理方程》。
 - [2] 伍卓群，《椭圆与抛物型方程引论》。
5. **主要内容：**参考 26 年授课大纲，可能会随时间变化，请一定弄清楚你当前年份的考纲是什么。红色部分为伯苓本研合上所需。

第一章 准备知识：

- 1.1 常用不等式：Young 不等式，Holder 不等式，Minkowski 不等式。
- 1.2 磨光，截断函数与单位分解。
- 1.3 广义函数。
- 1.4 傅里叶变换。
- 1.5 Sobolev 空间与 Holder 空间。参考伍卓群的 1.1 - 1.3。

第二章 二阶线性椭圆方程：

- 2.1 Laplace 方程：基本解，Green 函数及其性质，调和函数性质，亚椭圆。
- 2.2 Poisson 方程的变分法及 L^2 理论。参考伍卓群的 2.1-2.3。

²³平心而论，这门课在大类，或者伯苓没有本研合上的时候难度并不大，只是一门单纯的背诵课程。

²⁴如果这门课照抄 Evans 的话可能难度反而会降下来。

²⁵指和板书或课本不完全相同的叙述、术语或公式。

²⁶参照 26 年伯苓班卷子，一道题能写大半面 A4，而这样的题一共有六道，想在考试时间内写完试卷需要你熟练默写题目答案并且笔一刻不停。

²⁷26 年伯苓班改成本研合上之后，内容比往年多出了 1/3，并且都是难度较大且对绝大多数同学而言没有学习意义的类型。

第三章 二阶线性抛物方程：

3.1 热传导方程：基本解，初值问题，一维初边值问题.

3.2 L^2 理论：Lax-Milgram 定理变体，弱解存在唯一性与正则性. 参考伍卓群的 3.1.

第四章 二阶线性双曲方程：

4.1 波动算子的基本解.

4.2 一维波动方程.

4.3 波动方程 Cauchy 问题：降维法与物理意义.

4.4 能量方法解初边值问题.

4.5 波动方程初边值问题与 Cauchy 问题的稳定性.

6. **如何学习：**我会说上课好好记笔记，考试题目基本上都是板书定理的证明，当然有些定理证明会留做作业，不过书上基本上也有。也有[电子笔记](#)，不过未经校对，谨慎参考. Chapter 1-3 是完整的笔记，忠实记录课堂内容，Chapter 4 没有记完，剩的部分在年终总结里面可以找到。大类的话只看年终总结也许足够，但我不负责，内容可能每年都在变化，具体考纲请问清楚当年需求。伯苓与强基同学还需全面复习！全面复习！全面复习！毕竟 26 年考了本研合上中新增内容的两个最长最困难的证明，一批人中招，请后人务必以此为鉴.
7. **期末复习：**背诵！背诵！还是背诵！请务必把所有内容所有过程所有东西全部背诵记牢，如果有时间要自己默写几遍。

7 古神的低语：核心选修

7.0 导言

本节由 本章编写组 于 2026/8/14 编辑。

声明：因为数值分析和运筹学并不是所有人的必修课，但却是事实上的必修课，考虑到与核心选（择性必）修性质类似，所以也放在这一章。

本小节我们从宏观角度评价核心选修，具体的选课建议我们会在下面各个小节开头的 subsections 提到。在导言部分我们只谈粗糙的规划和建议。

核心选修课各有各的特点，但有一个共同的特点就是开课很随意，比如某算法导论没有教材没有讲义没有作业没有课程群，上课用的 ppt 你找老师要但老师不给，你只能在上课的时候自己一页页全拍下来，让人完全不知应该如何准备期末考试。

就编者目前了解的所有核心课来看，至少都没有一个比较忠实的讲义或者参考教材。这样的防自学机制，加上有些课实际上很水，内容不多，他讲两节课的内容你可能半个小时就能学完，而且本身有些课就不是你想学的，在这些课上花更多时间根本不经济。我们建议你可以通过组团上课，或者选一些已经有明确通关教程的课，比如有的课已经有学长做出比较忠实的笔记，这样自学起来相对就容易些。

核心选修课的缘起与未来：对于想学基础数学的同学而言，如果你身处大类，那无疑是自带一个负面 buff，原因在于教育部的规划里面并没有一个叫做“基础数学”的专业，有的只是“数学与应用数学”和“信息与计算科学”，前者虽名带数学，但是实则应用数学。故为了符合毕业证上的专业名字，学校不得不强制大家修一些对应的课程，于是核心选修课就诞生了。理论上来说，想在基础数学方向深造的同学最好最好进入伯苓班，因为伯苓班是教育部特批的“国家理科基础科学研究与教学人才培养基地”，从而可以制定只有基础数学的培养方案。既然已经有了这个伯苓班这个专为基础数学而生的班型，学校自然也不再可能在大类再分出一个基础数学专业了，所以大类学生想只学基础数学的课程在基本上短期内来说无解。

但伯苓班又是一个有额外选拔机制的班级，所以并非所有想做基础数学的人都能够进入，而且进入伯苓班的人也未必都想做基础数学，他们可能只是觉得伯苓班的政策更好，这在一定程度上确实违背了伯苓班的初衷。我们认为这是一个未来可以想办法改进的地方，但是我们对于具体的方案并没有一个明确的想法，只能相信后人的智慧。

尽管我们中的部分同学已经想尽办法减少了核心选修课的门数（因为很多时候实际上搞计算的同学不需要学信息的课，搞基础的同学不需要学习核心课，而在学分要求下选自己不需要的课是不可避免的），核心选修课仍然是大类同学不得不品的一环。

在 2025 年九月，学生会建立了权益组。权益组的部分初衷就是希望有一天同学们能够通过努力让大类的同学们也可以从基础数学专业毕业，像北大的同学们一样。但大三下学期三四月底才第一次开展座谈会反映相关意见，有关校领导表示基础数学

的问题是历史遗留问题，说是教育部里面没有设置这个专业²⁸，但实际上北大培养方案中又确实实写了这个基础数学专业。这里面涉及的事情看上去不少，所以想在我们这届就解决这个问题基本上是不可能了。

但无论如何，以丁院长为首的一些老师们还是想解决这个问题的，也许解决这个问题需要很长的一段时间，也许解决这个问题会遇到一些阻力，也许随着人工智能 ai4math 的发展渐渐没有那么多愿意去学基础数学了。但无论如何，只要能让哪怕一个人受益，付出的努力就不能说白费。

7.1 数值分析

本节由 陈抱一 于 2026/6/27 创建。

1. **任课教师：**吴春林、赵志勇

2. **风险等级：**中高风险

本课可能存在的困难有：

(a) 期末考试计算量大，并且可能会出一些藏在犄角旮旯或者书上没有但他上课提过的概念。²⁹

(b) 教师口头布置作业³⁰

请各位不打算专精相关方向的同学预留充分时间（期末一周左右刷题，平时简单课上自学）学习、复习和高强度刷题（如果能找到其它学院/学校的题目的话），以防造成不必要的损失。

3. **考察方式：**平时作业 + 考试，有两个代码实验作业，需要提交对应的实验报告以及课上做展示检查代码是否能跑。³¹

笔者上的这门课两个代码实验作业分别是：

(a) 编写一个程序画图演示 Runge 现象

(b) 编写一个程序，采用课本上的任一种方法，求解 $n \times n$ 的线性方程组（ n 不确定，需要作为代码输入）

4. **参考教材：**黄云清、舒适等. 数值计算方法. 第一版³²

5. **如何自学：**课本写的尚可，笔者的学习方式是疯狂看课本。这门课的主要要点就是进制、函数一致逼近和正交基、数值微积分（尤其是积分）、数值线性代数和牛顿法。数值线性代数就是解方程的各种迭代方法，函数正交基就是施密特正交化，可能学过一点泛函分析会轻松很多。笔者学的泛函直接把里面的各种奇妙矩阵引理以及各种迭代法当成了非线性泛函分析几章的习题。

²⁸ 参考上面的内容，想要这么做就只能特批的基地班，但是被数学伯苓班占去了。

²⁹ 此类概念主要出现于第一章进制转换/误差因子，后面都是按照书上讲，故刚开始几节课请认真听。

³⁰ 主要是前半学期，后半学期老师直接在课前就把作业抄在黑板上了。

³¹ 笔者这一届由于和大语考试挨得太近，故改成提交演示视频。

³² 有人买成第二版了，但其实除了章节编排基本没变。

6. **期末复习**：没什么可说的，到期末的时候，如果你有在跟进度，那么课本知识你肯定是熟悉的差不多了，而课本刚好有课后题，我推荐你提前一周全部刷完。这样基本没什么问题。
7. **应考细节**：很多事情还是要放到这节里面说，其实数值分析困难就困难在题量大、原题少，确实有签到题，但是签到题也不少。

常见的数值分析期末结构就是七八道题，签到题前三个大题，第四个题数值解方程，把人当计算器跑，然后考个数值积分公式/Gauss 公式，接着理论分析题，比如分析迭代收敛性或者课本上一些定理的证明。下面对每个题我们都展开说一下应对技巧：

首先签到题，进制转化不必说，差分记住定义就可以，第一个卡人的地方往往是让你弄一个 $f[3^0, 3^1, \dots, 3^7]$ 这种看起来很恶心的东西，其实这就是差分的性质，这里就是考你课后题刷了没，差分有一个导数中值性质，做这么多差分一看就是非人力可及，带进去一看，哟， f 这个多项式导一导居然变成常数（或者 0），于是做完。

接着还是签到题，这里就会考点犄角旮旯的东西，没办法，虽然简单，但是背/做题就完事了。切比雪夫多项式这种东西确实挺重要，如果你上课或者读书认真的话应该也能很快回忆起来怎么做，只需要注意 $\cos(n+m) + \cos(n-m)$ 化简出去没有 $\sin$ 就完事。

然后是第一个比较麻烦的题，解线性方程组，一般很多问，第一问让你用 XX 分解法解方程组，但是显然当你算到诸如 $\frac{109}{48}$ 这种难看的要死的玩意的时候也很难沉得住气，我的建议是看到先别管，用你自己最熟悉的方式先把解弄出来再说，算对第一题的答案是后面的基石，步骤凑合凑合像样就好。

然后你有可能会遇到 JOR 或者 SOR 的迭代收敛性判别，写出迭代矩阵 G 先别急着算谱半径，有时候行和/列和范数 <1 能帮你省很多事。

余下的理论分析题没啥好讲的了，无非就是泰勒展开 + 消低阶项列方程或者弄点压缩映射，我认为数分学好看懂书上叙述应该没有难度，只要能撑到这里你就是好样的，基本不会难，尽管不是原题应该也卡不死你。

8. **对于自修**：本课程是有平时作业的，自修同学交作业的时候一定一定要注明自修！！不清楚其他届的情况，但是 22 级的时候数值分析的助教非常多，可能由于这个原因，有位学长即使每次都上交了作业，但是有时没有注明自修，最后期末平时分只有 60。

最后强调一遍：课后题很重要!!!

7.2 运筹学

本节由 朱婉铮、孙笑川 创建于 2026/6/28，

由 王诺豪、陈抱一、叶明樱、柳冰、赵远舒、孙笑川、许广 等编辑于 2026/7/2。

鉴于 运筹学 的未知性较大，我们需要你的帮助来完善本条目中的备考信息，包括但不限于：学习/应考细节、回忆准确期末考题。

1. 任课教师：胡威

2. 风险等级：中高风险

本课可能存在的困难有：

- (a) 高强度课上点人回答问题/课后作业当堂做当堂交
- (b) 期末题量/计算量**很大**³³
- (c) 存在教考分离趋势

该点在 2026/6/29 考后补充。教考分离实在不是一个准确的好词，但这一条确实是大箩筐，在这里主要指期末老师公开的考纲与实际考察的差异。如果你在课上跟着老师写作业/例题，就或多或少能体会到一点这种倾向——很多东西老师并不会直接讲明白，而是出一道“陷阱题”让你先犯错/懵逼不会算然后“自行体会”。

根据今年的情况，老师在最后一节课说，第二章考两个大题，其余章节各考一个大题，每个大题十分，填空题十分。对策论一章只考与作业类似的题目（有个人就没有准备矩阵对策线性规划相关的问题，现在不知道绩点如何）。但如果你观察考试卷子，你会发现情况并非如此。**但她说不考的题目确实没考。所以你不能把老师说的参考当成一种暗示，一定要想办法让她做明确的回复。**因此实际上有理由认为，更贴合老师出卷内容的实际上是往年题，而不是她最后一节课宣称的考试范围。

相比于往年的机械验证，今年的题目要更加灵活：内容上确实是最后一节所划出的重点，但今年的运输问题（考前说是不考需求不确定的，一般认为是直接考标准产销平衡的运输问题求解，但是今年考调整）和匈牙利（要求真多，又添加 M 又造虚拟人，题刷少了可能会卡一下）考的较为出乎意料，最后一题虽然老师明显下了点功夫减少计算（单纯形迭代一步就出来了），但还是让你手撕单纯形法接着搞两次灵敏度分析，总体来说计算量和灵活程度比往年都要大。结合往年题均没有准确回忆版，你可能很难找到一份卷子为考试摸底，无法把握考试到底是什么情况。

- (d) 课本防自学（点名胡运权的运筹学教程）³⁴

请各位不打算专精相关方向的同学预留**特别**充分时间（期末一周左右刷题，平时简单课上自学）学习、复习和**极高强度**刷题³⁵，以防造成不必要的损失。

3. 考察方式：平时作业 + 考试，期末考试占**80%**。没有大作业/论文。

补充：老师给分还是可以的³⁶，有一位笔者的状况是 10 分矩阵对策题第一步除了标准格式全算错 + 匈牙利法算错最后总时间 + 目标规划忘写 $x_i \geq 0$ ，ta 已

³³若未经足量高质量、高强度训练，考场上很难算完且全部算对，走错一步就是万劫不复大量丢分！笔者建议你一定要把基本的解题步骤写清楚混到保底步骤分。

³⁴有笔者按 ppt 自学时曰：云云云！假作真时真亦假，无为有处有还无。

³⁵除去本校能找到的往年期末题，考虑到运筹学这门课在全国蔚然成风，你也可以尝试找找你的高中同学甚至网友索要他们学校的期末题，这就省去了在运筹学习题集里挑题的功夫。

³⁶老师：大家写不完的一定不要放空

满绩。这也是为什么我们建议未来的编辑者出分后编辑，数位笔者都因为自己的作答状况不理想而沮丧过几天，运筹学这门课的容错虽然不大，但还是有一点的。

4. **如何自学：**首先，立刻丢掉手里由胡运权写的所有教科书（习题集除外，你在期末会用到它），这本书语言混乱，描述不清，令人读起来极度痛苦，自学建议直接出门微信搜索公众号“清风与溪流”回复“运筹学”，这不是广告，这是一份 human digested 的运筹学笔记，相比于胡运权写的神秘书籍阅读体验至少有 2000% 的改观，并且这份笔记是按照 hw 老师课上讲课顺序推进的，这很重要，因为期末真的考过老师上课按照什么顺序讲的问题。

其次，你不需要牺牲课下的任何时间（除了写作业）读运筹学内容，考虑到运筹学存在高强度课上签到行为，课是无论如何要到场的，你完全可以充分利用上课时间看公众号。

另外，笔者**不太推荐使用 ppt 自学**。hw 老师的 ppt 写的省略很多，例如灵敏度规划这个很重要的章节，ppt 里却没有开示实操过程/算例。笔者猜测老师可能是期望你上课认真听讲，并自己记录笔记。因此对于期末突击党而言，找学长或者通过别的方式要到一份完整详实的笔记的重要性远大于对着 ppt 解码密文。

对于期末零基础冲刺人士而言，假设你有一份可读性较高的笔记（这份笔记保证你在各章花的时间只决定于各章的知识量，而不依赖于参悟各运筹学 ppt 和教材加密方式所需的时间），并且假设你学完每章即熟练掌握，不需要在学到后面的章节时花时间重新回顾前面的内容，那么你各章的时间占比可能为：

$$6.5 : 6 : 3 : 4 : 2.5 : 3 : 3.5.$$

这里不考虑转运和需求量不确定的运输问题，整数规划的分支定界法和割平面法³⁷，目标规划的单纯形法和灵敏度分析和决策分析中的效用函数。对偶问题一节内容上实际上我觉得可能比第一章更多，但是由于灵敏度分析及参数线性规划本质上就是一个东西，所以我给出的参考时间比第一章略少。目标规划一章比较靠悟性³⁸，你可能需要花更多时间。

尽管这门课与背流程无异，而且不考证明，但是考题里明确会出现考察理解的东西，例如简答题（直接问你 xxx 为什么 xxx 或者要求你判断）、变形之后的求参题（25 年的对偶单纯型求参）、矩阵对策和线性规划的关系等。

最后，老师最后一节课会给期末划重点，平时也会略有提及期末考试相关信息，但大多集中在最后一节课，故无论如何，最后一节课你都应在场。（值得一提的是，老师在第一节宣称自己平时会告诉大家考点，期末便不再告知。但实际情况是她期末时提到的重点比平时提到的更加详细且具有指向性，尽管她平时确实提到了部分考点。另外在最后一次课下课后，你可以继续选择 1v1 私聊老师问更多问题。）

³⁷ 注意割平面法真的会考填空题。

³⁸ 主要是语言性的，比如“满足市场需求地生产”究竟是可以多生产呢，还是必须分毫不差按照预估需求量生产呢？原理是简单的，由于 $P_1 \gg P_2$ ，所以要想极小化那些个正数，肯定是从大向小缩小可行域，保证尽可能高的级别是 0，直到不可妥协之后再考虑随机应变。

5. **期末复习：**运筹学具有题量大的特点，但是就其本身难度或者考题难度来讲，单列其实都不是想象中的那么困难，因此需要一定的高强度/质量刷题量。运筹学题目大量出现作业类似题，但她平时的作业交上去之后并不会发下来，所以如果你想期末复习的时候留一下，可以考虑每次交作业之前把作业先拍一下，或者干脆只交照片给她。最后一节课她说在给分时可能参考你的平时作业，如果你平时作业写得认真可能会捞你一把。所以认真完成平时作业还是很重要的。

对往年期末的分析显示，运筹学的期末考题还是相当传统的，这就给我们很多可以打的空间，在期末前一周，你需要先找到一本由胡运权写的《运筹学习题集》，我手上是第五版，之后按照老师最后一节课提及的重点和往年考题所考到的内容，每天每个章节做一道大题，直到对每个章节的典型大题（单纯型、对偶单纯型/灵敏度分析、运输问题、匈牙利、整数规划的建模与化简、决策树、矩阵对策）手拿把掐，肌肉记忆。

在最后两天，请去数院内部论坛（由学长/学姐们口口相传，但注意是免费公益论坛）³⁹，或者向你的其它学校的同学们求助，无论如何找到运筹学的往年题目，做就完事了，到现在 99% 的考题都拦不住你。

Appendix：某位零基础期末冲刺党的体验实录：

我在期末前只接触过部分第一章内容，共花了七天半时间“复习”（这是因为运筹学下午考试）。在四天半把正文内容学完（老师说不考和我认为可能不考的东西没有学），每天学习时间可能在 6 到 8 小时，遗留了极少部分作业题或例题（差不多大章节每章一两道，小章节全部写完）。此时如果你每天不花时间复习前一天的内容，部分题目的流程你已经忘掉了，所以我推荐你在第一遍之后复习第二遍，第二遍可能需要花一天半时间，这一遍需要你把课件上所有的例题以及作业题熟练掌握，必须要自己动手算一遍。最后一天写一些其他学校的卷子，写一点运筹学习题集上的题目，并进一步复习各方法流程确保掌握。考试当天的早上因为你对这些东西已经滚瓜烂熟，你只需要 20 分钟就可以把所有知识回忆一遍。这时候你再计算更多的题目，并进一步温习往年题。这样你早上可能并没有很多事干。笔者建议中午早一点睡觉，睡醒了之后早点到考场算两题调动一下状态（我觉得这很重要），再最后一遍把知识滚一遍。如果你按照这个流程进行复习，只要你不抱有侥幸心理把她没有说不考的内容全部掌握，正常发挥就能全部写出来。（更新，此人已满绩）

7.3 信息与计算数学

7.3.1 信息论

按道理这个课是不太难的，但孙笑川同学只取得了 3.3 的绩点，查分也不知道为什么，只说核分无误。这门课有学长写过笔记，大家可以尝试找一下。

本节由 cauchy710 于 2026/6/25 创建，孙笑川 编辑于 2026/6/30。

³⁹ 出于本文档可能的传播范围考虑，这里不予列出网址，请询问你南开数院的学长学姐，最好多问几个。

1. **任课教师：**光炫
2. **风险等级：**个人认为低风险但结合上面同学很难判断
3. **省流：**课上讲的不错，但和考试方向匹配度不高，需要大量刷题，题目参考课上推荐的外文书（推荐两本但香港那本没做过听说也有涉及）。以及一定要刷考试题。
4. **考察方式：**平时作业 + 考试，作业每周都有（除了元旦，老师很幽默那天发了作业文件但没有作业）
5. **课程评价：**老师上课有自己的讲义，可参考 cover 的 *Elements of Information Theory*，还有一本香港的没看过。大概内容是书上的第 2, 3, 5, 7 章，注意光老师是按自己的顺序讲的稍微可能有些差开，但基本一致，大致的说看这本书就 ok。

老师会格外注重讲证明，香农的几个定理花了相当大的篇幅去讲，讲的很好 (but 我没认真听) 但是考试不涉及（老师没说过，看考题猜测），这点其实从课后作业也能看出来风格，还是让你运用定义去推导。课后题要认真做

6. **期末复习：**书上课后题 + 作业题 + 往年题，足以应付。需要注意的是 25 年把 23 年的两道相对难的题目拉出来原模原样的考了一遍，没做过很吃亏，且很多题完全是课本原题。
7. **温馨提示：**和光老师打过交道，是一个很认真很好的人，非常注重细节，不管是课上还是课下都说了很多次细节问题。个人礼貌猜测上面的同学是不是因为有些细节没处理好倒了霉。（孙笑川同学上课没去过，课下更没跟老师打过交道，可能是这个原因，毕竟如果答案都是对的，扣分的点就只在格式上。但由于上课信息密度低，实际上上课性价比不高，尤其是孙笑川同学还有很多东西要学。这又回到导言中说的问题，这是核心课的通病。大家在选核心课的时候还是要认真想想。）

另外，本研考的不一样。

7.3.2 微分方程数值解

本节由 cauchy710 于 2026/6/30 编辑。

1. **任课教师：**胡广辉，乐航睿
2. **风险等级：**个人认为中风险
3. **省流：**两位老师人巨好，且都非常乐意去讲东西。但自学可能面临方向不对的问题，需要及时和课上同步。且考试有些风险，尽量多和老师交流，老师非常乐意“交流考试”
4. **考察方式：**平时作业 + 考试，作业按章节布置，前 5 章有上机作业（很简单，甚至书上已经帮忙写了程序）。

5. **课程评价：**胡老师会讲 4-5 周然后由乐老师讲，这两位都很好。也能看出来数学功底相当好。乐老师会讲一些前沿的或者拓展。感兴趣的可以去和他们交流书和考试都是英文的，但是考试不会单词可以问老师（后来胡老师吐槽你们英文都是怎么学的，然后把基本较难的都写在黑板上了）

不用担心由于微分方程基础不行而放弃（点名表扬必修课某魏老师的引进门），实际上本门课只是介绍有限元的基本思想的。

不用担心上机问题，实际上感觉好像完全不需要懂编程也能干（但做计算数学的还算希望写一下）书上有代码。

这门课是有上机课的，但是选课上面没有，本学期是周四晚上上课周四下午上机，上机乐老师会讲一些拓展内容，（主要是来的人太少了），虽然依然只来个位数。需要说明的是，乐老师上课说考试未必不涉及上机课的内容，但保证即使出也能用课上知识做出来（存疑）。

6. **教材：**本门课有两本书，有限元和**有限差分**，主要看有限元，讲到有限元第 5 章会讲有限差分，大概是 5, 6 章（乐老师会发电子版），注意题主到最后也不能确定老师有限差分讲了什么，所以 5, 6 章只是问老师和同学得出的，详细看考试。
7. **期末：**老师大概考试前两三节课就会花一节课来说考试范围，不考的说的很清楚，考什么怎么考也说的很清楚。然后最后一节课你也可以问期末考试的内容，老师也会说，总之人性化没得说。

但是我没找到往年题，如果可以同学们一定要找到往年题看看老师怎么出的题目，主要是有限差分那块，我当时就觉得可能出问题最后果然没有按书上考。可以参考下面这个题目。

原方程与边界条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0\end{aligned}$$

差分离散：

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \right)$$

(1) 收敛性. C-k 格式

(2) 稳定性. $nk \leq T$, 有 C_T 使得

$$\|U^n\| \leq C_T \|U^0\|.$$

(3) Convergence. 误差估计

$$\|E^n\| = \|U^n - u^n\| \leq Ck^2.$$

求 E^n 的收敛阶数。

其实你不去强硬代入课本定理还算不难，直接乘 + 积分。但因为考前画范围的时候说了有限差分考这种题，所以考试我一直思考怎么用有限差分的方法处理最后没做出来。问了几个同学这个类型应该没讲过，（也有可能是上机课讲的），但是给分没得说，题目难度不算小（但也不难，只是有些灵活）但老师确实给分好。

7.4 数学与应用数学

7.4.1 投资学 & 金融工程

本节由 叶明樱 于 2026/6/25 创建，编辑于 2026/6/26 。

注意：本节内容可能由于任课老师退休而失去参考价值。

考虑到金融工程与投资学都是由同一个老师开课，并且风格相似，故合并为一节统一论述。

省流：如果你对股市或者投资感兴趣，请出门左转选一门叫《走近期货与期权》的 e 类课，这两门核心选修课并不能为你解决你不了解金融或者投资的问题。

1. **任课教师：**李静
2. **风险等级：**中等风险

本课可能存在的难点有：

- (a) 不定期作业签到（作业题当堂完成并纸面提交）

这一点只适用于金融工程，金工 10 次作业，有 2 次刷新出了当堂提交作业作为签到的方式，而投资学则没有签到过。

- (b) 作业仅口头发布，班级群只发 PPT

- (c) 轻微的教考分离趋势

准确来讲，是这门课的参考资料异常地少，只有 PPT 和极少量作业题，而 lj 老师会考的稍微灵活一些⁴⁰，这就对你的应试能力或金融思维提出一定要求。

请各位不打算专精相关方向的同学预留充分时间（期末一周左右刷题，平时简单课上自学）学习、复习和高强度刷题（如果能找到其它学院/学校的题目的话），以防造成不必要的损失。

3. **考察方式：**平时作业 + 考试，期末考试占比 60%，没有大作业/论文。
4. **如何自学：**考虑到这两门课的参考资料很少，只有 PPT 和 lj 老师布置的极少量作业题（投资学的作业题有些是往年原题，但样本量还是太少），笔者的建议

⁴⁰ 老师原话：“要是都考的和 PPT 一模一样/考这个，那太没意思了。”

是先从数院的往年题回忆网站上找到投资学/金融工程的往年题（投资学一份，金融工程两份），这是了解期末如何考察的最宝贵资料，接着把它们喂给高性能 AI 如 ChatGPT 或者 Gemini 3.1Pro 等，并简述你的知识背景，要求 AI 给你掰开了揉碎了把这些考到的知识，金融背景，数学原理等等都讲明白，这样你就对整体的内容建立了初步认知，往后看 PPT 学习即可，你也可以跟李老师提前要下一章的 PPT，这样可以提前学。

最后，lj 老师在最后一节课，通常是第 16 周/17 周的那节会给整门课划重点，想问的也可以大胆问，请你务必到场。

5. **期末复习：**这两门课唯一的风险来源就是参考资料过少，而考试不会和纯数课一样考课本 PPT 原题人机验证。但笔者也没有其它的办法，期末考前把往年题做一遍，然后把 PPT（两门课都是大约 500 页 PPT，看着很多实则不多）上的各个作业和算例看的滚瓜烂熟，除此之外再无他法。

格外强调，考试可以且建议带计算器，尤其是金融工程必须携带计算器⁴¹，否则你将不能算出任何一题的答案。

金融工程考后感：疑似可以拉白，因为相比往年变化不大，故允许稳定备考策略。

7.4.2 组合论

本节由 林雅诗 于 2026/6/26 创建。

省流：这门课单纯内容上讲是很好的，但是 2025 年期末考试题量爆炸⁴²导致本课风险指数偏高。

1. **任课教师：**孙 hui、郭强辉
2. **风险等级：**中高风险

单纯从内容上看，本课程可以说是核心选修里不可多得的好课，事实证明 sh 老师也确实是很好的。但可惜原来教这门课的金 yl 老师退休之后，去年组合论期末考风格大变，题量非常之巨大，即便笔者把教科书上的题目全部都刷完了，也只能勉强招架，故将风险等级上调为中高风险。

请各位不打算专精相关方向的同学预留**特别充分**时间（期末 2 周左右刷题，平时简单课上自学）学习、复习和**超高**强度刷题（如果能找到其它学院/学校的题目的话），以防造成不必要的损失。

3. **参考教材：**金应烈、郭强辉、孙慧等. 组合数学
4. **考察方式：**平时作业 + 考试，需要提交一篇和本课程内容相关的期中论文，并且鼓励群中讨论问题。给课本挑错，助教确认后有加分。

⁴¹卡西欧为上，有一种东西叫做美式看跌期权的二叉树定价，学会使用卡西欧的 CALC 键能减少你反复输同一个式子的时间和精力。

⁴²甚至开头几个选择题还有错题的，没有正确选项，笔者搁那算半天人都傻了。

5. **如何自学：**这门课作为内容上的好课，我认为会起码有动力自学，尽管后半学期有些内容，比如 RNA 的各种匹配偏应用，但总体而言还是比较有意思和有意义的。

自学的参考材料就是教材了，课上多看即可，本课很少签到。

6. **期末复习：**请务必刷完课后所有的题，不惜一切代价提高熟练度!!!

7.4.3 离散优化

本节由 朱婉铮 于 2026/6/27 创建。

这门课是核心选修里少有的好课了，虽然内容上或许可能比较偏应用，但整体来说还是 acceptable.

1. **任课教师：**史永堂等. 离散优化教学团队
2. **风险等级：**Safe

本课的期末考试完全就是签到题，只需要看课本自学即可，零基础速通的话，笔者不敢说一周，但是 2-2.5 周是可以的。

注意助教会随机签到，但是是飞书让你发自己名字给他⁴³。

各位不打算专精相关方向的同学也可以积极与其互动，考前花一周时间简单复习已知重点和各个模块最基础的内容，接着简单写几道课后题即可。

3. **考察方式：**

- (a) 平时作业 + 考试
- (b) 一个组团大作业，让你挑选生活中的一个离散优化问题，并用所学知识解决它，并写成结课论文形式按照小组提交
- (c) 最后一节课有一个上机小游戏，算五分还是多少，还会叫你编程写一个最短路算法，但是不会编程也没关系，因为你还可以选择做一个在线测试，这个测试的得分和编程得分取高就是你这节课的分数

4. **参考教材：**史永堂等. 离散优化简明教程

5. **如何自学：**有教材的课自不必多说，看教材即可。

注意教材里有些东西写的不好，比如最大流问题那一块的“反向边”是什么？教材没说，假装你会，实际上就是在寻路的时候是现在基础图里寻找 $r - s$ 无向路，把这个无向路放到原来的有向图里，那么反向边就是相反的边咯。

还有 Dijkstra 算法那一块的可行性研究，他上来就写两个意义不明的证明，引理也描述不清，实际上你不用管，你只要会执行 Dijkstra 算法即可。抛去那些意义不明的“证明”，其实这个算法背后的直觉应该是很容易能感受到的。

⁴³至少我们这届是这样

这本教材除了第一章图论基本概念需要全部掌握，其他部分你只需要掌握最基本的概念和简单的算法：

- (a) 最小生成树问题：如何建模为线性规划，Prim 算法，Kruskal 算法
 - (b) 最短路问题：如何建模为线性规划，Ford 算法，Dijkstra 算法，广探法
 - (c) 最大流问题：如何建模为线性规划，知道基本概念和最大流最小割的互相转换构造即可，算法了解即可，不会让你真去执行的
 - (d) 拟阵基础：知道基本概念（连通性除外），会证明贪心算法可行等价于是拟阵就可以
 - (e) 匹配问题：知道匹配的各种基本概念，知道 Hall 定理和 Tutte 定理，知道如何建模为线性规划问题
 - (f) 中国邮递员问题：知道欧拉图的各种基本概念，知道如何建模为线性规划问题，知道并会证明欧拉图等价于所有顶点偶度
 - (g) 往后面其它的太难了没法考了 hhh
6. **期末复习：**按照上面提到的重点复习即可，其实你也能大概从往年题摸出来怎么考⁴⁴。本质不难，不然也不会是 Safe. 如果觉得还不够可以刷刷课后题。

⁴⁴依旧神秘网站往年题

8 开始接触近代的数学：选修与自学

“为自己编织一个梦吧。”

本节为有志于从事基础数学学习和研究的同学提供观念和方法上的指导。

8.1 方法论综述

本节由 ly_dly 于 2026/6/26 编辑。

这节被 AI 重度润色过，不过确实表达了作者想说的，作者已经完全检查并且担保内容符合自身观点。

在一切开始之前，当务之急是先问自己，是否确定要将基础数学作为自己未来的发展方向。确定大体路线的优先级往往高于盲目的努力。最实用的方法是在大学的各个阶段进行逐级排除：

- 是否在研究生阶段还要继续深造数学（还是选择直接就业）。如果答案是否定的，建议尽早考虑工科、经管、统计或生物信息等交叉方向。在同等层次下，这些方向的物质待遇与就业选择往往更加优厚和宽泛，且其学习难度明显低于数学（相对来说主要难点是获取资源和实践，这个笔者不了解遂不展开）。这个问题大部分人在大一结束前往往就已经有了答案。
- 是否考虑概率统计，或者应用数学、计算数学。这些方向在毕业后转入工业界相对容易，即使未来进入高校，也更容易通过横向课题或产学研合作获得经费支持。这个问题不需要太着急回答，大二期间边学边思考完全来得及。
- 是否已经决定了主攻的具体方向，是分析、几何还是代数？在做出选择之前，建议先把这三个方向的本科入门知识都大致学习一遍。这不仅不会浪费时间，也是应对各类考核的必要准备。即便确定了其中一个方向，也强烈建议在本科阶段尽可能拓宽视野，在精通主修方向的同时，对另外至少一个方向的重要课程也有所涉猎。这并非单纯是保障升学的权宜之计，而是夯实知识版图、避免基础薄弱的有效措施。

再次忠告，如果你确信投身于基础数学这一“火坑”，那么往往意味着你需要在心理上接受以下几点缺憾：

1. **从本科阶段就必须习惯的“冷板凳”。**基础数学的学习过程极长，且在早期几乎是隐形的。当你周围的同学去参加数学建模竞赛、职业规划大赛，拿奖拿到手软、简历上写满各种社会活动与亮眼表彰时，你不得不面对数年如一日独自啃书、做题的枯燥。基础数学在本科阶段几乎不可能有像样的论文产出，这会导致你在各类评优评奖、绩点奖学金等量化考核中，往往处于劣势。你必须学会在没有即时荣誉与掌声的环境下，依靠纯粹的内驱力默默前行。
2. **相对微薄的物质回报。**相比于计算机、金融等热门方向，基础数学的研究生和博士后阶段待遇普遍偏低，难以提供快速改善生活的物质条件。即便未来顺利进入高校，由于学科性质，纯数学也很难像应用学科那样通过承接横向课题以

获得丰厚的经费⁴⁵，你需要做好在青年和中年时期长期维持相对清贫与简单生活的思想准备。

3. **极为严苛的学术生存竞争与 AI 带来的潜在冲击。**近年来，博士后过剩，国内绝大多数高校在基础学科都已普遍推行“非升即走”的聘用考核制度，编制岗位高度紧张，学术界内部的竞争呈白热化态势。更现实的是，随着人工智能（特别是 AI for Science 等技术）的快速发展，未来数学界势必因 AI 的到来产生巨大的影响⁴⁶。你不仅要和同辈同行竞争极为稀缺的坑位，还要面对技术迭代带来的不确定性。
4. **边缘化与社会共鸣的缺失。**限于历史沿革和学科建设传统，国内相当一部分数学科学院系普遍存在重应用、轻理论的风气。选择纯数，意味着你即便未来历经千辛万苦拿到教职，也可能发现自己所在的纯理论方向在院系资源分配和话语权中处于边缘位置。此外，大众甚至身边的部分同伴和亲友，往往也无法对你的坚持产生共鸣，甚至会因其不实用、难以变现而抱以冷淡或质疑的目光。你必须学会习惯并包容这种周遭的异样眼光。

那么，在什么情况下可以确信，你就是那个适合去做基础数学研究的“天选之子”呢？笔者在此先给出几个直白的判断准则：

1. **极强的自学能力、信息获取能力以及社交能力。**这三点自然对大学里的所有学科都很重要，但在缺乏手把手指导的基础数学界尤为致命，笔者将在后文专门展开讨论。
2. **在年级里拥有傲人的成绩。**虽然要求专业课门门满分有些过于苛刻，但绝大部分专业必修课应该达到满绩（90 分以上）。在竞争激烈的当下，你应当尽量争取进入院系的拔尖班，或者在大类排名中稳居前列。
3. **硬核数分高代功底与做题能力。**你的数学分析与高等代数基础必须极其扎实。虽然这两门初等课程和后续知识的学习研究不直接关联，但它们是本科阶段训练最充分、竞争最全面的试金石。你可以通过动态进出排名、全国大学生数学竞赛，以及丘成桐大学生数学竞赛等，来对自己在同龄人中的真实水平建立客观的认知。
4. **对抽象语言的亲和力。**在学习高难度、高度形式化的近代数学知识时，你不仅不会感到痛苦，反而会产生一种强烈的、想要继续向前推进的求知欲，并渴望和他人分享交流自己刚学到的内容。
5. **拥有数学直觉与归纳能力。**对自学过的内容有透彻的掌握，能够从繁杂的表象推导中敏锐地捕捉到数学结构背后的核心动机与本质。利用学过的理论框架，你能自己提出一些有意义的小问题，并解答非平凡的具体例子，而不是仅仅停留在背诵证明的阶段。
6. **对数学本身拥有纯粹的痴迷。**你必须能够分清这种快乐的来源：是沉浸于数学规则本身的美感，还是仅仅为了取得好成绩或智力碾压他人带来的虚荣。只有

⁴⁵ 纯数学没有横向的缺点在进入 AI4Math 时代应来了一部分转机，但这波 LLM 热潮能持续多久大家并不清楚

⁴⁶ 关于 AI 对于数学界的影响，读者可以阅读我的预测[NeosTheos 消灭定理](#)。

前者，才能支撑你在看着周围同龄人已小有成就之时，依然保持内心的淡定与自洽。

7. **现实的家庭与经济支撑。**你的家庭观念不反对你从事这一相对清贫、回报周期极长的行业；同时，家庭的经济底子或你获取全额奖学金的能力，能够安稳地支撑你读完五到六年的博士，甚至应对后续留学做博士后的开支。
8. **在底层逻辑上接纳清贫。**对于物质条件的相对微薄，以及与其他热门行业在待遇上的巨大落差，你能在心理上彻底说服自己，不会在漫长的科研生涯中对此产生长期的怨念或明显的不满。

上面的这些标准，既是在对你个人的天赋与心性提出挑战，也是你应付漫长升学路上无数次严苛考核的必要装备。假如你对照之后，发现自己缺失了其中很多条件，那么确实非常值得停下来怀疑一下，是否还应该继续在这个方向上投入沉没成本。及时止损在大学阶段绝不是一个贬义词。

当然，假如你完美符合了上面的所有要求，从事基础数学研究也依然不是你的唯一选择。事实上，有许多天资优异的人，最终依然选择了走向工业界领域。工业界同样有极具挑战性的前沿科研项目，且往往反馈周期更短，具有更明确的现实应用前景。这些选择不仅能带来更丰厚的物质回报，甚至在某些维度上，能对社会产生更直接、更具规模化的实际贡献。做基础数学是一场艰难的修行，它是勇敢者的游戏，但绝非聪明人生的唯一解。

8.1.1 关于自学

计算机科学家王选曾说过：“献身科学就没有权利再像普通人那样生活，必然会失掉常人所能享受的不少乐趣，但也会得到常人所享受不到的很多乐趣。”当你决定在基础数学这条路上开启自学之旅时，便意味着你开始真正践行这句话。

一切的前提是先确定你的学习计划。比如我要在什么方向下功夫，为此我要学哪些核心知识，具体要读哪些教材的哪些章节。“该学什么”永远是和你的学习目的紧密挂钩的。关于学习方向和选择教材这些事，十分建议大家多上网查找前人经验，并主动与对应方向的学长交流。限于本指南的纲领性质，这里不作过于细碎的指导。

笔者并不认为开始自学的时间早晚或者每天学习的时长是决定性的。实际上，笔者自己也并非靠堆砌学习时间取胜。如果说笔者拥有什么很多人没能做到的优点，那就是说到做到，雷打不动地执行计划。笔者在本科阶段见过太多这样的人，他们嘴上信誓旦旦地说着要学什么方向、看什么书，但几个月过去也没见他们真正翻开过几页，直到快毕业了，才把一堆全新未读的专业书低价卖掉。

笔者非常反感这种对自己放鸽子的行为。必须记住，立下计划就一定要在可预见的未来去执行，哪怕受限于客观时间约束最终只能执行一半，那也是非常有益的。事实上据笔者观察，在数学学院里，只要你能拥有明确独立于必修课之外的学习计划，并且切实有效地执行下去，你就已经领先了百分之九十的人。

一旦你真正启动了自学，就会发现校内按部就班的授课进度缓慢到可怕。笔者至今记得大一第一次上高等代数课时的情景，因为嫌老师讲得实在太慢，笔者干脆自己在台下沿着教材的顺序往下读，等到下课时，就已经学完了学校两周都没讲到的章节。自从体会到这种酣畅淋漓的感觉后，笔者便一发不可收拾，在第一学期结束时就

已经看完了数学分析和高等代数的内容。要知道那时候 AI 辅助数学学习的技术还没有兴起，否则这个速度只会更快。讲当时的经历固然不是为了让读者与笔者去竞速，而是希望以切身体会向大家真实地传达：如果培养并发展好了自学的力量，个人的学习可以升级到何种可怕的程度。

基于以上经验，**笔者强烈建议，无论你未来是否选择从事基础数学研究，都应该考虑在本科初期尽力快速学完数学分析与高等代数。**只需掌握知识即可，不需要刷题死磕熟练度。这个过程绝对不会浪费你任何时间，毕竟在任何数学专业这两门课都是逃不掉的必修课，提前学完对你的成绩也有益无害。更重要的是，你可以直接通过这段高强度的自学体验与最终效果，尽早评估自己究竟是否适合继续深造纯数学，或者是否应该尽早转向偏应用、偏计算的方向。这实际上是为你自己争取到了一个极其宝贵的、提前试错与重新选择的机会。实际上，笔者也是经过了这一学期之后，认为自己应该继续往人类智慧的顶峰前进。开始学习抽象代数、点集拓扑、实变函数等大二必修课。

笔者继续讲后面几个学期是如何制定自学计划的。首先必须明确：一切自学都必须建立在课内成绩得到保证的基础上。由于笔者在大一上学期后半段和大一下学期，就已经提前自学完了课内要讲的所有基础内容，因此在跟堂听课阶段，接下来要做的仅仅是培养应试熟练度。为此，笔者精选了两本习题集——公认最经典的谢惠民《数学分析习题课讲义》与谢启鸿的《高等代数》习题集。笔者当年也只读过这两本，再没刷过其他任何教辅。

具体的执行策略是，课内进度讲到哪里，笔者就去翻看对应章节的题。因为当时笔者赶时间急于推进后续高阶课程的自学，所以大部分题目笔者都没有花时间思考，而是直接看答案背证明。必须澄清的是，笔者在这个过程中绝非毫无脑子地死记硬背，而是有意识地去拆解、学习答案证明里那些精妙的技巧与技术。神奇的是，这种高强度的“背诵”居然极大地增益了笔者的数学直觉与应试水平。这可能和大模型 scaling law 有异曲同工之妙，扩大背诵的样本量，然后压缩记忆，这个过程中涌现出了一定的做题能力。

这一策略的回报是立竿见影的。在大一下学期，当年级平均分只有 70 左右时，笔者的月考与期末考试成绩次次都接近满分。退一万步讲，考试题里往往会从这类经典练习册里直接抽取原题或是稍微修改条件。即使你当下的归纳总结能力稍逊一筹，还无法立刻透过表象洞察其背后的数学本质，仅仅凭借记忆也足以大大增益你的成绩。

自学使用的工具也同样值得长篇大论，我们单独立一节。

8.1.2 关于工具

这部分开学了再补，大概讲一下怎么从 0 开始学习使用（尤其是 B 端的）AI 辅助你的数学学习和生活，以及用 Agent 部署各类数学软件 and 智能体（比如 Rethlas, Danus 等）

因为 AI 发展日新月异，我只是外行，所以希望有人能和我一起完成和维护这部分。

8.1.3 关于方向与路线

笔者默认各位读者已经下定决心要在基础数学这条路上走下去了，当你做好了学术长征的心理准备，确实应当尽早去思考未来博士阶段的具体研究领域。但是，切莫在本科阶段过早地给自己画地设限。

在本科期间，凭借纯粹的兴趣去涉猎各个数学分支都是值得鼓励的。很多方向的名字听起来很浪漫，但实际的技术却极其繁琐枯燥；有些方向看似古板，却蕴含着惊人的结构美。你唯有亲自下水，才能彻底破除错误印象。而在这个试错过程中积累的数学素养，往往会在未来的某一天，以意想不到的方式反哺你的核心研究与课内成绩。

即便你已经早早确定了要深耕分析、几何或代数这三大基石中的某一个，**笔者也强烈建议你务必补充学习另外至少一个大方向的基础课，至少力求覆盖丘赛考纲（我知道这并不容易）。**⁴⁷纯数学的各个分支从来都不是孤立的，问题与问题之间总有着隐秘的关联。更现实地说，未来你总要迎接博士资格考试，都会硬性要求你在好几个不同的方向中选考并通过（尤其是近些年求真书院、中科院夏令营还可能会以选做题形式考察后续课程⁴⁸）。指望到了大四或者研一再从零开始突击是极其不现实的。更何况，只懂一个领域的数学工作者，其视野注定狭隘，对本领域的理解也绝无法达到登堂入室的深度。

以笔者从事的算术几何方向为例。从学术分类上看，它显然属于代数方向的范畴，但其底层的基础课程和真正关心的问题，却与几何学有着千丝万缕的深刻联系。算术理论中的许多伟大理论和工具，实际上都是前人先在流形的解析理论、代数拓扑中观察到了类似的现象，然后天才般地类比、平移到代数体系中来的。如果不懂几何，搞算术无异于盲人摸象。正因为意识到了这一点，笔者在本科阶段主动涉猎了复几何与黎曼几何的核心内容，并系统修读了这部分的高阶课程。

顺着你真正关心的具体领域向外围不断延伸，你自然就会知道下一步该学什么，而且你会绝望又兴奋地发现，你感兴趣的数学知识是永远学不完的。笔者曾经在学习过程中，惊叹于模型论在秒杀某些具体的代数或分析问题时所展现出的降维打击般的魅力，便顺藤摸瓜去自学了一部分与模型论关联的数理逻辑知识。

8.1.4 展示你自己与寻找小团体

本节我将讲一下，除了卷绩点卷竞赛还有那些方式提升自身的“溢价”，以及找到志同道合的小团体的（大致按照私域到公域的渠道排列）。

8.2 讨论班

本节上半部分由 杨毅涵 于 2026/08/18 编辑。

讨论班是数学界的重要传统，在运行良好的情况下，它的效率要远远超过一般的课堂，它对于成长的作用是重中之重的。然而，当前南开由学院开班的官方讨论班往往流于形式，经常是台上准备不足的人对着台下兴趣不足的人讲课，然后浪费掉一下

⁴⁷尤其是 AI 证明井喷之后，数学界进入后真相时代，这大大增强了我学习不同分支的动力。至少有生之年我要看懂那些被做出的大问题的叙述和证明，算是一种眼见为实。

⁴⁸中科院的选做题只存在了一年时间，26 年又回到了纯粹的数分高代考试。

午的时间。而学生自发组织的大型讨论班往往真正参与的人也就寥寥，大部分人坐在下面既不提问也不讨论，那讨论班也就是名存实亡了。

自大二开始，我参与了大小不下十几个讨论班，真正让我感受到有讨论意味的只有最早最早我们宿舍四个人玩闹一般的拓扑学讨论班与陈所学长带领我们开办的同调代数讨论班与代数几何讨论班。前者是因为我们四个当时真的是啥也不会，但是关系较好，所以我在台上讲，底下的舍友毫无负担地向我发问，让我挂黑板，但是正因为这样，才会对各种细节有深刻的掌握。后者是因为有几个比较懂的人带着我们一堆略懂的人，这样大家都能参与进来，有话可说，大家性格也比较好，都愿意发问。

所以一个合理的高效的讨论班配置应当是一个很懂的人带着一堆略懂的人来，而且人数要控制在十个以内，人数一多就不再是讨论班而是轮番上课了。学校现在每学期开班的那些官方讨论班里面基础数学的也就每学期一两个，并且说实话学生参与度较低，只有极个别讨论班是真正活起来的。所以我们推荐大家找到一些志同道合水平类似的同学，高参与度地举办讨论班，大家关系要弄得熟络起来，否则很快又会死气沉沉。如果找不到很懂的学长或者老师带着你们走，也完全可以找一些水平类似的同学相互找茬，结合现在高度发展的 ai，我相信这也会有很大的作用。

我建议大家要多多举办讨论班，真正意义上的讨论班而非死气沉沉的讨论班，这不仅会帮助你的学习，也能在很大程度上维持你的学习热情，其中道理只有你真正体会过那种热烈讨论的氛围才能明白。

讨论班不要怕出错，不要怕挂黑板，什么都不要怕，你认真准备，下面人认真听，大家认真讨论，错误就会完美转化成养料。听讨论班的人也不要害怕发问，哪怕你不小心走神了那你就直接问你没听到的东西，没听懂就直接发问寻求解释，一旦讨论的氛围营造起来，那效果就真正达到了。

最后，讨论班不应该变成定理证明班，把定理的道理讲明白比证明这个定理更加重要，在讨论班上对着书本框框讲证明其实效果不大，大家都会自己看书，所以准备讨论班的内容万万不能变成念书，你要把书上隐藏的结构剥离出来，讲明白主线是什么，讲明白到底要干什么，怎么干，道理是什么，结果是什么，让大家能够对你讲的东西产生直接看书无法轻易得到的理解。如此才是正确的准备，如若只是念书，那讨论班还不如不开。

本节下半部分由 ly_dly 于 2026/8/22 编辑。

我在暑假期间，参加了中科院与北京大学联合举办的“代数与数论”暑期学校研讨班。班级的形式更接近研究生组会，开营前已经分好导师（和对应话题），组内大家协商安排见面的时间；由老师选定阅读的文献（大多是预印本和在线笔记），学生按顺序轮流讲，一次见面大概 2 小时左右。一共六周，一周三次，我认为强度算很高的，毕竟是暑期学校。个人觉得本科期间应该体验一次，能不能做出成果、或者学会什么知识都是次要的，不需要在这方面苛求自己。

从这次的经历来看（暂时不透露我在哪一组），我对导师的话题比较生疏，基础太差而且可能也不是很感兴趣，发现自己实际上也没有学明白，完全靠 AI 硬撑着讲明白自己负责的部分，其他人讲什么已经无暇关注，有点愧疚。这次我们有中期和末期汇报，在第三周和第六周，每组三个人，每个人被安排讲 4-5 分钟（当然实践下来

大家远超配额)。也许我应该感谢这个机制，每到期中和期末汇报我才知道我们学了什么，太难绷了，要是没有 AI 我真会完蛋了。

和本科讨论班的区别可能是，导师对学习方向有更强的主导权和更深的参与，绝大部分本科生讨论班是没有条件找个老师或者博后给你当指导员的。我们学生对这个方向不太了解，甚至可以说是一无所知，每次都是导师告诉我们学什么主题，把推荐的文献发到群里，等到学生讲的时候，他来进行补充和纠正。

大家也不要对讨论班有太大的预期，我认为不应该指望通过讨论班（以及任何形式的授课）来学会数学，讨论班的社交功能甚至都比它的学习用途更大。我的认知习惯确实是这样，我很难通过上课当堂学到什么数学，我已经掌握的，绝大部分都是提前或者课后通过看书学会的。在过去，上课老师能补充一些我在书上没看到的拓展或者不一样的视角，但如今 LLM 太厉害，上课已经不是唯一的途径了。我的观点更偏激一些，我的同学以及导师的观点可能也大差不差，那就是讨论班对于演讲者个人的好处明显大于倾听者；讨论班的环境也能催促大家学习。至于后者对我没什么增益，因为我自身的规划和内驱力也挺强的，不需要讨论班也能决定自己学什么。

我在讨论班进行到后期经常摆烂，因为我个人的兴趣很发散，一本书/一个主题不会集中在一段时间内看完，导致后面已经失去了兴趣。我没有兴趣就不会去学；但有可能发生的是，我半年后突然又有兴趣了。讨论班需要协商，能安排的时间往往是规整且成块的，而我的兴趣高度流变且碎片化，我认为这种不可调和的矛盾，大概也是我不对讨论班寄予厚望的因素。

最后提一点现代学术报告的范式，也是导师启发我的。在听一场报告的时候，大家主要关心的其实是你的定义、结论叙述是否明确，没有模糊的地方，讲解有条理环环相扣最好。至于证明大部分人不关心，即使是大家有共同目的的讨论班，我也不建议你事无巨细地讲证明，验证细节需要在良好精神状态下长时间集中注意力，课堂往往不能期待此类条件，而且这十分地不经济。所以我建议大家把重点放在怎么把要讲解的知识，有条理地压缩，讲一个讨论班也是让你有意识地逼迫自己如此思考。**压缩是智慧的源头**，你要相信。至于搞懂细节方面，也是讨论班的隐形增益。我个人不喜欢揪细节，我也觉得人不太可能、也没必要搞懂然后记住理论的所有细节，更何况现在 AI 接管，随手一查的事情。但完全不懂任何细节也是不行的，我觉得这也没有一个明确的标准。

8.3 分析与方程

“数院学生们经常因为喜好硬分析还是软分析而争吵不休。”

分析学是研究函数的学科，以本科学过的课程举例，实分析研究实轴上的测度和函数，复分析研究复平面上的解析函数，泛函分析研究函数空间上的泛函。

8.3.1 课程：现代分析基础

本节由 红线十字 于 2026/7/3 创建。

1. 任课教师：张震球
2. 讲课内容：抽象测度论；基础傅里叶分析（ L^p 空间和傅里叶变换）

3. **课程定位：**这门课主要会讲测度论和基础的傅里叶分析。前半学期讲测度论，这是分析学、动力系统和概率统计等方向中非常重要的概念，当然，我们在实变函数里接触过测度这个概念（主要是实数上的 Lebesgue 测度），但是在后续的数学实践中只有 Lebesgue 测度是远远不够的（概率论里的概率空间就是个最简单的例子），并且很多人（比如笔者）在学实变函数时会对 Lebesgue 测度的构造一头雾水，不知道为什么要引入“测度”这个概念，这些问题实际上都需要通过抽象测度的概念来解答。实际上因为这门课讲的比较基础，有些东西比如复测度，可能并没有完全讲透，想多学一些的话有时间可以自学 Rudin 的《实分析与复分析》等教材。

后半学期会讲 L^p 空间和傅里叶变换。这些内容是调和分析最基础最入门的概念，也是很有用的数学工具（比如 vde 也会经常用到傅里叶变换）。在笔者看来，这也是换一种视角来研究函数（数学分析、实变函数里我们通常都是逐点研究函数的导数、积分等性质，这里讨论 L^p 作为函数空间的性质，它的对偶空间是什么样的，傅里叶变换把函数作用成什么样的函数，算是第一次从泛函的角度来研究函数是什么样的）。不过这门课讲的比较入门，如果对傅里叶分析感兴趣，可以自己找教材阅读，也可以选修陈婷老师的《傅里叶分析》。

总体来说，这门课算是很有用的基础工具课，可以说大致和实变、泛函在一个生态位，并且算是基础课程里面最简单的之一。对分析学（包括 pde，几何分析），还有概率统计这些方向感兴趣的同学都可以选这门课。

4. **前置课程：**实变函数、少量泛函分析
5. **风险等级：**低风险
6. **参考教材：**自编讲义；陆善镇《实分析》
7. **考察方式：**平时作业占比 0.3，期末考试占比 0.7。平时作业是每节课会留 1-2 道题，两周交一次，不允许补交；期末闭卷考试，会出五道或六道题。

期末所有题都来自于老师自己编写的讲义，所以说期末考试还是以默写为主。讲义里面最难的那些部分（比如插值定理，Fubini 的完整证明）应当不会考，基础知识都有考到的概率。

8. **杂谈：**这门课会有一些作业题，实际上这些作业题跟考试没有什么关系（考试只会出讲义默写题），但很多作业题都有一些巧妙的背景和方法，可以锻炼用分析学方法解决问题的能力，所以还是建议多思考。

因为考试题量不多所以每道题分值比较大，容错不太高，笔者认为这门课给分比较忠实，但也有人认为给分低于预期，所以每道题的过程一定要完整写下来，不要跳步不要伪证。

老师的讲义写的非常细致，很多长篇幅的定理证明比市面上其他教材更加完整细致。

8.3.2 课程：傅里叶分析

本节由 红线十字 于 2026/7/3 创建。

1. **任课教师：**陈婷
2. **讲课内容：**实数空间上的傅里叶分析 (L^p 上的算子理论, 傅里叶变换, Schwartz 空间上的傅里叶变换, 奇异积分算子)
3. **课程定位：**比较硬的分析课, 在笔者看来难度可以在数院的分析课里面排到前几名。

学这门课需要一些泛函分析和点集拓扑的基础, 否则在学到比如极大算子和 Schwartz 空间的拓扑这块内容的时候, 会比较难受。这门课讲的函数空间理论和傅里叶变换 (包括 L^p 和速降函数空间的傅里叶变换) 内容框架上可能和《数理方程》和《现代分析基础》讲的东西比较接近, 但是内容上远多于上述两门课, 是相当硬核的课。另外, 因为调和分析本身是个非常庞杂的学科和工具, 一门课不可能把所有内容全部讲到, 所以如果学了这门课之后感觉对调和分析有兴趣, 建议多阅读教材自学 (这里推荐, 调和分析方面比较权威的教材有丁勇《现代分析基础》, GTM249 等)

另外, 调和分析本身也是比较活跃的一个学科和工具, 在现代数学里, 它和几何测度论、偏微分方程等很多领域都有联系。

4. **前置课程：**实变函数、泛函分析、点集拓扑学, 如果学过现代分析基础更好
5. **风险等级：**低风险
6. **参考教材：**自编讲义; 丁勇《现代分析基础》

另外, GTM249 这本书是调和分析领域很著名的教材, 但笔者认为它更像是一本字典而非教材。

7. **考查方式：**平时作业占比 0.3, 期末考试占比 0.7。一学期会留 4 次左右的作业, 每次几道题, 作业可以补交。作业题的难度比较大, 按 ct 老师的说法: “这些作业题也在帮助你们检验, 自己是否适合在分析学方面做研究”。

期末考试会出 7 道题左右, 只会涉及到讲义 ppt 里出现过的定理证明, 不会出新题。和现代分析一样, 过度长篇幅的定理证明不太可能考, 最后一节课会画重点。如果对定理的证明不够熟悉, 会感觉很难写完卷子。不过给分相当好。(ps: 比较硬核的基础课, 只要好好学了给分都非常好, 老师也不会在平时分和考试出题上难为人。)

8. **杂谈：**实际上, 这门课的风格很像是加强版的《现代分析基础》, 讲课和考试风格都像。

很多人初学分析学 (尤其是调和分析这种比较硬的分析) 会觉得这种分析学技巧比较繁琐丑陋, 实际上学到比较深入之后会发现, 像傅里叶分析这种分析学工具是相当优雅的, 这其中的关键就是要搞懂各种数学工具和技术背后的思想和动机。

这门课会用到一点泛函分析、测度论、点集拓扑的知识但不多, 理论上没学过这些前置课, 这门课也不是完全学不了。但由于这门课的难度, 笔者还是建议

有一些分析学课程基础（至少学过实变泛函）之后再学这门课，这样有一些分析学功底至少不会太困难。

8.3.3 课程：变分学

本节由 红绒十字 于 2026/7/4 创建。

由 林安澜 编辑于 2026/7/11.

1. **任课教师：**朱朝锋
2. **讲课内容：**变分学，包括欧拉-拉格朗日方程、诺特定理、变分学在 pde 中的应用等内容
3. **课程定位：**单从课本上说，这门课理论上定位在给有一定数理方程和泛函分析基础的同学讲些 PDE 知识；但是朱老师讲课风格太过自由发挥，讲的风格更像某种研究生讨论班，这使得本科同学若没有一定专业的泛函分析/几何知识就容易跟不上上课内容。
4. **前置课程：**点集拓扑学、泛函分析（建议熟悉 TVS）、数理方程
5. **风险等级：**中高风险
6. **参考教材：**张恭庆《变分学讲义》
7. **考查方式：**平时分占比 0.3 几乎都能给满，期末考试占比 0.7。

期末考试出题风格相当自由，而且可供参考的往年题比较少，所以被归类为中高风险。

8. **杂谈：**朱老师不一定每个学期都开课，如果想选这门课，可以飞书联系老师问一问能不能开课。

实际上笔者认为，如果对变分学感兴趣，可以直接看张恭庆那本教材或其他这方面的教材，挑选感兴趣的部分来自学⁴⁹。如果选了这门课，最好能够对一些古怪的考试题能应对地比较游刃有余。朱老师出题风格相当自由，而且看起来这些题好像和变分学关系不大（甚至看起来不像一门分析课），不过老师还是好人的，看我们做题做的很挣扎就把考试时间延长了很多，并且跟我们说会大捞特捞。

不过变分学这门课的思想维度确实相当先进，也算是本科最难的几门分析课之一。如果学过偏微分方程，会发现 pde 里面的能量方法和特征值问题，就是变分学问题，另外物理里面的最速降线等问题也是一种变分学问题。

8.4 几何与拓扑

几何与拓扑的入门需要花一些时间的，这个入门不是指你学会了某门课就算入门了，而是指你真正接受了几何与拓扑的思维模式，就好像有的人接受不了抽象的代数

⁴⁹其实张恭庆这本书写的也不甚好，笔者认为可以直接找非线性泛函分析的教材学习更现代的内容，这里可以参考张书自第七章往后部分的目录。前半部分在熟悉相关概念之后并不难，据朱朝峰老师说有些几何问题需要变分方法解决，可以遇到再学。

一样。学习过程中了解动机很重要（当然，不止对于几何与拓扑的学习，对于数学的学习都很重要。从定义中能直接看出来我们研究这件事的动机也属于数学成熟度的一种），这个动机又可以细分为发展某个理论的动机（比如我们发展流形理论是为了研究更一般的空间，并且可以在不规则的空间上做计算）以及在学习时某个具体定义或定理的动机。如果你觉得某个东西学起来缺乏动机，可以回过头看看以前学过的东西或者找一些例子。熟记例子对于几何与拓扑的学习是非常重要的。

8.4.1 微分流形

本节由 曹文哲 于 2026/7/20 创建。

1. **任课教师：**王文龙
2. **讲课内容：**梅加强《流形与几何初步》前两章内容。
3. **课程定位：**是本研合上的课。微分流形本身只是一个语言，在进行足够多的练习之后没有本质难度。老师也会给复习范围，应该说考试没那么难（当然，对有志于做几何的同学，并不推荐你只掌握复习范围中的内容，首先是要多写题，写题就像说话，语言就是要多说才能会）。课程的难度主要在于梅加强的教材不是很适合初学者，以及对数学成熟度有一定要求（简单来说比如叙事节奏变快，默认你会一些东西等等，你可能要学会自己动手查资料，当然这在 ai 时代不算困难）。
4. **前置课程：**（一点点，聊胜于无的）点集拓扑学。有曲线曲面积分的基础更好，但是不本质需要。考虑到微分流形对前置知识的要求不多，推荐有兴趣的同学在大二上学期选修这门课。
5. **风险等级：**低中风险
6. **参考书籍：**在写参考书籍及推荐理由时，我悲观地发现我已经没法以初学者的视角判断这些书的可读性了，so, good luck. :D

[1] 尽管绝大多数初学者都对梅加强深恶痛绝，梅加强的书却是极好的。微分流形里的内容是很容易遗忘的，梅加强的简洁性决定了他是最佳的复习书之一。另一方面，梅加强这本书内容十分丰富，尽管对着这本书学是十分有难度的，这本书也起到了一个很好的引导作用。基本上可以认为如果你把这本书的内容都掌握，那你本科的几何内容可能就掌握得差不多了（这本书的黎曼几何稍微少了一些，可能需要自己补充。但我这句话实际上想表达这本书起到了一个很好的导引作用）。

[2] Introduction to Topology and Geometry (Ciprian Manolescu), 2026 年刚出的新书，作者水平很高，是低维拓扑方面的，书看起来可能会更意思一些，内容不少也不是大厚书，我比较推荐这一本。虽然我没有细看，可读性方面不敢说比 lee 强，但至少是好读的。强力推荐。

[3] GTM-218 (by John Lee) 与 Loring Tu 的经典教程：内容上不多说，这两本教材的地位决定了关于这两本教材的内容已经有了非常丰富的观后感。但实际上我并不推荐你照着这两本大厚书学，这非常浪费时间。微

分流形里并没有什么本质上新颖的现象，就像学语言一样，不要花太多时间。这两本书可以作为参考使用。出于同样的原因，我这里更多地推荐一些紧凑的书。

- [4] 比较好的中文参考教材有王作勤的微分流形讲义。这本书可读性相对高一些，内容也更多，自己读的时候可以对照梅加强的内容适当跳过一些（实际上我并不很想说可以跳过这样的话，因为我自己就因为惰性跳过了很多东西，但是到最后都得补）。
- [5] Geometry of differential forms. by Morita。这本书的前几章基本上就是微分流形的内容，从内容上看写的不错，但是对数学成熟度的要求可能更高。（可能有一些奇怪的记号之类的。有的地方的定义可能也和现在常用的定义差个常数）
- [6] Differential Geometry–Bundles, Connections, Metrics and Curvature. by Clifford Henry Taubes. 可以作为参考。内容编排上很有意思，不是传统的微分流形–黎曼几何顺序，而加上了一些规范场论的内容，这有可能是因为作者本人就是这套工具的大家。

7. **考查方式：**平时分占比 30% 几乎都能给满，期末考试占比 70%。考试相对难度不高，老师给分也很好。

8.4.2 黎曼几何

本节由 Tony Cheng 于 2026/8/16 创建。

1. **课程定位：**微分流形后继课程，可以说是几何中所有方向都必学的课程，是一切几何的基础。然而，初学者很容易被其中复杂的张量计算搞得晕头转向，难以掌握其中精髓。因此，我们建议初学者从较为直观的教材入手（见以下参考书籍），之后根据自身兴趣选择进阶参考书。课程核心内容有：1. 联络：如何比较流形上不同点处的切空间，如何对向量场求导 2. 曲率：衡量流形的弯曲 3. 测地线：局部上的最短线 4. Jacobi 场：测地线的变分场，衡量测地线的变化 5. 曲率与拓扑：流形的曲率可以决定其拓扑。例如，Myers 定理告诉我们，Ricci 曲率有正下界的流形是紧致的；Cartan Hadamard 定理说，截面曲率处处非正的完备黎曼流形以 R^n 为万有覆叠。6. 比较定理：将黎曼流形与模型空间进行曲率的比较，从而研究其 Jacobi 场、测地球体积等几何量。
2. **前置课程：**微分流形，一点点拓扑学（覆叠空间会经常用到）。鉴于微分几何和拓扑的紧密联系，我们建议学习者了解基本群和同调论的知识（可以用到再学）。
3. **参考书籍：**

- [1] Morse Theory by Milnor：强烈推荐的黎曼几何的入门书，大师的经典之作。这本书的主题是 Morse 理论，20 世纪几何学非常辉煌的成就。第一章是经典 Morse 理论，研究流形上函数非退化临界点给出的流形的拓扑信息。第二章是黎曼几何基本概念，作者简洁明快地给出了联络曲率测地线完备性的核心结果，没有复杂的张量计算，很适合初学者快速掌握。第三章和第四章是无限维 Morse 理论，具体来说能量函数的 Morse 理

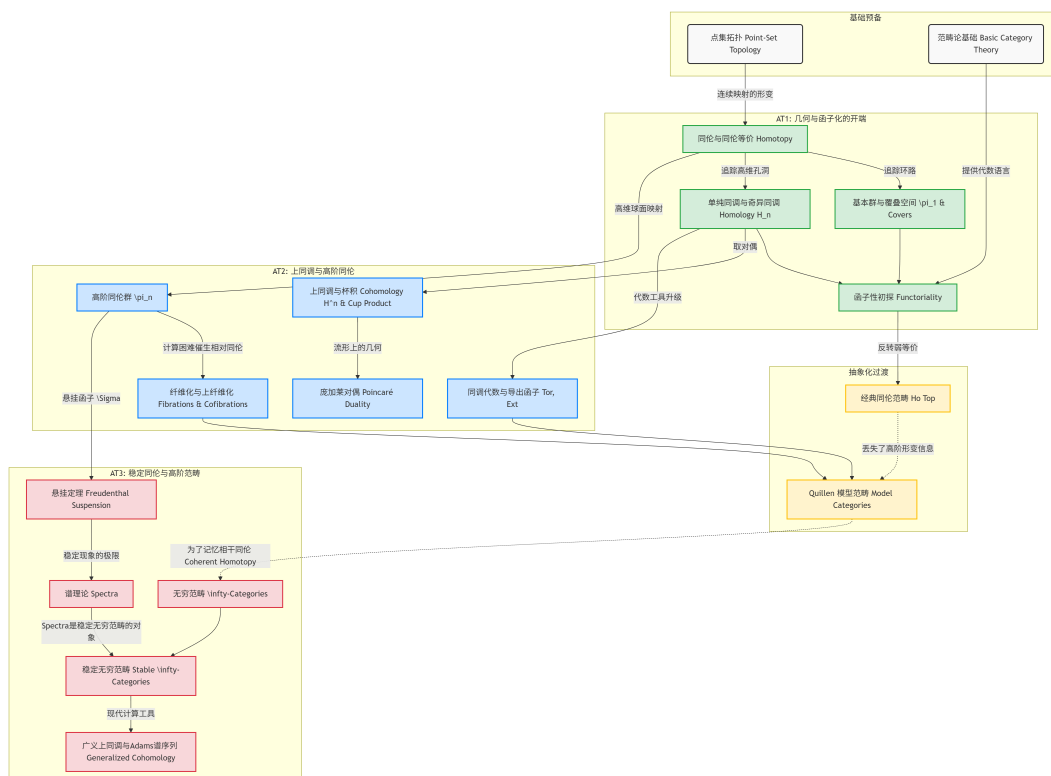
论。研究了能量函数临界点处 Hessian 的负定指标，及其给出的道路空间的拓扑信息。这此过程中发展了第一第二变分公式作为工具，也自然引入了 Jacobi 场等黎曼几何基本概念。最后给出了强大的应用：一是曲率如何决定拓扑，二是同伦群的 Bott 周期定理。

- [2] 王作勤老师和于品老师的课程讲义。他们的讲义都属于简洁明快又不失细节的佳作，内容很全面。王作勤老师的讲义还有质量很高的配套习题。
- [3] Riemann Geometry by do Carmo: 黎曼几何的最经典的入门书。do Carmo 的书比较注重几何直观，也很易懂，没有大量使用张量语言，可以搭配前面的中文讲义一起使用。
- [4] Riemannian Geometry by Peter Petersen: 黎曼几何进阶参考书。如果在入门后对几何分析方向感兴趣，推荐参考。内容很多很现代，是与几何分析很好的衔接。当然，这本书难度高、体量大，运用了很多分析的工具，也充分使用了张量语言。比起作为教材，更适合作为参考书。
- [5] 黎曼几何初步伍泓熙: 很好的黎曼几何入门教材，可读性很高，没有什么局部上的计算，便于快速的掌握其核心想法。

8.4.3 代数拓扑 I

本节由 陈陆韬 于 2026/8/11 创建。

代数拓扑 I,II,III 的大概整理脉络如下:



1. **课程定位：**作为一门基础课而言，代数拓扑 I 所注重的内容在代数拓扑的语言为主。我首先要给大家的一个建议是：不要用学点集拓扑的方式来学代数拓扑。

点集拓扑在很大程度上延续了分析学的思维，常常需要处理各种反直觉的“病态”特例。但在代数拓扑里，我们会将主要的研究内容设定在 CGWH（紧生成弱豪斯多夫）空间中，这帮我们屏蔽了那些仅仅为了考验逻辑而存在的病态结构，让我们把精力真正放在几何与代数的交汇上。这门课的精髓在于：学习如何用代数的手法去研究拓扑空间。我们会接触到基本群、同调群、上同调群以及一些示性类。虽然算出了这些代数不变量，并不意味着我们就彻底认清了一个空间的长相，但它们能为我们提供足够多、足够敏锐的视角去刻画空间的性质。理解了这套从拓扑向代数转换的哲学，你们也就为后续代数拓扑 II 的学习做好了充足的准备。

2. 前置课程：点集拓扑

3. 参考书籍：

- [1] Algebraic Topology by Allen Hatcher 这本书可谓是学拓扑时几乎所有人都会给你推荐的圣经，它最大的特点就是极力避免了繁琐的范畴论抽象，而是用大量的图片和具体的例子（尤其是 CW 复形）让你能看到拓扑结构。对于上述提到的基本群、同调、上同调，本书提供了极其丰富的计算案例。当然笔者认为，Hatcher 本人在照顾几何直观的时候是将语言风格写的比较写意，可能会使用一些形容词来描述（这个看人，有好有坏吧，能看的进去的那就是好书）。在阅读时，可以把这本书当作理解“为什么这个代数工具能刻画空间性质”的最佳读物，但在具体定理的严密推导上还是建议去看一些别的书籍。（笔者认为其 SVT 证明的有点过于复杂了）
- [2] Elements of Algebraic Topology by James R. Munkres 这本书最爽的地方在于，它直接从单纯同调展开。说白了就是把空间切成一个个小三角形去算。这种搞法极其踏实，算同调群直接变成了算矩阵的秩，什么点集里的“病态空间”在这里根本不存在。对于刚开始接触代数语言的同学来说，这绝对是一种极其不错的选择，能让你先体会到算拓扑的快感，再顺理成章地过渡到一般的理论。不过这里必须给大家提个醒，Munkres 在拓扑界有点自己的小巧思。他书里对于“分离性公理”（比如正则空间、正规空间等）的定义，跟现在很多主流教材是有一点出入的。比如他往往会默认把 T1 公理塞进正则和正规的定义里。
- [3] A Basic Course in Algebraic Topology by William S. Massey 笔者没看过，但是之前有学长推荐说这本书很适合入门，相信 GTM 的口碑...

8.4.4 代数拓扑 II

本节由 陈陆韬 于 2026/8/14 创建。

- 1. **课程定位：**较于前面的代数拓扑 I，代数拓扑 II 在引入范畴论的观点之后，实际上将代数拓扑 I 的极大一部分内容使用范畴的语言重写了。但这绝不仅仅是为了换一套更抽象的“黑话”：借助函子、自然变换和伴随等概念，我们能褪去具体构造的繁琐外衣，看清同调与上同调理论最纯粹的代数骨架。

在理顺了这套语言之后，这门课的研究重心将真正转向同伦论。在代数拓扑 I 中，我们仅仅通过基本群初窥了空间的同伦性质；而在代数拓扑 II 里，我们将全面接触高阶同伦群、纤维化与上纤维化，以及 CW 复形。在这个过程中，大家很快会体会到一个残酷的现实：高阶同伦群在几何直观上极其自然，但真要动手算起来却异常困难，远没有同调群那么友好。

正是因为同伦群这种“易于定义却难于计算”的特性，本课的另一大精髓便顺理成章地浮出水面——同伦与同调的深度结合。如果说同调论是我们手中相对好算的代数利器，那么同伦论则更直接地反映了空间的几何本质。我们不会孤立地看待二者，而是要学习如何建立它们之间的桥梁。我们会通过 Hurewicz 定理，寻找同伦群与同调群之间最核心的同构关系；我们也会引入 Eilenberg-MacLane 空间，向大家展示一个极其漂亮的结果：上同调群实际上完全可以被转化为拓扑空间之间的同伦映射类。

总而言之，代数拓扑 II 少了一些初学时的摸着石头过河的感觉，多的是在更高视角下对方法论的统合。这门课就是要教给大家，如何利用易于计算的同调数据去逼近难以捉摸的同伦信息。理解了这种同伦与同调相互交织、代数与几何相互转化的哲学，你们才算真正踏入了现代拓扑学的大门。

2. **前置课程：**代数拓扑 I 与范畴论（不必十分熟悉，可以从学习代数拓扑 II 的过程中体会到范畴论的哲学之美）

3. **参考书籍：**

[1] Algebraic Topology by Tammo tom Dieck 如果觉得 May 的书太过抽象，而 Hatcher 在同伦论部分因为缺乏范畴论支撑而显得逻辑有些散漫，那么 tom Dieck 的这本书绝对是最佳的折中与升级之选。这是一本具有严谨风格的现代教材。它既不像 May 那样上来就拿范畴论吓唬人，又完美弥补了 Hatcher 在代数结构和严密推导上的缺失。本书对同伦与同调的结合部分写得极为出色，特别是关于 Hurewicz 定理、

Eilenberg-MacLane 空间以及阻碍理论的章节，脉络清晰，推理严丝合缝。当然笔者认为，作为一本试图面面俱到的大部头，它有时稍显“干涩”，某些章节的符号系统略显繁复。阅读这本书时，你可以把它当作查漏补缺和学习标准严密证明的案头宝典。如果在课上遇到某些用范畴语言描述的同伦定理感觉似懂非懂，去翻阅这本书对应的章节，通常能得到极其安稳的解答。

[2] A Concise Course in Algebraic Topology by J. Peter May 这本书的名字极具欺骗性，千万不要因为“Concise”这个词就掉以轻心。本书最大的特点就是极其精炼且“范畴味”极重。它在开篇就果断引入了范畴、函子与伴随，并用这套高维语言将拓扑空间、基本群和同调论进行了彻底的重构。对于本课程核心的纤维化、上纤维化、细胞逼近以及 Whitehead 定理，May 提供了极其漂亮且极具结构美感的处理方式。当然笔者认为，这本书的阅读体验可以说是“冰冷且硬核”的，作者极少废话，几乎没有 Hatcher 那种为了照顾几何直观而写的形容词。在阅读时，建议把它当作建立现代代数拓扑“骨架”的最佳指南。如果你能忍受前期的抽象

阵痛，读透这本书后，你会觉得整个同伦论的逻辑链条无比清晰，这也是通往后续代数拓扑 III 最正统的桥梁。

8.4.5 代数拓扑 III

本节由 陈陆韬 于 2026/8/14 创建。

1. **课程定位：**经历了代数拓扑 II 的洗礼，大家应该深刻体会到了同伦群计算的残酷性。为了在杂乱无章的同伦信息中寻找规律，代数拓扑 III 将首先把目光转向一个极其深刻的几何现象：悬挂下的稳定现象。

由于 Freudenthal 悬挂定理的存在，当我们对一个空间进行足够多次的悬挂后，它的同伦群最终会稳定下来。这就启发我们跳出单个拓扑空间的局限，去研究由一系列空间和悬挂映射组合而成的序列——谱。在代数拓扑 III 中，谱将取代传统的拓扑空间，成为我们研究的核心对象。大家可以把谱看作是拓扑空间的“线性化”，或者说是广义同调与上同调理论最自然、最完美的栖息地。进入稳定同伦论的领域后，你会发现同伦与同调的界限被进一步打破，代数运算变得前所未有的系统与丰富。

然而，当我们试图用代数拓扑 II 中建立的普通范畴论来研究稳定同伦时，会遇到一个致命的麻烦：如果我们仅仅粗暴地将弱同伦等价强行视为同构，我们会丢失大量关于“映射之间究竟是如何同伦”的高阶信息。

为了挽救这些丢失的信息，这门课的后半部分将迎来一次理论架构的全面升级。我给大家的建议是：在这里，你需要打破“等式”的固有观念。

首先，我们会引入 Quillen 的模型范畴。这套公理化框架通过人为指定纤维化、上纤维化和弱等价，让我们能够在脱离具体拓扑空间的情况下，在复形、代数簇甚至任意抽象范畴中“做同伦论”。

但这还不是终点。模型范畴虽然强大，但它更像是搭建理论的手脚架。为了以最自然、最内蕴的方式处理那些错综复杂的高阶同伦相容性，本课程将最终引领大家走向现代代数拓扑的巅峰语言：无穷范畴。在无穷范畴的世界里，我们不再生硬地要求两个态射严格相等，而是允许它们之间存在一个“映射空间”。这套语言不仅是对代数拓扑底层逻辑的彻底重构，更是通往现代几何、代数 K 理论乃至代数几何前沿研究的必备通行证。

总而言之，代数拓扑 III 不再是教你如何计算某个具体的拓扑不变量，而是要彻底重塑你的数学世界观。理解了从“空间”到“谱”，从“严格相等”到“无穷同伦相容”的哲学转变，你将真正触碰到现代数学最核心的脉搏。

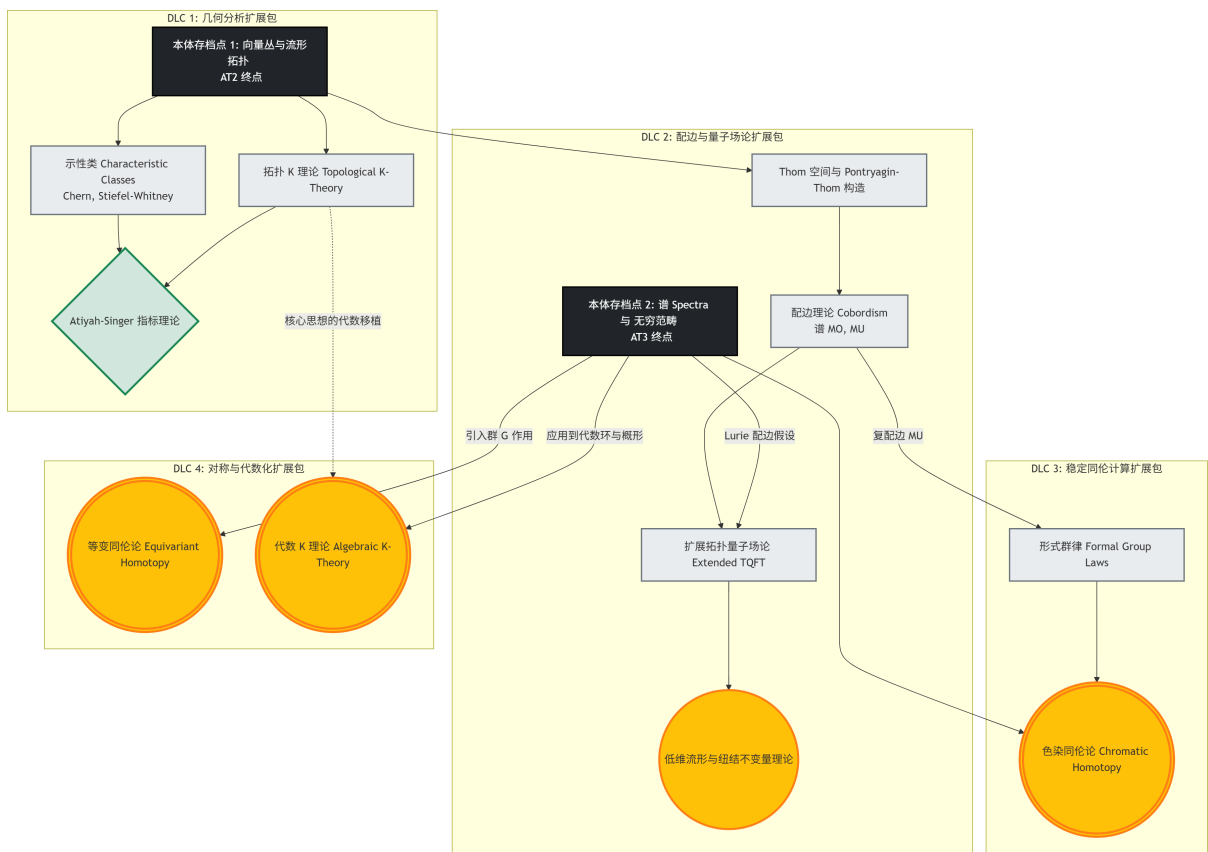
2. **前置课程：**代数拓扑 II 与范畴论（笔者不认为在学习无穷范畴之前需要学习模型范畴，直接接触无穷范畴的语言也是现代学界更加认可的方式）
3. **参考书籍：**

[1] Spectra and stable homotopy theory by Cary Malkiewich 如果你刚从代数拓扑 II 的同伦群泥潭中爬出来，对“稳定化”这个概念还处于懵懂状态，那么 Malkiewich 的这份文献可谓是带你入坑稳定同伦论的最完美

向导。它最大的特点就是极度极度地“平易近人”且注重动机。作者没有一上来就拿沉重的模型范畴去砸你，而是非常有耐心地从 Freudenthal 悬挂定理出发，带你一步步感受“为什么要引入谱”、“Brown 可表示性定理究竟在几何上意味着什么”。对于令人头疼的砸积和 Adams 谱序列，它的讲解极具启发性。当然笔者认为，正因为这本书极力追求教学上的友好度，它的语言风格有时会显得比较口语化，且为了保持主线流畅，作者会有意绕开或者延后一些极其繁琐的点集拓扑病态细节。在阅读时，建议把这本书当作你踏入稳定同伦世界的破冰教材，用它来建立“谱究竟长什么样”的坚实几何直观，再去啃那些更硬核的范畴论书籍。

- [2] Stable Homotopy Theory and Higher Algebra by Bastiaan Cnossen 如果说 Malkiewich 带你回顾了稳定同伦论的历史与直观，那么 Cnossen 的这本书则直接将你拉入了现代代数拓扑最前沿的无穷范畴世界。这本书最大的特点就是极其现代且视角极高。它毫不犹豫地抛弃了传统模型范畴中那些修修补补的点集拓扑细节，直接在 ∞ -范畴的框架下重构一切。在这里，谱不再是带有病态拓扑的序列，而是被极其优雅地定义为“稳定 ∞ -范畴”中的对象；传统的环谱也自然地过渡到了高阶代数中的 E_∞ -环。你会发现，一旦接受了这套语言，以前那些痛苦的相容性问题全都被降维打击了。当然笔者认为，这本书的阅读门槛其实不算很高。但是如果你没有深厚的传统同伦论底子，并且没有提前建立起对单纯集合的哲学认同感，直接读这本书绝对会让你感到窒息。书中的拓扑空间几乎从一开始就被抽象为了 Ani，纯粹的几何直觉在这里被极度压缩。在阅读时，强烈建议你一定要先通过其他书了解了“传统做法为什么会失败”，然后再把这本书当作通往现代高阶代数研究的终极蓝图来研读。它是让你真正看清现代 Lurie 学派工作方式的最佳捷径。

如果你到这还觉得意犹未尽，可以参考：



8.4.6 微分拓扑

本节由 朱凯 于 2026/8/17 创建。

- 1. 前言:
- 2. 前置知识:
 -
- 3. 入门指北:
 - [1]

8.4.7 辛几何/拓扑

本节由 朱凯 于 2026/8/17 创建。

- 1. 前言: 辛几何/拓扑 (Symplectic geometry/topology) 顾名思义是研究辛流形的几何/拓扑的一门学科，一个流形粗糙的讲是局部像欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑空间，那么辛流形就是那些局部像辛空间 $(\mathbb{R}^{2n}_{(x_i,y_i)}, \omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$ 的拓扑空间。
相比于黎曼几何这个充满“刚性”的学科，辛几何不关心距离，不关心角度，不像黎曼流形那样有处曲率正有处曲率负，局部上总是处处一摸一样，因此大家更习惯将这门学科叫做辛“拓扑”。
当我们有了一类数学对象，一个经典永流传的问题就是如何分类这类数学对象，辛拓扑也不例外。但不像黎曼几何那样，借助曲率等局部信息就可以构造出各

种各样的不变量，辛流形因为其局部上处处一样的柔软而使得其分类变得格外困难。幸运的是 Gromov 发现了隐藏在辛流形背后的刚性——每一个辛流形都允许一个近复结构，因此某种意义上我们可以利用与辛结构相容的近复结构去构造辛流形的不变量，这便引出了大名鼎鼎的 Gromov-Witten 不变量。

更精确的，Gromov-Witten 不变量是去数一个辛流形里满足一些约束条件的“近复子流形”的数量，即研究所谓伪全纯曲线构成的模空间。除了伪全纯曲线，辛流形里还存在另一类十分有趣且经典的子流形，也即 Lagrange 子流形，借助 Lagrange 子流形以及伪全纯曲线，我们可以进一步定义出辛流形上更深刻的不变量，即 Lagrangian Floer 同调以及其进一步的深化——Fukaya 范畴。

现如今随着数学的发展，上述起源于辛几何的三种不变量也进一步与其他领域交叉，如 GW 不变量与代数（计数）几何，Fukaya 范畴与数学物理（镜像对称），Floer 同调与规范场论重振了低维拓扑，简言之，模掉辛几何领域里的神人以及各种八卦绯闻，辛几何里的许多技术与想法都在现代数学里产生了深刻的影响，因此浅尝辄止的学习一下也并非坏事。

2. 前置知识：

- 微分流形：这是学习辛几何的基础中的基础，尤其是各种外微分的计算（内乘 $\iota_X\omega$ ，Stokes 公式，Cartan 妙妙公式等）需要比较熟练，当然这在入门阶段并不需要太过担心，可以借着学习辛几何的机会再掌握。辛几何里有许多李群的例子，因此也需要对李群有一定的了解。简言之梅加强的前两章就足够。
- 代数拓扑：入门只需要一点点基础的同调论，如 cup 积以及 de Rham 上同调，但是这些并不触及辛几何的本质，可以作为黑箱。这部分可以遇到了借助 AI 速通。

3. 入门指北：

- [1] [Lectures on Symplectic Geometry](#), Ana Cannas da Silva. 这是一本相对薄且友好的入门读物，介绍了许多辛几何的基本定理，后半部分主要侧重于介绍 moment map(动量映射)，如果是初学若对此缺少兴趣/学习动力则可以略过，1-17 节是建议必读的。
- [2] [Introduction to Symplectic Topology](#), Dusa McDuff, Dietmar Salamon. 辛几何领域的大厚书，涉猎范围非常广，内容丰富材料组织的也很好，只是阅读需要一定数学成熟度，习题也有一定难度，建议在阅读完 da Silva 的书之后再选择感兴趣的小节看。强烈推荐可以作为讨论班的教材，一人负责感兴趣的一小节来讲，会有很多收获。
- [3] 我的[笔记](#)，主要 follow 北大刘小博老师的辛几何课程，前半部分可以看成是 da Silva 书的部分扩展加细版，后半部分主要是关于 Gromov-Witten 不变量与量子上同调的简单介绍。

4. 后续学习（参考中科院周正一老师的学习建议）：

- 伪全纯曲线：伪全纯曲线是现代辛几何和切触几何中最为重要的工具之一，一个常见的学习方案是从一个经典定理，如 Gromov 非压缩定理出发学习。我个人的学习路径是先通读了 [1]，然后借助 [4] 模掉很多很多痛苦的分析细节（伪全纯曲线模空间的建立），在承认许多黑箱的情况下去学习怎么通过倒腾模空间的拓扑性质来证明一些有趣的辛拓扑问题。有了 [1]、[4] 的阅读经验之后，深刻体会到了伪全纯曲线模空间这一工具的强大，让我燃起了仔细学习其中分析细节的兴趣，于是我和另一位同学参考 [3] 用一个暑假阅读了 [2] 的大部分内容，还是有非常大的收获的。

- [1] A course on holomorphic discs, Hansjörg Geiges and Kai Zehmisch. 这本教材虽然篇幅不长，比较容易上手，但内容完整，并且从带有拉格朗日边界的曲线理论出发，也有益于之后学习如 Fukaya 范畴之类的理论。但是一些内容只是为了证明 Gromov 非压缩定理而做的特化版本，比如具体的分析往往只考虑了欧氏空间上的椭圆方程，对于学习一般的伪全纯曲线还需要额外补充流形上的 Sobolev 空间，椭圆算子以及 Fredholm 理论。
- [2] J-holomorphic curves and symplectic topology, Dusa McDuff, Dietmar Salamon. 这是标准的教材，主要前六章，以及前附录前三章的内容。第十章 gluing 也是很重要的章节，但是其技术细节在初学时不必深究，但最好了解一下基本内容。这本书也建议和同学组织讨论班阅读，不然很容易迷失在海量的分析细节里。
- [3] [Mike Usher's note](#)，非常友好详实，很多分析细节比 [2] 浅显易懂很多，可以搭配 [2] 来食用，特别是当在 [2] 里遇到看不懂的分析结果的证明可以参考。
- [4] Holomorphic curves in low dimensions: From symplectic ruled surfaces to planar contact manifolds. Chris Wendl. 相当好的教材，这本书在第二章黑箱了整本书所需要的闭伪全纯曲线的结论，对拓扑宝宝非常友好，这本书证明了 McDuff 的 rational or ruled theorem，是很能体现出辛几何刚性的一个定理。我[本科毕业论文](#)前半部分主要参考此书，也可供参考。

- Floer 同调：这里只涉及辛几何中的 Hamiltonian/Lagrangian Floer 同调，与规范理论相关的 Floer 同调可以参考我的 DLC 部分：[14](#)。

辛几何中的 Floer 同调最早源于 Floer 研究 Arnold 猜想，大致是问是否可以用 Lagrange 子流形的拓扑信息（同调群秩）来控制辛流形中它们的交点的个数？更精确的 Arnold 猜想是说 $L \hookrightarrow (M^{2n}, \omega)$ 是 Lagrange 子流形， φ 为一个 Hamilton 同胚，那么若 $\varphi(L)$ 与 L 横截相交，则

$$\#(\varphi(L) \cap L) \geq \sum_{i=0}^n \dim H_i(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Floer 的证明想法是，我们把 $\varphi(L)$ 和 L 的交点为生成元构造一个链复形，微分是去数连接两个交点的伪全纯圆盘的个数，由此构造出的链复形的同调就被叫做 L 的 Lagrangian Floer 同调，Floer 进一步证明了在 M 满足

一定的条件下，这个同调恰好同构于 L 的奇异同调，因此结合链复形的维数大于同调群的维数即可证明一定条件下的 Arnold 猜想。

事实上更一般的，Floer 同调可以看成是某种“无穷”维版本的 Morse 同调，回忆 Morse 同调是考虑光滑流形上的一个 Morse 函数，以这个 Morse 函数的临界点为生成元构造一个链复形，微分是去考虑连接两个临界点之间流线的条数，经典的 Morse 理论告诉我们这样定义出来的 Morse 同调和流形的奇异同调是同构的。对于 Floer 同调，考虑的对象从流形上的 Morse 函数，变成了无穷维空间（一般是流形或向量丛之间的光滑映射构成的空间）上的泛函（比如给定一个映射可以定义其能量）。

- [1] Morse Theory and Floer Homology, Michèle Audin, Mihai Damian. 大厚书，不是太好读，但好处是不需要什么辛几何的基础知识，从 Morse 同调出发比较详细的介绍了 Hamiltonian Floer 同调，分析也写得比较完善，知乎上有更详细的阅读建议可以自行搜索，我读过一遍但是也不记得什么细节了，主要还是体会 Floer 同调的思想更为重要。
- [2] Salamon's note. 经典文献，比较薄，也有不少 gap，适合在阅读完 McDuff-Salamon 的伪全纯曲线书之后来阅读，需要一定的伪全纯曲线的成熟度。

8.4.8 低维拓扑

本节由 [朱凯](#) 于 2026/8/17 创建。

这是一个非常庞大且趣味横生的领域！粗略的讲低维拓扑主要关心维数小于等于 4 的流形，并用来自各行各业的工具去撬动、敲击乃至炮轰与低维流形有关的问题，在这个领域你可以和几乎任何一个数学方向发生交叉，且不说分析和代数的工具，组合乃至概率也有时会在研究中派上重大用途。这里囿于篇幅我只介绍**本科范围内**可以学习的一些低维拓扑知识，对于后续进一步的研究欢迎随时[邮件](#)和我交流！

1. 扭结

- **前言：**低维拓扑里考虑的扭结通常是指若干个 S^1 到三维流形 Y 的各种不同嵌入，并考虑在同痕意义下区分它们。以下为了简单起见，我们只介绍最简单的三维流形 S^3 里的扭结，我们一般用 K 表示（取自 knot）。

扭结理论中最核心也是最基本的问题就是：给定两个扭结 K_1 和 K_2 ，如何判断这两者不能光滑的互相变化过去（参考 25 年八省联考 11 题，区分左/右手三叶结以及 Borromean 链环），为此，拓扑学家们发明出了一系列（越来越高级）的不变量来区分：首先我们先来简单说一下一般地如何定义扭结不变量，对于一个扭结，我们总可以用一个投影图来表示它，显然更换投影的视角以及形变一下扭结，我们会得到完全不同的投影图，但是 Reidemeister 证明了一个伟大的结果：在一些具体的局部操作下（Reidemeister moves I,II,III），一个图可以变成另一个图，那么这两个图就对应着同一个扭结，从而定义扭结不变量，只需要对这些图来定义，然后再验证这个量在 Reidemeister move 下不变即可。

- (a) **数值不变量**：这是最简单也是最自然定义不变量的方式，给定一个扭结投影图，我们可以随心所欲的定义各种量：交叉点个数，三染色数...，但是如何保证这些量在 Reidemeister move 下不变呢？这往往是不可能发生的事，于是一个聪明的想法是，假如我考虑的不变量都是整数，那我就可以遍历所有扭结投影图，取每个图对应量的最小值，那么这就天然就是扭结的不变量了！

由此我们有如解结数 $u(K)$ ，交叉数 $c(K)$ 等数值不变量：

$$c(K) := \min_{D \text{ 为 } K \text{ 投影图}} c(D), \quad c(D) = D \text{ 交叉点个数},$$

$$u(K) := \min_{D \text{ 为 } K \text{ 投影图}} u(D), \quad u(D) = \text{改变 } D \text{ 交叉点使其变平凡}.$$

很明显，只有平凡结 U 满足 $c(U) = u(U) = 0$ ，这就很快区分出了平凡结与其他扭结。

将上述想法稍加推广，我们可以绕开投影图，用纯拓扑的方式去定义不变量，简单的代数拓扑告诉我们 S^3 一阶同调平凡，因此扭结 K 总能实现为一个 S^3 里可定向曲面的边界，特别的其也可以实现为四维球 B^4 里一个可定向曲面的边界，利用曲面的亏格就可以定义出扭结的亏格与切片 (slice) 亏格的概念：

$$g(K) := \min_{\Sigma \hookrightarrow S^3, \partial \Sigma = K} g(\Sigma), \quad g_s(K) := \min_{\Sigma \hookrightarrow B^4, \partial \Sigma = K} g(\Sigma),$$

很明显 $g(K) = 0$ 也意味着 K 只能是平凡扭结 U ，但要注意此时 $g_s(K) = 0$ 并不能推出 $K = U$ ，相反，有无穷多的扭结满足切片亏格为 0，这些都被称为切片扭结 (slice knot)，研究切片扭结也是目前低维拓扑领域十分火热的话题，人们期待可以利用切片扭结来构造四维光滑庞加莱猜想的反例 (详见 4. 四维流形)。

- (b) **多项式不变量**：区分数十分容易，但显然数太少了，无法作为扭结的完全不变量，包含不了扭结的完整信息，因此人们想到将不变量**升高一维**——考虑多项式不变量，也即输入一个扭结输出一个多项式。目前人们常用的多项式是 Alexander 多项式 $\Delta_K(q)$ 以及 Jones 多项式 $J_K(q)$ ，两者共同的推广 HOMFLY-PT 多项式 $P_K(a, q)$ (双变量多项式， a 取特殊值时可恢复前两个多项式)，以及 Jones 多项式的推广，染色 Jones 多项式，其与量子拓扑密切相关。

多项式不变量之所以少是因为其构造的困难性，不同于数可以取投影图再取最小值的操作，为验证多项式确为不变量，需要仔细检查其在 Reidemeister move 下不变，这一点相当困难，Jones 也因为借助算子代数里的观察巧妙构造出 Jones 多项式而获得菲尔兹奖，也侧面印证定义多项式不变量的困难之处。

正如数值不变量提到的，人们也好奇多项式不变量够不够强大，比如很容易计算，这些多项式对于平凡结 U 都是平凡的，因此反问题就是假如某个多项式不变量对扭结 K 有 $P_K(q)$ 平凡，那么这是否蕴含 $K = U$ 平凡？人们很早就知道有无数非平凡扭结 Alexander 多项

式平凡，因此人们寄希望于 Jones 多项式，但遗憾的是这至今仍是 widely open 的猜想，甚至更弱的：如果扭结 K 所有染色 Jones 多项式 (包含 Jones 多项式) 平凡，是否有 $K = U$? 这个猜想也至今⁵⁰未被解决。

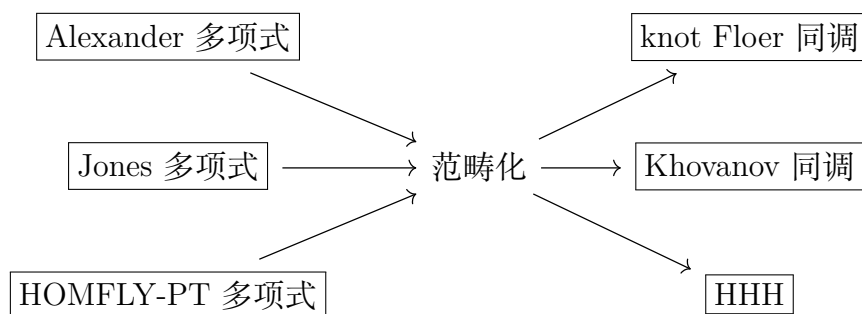
- (c) **同调不变量**：作为不变量，多项式所能蕴含的信息也还是不够，因此拓扑学家们想到可以更进一步：多项式可以恢复数，那什么可以恢复多项式呢？——对双分次同调群取分次欧拉示性数就可以！因此这就导出了一个迄今为止也十分重要的观念——范畴化。我们可以对扭结考虑构造一些双分次的同调群 $\bigoplus_{m,a \in \mathbb{Z}} H_m(K, a)$ ，那么其分次欧

拉示性数

$$\sum_{m,a \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^a \dim H_m(K, a)$$

就是扭结的一个多项式不变量。

现在低维拓扑领域最核心的就是研究如下三种多项式对应的范畴化同调群：



继续前面的问题，这样的同调不变量是否足够强呢？最起码的是对于这三种同调，它们都可以识别扭结是否平凡：对于 knot Floer 同调，其某一个分次的最高次恰好对应着扭结的亏格，因此结合亏格可以探测扭结是否平凡即可知道 knot Floer 同调探测平凡结；对于 Khovanov 同调探测平凡结，这是一个十分深刻的结果，某种意义上你可以想象存在一个从 Khovanov 同调到 knot Floer 同调的谱序列，沿着谱序列的方向同调变简单，因此 Khovanov 同调简单的扭结 knot Floer 同调也一定简单，这便可以得到 Khovanov 同调探测平凡结。

- **入门指北**：我并没有系统性的单独学过扭结，在实际学习中扭结总是被视为三维流形的一部分，因此总和三维流形的书放在一起，因此这里我只推荐一些我 (部分) 阅读过的书，事实上我也认为不必单独学习扭结，而是应当在学习三维流形甚至四维流形的时候配合学习，这更有助于理解现代低维拓扑研究中扭结的重要性。

[1] Knots and Links, Dale Rolfsen. 扭结理论的圣经，传言古早之前每一位北大学习低维拓扑的研究生都需要通读一遍并做完上面习题 (但显然现在这个传统已经消亡了)。这本书同时也是很好介绍三维

⁵⁰2026 年 8 月 26 日

流形的著作，充满着各种各样妙趣横生的图片，很值得阅读，但很可惜是打字机字体，所以见仁见智，当然这本书阅读起来也并不容易，但仔细品味还是很有乐趣。我本科时刘勃老师曾以这本书为参考开设过讨论班，所以感兴趣也可以找刘勃老师。

- [2] [Grid Homology for Knots and Links](#). Peter S. Ozsvath, Andras I. Stipsicz, and Zoltan Szabo. 尽管这本书是介绍组合版本的 knot Floer 同调，但是第 2、3 章也很好的提供了扭结有关的基础知识，这本书读不需要任何门槛，只需要知道一点基本群和同调论即可，所有的证明只涉及组合与代数，只有少量的拓扑细节与背景，本科生完全可以阅读完整本书，这本书甚至可以让你直接走到现在低维拓扑的最前沿，用其中的技术直接去做一些问题也未尝不可，所以我十分推荐。

2. 曲面：

3. 三维流形：

4. 四维流形：

8.5 代数与数论

本篇的内容主要就是针对代数与数论方向相关的学习内容或者课程，有的课程学校有开，有的没有，算是一个书籍或者学习推荐吧，但是由于每个人口味或者偏好不同，所以我也会尽量讲清楚一些特点。

8.5.1 交换代数

1. 交换代数主要研究交换环及其上的模理论。在现代数学中，交换代数是代数几何与代数数论的基石。在概形理论建立之后，交换环的代数性质与仿射概形的几何性质存在严格的反变等价关系。例如，环中的素理想对应于拓扑空间上的闭不可约子集，极大理想对应于闭点；环的局部化对应于选取拓扑空间上的局部开邻域或考察局部性质；环上的模则对应于概形上的拟凝聚层。

由于泛代数簇的局部结构完全由交换环决定，交换代数中的许多代数运算都有严格的几何对应。模的平坦性描述了连续变形中纤维的良态性质；环中的幂零元允许定义非约化概形，从而处理相交重数与无穷小变形问题。

我觉得交换代数的学习的一个核心在于掌握 Local-global，即利用同调工具与局部化技巧，将 global 的代数性质转化为局部环上的代数与分析性质或者反过来将 local 的结果粘成 global 的。这一点不光是交换代数，也是后续很多学习或者研究中会用到的思想，我们会研究如何合适的寻找 local，也会思考在什么适当的条件下粘成 global，比如 sheaf theory 中，我们会探讨在什么精细度的拓扑下 localization，各种 Descent Theory，比如比较熟知的 faithfully flat descent，又或者 Galois descent, Etale descent，而这又会引出我们去研究各种 obstruction，这一步当然需要正合列。综上我想说的其实就是，不论在学什么，尽量不要迷失在道路上，需要明确你的目标，最简单的例子来说，阅读一篇论文，你要明

白他的目标是什么，每个中间的步骤或者 lemma 是为了搭建什么，形成一个整体的印象，这样才会帮助你理解记忆，而一些技术的东西，是手段，手段很重要，但是没有目标的手段就会很盲目。

2. 以下是一些书籍的推荐

- [1] Michael Atiyah & Ian G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. 交换代数经典中的经典，这本书如果阅读一定要做习题，作者把很多重要结论都塞进了习题里面。但是初次阅读这本书可能会比较令人沮丧，因为很容易读不下去，这是很正常的，可以同时看看其他的東西补充动机，比如代数数论与代数几何。
- [2] Matsumura, Commutative Ring Theory 这本书比较详尽，但问题同样是可能缺乏动机。
- [3] GTM-150. 动机比较充分，但是太厚，可以针对某些章节选择性阅读。
- [4] 许金兴老师的交换代数讲义。
- [5] 李文威，《代数学方法 3》。
- [6] [代数基本观念 1](#) 的第二章。相对而言需要的成熟度比较高，但更加现代也更加贴近代数几何的视角。

8.5.2 表示论

表示论的核心思想是通过线性代数的语言来研究抽象的代数结构（如群、环、李代数）。具体而言，群的表示就是将群元素映射为向量空间上的可逆线性变换，从而将抽象的群乘法转化为直观的矩阵乘法。这种“线性化”的手段使得我们能够利用迹、特征值、特征多项式等线性代数工具来获取原代数结构的信息。

对于有限群而言，在特征为 0 的代数闭域（如复数域 $\mathbb{C}$ ）上，其表示论的核心由两个基本定理支撑：Maschke 定理（保证了所有表示均可完全约化为不可约表示的直和）与 Schur 引理（刻画了不可约表示之间的同态限制）。在这两个基石之上建立的特征标理论，通过类函数的正交关系，提供了一套可计算的工具体系，能够将复杂的表示分解问题转化为内积计算。而对于特征 p 域，Maschke 定理失效，群代数不再半单，表示的不可分解性与不可约性产生裂痕。这便引出了模表示论。在这一领域中，核心问题之一是如何利用 Brauer 特征标等工具，研究特征 p 上的表示与特征 0（如 p -进域 E 及其整数环 $\mathcal{O}_E$ ）上表示之间的联系。

这种联系在现代代数数论和算术几何非常常见。在现代伽罗瓦表示论中，我们往往考察特征 0 的 p -进伽罗瓦表示，通过选取不变整格并对极大理想进行约化，进而取半单化后所得到的剩余表示。研究这些特征 p 的剩余表示向特征 0 的形变及其与自守形式的赫克代数之间的同构关系（即 $R = \mathbb{T}$ 定理），是确立算术对象与分析对象深刻联系的核心技术。Andrew Wiles 对费马大定理的证明，其核心支柱正是通过模提升定理将剩余表示的性质提升至特征 0；而断言奇的二维绝对不可约剩余伽罗瓦表示必定来源于模形式的 Serre 猜想（现已被 Khare 和 Wintenberger 证明），更是直接以这些特征 p 的表示作为核心研究对象。

- [1] Peter Webb. A Course in Finite Group Representation Theory. 推荐作为第一

本表示论教材，内容非常好。作为有限群表示论的教材读完前五章就十分足够。

- [2] GTM-42. Serre 的书特点是干净利落，也是非常经典的有限群表示论教材。
- [3] 丘维声，《群表示论》。大砖头，从有限群表示论到拓扑群表示论，包罗万象，可以作为字典查阅。
- [4] 朱富海，《有限群表示论》。有限群表示论中非常好的中文教材，可以阅读。

8.5.3 李理论及其表示

- [1] GTM-235. Sepanski, Compact Lie groups. 从介绍李群开始，再介绍紧李群的有限维表示，在 Hilbert 空间上的酉表示，然后过渡到李代数理论，根系与权的理论，最终直通最高权表示。非常好的一本入门书。
- [2] Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory. 不到二百页的小册子，系统介绍了李代数及其表示理论。
- [3] Milne, Lie Algebras, Algebraic Groups, and Lie Groups. 从抽象李代数开始，再介绍代数群，最后再回到李群，更贴近代数群表示。
- [4] [代数基本观念 1](#) 的第五章。我个人推荐，不过很需要数学成熟度来阅读。

8.5.4 范畴论与同调代数

关于范畴论，我这里介绍两本适合初学者看的书：

- [1] Tom Leinster, Basic Category Theory. 适合初学宝宝体质，写的很清楚，总体两百页左右给你介绍清楚什么是范畴，函子，伴随，可表，极限。推荐阅读。
- [2] Emily Riehl, Category Theory in Context. 非常全面的一本范畴论教材，比上面那本难一点，但是内容要丰富得多得多。

下面是同调代数的推荐。

- [1] 陈志杰，《代数基础：模，范畴，同调代数与层》。特别好的书，很薄的小册子，以极短的篇幅给你介绍了模论，范畴论，基本的同调代数（导出函子，Ext 与 Tor）与层上同调理论。
- [2] Weibel, An introduction to Homological Algebra. 有些错误，初学可能很难读，但是有点过于经典了。
- [3] Rotman, An Introduction to Homological Algebra. 也是比较经典的水桶，没有特别突出的点也没有明显缺点。
- [4] [代数基本观念 1](#) 的第四章。我个人很推荐，不过还是很需要数学成熟度来阅读。

8.5.5 代数数论

代数数论以代数数域（有理数域 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张）及其局部化（局部域，如 p -进数域 $\mathbb{Q}_p$ ）为核心研究对象。古典代数数论的出发点是数域的整数环 $\mathcal{O}_K$ 中元素唯一

分解定理的失效。通过引入戴德金整环的代数结构，这一失效被理想的唯一分解所替代。在此基础上，理想类群度量了整数环偏离主理想整环的程度，而狄利克雷单位定理则完全刻画了整数环单位群的结构。

在现代视角下，我们前面说的 Local-global 也是代数数论的底层逻辑。为了研究全局数域的算术性质，必须同时考察其在所有素位（包括非阿基米德位与阿基米德位）上的完备化。这一思想在现代数论中被包括在阿代尔环与伊代尔群的拓扑代数结构中。

古典代数数论的集大成者是类域论。它建立了 Artin reciprocity map，利用底域自身的算术信息，完全分类并刻画了该域的所有阿贝尔扩张。类域论的建立依赖于分析解析工具或群上同调的语言，而将其进一步用阿代尔空间上的调和分析进行重构（即 Tate's Thesis），则是通往现代非阿贝尔数论的入口。

- [1] Neukirch, Algebraic Number Theory. 经典中的经典，基础的代数数论就是前两章，不算很难读，不过需要交换代数功底.
- [2] Neukirch, Bonn Lecture Notes. 类域论教材，偏向群上同调的语言.
- [3] 冯克勤，代数数论：光看目录就能有一种大略的观感.
- [4] 数论 I 费马的梦想与类域论：我觉得是一本不错的书，前面写的可能有些科普性质，但是算是娓娓道来.
- [5] 薛航老师的暑校数论讲义. 一口气带你从什么是代数整数直接到 Tate's Thesis. 这讲义有力气，同时前面的内容也非常适合初学者读，不过最好的体验方法是去一次[代数与数论暑校](#)听薛航老师本人讲.

8.5.6 代数几何

- [1] Robin Hartshorne, GTM 52 Algebraic Geometry 不必多说，传世经典之书，但是确实不一定适合初学就看，以及很多内容也在习题里面，不过在 ai 时代，习题解答的获取难度可能就会好很多。
- [2] Goertz & Wedhorn Algebraic Geometry I: Schemes/Algebraic Geometry II: Cohomology of Schemes 内容非常多，很多 52 的习题可以在上面找到答案，确实很长，不过我推荐一读。
- [3] The Rising Sea. 习题穿插正文，习题很多，如果你是一个喜欢做习题的可能很对胃口，做题做着做着就学会了，但是如果不是那么喜欢做习题的可能会比较痛苦.
- [4] [Stacks Project](#). 伟大，无需多言. 所有你需要的代数几何的东西都可以在这里找到，但是类似于字典，你要是想拿这个网站从零学习的话可能有不小的挑战.
- [5] Geir Ellingsrud and John Christian Ottem, [Introduction to Schemes](#). 还在更新的新书，我第一次学懂就是看的这个，很适合初学者，但是更进一步还是要看 Goertz.
- [6] 刘青，代数几何与算术曲线.

[7] 扶磊, Algebraic Geometry.

8.5.7 模形式

[1] Fred Diamond & Jerry Shurman, A First Course in Modular Forms 我个人看的最多的一本书了, 因为毕业论文的原因, 我觉得前面有些地方确实比较 dirty, 后面两章也有点云, 不是很清楚, 但是总的来说算是介绍的很详尽的一本书

8.5.8 椭圆曲线

[1] Joseph H. Silverman, GTM 106 The Arithmetic of Elliptic Curves, 我个人觉得可以并不完全看完, 挑你觉得对你比较有用或者关心的部分。

8.5.9 解析数论

9 关于转专业

本节由 孟润泽 于 2026/8/14 创建。

既然是指北，那么当然也有指路怎么来到数学学院的。当然，由于每个人性格经历执行能力和愿望等等不尽相同，我会尽可能在下面的内容中不加入主观的看法，把每个选择尽量呈现出来，留给你们有需要的自己思考。当然比较有个人经历与历史原因等等因素在，所以可能会有所出入。

9.1 转专业前的准备

先从选课的角度来说，如果不出意外，选课的限制应该会逐年减少而不会增加，所以这给了大一不在数学学院的学生同样上数分高代课程的可能，但是请注意，数分高代课程排课量非常多，大一的课程也不少，很容易会撞车，有很大概率会选不上，所以其实最有效的手段依旧是自主学习。当然，你可以选择直接不上本专业的课程，直接按照数学专业的课程来，好处是如果你转成功了，那么你的大二不会需要再把把这些课程补上，会相对轻松，坏处就是如果你失败了，大二留在本专业的时候会比较痛苦。与之相对的，就是大一纯自学不选修数分高代，好处是大一是正常的大一，但是大二会面临专业课比较多的处境，会比较疲劳。尤其是在数分高代还有月考的情况下，考试可能会比较密集，应接不暇，需要不断调整自己，合理应对。至于课程的学习，可以参考前面的相关章节。

其次，就是不能挂科！不能挂科！不能挂科！哪怕一些通识课可能并不有趣，但是一定要给予它基本的重视，不要让这些内容成为了你实现梦想道路上的绊脚石。据我所知就有因为马原挂科而没有办法转专业的同学。所以哪怕这些课程可能并不对你的胃口，你也需要在它上面付出一定的时间，来保证你的主目标能够实现。

当然，在大一的空闲之余，你可以根据数学课程的开课时间旁听一些课程，一方面确定他们的进度和难度，另一方面确定你是否真的想要转来数学学院，因为基础数学可能并不一定和你想象中的一样。同样，你也可以通过飞书或者邮件联系任课老师，和他们进行一些沟通，很多老师人都很好，也很愿意聊天，所以主动一点，就能够有收获。

9.2 笔试和面试

我是 22 级本科生，23 年暑假转的专业（现在好像改成了大一下期中左右了），当年非常奇妙的取消了笔试，吓走了一批人，虽然经历下来感觉这个面试好像并没有那么恐怖，但是往往未知的才是最为恐惧的，我就挑着说一下。

笔试这一块结合这两年的情况来看，就会考数分高代的内容，转专业时间改了以后可能只会涉及数分一和高代一的内容，但是还请以官方出具的转专业手册文件为准。题目难度据描述大概就是月考或者略低于月考的难度，所以如果可能还请看一看往年的月考题目来进行一个模拟参考。

至于面试，确实有不同的情况，有的是压力面，有的是比较轻松的，一般来说肯定会有老师出面当否定你的那个人，但是请不要慌张，把你的意愿毫无保留的表达出

来，有时候面试时候的态度并不能说明什么。在问问题的时候，不要轻易说一些自己并不熟练的内容，否则一旦问到你说的点反而还答不出来，就比较扣分。而事实上，一般都会问你为什么想来数学学院或者觉得比较有趣的点是什么之类的问题，你也可以往你比较熟悉的方向去引，记得积累一些实例和特例（当然我觉得这不光是针对面试，在学习的过程中也是非常有必要的）。

10 关于竞赛

我们不建议任何有志于基础数学的同学为了任何竞赛专门花时间去准备，我们倡导的是在正常学习的过程中适当地参加竞赛，让竞赛变成途中的风景而非目的地。

10.1 数学建模

如果你有志于基础数学，请不要在这个竞赛上浪费任何时间。

注意，这不是数学，这不是数学，这不是数学。

10.2 大学生数学竞赛

大学生数学竞赛，简称 CMC，早年间比较有含金量，随着蛋糕越做越大，某负责人更是直说想让 CMC 的难度向考研靠拢，让 CMC 的含金量一降再降。加上某些无良自媒体的坚持不懈地虚假宣传，各大学对于 CMC 的效力也是一降再降。所以这个比赛现在就变成了一个娱乐产品，大家完全可以在乏味地学习中考一场试玩玩，千万不要专门去准备，这毫无意义。

现在 CMC 的决赛名额政策对南开有利，你如果是南开考试的人里面的前十几名就可以直接进入决赛，享受举办决赛的大学的免费三日游，这倒是一个不错的好处，你要是为了这个准备考试，我是推荐的，毕竟免费三日游谁不喜欢呢。

10.3 丘成桐数学竞赛

对于丘赛，我们的观点是，你可以按照丘赛考纲去学习，但是不能为了丘赛去学习。丘赛的考纲基本上就是博士资格考试的范围，你如果能在本科前三年将某一个方向的丘赛考纲学完，那是比较不错的。如果你对自己的要求比较高，那可能就需要学完两到三个方向的考纲。

不过我们一再强调，不要为了学完考纲而去学习，你要在学自己感兴趣的东西的同时发现与其他方向的联系，草蛇灰线伏脉千里，数学的线是埋藏在每一个方向里面的。要有知道自己为什么学，不要单纯为了学习而学习，以至于不知道自己为什么要学这些东西。

至于丘赛的考纲，大家可以直接去到官网下载。值得注意的是，里面的推荐书籍未必是第一选择，要时时向同学，学长，老师等咨询推荐的书籍，一份好的材料可以减轻许多学习的痛苦。

10.3.1 几何拓扑方向备考经验

本节由 [朱凯](#) 于 2026/8/17 创建。

11 关于考研

11.1 考研流程

一般来说，每年的考研（全国统考）在 9 月下旬-10 月上旬开始报名，在 11.1 前后进行网上确认；初试的考试时间在 12 月下旬，2 月下旬（春节后）公布初试成绩，之后 3 月份的某个时间公布初试排名和参与复试名单，并且在清明节前完成一志愿复试和拟录取名单的公示。

这里，“初试成绩公布”及其之前的流程是全国统一的，这之后的流程由报考院校自行决定。准备考研的伙伴们不要错过考试报名、下载准考证的流程，并且注意时刻关注报考院校的研究生招生官网（尤其是初试成绩公布后）

11.2 考研科目

思想政治理论、英语、两门专业课

这里政治是全国统一只有一套题，英语也是全国统一命题，分为英语一和英语二，学硕的话绝大部分是英语 1，两门专业课一般是学校自己选择、命题，比如大部分学校的数学专业考研就是数学分析和高等代数，有些理工科专业会有一门全国统一命题的数学（分为数学一、二、三）

11.3 备考建议

笔者是大约在 6 月份决定要考研的，考的是南开大学的数学科学学院，四门考试科目是政治、英语一、数学分析、高等代数。笔者从 6 月份开始每天在扇贝上背单词，并且每天刷数分高代题，到 9 月份开始学政治；到立冬时还有一个多月的时间，这时候除了政治以外的各科都差不多学完了，这段时间可以用来计时刷成套的题。

不要过于焦虑，你在备考的时候可能会觉得时间紧，但大家时间都紧，大家都站在同一起跑线上。还有一点很少有人提及，就是锻炼身体，保持好体力，考研时的两天四场考试是对体力的极致考验。

11.4 备考资源

政治：肖秀荣《考研政治背诵手册》红皮书、考前 8 套题、考前 4 套题（这四套题在考研界的大名已经如雷贯耳了，解答题一定要背，会押中好多题，就算没有押中也能帮你积累语料库）；考研政治带背课程（b 站资源，肖秀荣老师官号）；苍盾考研政治小程序

英语：扇贝单词、历年真题

数学专业课：谢惠民习题册、南开大学数学分析课本、谢启鸿高代、蓝以中高代、各学校历年真题、李扬公众号（个人不推荐在准备考研时跟着清疏或豌豆的公众号做题，因为这些题太钓鱼了）

12 关于保研

我们这里只谈基础数学的保研。

保研，又称为推免，全称为“推荐免试研究生”，是中国高校选拔优秀应届本科毕业生免初试攻读硕士、博士学位的招生制度。而我们俗称的夏令营往往发生于大三下学期的三到九月份，根据月份的不同也被称为四推，六推，九推，意思就是四月的推免，六月的推免，九月的推免。此等叫法并非有严格规定，而是往往最早的推免发生在四月，比如北大，中科院等学校，然后还有一些学校的夏令营发生在六月左右，最后剩的一些名额留在九月，故称为四推六推九推。

但是自从 25 年开始，神秘的大手突然发力，打破了以往的一些惯例，以至于 26 年大家人心惶惶，以往三月份就该有消息的各种营都集体消失，直到五月份才得到通知。比如早该在三月份开始的北大夏令营变成了五月的学科交流营。但无论如何，许多学校的营开始开出来了，大家要多关注各种信息渠道，比如一些专门转发此类信息的微信公众号，不要漏掉什么信息导致错过报名！千万不要错过报名！报名中的一切信息都要按要求填写，及时地填写，如果你需要扫二维码填写的也要及时填写，不要想着以后再填导致忘记填写最终报名无效，这是真实发生的事，务必哀之鉴之。

至于未来的保研情况如何，27 年是否还能按时开营，一切都不得而知。

12.1 关于套磁

套磁是一个词汇，也是北京方言，也作“套瓷”，读音为 *tào cí*，意思是套近乎，搞好关系。在升学申请，特别是博士申请中，“套磁”特指申请者为了增加被录取或获得奖学金的机会，提前通过电子邮件、电话或见面等方式，主动与目标学校的教授进行联系和沟通的行为。

对于当下的国内环境，我不知道套磁是否有足够的用处，但是总归是没有坏处的。一般认为，套磁的时间越早越好，如果你早早就和目标老师有足够的联系，那你相对而言就更有优势，不过也可能存在你的目标导师公事公办拒绝被套磁的情况。

我们的建议是，在你的学科水平达到一定层次之后就要开始找你的意向导师，去大学的官网看看有哪些导师的研究方向是你感兴趣的。在套磁的最开始，广撒网并不是什么不道德的行为，你可以咨询老师是否有研究生招生名额，并表达对老师的方向有研究兴趣，可能会有一些老师会与你进一步的沟通，但大部分老师可能都是比较官方地回复你。如果你在某些方面有特别的优势，可能老师愿意与你进一步沟通的概率会变大。

当然你也可以多和本校老师聊天，通过本校的一些老师牵线搭桥联系到其他学校的老师，这个就比较吃方向，如果学校恰好有你同方向的老师愿意为你联系，那自然再好不过。如果你想学的方向在学校里没有对应的老师，那就比较惨，不过也可以问问相近方向的老师，也许就认识一些。总之多问，多打听，多尝试，也不要早早地把自己过分地限定在某一个小方向非它不学。

当然还有一些认识其他学校老师的机会，就是多参加各种暑期学校，或者线上讨论班积极发言，或者 bicomr 的网课之类，这都是认识其他学校老师的机会。

12.2 夏令营流程

所谓夏令营大概分为三个步骤，第一个步骤是学校官网发出报名通知，那你就开始准备各种各样的报名材料了，比如成绩单啊，比如成绩证明啊。排名这一块比较模糊，因为大家是有 ABCD 与 BCD 这样两个不同的排名的，尤其是在绩点制之下，ABCD 和 BCD 的排名可能差别非常大，所以大家都是倾向于提交自己更高的那个排名，但是教务处的想法是报同一个学校的学生应该提交同一类排名，但是实践上很难实行，所以这个东西就见仁见智了。

报名完之后就是等待笔试，笔试内容每个学校都不同，但都是要准备数分高代的，并且难度不能说小，所以还是要提前准备准备，因为有些学校就喜欢考各种熟知结论的证明，对熟练度要求较高。有的学校笔试面试是放一起的，比如复旦，中科大等。有的学校是先笔试，然后通过笔试筛选进入面试，比如中科院，而中科院这种先通过笔试筛一轮的一般来说可能是线上笔试，需要找一个安静的房间架两个机位。

最后就是面试，有的学校全靠面试来筛选，比如北大就没有笔试，初审之后就是面试。有的学校笔试筛选过后就不再看笔试成绩了，靠面试发挥，比如中科院的春立营（既然有春立营那当然也有夏令营，二者情况可能不一样）。有的学校笔试面试各占一部分最后综合计算，有的学校几乎只看笔试成绩，面试只是一个过场，这些都需要大家通过各种渠道自己去了解。

总之大致流程就是报名——笔试——面试，然后等待结果即可，有些学校的优秀营员是有足够效力的，也有些学校可能会鸽你，这个也需要你自己去了解，去判断。

12.3 关于面试

大家都是做了十几年题过来的，笔试方面我们就不再多谈，但是面试这一块可能对大部分人来说并不容易。首先我觉得合理的面试题应当是某种 routine，就是不需要什么深度思考的，会的人自然会，不会的就不会，而不是考察智力与临场反应，比如对代数几何方向经常会问你：“仿射平面去掉原点是否还是仿射的？为什么？”。此类题目可以参考：[Standard Generals Questions](#)。但这些种类不够，还是要大家平时自己多积累。

然后大家也可以去寻找一些面试题目，或是往年口口相传的，或者是其他学校刚刚面试过的，总之多学多了解，不要过于紧张。当然你甚至可以直接发邮件问老师可能会面试什么，虽然大部分老师可能不会回答你，但是也许有一小部分老师愿意给你一个范围说不定。

然后可以同学之间相互面试，相互考察，这样不仅有助于对知识的理解，还有助于面试的训练。面试往往是在黑板上回答，这时候一手漂亮的板书也会给老师留下深刻的印象。平时多参加讨论班，多主讲讨论班也会提升你的面试表现。

面试的时间有长有短，有的二十来分钟到半个小时，有的十分钟不到。但无论如何自信发挥即可，尽量在有限的时间内展示自己，可以大胆询问提示，或者表示自己更擅长什么（当然你是要真的擅长），寻求这方面的问题。

13 关于留学

本节由 左 R 模 于 2026/7/3 编辑。

13.1 为何选择留学

选择留学的原因有很多，可能是由于境外的教育资源更加丰富，可能是由于校内升学无法找到自己想要的方向。但是不管怎么样，没有所谓留学就一定优于保研的说法，不要为了一些外在的东西而去选择，一定是基于你最真实的需求和想法。

13.2 一些相关注意事项

本篇内容主要针对的是基础数学的，应用数学据我了解在很多方面要求是不太一样的，比如你去美国申请运筹或者强化学习什么美国博士，可能要求就得是一篇顶会，但是对于基础数学拥有质量不错的 preprint 就已经是少见的了，故而很多事项如果不是基础数学的方向，用来参考可能有用程度会大大降低，特此声明。

13.2.1 难度

留学申请的难度和地区，项目，经济实力都有关。一般而言，博士的申请是最为艰难的，好处是没有什么经济压力，因为会有博士固有的奖学金和 TA 的工资 cover；加拿大的硕士也很困难，可能是因为名额没有那么多，所以能让国内的人申请到还是非常困难的，不过他们也是在学硕的时候组里就会发钱，所以经济压力上要稍小一些（当然不是完全不需要出钱，因为国际学生学费比较高）；美国的一些硕士相对容易一些，但是不代表申了就有，而且开销也是十分巨大，根据本人在伯克利一学期交流项目的开销，以及和其余人交流所得来看，一般来说一年要花三十到四十万人民币，如果你对你的生活质量有一定要求可能这个开销还会更大；对于香港那边稍微特殊一点，由于 Mphi 的名额非常有限，所以可能比博士竞争还更激烈；难度较低的是欧洲的一些英授项目，但是也有很多不好申请的，本人主要申请的就是一些欧洲的硕士项目，那边的硕士基本都类似于学硕的概念，一般硕士毕业论文需要一年的时间完成，一些瑞士和法国的奖学金项目的难度非常高，据观察很多都是 PhD 或者准 PhD 选手才能拿到 offer，algant 项目等 erasmus 项目以及除开 bonn 的德硕相对而言门槛不高，gpa 可能八十出头就够，推荐信也不需要非常强力，甚至德硕很多也不需要推荐信，这里后面会详细说明，其余的还有一些英国那边的 part iii 等等的项目；对于一些水硕，这里不去谈论，因为个人认为那些对于以后的 PhD 申请以及后续的研究并没有什么实质性的帮助。故而在选择的时候，要根据自己的实际情况以及目标，所做的方向去申请。

13.2.2 择校

择校非常重要，如果你已经确定好了以后要做什么具体的方向，那不用说，自然要选择有做这个方向的老师的学校，如果只是有一个大的方向的想法，尤其是申请硕士的时候，比如想做算术几何，想做拓扑，那么尽量选择一些你这个相关方向比较丰富的学校，这样便于后续选导师，确定方向，以及升学。一些榜单排名在某些时候并不需要参考，如果是 USNews 还大致算是对美国学校有个较为合理的排位，但是其实

最重要的还是看老师和方向，像 qs 那就更不重要了，很多好学校的排名并不高，比如德国的 bonn, 明斯特。即使是 USNews，可能最大的参考价值在于他的申请难度，比如 top 10, top 30, top 50 这种评价的方式。故而你要明白，选择学校最重要的是为了以后的学习和研究。当然有些还会结合家庭经济实力选择，美国和加拿大的开销前面已经说过了，欧洲的话，德国那边相对是比较低的，如果自己做饭学校住宿，一年可能不到 10w 人民币，因为他没有学费，只有每学期一个注册费，荷兰瑞士巴黎会相对贵一些，但是也没有美国那么离谱。

13.3 流程与要求

13.3.1 英语

关于 PhD 的申请，首先第一个门槛是英语，由于需要完成 TA 的教学任务，所以不光是总分有要求，对于口语也有，可能是听说读写的小分里普遍来看最难的一个，这个需要花时间自己去练习，其次是一些 gre 和 gre sub 的要求，后者其实难度并不高，但是前者非常困难，主要是词汇量要求很多，我并没有考过，只是听去了美国的 PhD 学长介绍过，当然一些学校对于这两个 gre 并没有严格的需求，也有可能可以豁免，所以可以尽量提前发邮件问问。

关于 master，不同地方差别还有点大，英语国家的要求大部分都得是 90 或者是到 C1 的程度，以及会有小分的要求，欧洲那边大部分则只要求 B2 就可以，当然荷兰瑞士什么的地方会高一些。

我其实推荐考雅思而不是托福，因为我发现托福送分要钱而雅思并不需要。以及托福现在 6 分制度，在某种程度上有好处也有坏处，需要根据你的具体情况来分析，所以我只是一个说明，并非一定要选择。

13.3.2 推荐信

PhD 申请的推荐信非常非常重要!! 只靠校内老师上课的推荐信想要在境外申请的基础数学的 PhD 是非常非常非常困难的，尤其是在现在申请形势剧变的当下。一般要求是两到三封推荐信，故而如何拿到推荐信就非常重要。

首先就是校内老师的推荐信，由于我国行情问题，国内推荐信的效力一般非常低下，当然了，你的老师如果就在对面读过博士或者就是刚从海外回来的，那另作商榷，比如郭少明老师那自然会很有效力。很多做基础数学的老师人都挺好，会愿意给你写或者让你写一份草稿给他他修正以后提交，即使如此，我也推荐你多和老师交流，有学术交流的基础，老师写起来会更方便也更有底，甚至也会有你意想不到的 connection，这一点对于向谁要都是一样的。

其次是通过暑校或者暑研来获取，暑校如果时间不长其实是比较困难的，暑研倒是很有可能，甚至你可以做出来一些小的 question，那么这时候对于你的申请也是有帮助的。暑研的机会相对还是非常少的，境外也有一些但是很多不一定对于国际生开放，国内代数方向最近最有名的可能就是科院和北大办的那个代数与数论的研讨班暑研，如果在大三有机会去的话也是一个非常不错的选项，其他方向我不太了解，需要后来人的补充。

而后就是通过去境外学校的交流获得推荐信，一般而言你在研究生课程上拿 A

就有概率可以拿到，但是这个效力并没有多少，所以还是那句话，要多和老师 *in office hour* 的时候交流，交流什么？不要交流一些过于弱智的问题，可能国内有些老师喜欢回答这样的问题，但是问弱智问题对于提升你的推荐信效力没有任何帮助，你可以从课上提到的问题延伸到他的后续，对你发现的一些现象的背景提问，当然一开始可能你也说不出一一些比较好的问题也没关系，先开始是最重要的。比如你可以简单的说椭圆曲线有理点的存在为什么会影响 Picard 群的那个正合列，你也可以更进一步的直接指出这个背后的原因是不是和某某有什么关系，你要让他发现你有思考，你有探索，你有交流。更好的问题一般是来自于论文中，你想阅读一些相关的论文时候所遇到的困难可能更有讨论价值，如果是他本人所写更是如此，当然这需要你有一定的学术功底，这在推荐信中可能是效率最高的获得高评价的方式，当然了，也取决于你和老师交流时候的表现。如果你能够通过交流获得暑研的机会，那当然是再好不过了，虽然这个确实是很看运气的。还有就是多参加 seminar，这也是一个很有效的沟通的渠道，因为 seminar 相对而言讲的会更加前沿一点，也对你后续的研究学习有帮助。

对于 master 呢，我提到的几个比较困难的项目推荐信可能还是相对重要的，但是我依旧觉得欧洲的这些申请很玄学，不太明白他们的标准，故而只能尽力做好你能做的，bonn 的 master 前几年的 bar 没那么高，但是这两年 PhD 的申请形势比较差，所以难度性也提升了，不过需要注意的是，这个原因有一部分和他的申请开放时间有关，因为比其他很多欧洲的项目都早，不少人会申请这个当作保底，所以第一批没中的也可以第二批尝试申请，第二批的概率其实相较于前几年是有所提升的，原因就在于很多保底的人会有更好的去向，其他的一些德硕，比如 Essen, munster, 雷根斯堡，申请难度其实没有那么高，但是学校其实相当不错。顺便一提，欧洲的 PhD 除了英国那边应该是没有办法本科直接申请的，那边正常流程就是必须要读硕士。

13.3.3 绩点

这一点和前文所说的其实一样，不论是在 PhD 的申请还是 master 的申请中，这个的最大的作用就是门槛，虽然有的门槛高有的门槛低，但是这绝不会是影响你最终结果的最大的那个因子。比如 PhD 的申请，3.7, 3.8 可能就已经够了，如果专业课大部分甚至全部满绩导致比总的 GPA 更高也可以备注，稍微更有点用，但是正如我所说，这个最重要的作用就是门槛，达到以后可能几乎不会在意了。

13.3.4 时间节点

不同的学校申请时间节点不同，一定一定要去官网上核实，一般而言美国的申请开放时间都比较早一点，可能在前一年的十月份十一月份就会有开始的，所以需要提前做好准备，关注官网的具体时间信息。欧洲相对要晚一些，第一批的可能在一二月份截止，法国可能是二三月份开始，而德国意大利之类的正常申请会更晚，三四月份，五六月份的都有，出结果可能更晚了，这对你的心里承受也是一种考验，以及如果选择正常的申请德国，你需要准备一个叫做 APS 考核的东西，又些申请的时候就需要，有写是你后面需要补交，但是如果等你七八月份拿到 offer 再去弄肯定是来不及的。

13.3.5 套磁

其实这一点和国内保研一样，在申请 PhD 前 (master 感觉很多地方套不套没有什么区别，可能加拿大或者是香港的学硕还是需要的)，需要提前了解老师的招生意

向等等，一般会附上个人 CV 和成绩单，如果你能有论文或者 preprint 当然更好。记得套老师的时候看清楚他实际做的是什麼，每年都有套错了的乌龙事件发生。套辞时间一般申请前就可以开始，申请中也可以。如果他能和你进行一个非正式的 meeting 进一步了解，那可能就说明确实对你比较感兴趣，当然更多的可能是官方回复或者不回复，不要灰心，多套一套，留下一点印象也是不错的。总之这个就是纯靠自己努力了。

14 DLC: 学长们的学习路径 (仅供参考)

我们都活在别人定义的成功里，顺着他们踩出来的路，
被世俗的洪流裹挟着前进。可是又有几个人能想明白，
自己内心真正想要的是什么。

——《熊出没：逆转时空》

14.1 如何成为分析学爱好者？

This section is written by [REDACTED] on Aug. 11, 2026,
and is **NOT** intended to promote ANY self-media on ANY platform.

虽然扩展知识面是本科阶段几乎必须要做的事情，但是做分析方向就意味着绝对不能做名词党或者，well, quasi-/semi-名词党，为了掌握很多“理论上不可言说”的东西，可能有的人称之为“技术”，大量计算例子，做足量的习题和 copy paste 冗长的不等式放缩是学习分析，尤其是硬分析的常态，这种踏实是必经之路，笔者认为读任何数学书都不能和小说一样一笔带过，只不过笔者是做分析的，所以我们在这里只讨论分析的学法罢了，故还请不要对自己读书太慢感到焦虑，你需要踏实地掌握推导的细节，建立对整个证明的熟悉才能走的更远。

当然也不是一定就是要把习题全写全做，很多平凡的习题完全可以跳过，大量的无趣重复性计算练习也没有必要，特别困难的习题也可以求助于 AI 或者他人，大量写问题只是手段，不是目的，更不能变成假努力的遮羞布。

因此如果读任何书有人带着学是极好的，比如前人真的全解过习题，他就知道哪些可以做，哪些没必要，给你划出一份最小习题清单，大幅节约你的时间和精力——当然，这个活现在也可以交给 AI 干，感谢时代的进步。

下面列出书目的顺序为按照笔者研读的时间先后顺序排列，且若未作说明，阅读范围内所有的习题笔者均写了完整解答。

1. 菲赫金哥尔茨 微积分学教程（一，二卷）

本书没有习题，中文版翻译很差，并且非常之厚。这是笔者在极早期第一次接触严肃数学时的读物，那是大约初二到初三的时候被某个同学拉入坑推给我的第一本书，当时还是嘉豪魔丸形态的笔者，对于这卷巨著仅是买来无脑抄书，并没有真正学到什么东西，把它放在这里仅是一种忠实的记录。

2. 卓里奇 数学分析（第一卷）

这本书观点比较高，笔者是在高一二开始（反复）粗读它的⁵¹，在此之前笔者已经通过各种手段建立了对高等数学最基本的熟悉⁵²，因此对于它的邻域基等各种语言还是相当适应的，卓里奇对极限的引入个人认为相当不错，极限几章笔者看着相当舒适，而卓里奇引入实数理论是通过公理方式，也即直接告诉你 $\mathbb{R}$

⁵¹N 线小城市没有数学竞赛的培训，在笔者的中学里，最会做题的人会被抓去考一个市内的选拔（高考题），但选拔出来又没法培训，遂把我们几个人抓到单独一间教室自学，笔者什么也不会，只好看卓里奇。。

⁵²通过考研速成课程，没错就是 b 站找的高数 XX 讲。

是满足下面几条公理的集合然后怎么怎么样，这就避开了繁复的构造，更快地进入主题。

对于实数构造个人认为无需纠结太多，等到学了泛函分析就会知道 $\mathbb{Q}$ 的完备化就是很标准的步骤。

真正开始认真研读这本书是高三暑假，写它的习题全解极度痛苦——难度你懂得，笔者一直写到大一上期中以后才成功跑路，但回过头来看其实没必要，比如某个神秘插值习题其实就是抄了数值分析的某个定理，没人带着或者抄答案基本就 GG. 笔者认为没必要专门硬磕习题，不会就直接让 AI 智能打击吧。只需要偶尔有一两个思考一周以上的问题就可以了，思考的过程会让你收益良多，但是一直思考对于入门阶段的你太浪费时间了。

3. Munkres 拓扑学 (1-4 章 + 5.1 节 + 第 7 章)

很典的教材，没什么说的，基础点拓语言，同样高三暑假读的，这个就比卓里奇友好的多，不会做的习题 *stack overflow* 也基本找得到，现在有 AI 更是舒适。

4. 卓里奇 数学分析 (第二卷) (第 11, 16, 17, 19 章)

到这里笔者基本就进入大一了，为了适配数分高代的课程任务⁵³，这里的阅读顺序是比较复杂的：11 章多元积分和 16、17、19 章一致性和积分估阶，这一块笔者基本就是快速随便刷过的，因为这一章会在后面被 Folland 实分析彻底平替。而前面直接上手点集拓扑的目的是屏蔽卓里奇第二卷第一节上来就高点集拓扑的操作。

多讲一句，其实一致性那些琐碎的结论掰扯到底就是告诉你某种一致估计允许极限换序这个直觉，余下就是无聊的定义推导，真的没必要搁那背，一些考试喜欢摁扣格式的，笔者觉得偏离了学习的目的。

5. 席南华 基础代数 (一, 二卷)

这本书笔者也是大一上学的，和卓里奇基本同步在看，具体而言，笔者大一上基本不需要学数分 (卓里奇第一卷写的还是很好的)，所以就非常线性地看下去了。第二卷笔者没有学那些仿射几何的东西，不知道是干什么的，好像到现在也没用过。

就高代课内需要而言，把第一卷学完之后，第二卷把三大算子的定理看会就可以了，按照笔者的风格⁵⁴，可能更喜欢像前面高代推荐一样上 Roman，但是现在看来，我个人还是更倾向于让读者直接白皮书走起，因为席南华的习题不多，而且同样比较困难，笔者学完之后做题能力提升为 0，而后面又很少用代数导致基础很烂⁵⁵，只能用到再复习。

6. G.B Folland *Real Analysis* (第 1-8 章)

大一下到大二上的主力书籍，无脑读 + 做就完事了，习题全解完之后飞升南开

⁵³ 指给某些杂事分配时间

⁵⁴ 笔者选书完全不看难度，这个阶段的笔者还是有点过于自信的

⁵⁵ 指不能和做积分计算一样如同呼吸般自然，基本概念还是要知道的。

数院星球，从此笔者不需要在你开的数分三、点集拓扑、泛函分析、现代分析基础和傅里叶分析课上听讲。

7. **Loring W Tu** *Introduction to Manifolds*

× 没有学懂，暂放，待后续排别的书重开。

8. **卓里奇** 数学分析 (第二卷)

(第 12–14 章)

12、13、14 章是曲线面积分，笔者是细学的，但是卓里奇明显讲不太好，这导致笔者到现在都对这一块不是特别熟悉，存在严重后遗症，建议读到这里之后直接按照南开的书学，或者求高观点的话就直接上马 Lee 的微分流形，不推荐 Tu 的流形导论，他没讲明白定向导致笔者到后面根本不知所云。

9. **Rotman** 高等近世代数

(第 1–9.5 节)

大而全的抽代书，前面群论写的还行，Galois 理论写的不太好，往后就挺无聊的，感觉像做了很多新定义题，现在也没怎么用到抽代的东西。

10. **Lang** *Complex Analysis*

(除第 14 章)

很典而且简单的教材，东西刚好足够。

11. **Patrick Billingsley** *Probability and Measure*

(除第 19 节)

概率论的超级大部头，从概率空间讲到鞅，习题非常多，而且后面有部分习题解答，笔者在数分三课上读的，也是读了一个多学期才跑路，读完这本书概率论随机过程基本通关了，非常 nice。

12. **Ciarlet** *Linear and Nonlinear Functional Analysis*

800 页以上的砖头，讲法偏向 pde，专门有三四章讲如何用泛函分析给简单 pde 定存在性，最后几章还塞了点非线性分析和拓扑度，甚至塞了一节微分几何进去，不过笔者觉得微分几何的内容没啥意思。考虑到这本书是砖，建议读者先判断自己是否明确对 pde 类型的硬分析存在明显偏好，如果答案为否或者不确定，建议读 Conway。因为精进某个讲法的代价就是放弃别的东西，笔者到现在尚不知道什么是冯诺依曼代数和算子半群。

13. **Camil Muscalu, Wilhelm Schlag** *Classical and Multilinear Harmonic Analysis* Vol.1/2 (除 Vol.1 Ch.12、Vol.2 Ch.5; Vol.2 无 Problem 解答，仅解答了 Exercise)

极其困难的调和和分析“教材”，本书习题无论 exercise 和 problem 都极为困难，读完第一卷就燃尽了，第二卷基本是 20 世纪的数学，主打时频分析方法，但是第二卷跳步非常厉害，笔者差不多在 25 年读的第二卷，那个时候的 AI 还没有现在这样（宣传的）秒天秒地，曾经为了补全一个细节干废了市面上所有的 AI 都是在胡说八道，还是得靠自己。笔者至今尚不敢 check 自己第二卷究竟学到了什么，细节问题太多了。。。

就未来的学习建议而言, 首先调和分析是没有特别好的圣经级别的教科书的, 第一卷可以在高性能 AI 的帮助下读, 总之要先上手, 然后后面用到再补。如果能按部就班读完第一卷的话, 到这里你的分析基础应该还不错, 作为本科生可以得到大部分老师的认可了。至于 *GTM249* 和 *250* 笔者没读过, 但是根据一位老师的说法这是字典, 不太建议直接读。

未来笔者给自己排的时频方法教科书是 *Thiele* 的一个讲义, 这东西不知道啥时候能再学, 但笔者绝对不推荐上手就开坑第二卷, 这卷几乎就是论文集, 你应该先找一个想教会你时频方法的书学, 然后熟练了再开第二卷读这个“论文集”。

14. ShaomingGuo *Fourier Decoupling Theory*

这本书是郭老师写给本科生的讲义, 难度不大, 比起上面 *Schlag* 的魔鬼训练好太多了。最后一章 *decoupling* 不等式的证明可以先忽略, 这个证明方法笔者觉得不太好理解, 这里只是老师选的一种比较简短的证明方法, 个人感觉不太适合学习。想学 *decoupling* 的证明可以去百度搜搜 *Larry Guth* 的讲义。

15. Pertti Mattila *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces* (第 1–8, 12, 14–15, 19–20 章)

补一补几何测度论知识, 这本书还算友好, 前八章必读, 以及 *frostman* 引理必会, 后面选学即可。

16. Hugh L. Montgomery, Robert C. Vaughan *Multiplicative Number Theory - I. Classical Theory* (第 1–11 章, 习题选解, 仅保证带名字的习题有解答)

这本书贼厚, 但是很基础也很事无巨细, 证明不跳步也基本不藏招⁵⁶, 会简单的复分析就可以上手, 同时习题也无限多, 推荐在关键重点章节选做, 掌握狄利克雷卷积技巧和生成函数的对应, 以及它翻译到复分析语言就是 *perron* 公式就足够了, 接着知道模 q 的特征以及 ζ 函数, L 函数的零点为何重要就足够了, 本书大部分时间都在做本质数学分析的东西, 读久了挺无聊的。

17. Ciprian Demeter *Fourier Restriction, Decoupling and Applications*

正在研读中, 据说读完就可以开始做问题

⁵⁶有些技巧笔者是在 AI 辅助讲解习题的时候被 AI 介绍的, 而书里却没有重点介绍。

14.2 如何^{在不会跳宅舞的情况下}成为拓扑流形？

本节由 [朱凯](#) 于 2026/8/17 创建。

¶ 叠甲声明：本文内容与标题无关.

1. XXX 书书书
[内容](#)

15 保持心理健康

16 杂谈

1. 生活就是漫长的小马过大河，本指北中的所有内容都应作为参考，而不应忠实得跟随。
2. 有的老师不怎么看飞书，老师们之间可能还是通过邮件联系的多。很多老师你如果发现他们飞书很久不读或者很久不回，可以试试给他们发邮箱。有的老师你可能加上他们的联系方式了，但他们也不喜欢在微信上聊工作。
3. 现在大家都搞绩点制，有很多同学取得全满绩的成绩，在大类全满绩的人更多，因为很多人尽管对这个那个感兴趣，为了保证自己的高绩点不去选那个课。保研的时候排名十分重要，所以同学们可能需要格外谨慎。
4. 鸡蛋不要都放在一个篮子里，并不总是学生鸽老师，老师也会鸽学生。计划也会赶不上变化，或许这个世界就是一个巨大的赛鸽。做一个学术意义上的海王/海后没什么不好的，千万不要等你眼里唯一的白月光老师被牛走之后才追悔莫及，因为此时你会发现自已没书读了。
5. 数学成熟度是一个很玄学的东西，每个人对数学成熟度的理解不一样，但这都是数学成熟度的一部分。实际上我很少见到有人交流数学成熟度，但你可以多问问自己数学成熟度是什么。
6. 网络上经常会有各种言论，会有许许多多看似专业看似权威的人发布各种各样的观点，这些观点为了流量往往有失偏颇。无论如何，保持独立思考是这个时代最重要的能力之一。
7. 没事干的时候可以逛一逛一些老师的个人网站，也许会有意想不到的收获。下面给出一些：[梁咏琪老师](#)，[李文威老师](#)。

17 美食推荐

既然是生存指北，怎么能少得了美食推荐呢？

1. 冈冈面包：他妈的，我真的没见过比这家更好的面包了!!!
2. 法颂：很好吃的面包店，在文化中心和营口道都有店铺。
3. 五福西点：来天津必吃甜点，笔者推荐这里的蝴蝶酥和黑森林蛋糕，不过其中每种甜点都很好吃。（顺带一提，这个蝴蝶酥的形状和动力系统里的 Lorenz 吸引子十分相像）
4. 挞老记：笔者在天津见过性价比最高的蛋挞店，三块多一个现烤的大蛋挞，在营口道附近有店面。
5. 初·鸯 | Only Dessert：天津好法甜，集美们别拍照了，请尊重手上的甜品。
6. 半半咖啡：拿铁不错，就是太远了。
7. 食在岭南：走过路过不要错过，离学校不远但笔者去吃了十来次没有迟到一个差评菜的粤菜馆。可能你在广东吃的粤菜也未必比这个正宗。
8. 伍辣辣：江西菜馆，八里台校区东门出门直线北上即达。比较正宗，下饭菜。
9. 黄门脸、同发号、鑫来子：天津菜馆。我更推荐黄门脸，人比较少而且味道不错。鑫来子被隋坡探过，人特别多。同发号是老品牌，人也很多。
10. 魔牛王：重庆小面等。笔者还没吃过但笔者的学长极力推荐。更新：笔者吃过了，确实好吃，用的居然还是碱面。这是我到目前在天津吃到的第一家碱面。
11. 天明海鲜饭庄：顾名思义。从水池现选现做，品质不错。不算便宜，我之前和同学两个人吃了 300，但我俩饭量不小，正常来说可能人均 100。
12. 金环西餐厅：俄餐萨莉亚。我吃过一次，印象里味道不错，后来再想去要么是排队，要么是在装修。
13. 城鑫烤肉：在金环旁边。付款只接受现金。十分便宜，量大管饱，味道也不错，就是很多人抽烟。可以尝一下。
14. 青琅轩：饺子店。十分大，还有吸烟区和非吸烟区。味道不错，就是有点远还有点小贵。我去的应该是红桥区那个，万德庄店我没去过。
15. 鹅举人：烤鹅。好吃。
16. 百味羊庄：有烤全羊。但我吃过两次烤全羊都觉得比较干，吃个半饱就有点腻了。他这里的烤鸡味道很好，当时我们七八个人去吃烤全羊，烤鸡上桌一分钟尸骨无存。
17. 屯老二农家铁锅炖：我过去吃的是鹿排，味道很好，我一个人吃了两斤半。是东北铁锅炖类型的，用的好像还是柴火？忘记了。
18. 鱼酷：活鱼现烤，无需多言。

18 散步放松好去处

来到了天津卫，嘛也没学会，citywalk 我学不会，贝爷来相会。

1. 梅江公园：离学校比较近的大公园之一，11 号线到医大二院换 6 号线，梅江会展中心 D 口出站，右手边就是了，绕一圈差不多 3km，是一个挺大的湖。
2. 南翠屏公园：6 号线南翠屏站 D 口出站即达，市中心小公园，中间的假山是天津市区最高峰。平常人相对多些。
3. 海港公园：9 号线终点站东海路，出站过大马路就是了。人不多，比较安静，海边风稍大的小公园；但是并不临海，看海请去东疆湾。(Ps：这个公园和一段天津人不愿提及的惨烈历史有关)
4. 南开大学津南校区

5. 东疆亲海公园 & 东疆湾景区：城际 12 块坐到滨海站，然后跟随指引到公交站等候 513 路车，坐到亲海景区站⁵⁷，步行即达。确实临海，但是这个公园商业化严重⁵⁸，人也多，KFC 是景区店标准，不太推荐。从这个地方往南走 2km 可以去到东疆湾景区（东疆沙滩）⁵⁹，那个更是要买票进，公园买什么票，笔者看到就跑路了，直接避雷。而且返程基本只能打车或者步行到比较远的公交站坐 513 路，不太方便且没啥意思。

补充一点，滨海本身没有什么人，但是绿化却做的不错，本身临海也比较凉快，到这附近当成公园逛倒是可行的，毕竟出了景区立马没有人影。

6. 邮轮启航公园/东疆建设开发纪念公园：高铁 12 块到滨海站转 513 路到终点站邮轮启航公园站，下车步行 300m 即达。这个地方也临海，绿化不错，人流适中，基本没有商业化，推荐来这里看海。

注意一点，就是 513 路走完全程也挺慢的，至少超过一个小时了，如果有打车的意愿和能力可以打车解决，高铁站附近可能还算好打车，当然不要上黑车。

7. 北辰郊野公园：5 号线终点站北辰科技园北，出站之后先往前走一段到大桥底下，然后要越过一段哈人的裸地，上面全是高压线，之后才能到公园道上。假期似乎有很多人来这里野营，这个地方非常大，沿着河一直走 3km 之后有座桥，过桥之后还有。注意河边可能信号不好。
8. 峰山药王古寺：7 号线到芦北路之后门口坐 848/838 路车到峰山药王庙站，到站之后还要看地图绕一绕才能看到寺庙大门。中型寺庙，人不多，绿化不错。
9. 绿屏·咸水沽湾：11 号线到东江道站外换乘 1 号线华山里到东沽路站 C 口出站，之后还要走一段才能进去。建议秋天去，笔者去的时候没有稻田，只有泥坑。

⁵⁷注意返程车不停靠亲海景区站

⁵⁸从一堆人骑个车在那里喊出海多少多少钱就看得出来。

⁵⁹也可以 513 多坐两站到东疆湾景区：沙滩公园站，然后步行 700m.

10. 绿屏·辛庄湾
11. 南孙庄地铁站：6 号线终点站不必多说，路边有野狗会叫叫叫。
12. 古海岸湿地绿廊：9 号线坐到军粮城站之后沿马路走一公里多到，就是一片连大门都没有的荒地，里面绿化不多，遮阴率低，但是很野很大没啥人，笔者在里面差点迷路，幸好这地方信号还行能看地图。
13. 长虹公园：2/6 号线长虹公园站 C 口出站即达，绿化不错的中型公园，人稍多。
14. 天津东湖风景区·今夕东丽湖：2 号线登州路站转 663 路公交车到东丽湖生态公园站即达。这个地方比较大，适合骑行，步行也可以。人流中等，主要集中在入口，往里面走一段人就少很多了。注意有开放时间，不要太晚去。
15. 新立郊野公园：4 号线航双路站 C 口出站之后走一段，这个公园疑似开发中，有的地方很野，有的地方比较成熟，可以去探一次险。那边飞机挺多，附近就是滨海机场。
16. 宁园：3 号线坐到北站 D2 口出，出站之后能看到一个瑞幸，背后是天津北站。这个地方略难找，因为要走旁边下穿桥梁的马路，这个马路走左手边其实是有行人专属隧道的，笔者第一次去的时候没看见，绕了一大圈。这个公园绿化不错，人气较旺。
17. 津一 PARK：乘坐 857 路，或者 11 号线到文化中心 D 口出站转 857 路，又或者直接地铁到一号桥站，步行较短距离就到了。这个公园很小，绿化还行，旁边不知道在建什么楼盘，人不少，感觉更像伪装成公园的 xx 广场。天津最美星巴克替你们看过了，并不美，感觉营销成分大，还不是臻选店⁶⁰。
18. 佛罗伦萨小镇：15 块城际坐到武清站⁶¹，就在站房对面，过天桥即达。本质奢侈品街区，随便逛逛走走看看就好，消费就仅限 X 巴克（都不是臻选店），KFC 之类得了⁶²。笔者在里面花 68 买了 Venchi 两个球的甜筒，评价为用料还行但是调味为零，太甜腻了，同样 34/球的 Gelato，去初鸯吃的体验比这个好⁶³。
19. 永定河故道国家湿地公园：15 块城际坐到武清站，出站右转步行 1km 左右到达。武清的马路基本都有划出人行道，所以步行体验还是 OK 的。公园基本就是一个狭长的步道，也可以骑行（植物长得很野，可能骑行体验不好），绿化很好，但是看起来没怎么打理，植物长势比较野，人不多，景色优美，有空可以多去。
20. 天津市文化中心：11 号线坐几站到文化中心站，笔者认为是天津市区风景最好的地方，文化中心公园可以散步，图书馆可以自习（工作日人比较少，寒暑假和周末人很多），旁边的天津科技馆也很适合溜达。

⁶⁰ 补充说明，笔者不推荐喝星巴克臻选咖啡之外的咖啡饮品——风味糖浆卖 40 怎么不去死呢？30 块能喝到真的带香草籽的拿铁了，而不是**风味拿铁**。

⁶¹ 城际去程票可以地铁到天津站再买，但是回程票一般是晚高峰时段，建议提前买。高峰期临时买北京南到天津都很难买到，更别说武清到天津了，反正提前走也可以改签，起码不要被迫留在武清过夜。

⁶² KFC 疑似是景区店标准，吃饭啥的还是看看别的或者跑路隔壁威尼都观察一下。

⁶³ 冰激凌属于夏季季节单品，随缘吧，多问初鸯老板夫。