稠密性相关

Def 1 设 A 与 B 都是数集，如果对于任意 $a\in A$ 和任意 $\varepsilon>0$，都存在 $b\in B$，使得 $|a-b|<\varepsilon$，则称 B 是稠密于 A 的.

注意，这里并不要求 B 是 A 的子集.当 B 是 A 的子集且 B 稠密于 A 的时候，称 B 是 A 的稠密子集，或者说 B 在 A 中稠密.

我们可以得到下面的定理：

Thm 1 有理数集 $\mathbb{Q}$ 和无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 都是实数集 $\mathbb{R}$ 的稠密子集.

Thm 2(Dirichlet逼近定理) 对任意给定的实数 x 和正整数 $N>1$，都存在整数 p,q，满足 $0<q\leq N$ 且 $|qx-p|<\dfrac{1}{N}$.

Pf(sketch): 考虑 $\{0x\},\{1x\},\{2x\},\cdots,\{Nx\}$ 这 $N+1$ 个数，与 $[0,\frac{1}{N}),[\frac{1}{N},\frac{2}{N}),\cdots,[\frac{N-1}{N},1)$ 这 N 个区间，由抽屉原理可以知道必定存在两个数 $i<j$ 在同一个区间之内使得 $|\{ix\}-\{jx\}|<\dfrac{1}{N}$. 注意到：

$$\{jx\}-\{ix\}=(jx-[jx])-(ix-[ix]),$$

从而取 $q=j-i,p=[jx]-[ix]$ 即得证. □

Corollary 1 对任意无理数 x，存在无穷多个有理数 $\dfrac{p}{q}$(p 是整数，q 是正整数)使得 $\left|x-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^2}$.

Pf(sketch):设只存在有限个有理数满足条件，取这些有理数到x最小距离，利用上面的定理导出矛盾即可.

在给出定理3之前，我们先给出在某一段区间中稠密的等价定义.

Def 2 对于集合 A 和区间 (m,n)，对任意的 $m\leq a<b\leq n$，都存在 $x\in A$，使得 $x\in(a,b)$,则称集合 A 在区间 (m,n) 上稠密.

Thm 3(Kronecker定理) 设 α 是一个无理数，则集合 $\{\{n\alpha\}|n\in\mathbb{N}^*\}$ 在 $(0,1)$ 中稠密.

Pf:根据 Dirichlet 定理的证明可知，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在互异正整数 n_1,n_2 使得 $|\{n_1x\}-\{n_2x\}|<\varepsilon$.

不妨设 $\{n_1x\}>\{n_2x\}$，注意到

$$(n_1-n_2)x=n_1x-n_2x=([n_1x]-[n_2x])+(\{n_1x\}-\{n_2x\}),$$

对两边取小数部分可以得到 $\{(n_1-n_2)x\}=\{n_1x\}-\{n_2x\}$，设 $n_1-n_2=\theta$.

对于任意 $(0,1)$ 的子区间 (a,b)，取 $\varepsilon<b-a$，则知道必定存在一个最小的正整数 n_0 使得 $n_0\{\theta x\}\in(a,b)$，由 n_0 的最小性我们不难得到 $n_0\{\theta x\}=\{n_0\theta x\}$.

若 $\theta=n_1-n_2>0$，则由 Def 2 可知结论成立；

若 $\theta=n_1-n_2<0$，对任意 $\varepsilon>0,1-a\in(0,1)$，容易知道存在 n_0 使得 $|n_0\{\theta x\}-(1-a)|<\varepsilon$(即 $n_0\{\theta x\}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$)，注意到 $\{-x\}=1-\{x\}$，有

$$|\{-n_0\theta x\}-a|=|(1-n_0\{\theta x\})-a|<\varepsilon,$$

因为 $-n_0\theta x\in\mathbb{N}^*$，从而由 Def 1 知道结论成立.

综上知结论成立. □

几个相关问题:

问题 1 设 α 是一个无理数，则集合 $A=\{n+m\alpha|m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

问题 2 集合 $\{\frac{m}{2^n}|m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

问题 3 集合 $\{\sqrt[n]{m}|m,n\in\mathbb{N}^*\}$ 在 $[1,+\infty)$ 中稠密.

问题 4 在单位圆周上，任取一点为起始点，取所有正整数弧度构成的点的集合是稠密于该圆周的.

问题 5 集合 $\{\cos n|n\in\mathbb{N}^*\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

问题 6 集合 $\{\sin n|n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

问题 7 集合 $\{\sin n|n\in\mathbb{N}^*\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

问题 8 设数列 $\{x_n\}$ 满足以下两个条件：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$；

(2)对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 和任意正整数 N，存在 $m>N$ 和 $n>N$，使得 $|x_m-x_n|>1-\varepsilon$,

则集合 $\{\{x_n\}|n\in\mathbb{N}^*\}$在 $[0,1)$ 中稠密.

MuKe