积分第二中值定理

Muke

在介绍积分第二中值定理之前，我们先证明一个引理：

引理：对于区间 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$,$g(x)$ 以及分割 $T=\{x_i\}$，有：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta T\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x$$

引理的证明：由于：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\mathrm{d}x$$

又设 $|g(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 M，$f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅记为 ω_i，从而有：

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\mathrm{d}x\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i)||g(x)|\mathrm{d}x\le M\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

故有：$\lim\limits_{\Delta T\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\mathrm{d}x=0$，也即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta T\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x$$

积分第二中值定理 1

非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x$$

证明： 引入函数 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，令 $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x$，则有：

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)[G(x_{i+1})-G(x_i)]$$

由 Abel 变换，我们有：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n-1}G(x_i)[f(x_{i-1})-f(x_i)]+f(a)G(a)+G(b)f(x_{n-1})$$

由于 $G(a)=0$，而 $f(x_{i-1})-f(x_i)$ 与 $f(x_{n-1})$ 由条件均非负，从而设 $G(x)$ 在区间上的最大值最小值分别为 M,m，有：

$$mf(a)=\sum_{i=1}^{n-1}m(f(x_{i-1})-f(x_i))+mf(x_{n-1})\le\sigma\le\sum_{i=1}^{n-1}M(f(x_{i-1})-f(x_i))+Mf(x_{n-1})=Mf(a)$$

从而有

$$mf(a)\le\sigma\le Mf(a)$$

而由于 $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta T\to 0}\sigma$，有 $mf(a)\le I\le Mf(a)$，从而存在实数 $\mu\in[m,M]$ 使得 $I=\mu f(a)$

由于 $G(x)$ 的连续性，最终得到存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $G(\xi)=\mu$，也即：

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x$$

同理我们可以得到下面的定理：

积分第二中值定理 2

非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x$$

注：上面的两个公式常被称作 **O.Bonnet 公式**.

而当我们只保留单调性但不要求 $f(x)$ 的非负性，我们就会得到下面这个结果，也即积分第二中值定理.

积分第二中值定理

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x$$

证明： 不妨设 $f(x)$ 是单调递减的，从而有 $f(x)-f(b)\ge 0$ ，从而对 $f(x)-f(b)$ 使用 O.Bonnet 公式 1，有：

$$\int_a^b[f(x)-f(b)]g(x)\mathrm{d}x=[f(a)-f(b)]\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x$$

从而得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x+f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x-f(b)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x$$

也即：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x$$

从而积分第二定理得证。

下面我们可以给出积分第二中值定理的一个更一般的形式，由于改变有限个点的函数值不影响可积性与积分的值，从而我们可以用满足条件的两个数 A,B：

$$A \geq f(a+0) \text{ 与 } B \leq f(b-0)\text{ , } f(x) \text{ 单调递减;}$$
$$A \leq f(a+0) \text{ 与 } B \geq f(b-0)\text{ , } f(x) \text{ 单调递增.}$$

代替 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的值，这样 $f(x)$ 的单调性也不会发生改变，从而我们可以得到这样的结果：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + B\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x$$

这里的 ξ 依旧是区间 $[a,b]$ 中的某个数，具体值依赖于 A, B 的选取.

参考文献

[1] 微积分学教程（第2卷）(F.M.菲赫金哥尔茨)

MuKe