# 南开大学(~~描述集合论~~)点集拓扑期末复习

杨毅涵

(南开大学 数学科学学院)

## 摘要

仅为南开大学(~~描述集合论~~)点集拓扑课程期末冲刺复习使用.
主要内容大概可以一图以蔽之：

| | 连续像 | 开连续像 | 闭连续像 | 遗传 | 开遗传 | 闭遗传 | 有限可乘 | 可数可乘 | 可乘 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_0$ | − | − | − | + | + | + | + | + | + |
| $T_1$ | − | − | + | + | + | + | + | + | + |
| $T_2$ | − | − | − | + | + | + | + | + | + |
| $T_3$ | − | − | − | + | + | + | + | + | + |
| Tychonoff | − | − | − | + | + | + | + | + | + |
| $T_4$ | − | − | + | − | − | + | − | − | − |
| 第一可数 | − | + | − | + | + | + | + | + | − |
| 第二可数 | − | + | − | + | + | + | + | + | − |
| 可分 | + | + | + | − | + | − | + | + | − |
| 紧 | + | + | + | − | − | + | + | + | + |
| 局部紧 | − | + | − | − | + | + | + | − | − |
| 可数紧 | + | + | + | − | − | + | − | − | − |
| 序列紧 | + | + | + | − | − | + | + | + | − |
| 连通 | + | + | + | − | − | − | + | + | + |
| 局部连通 | − | + | + | − | + | − | + | − | − |
| 道路连通 | + | + | + | − | − | − | + | + | + |
| 可度量化 | − | − | − | + | + | + | + | + | − |
| 拓扑完备 | − | − | − | − | + | + | + | + | − |
| Baire性质 | − | + | − | − | + | − | − | − | − |

# 目录

# 1 度量空间

**命题 1.1.** *TFAE:*

- $d_1, d_2$ 度量等价.
- 确定相同的收敛，即 $\lim d_1(x_n, x) = 0 \Longleftrightarrow \lim d_2(x_n, x) = 0.$
- 对任意的 $x \in X, \varepsilon > 0$，$\exists r_1, r_2 > 0$ 使得

$$d_1(x,y) < r_1 \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon, \quad d_2(x,y) < r_2 \Rightarrow d_1(x,y) < \varepsilon$$

**命题 1.2.** *TFAE:*

- 度量空间完备.
- 每一个 *Cauchy* 列都收敛.
- 任意满足 $\lim \mathrm{diam} F_n = 0$ 的单调减闭集套 $\{F_n\}$，都满足 $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

**命题 1.3.** *TFAE:*

- $D$ 在 $X$ 中稠.
- $D$ 与 $X$ 的所有非空开集都相交.
- $\forall x \in X$，存在 $D$ 中序列收敛于 $X$.

**定义 1.4.** $X$ 为度量空间，$A \subset X$.

- $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$，称 $A$ 为无处稠子集.
- $A$ 为可数个无处稠子集的并，则称 $A$ 为稀疏*(meager)*集.

**命题 1.5.** 稀疏集有以下性质:

- 开集 $U$ 稠密 $\Longleftrightarrow U^c$ 无处稠.
- $A$ 无处稠子集的闭包无处稠.
- 无处稠集稀疏.
- 可数个稀疏集的并稀疏.
- 稀疏集的子集稀疏.

**定理 1.6** (Baire纲)**.** $(X,d)$ 为非空完备度量空间.

- $X$ 的可数个开稠集的交为稠子集.

- $X$ 的每个稀疏集的内部都是空集.

**定理 1.7** (Baire纲弱形式)**.** $(X,d)$ 为非空完备度量空间.

- $X$ 的可数个开稠集的交非空.

- 若 $X$ 为可数个闭集的并，则其中至少有一个闭集内部非空.

- $X$ 不稀疏.

**评注 1.8.** 称稀疏集为第一纲集，其余为第二纲集.

**评注 1.9.** 完备度量空间中第一纲集的补集为第二纲集[1].
*e.g.* $\mathbb{Q}$ 是第一纲集，从而 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 是第二纲集.

**评注 1.10.** **经典技术**：不存在 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在有理点连续[2]，在无理点不连续.
***Proof***: 对任意的 $x\in\mathbb{R}$，令

$$\omega(f,x) := \inf_{\delta>0}\sup\{|f(y)-f(z)|\colon y,z\in(x-\delta,x+\delta)\}$$

我们知道 $f$ 在 $x$ 处连续当且仅当 $\omega(f,x)=0$.
令 $U_n=\{x\in\mathbb{R}:\omega(f,x)<\dfrac{1}{n}\}$，我们知道 $U_n$ 是开集[3]，并且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\mathbb{Q}$$

从而我们知道 $U_n$ 为 $\mathbb{R}$ 的开稠集，又因为 $\mathbb{R}\backslash\{q\}$ 为开稠集，从而

$$\left(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}}\mathbb{R}\backslash\{q\}\right)\bigcap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)=\emptyset$$

与*Baire*纲矛盾.

**评注 1.11.** 类似地，可以证明若 $\{f_n\}$ 连续，则 $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$，则 $f$ 的不连续点为第一纲集.

**命题 1.12.** 每个非空的度量空间都有完备化[4]且完备化在等距同构下唯一.

**命题 1.13.** 列紧度量空间 $\Rightarrow$ 闭子集是列紧的. 度量空间的列紧子集是闭的.

**命题 1.14.** $(X,d)$ 是度量空间，*TFAE:*

- 全有界.

---

[1]反之有 $X$ 为稀疏集的并，从而稀疏，与 Baire 纲矛盾.

[2]连续点是 $G_\delta$ 集

[3]并非显然，利用 $\inf\limits_{\delta}\sup=\lim\limits_{\delta\to0}\sup$ 可以说明

[4]等距嵌入到一个完备度量空间.

- $\forall \varepsilon > 0$，$\{B(x,\varepsilon) : x \in X\}$ 存在有限子覆盖.
- $\forall \varepsilon > 0$，$X$ 存在一个由直径 $\leq \varepsilon$ 的子集构成的有限覆盖.

**命题 1.15.** $(X, d)$ 度量空间，*TFAE:*

- 序列紧.
- 紧.
- 全有界的完备度量空间.

**评注 1.16.** 紧度量空间是完备的.

**命题 1.17.** 列紧度量空间存在 *Lebesgue* 数.

**命题 1.18.** 紧度量空间可分，且有可数基.

**证明:** 考虑 $r = \dfrac{1}{n}$ 的开球覆盖存在有限覆盖，然后全部并起来就得到. □

**命题 1.19.** *Lindelof*的度量空间有可数基.

**命题 1.20.** 度量空间中

$$\text{紧} \iff \text{列紧} \iff \text{全有界} + \text{完备}$$

**命题 1.21.** 在度量空间中

$$\textit{Lindelof} \iff \text{可数基} \iff \text{可分}$$

## 2 基础拓扑内容

**命题 2.1.** 闭包算子[5]与内部算子都可以刻画拓扑.

**命题 2.2.** $A \subset Y \subset X$，则

- $\mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}_X A$.
- $\mathrm{int}_Y A \supset \mathrm{int}_X A$.

**命题 2.3.** *TFAE:*

- $f$ 连续.
- $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$.

**引理 2.4** (拼接引理)**.** $f\colon X \to Y$.

- 若存在 $X$ 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得 $f|_{U_i}$ 连续，则 $f$ 连续.
- 若 $A_1, \cdots, A_n$ 闭，$X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，$f|_{A_i}$ 连续，则 $f$ 连续.

**命题 2.5.** 可分空间的连续像可分.

**证明:** $\overline{D} = X$，则我们知道 $f(\overline{D}) = f(X) \subset \overline{f(D)}$. □

**例 2.6.** *Sorgenfrey* 直线*(*$\mathbb{R}^1_\ell$*)*: $\mathbb{R}$ 上以 $\mathcal{B} = \{[a,b)\colon a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ 为基的拓扑.

- $[a, +\infty)$ 为开集.
- *Sorgenfrey* 拓扑比欧式拓扑细.
- $[a,b)$ 既开又闭.
- 第一可数，可分，但不是第二可数*(*考虑 $x \in B_x \subset [x, x+1)$，显然有 $B_x \neq B_y$，于是不是第二可数*)*.

*Sorgenfrey* 平面*(*$\mathbb{R}^2_\ell$*)*: $\mathcal{B} = \{[a,b) \times [c,d)\colon a < b, c < d\}$.

**命题 2.7.** *C2* $\Rightarrow$ *C1(*$\mathcal{N}_x = \{U \in \mathcal{B}\colon x \in U\}$*)+*可分*(*$\{x_n\colon x_n \in U_n\}$*)*

**命题 2.8.** 可分的度量空间有可数基.

**命题 2.9.**

---

[5]Kuratowski.

- $A$ 有序列收敛与 $x$，则 $x \in \overline{A}$.
- 若 $X$ 第一可数[6]，则 $x \in \overline{A} \Rightarrow$ 存在 $A$ 中序列收敛于 $x$.

从而第一可数空间可以用序列刻画拓扑.

**命题 2.10.** 对于第二可数空间 $X$ 中任意一个拓扑基 $S$，存在 $S$ 的一个可数子集 $S'$ 构成 $X$ 的可数基.

**证明:** 设 $\{B_n\}$ 为 $X$ 的一个可数基，由于 $S$ 是拓扑基，所以存在 $S$ 中的一族开集的并为 $B_n$，由于 $B_n$ 继承了 $X$ 的第二可数，所以 Lindelof，所以开覆盖存在可数子覆盖，也就是说存在 $S$ 中的可数个开集的并是 $B_1$，记这可数个开集为 $S_n$，我们取

$$S' = \bigcup_n S_n$$

即我们所求的可数基. □

## 实数系八大拓扑

- **标准拓扑**. 即作为欧式空间的拓扑.
- **平庸拓扑**. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- **离散拓扑**. 每个单点集都是开集.
- **左拓扑**. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \colon a \in \mathbb{R}\}$.
- **右拓扑**. $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) \colon a \in \mathbb{R}\}$.
- **余有限拓扑**. 所有补集为有限集合的集合构成的拓扑.
- **余可数拓扑**. 所有补集为可数集合的集合构成的拓扑.
- **Sorgenfrey拓扑**. 以 $\mathcal{B} = \{[a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ 为基的拓扑.

[6]即可以找到一列递减邻域

# 3 网

**定义 3.1.** 从定向集 $(D, \sqsubseteq)$ 到 $X$ 的映射称为 $X$ 的网.

- 若 $\exists d \in D$，$\forall e \sqsupseteq d$，有 $\xi(e) \in A$，则称 $\xi$ 终在 $A$.
- 若 $\forall d \in D$，$\exists e \sqsupseteq d$，有 $\xi(e) \in A$，则称 $\xi$ 常在 $A$.

若 $\xi$ 终在 $x$ 的每个邻域，称 $\xi$ 收敛于 $x$，记为 $\xi \to x$. 用 $\lim \xi$ 表示所有极限点之集，若 $\lim \xi \neq \emptyset$，称 $\xi$ 收敛.

若 $\xi$ 常在 $x$ 的每个邻域，称 $x$ 为 $\xi$ 的聚点，用 $\mathrm{clust}\,\xi$ 表示 $\xi$ 的所有聚点之集，显然有 $\lim \xi \subset \mathrm{clust}\,\xi$.

**命题 3.2.** $X$ 是拓扑空间，$A \subset X$，$x \in X$，*TFAE:*

- $x \in \overline{A}$.
- $A$ 有网收敛于 $x$.

**证明:** (1) 推 (2)：考虑定向集 $(\mathcal{N}(x), \supset)$ 构造网即可. □

**命题 3.3.** $X$ 是拓扑空间，$U \subset X$，*TFAE:*

- $U$ 是开集.
- 任给 $X$ 的网 $\xi$，若 $\xi$ 收敛于 $U$ 中某点，则 $\xi$ 终在 $U$.

**命题 3.4.** $X, Y$ 是拓扑空间，$f\colon X \to Y$，*TFAE:*

- $f$ 连续.
- $f$ 保持网的极限.

**证明:** (2) 推 (1): 利用连续的等价条件，对于任意的 $x \in \overline{A}$，$\xi \to x$，有 $f \circ \xi \to f(x)$，也就是说 $f(x) \in \overline{f(A)}$，从而 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. □

**定义 3.5.** $(D, \sqsubseteq)$ 与 $(E, \sqsubseteq)$ 为定向集，$h\colon E \to D$ 是映射，若 $\forall d \in D$，$\exists e \in E$，使得 $e \sqsubseteq e' \Rightarrow d \sqsubseteq h(e')$，则称 $h$ 为共尾映射.

**评注 3.6.** 通俗化理解：只要 $e$ 足够靠后，则 $h(e)$ 就足够靠后.

**评注 3.7.** 尾段的理解：令 $\uparrow d := \{e \in D\colon d \sqsubseteq e\}$ 为 $d$ 的一个尾段. $\uparrow d_1$ 与 $\uparrow d_2$ 之间无法直接比较，但是由于存在 $d_3 \sqsupseteq d_1, d_3 \sqsupseteq d_2$，从而我们有

$$\uparrow d_3 \subset \uparrow d_1, \quad \uparrow d_3 \subset \uparrow d_2$$

在这个意义下，$h\colon E \to D$ 共尾当且仅当 $(D, \sqsubseteq)$ 的某个尾段都包含 $(E, \sqsubseteq)$ 的某个尾段在 $h$ 下的像. 即

$$\forall d \in D, \quad \exists e \in E, \quad \text{s.t.} \quad h(\uparrow e) \subset \uparrow d$$

**定义 3.8.** 设 $\eta\colon (E,\sqsubseteq)\to X$ 与 $\xi\colon (D,\sqsubseteq)\to X$ 均为 $X$ 的网，且存在共尾映射 $h\colon E\to D$ 使得 $\eta=\xi\circ h$，称 $\eta$ 为 $\xi$ 的子网.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "h"'] & X \\ & D \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

**命题 3.9.** $X$ 是拓扑空间，$x\in X$，$\xi$ 为 $X$ 的网，则 $x\in \operatorname{clust}\xi$ 当且仅当 $\xi$ 有子网收敛与 $x$.

**证明:** (1) 推 (2)：$E=\{(U,d)\in\mathcal{N}(x)\times D\colon \xi(d)\in U\}$，$(U,d)\sqsubseteq(V,e)$ 当且仅当 $U\supseteq V, d\sqsubseteq e$，令 $h\colon E\to D$，$(U,d)\mapsto d$ 即可. □

**引理 3.10.** $X$ 是拓扑空间，$\xi\colon (D,\sqsubseteq)\to X$ 为 $X$ 的网，则

$$\operatorname{clust}\xi=\bigcap_{d\in D}\overline{A_d}$$

其中 $A_d=\{\xi(e)\colon d\sqsubseteq e\}$.

**证明:**

$$\begin{aligned} x\in\operatorname{clust}\xi &\Leftrightarrow \xi \text{ 常在 } x \text{ 的每个邻域} \\ &\Leftrightarrow \forall d\in D, A_d \text{ 与 } x \text{ 的每个邻域都相交} \\ &\Leftrightarrow \forall d\in D, x\in\overline{A_d} \end{aligned}$$

□

# 4 紧 Hausdorff 空间

**命题 4.1.** *TFAE:*

- 紧.
- 任意开覆盖都有有限子覆盖.
- 满足有限交条件[7].
- 任意网都有聚点.
- 每个网都有收敛子网.

**评注 4.2.** 一个空间是否是紧空间是空间自身的性质，无关乎这个空间被嵌入在哪个空间中.

**推论 4.3.** $X$ 是拓扑空间，$U$ 是 $X$ 中的开集，$\mathscr{F}$ 为 $X$ 的一族闭的紧子集，若 $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F\subset U$，则存在 $F_1,\cdots,F_n\in\mathscr{F}$，使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\subset U$.

**证明:** 任取 $F_0\in\mathscr{F}$，由于

$$\{F_0\backslash U\}\bigcup\{F_0\cap F\colon F\in\mathscr{F}\}$$

是紧空间 $F_0$ 的一族闭子集且交为空，有限交告诉我们存在有限个元素 $F_1,\cdots,F_n$ 使得

$$(F_0\backslash U)\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_0\cap F_i\right)=\emptyset$$

也即 $\bigcap\limits_{i=0}^{n} F_i\subset U$. □

**命题 4.4.** $X$ 是拓扑空间，*(C2)*，*TFAE:*

- 紧.
- 序列紧.
- 可数紧.

**评注 4.5.** *(C2)* 空间的任意开覆盖都有可数子覆盖.

**命题 4.6.**

- 紧空间的连续像是紧空间.
- 可数紧空间的连续像是可数紧空间.

[7]一族闭集族，若任意有限交非空，则全部交非空.

- 紧是闭遗传性质.

**命题 4.7.**

- 可数紧空间的无穷子集必有聚点.
- 序列紧 $\Rightarrow$ 可数紧.
- 可数紧 + *(C1)* $\Rightarrow$ 序列紧.

**证明:** (1) 只需要说明可数无穷子集都有聚点就可以. 设 $S$ 是一个可数无穷子集，假设没有聚点，则任意的 $x \in S$，都存在开邻域 $U_x$ 使得 $x \in U_x$ 且 $U_x \cap S \backslash \{x\} = \emptyset$.

所以我们有可数开覆盖

$$S \subset \bigcup_{x \in S} U_x$$

从而有有限子覆盖

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

也就是说 $S$ 是有限集合，矛盾.

(3) 若 $\{x_n\}$ 只有有限个不同点，显然成立.

若 $\{x_n\}$ 有无穷多个不同点，从而我们知道有聚点，再由 (C1) 知道可以构造出收敛子列.

□

**命题 4.8.** *Hausdorff* 等价于每个网至多有一个极限.

**命题 4.9.** *Hausdorff* 的紧子集是闭子集.

**命题 4.10.** 紧空间到 *Hausdorff* 空间的连续映射是闭映射，连续双射是同胚.

**评注 4.11.** 看这张图：

$$\begin{tikzcd}
\text{紧} \arrow[dr, shift left] & & \text{列紧} \arrow[dl, shift right] \\
& \text{可数紧} \arrow[ul, shift left, "\textit{Lindelof}"] \arrow[ur, shift right, "\textit{C1}"'] \arrow[d, shift right] & \\
& \text{无限子集都有聚点} \arrow[u, shift right, "T_1"'] &
\end{tikzcd}$$

**定义 4.12.**

- $T_0$：开集能区分点.
- $T_1$：单点集是闭集.
- $T_2$：*Hausdorff*.

- $T_3$：$T_0$ + 正则(分离闭集与点).
- $T_4$：$T_1$ + 正规(分离不交闭集).

**命题 4.13.** *TFAE:*

- $X$ 正则.
- 任给 $x \in X$ 以及 $x$ 的邻域 $U$，存在闭集 $F$ 满足 $x \in F^\circ \subset F \subset U$.
- 任给开集 $U$ 以及 $x \in U$，存在开集 $V$ 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

**命题 4.14.** *TFAE:*

- $X$ 正规.
- 任给 $X$ 的闭集 $F$ 以及包含 $F$ 的开集 $U$，存在开集 $V$ 使得 $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

**命题 4.15.**

- $T_3 \iff T_1$ + 正则.
- $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

**证明:** $T_3$ 推 Hausdorff 是容易的，从而可以推 $T_1$，反之显然. □

**命题 4.16.** *$X$ Hausdorff，$K$ 为紧子集，$x \notin K$，则存在 $X$ 的不交开集分离 $x$ 与 $K$.*

**证明:** 利用紧得到有限覆盖，再利用开集的有限交还是开集得证. □

**命题 4.17.**

- 紧 + *Hausdorff* $\Rightarrow T_4$.
- 紧 + 正则 $\Rightarrow$ 正规.

**证明:** (1) 利用上面的定理可以推正规，Hausdorff 可以推 $T_2$，从而 $T_4$.

(2) 紧空间的闭子集是紧子集，得证. □

**评注 4.18.** 请看图：

$$\begin{tikzcd}
T_0 \arrow[r, Rightarrow, "\textit{regular}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \textit{compact}"] & T_3 \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
T_1 \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow, "\textit{normal}"] & T_4 \arrow[u, Rightarrow] & T_1 + \textit{regular} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & T_2 \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, "\textit{compact}"] &
\end{tikzcd}$$

**定理 4.19.** 度量空间正规.

**证明:** 利用连续函数分离即可.

$$f(x)=\frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)}$$

□

**例 4.20.** 正则空间不必是正规的，如 $\mathbb{R}_\ell^2$ 是 $T_3$ 但不是 $T_4$.

**所有南开选点集拓扑的同学一定要会这个证明!!!!!!!!**

首先说明 $\mathbb{R}_\ell^2$ 是正则空间，给定一个闭集 $F$，与一个 $(a,b)\notin F$，我们知道存在 $\varepsilon>0$ 使得 $[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\varepsilon)\subset\mathbb{R}_\ell^2-F$，由于 $[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\varepsilon)$ 既开又闭，所以我们知道它和它的补集自然分离 $F$ 和 $(a,b)$.

我们知道 $L:=\{(x,-x)\colon x\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的离散闭子空间，因此其每个子集都是 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的闭子集. 假设 $\mathbb{R}_\ell^2$ 正规，任给 $L$ 的子集 $A$，由于 $A$ 与 $L-A$ 都是 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的不交闭子集，所以存在 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的不交开集 $U_A,V_A$ 满足 $A\subset U_A$，$L-A\subset V_A$. 我们构造映射

$$k\colon P(A)\to P(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}),\quad A\mapsto U_A\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

对于 $A\neq B$，不妨设 $A\subsetneq B$，我们知道

$$\emptyset\neq A-B\subset\overline{U_A}\cap V_B$$

由于 $\overline{U_B}\cap V_B=\emptyset$，所以 $\overline{U_A}\neq\overline{U_B}$，再因为 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的稠子集，所以

$$\overline{U_A}=\overline{U_A\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}},\quad \overline{U_B}=\overline{U_B\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$$

所以有

$$k(A)\neq k(B)$$

于是 $P(L)\to P(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ 是单射，这显然矛盾.

**定义 4.21.** $X$ 拓扑空间，若 $X$ 的可数个开稠集的交还是稠子集，则称 $X$ 为 *Baire* 空间.

**命题 4.22.** $X$ 为拓扑空间，*TFAE:*

- $X$ 是 *Baire* 空间.
- $X$ 的稀疏集的内部为空.
- $X$ 的每个非空开集都是第二纲集.

**命题 4.23.** 紧 *Hausdorff* 空间是 *Baire* 空间.

**证明:** p112. □

**命题 4.24.** *Barie* 是开遗传性质.

**证明:** p112. $\square$

**定理 4.25.** $X$ 是 *Baire* 空间，$\{f_n\colon X \to \mathbb{R}\}$ 是一列连续函数并且逐点收敛于 $f\colon X \to \mathbb{R}$，则 $f$ 在一个稠子集上连续.

**证明:** p113. $\square$

**命题 4.26.** $Y$ 是 *Hausdorff* 空间，$f, g\colon X \to Y$ 是连续映射，则

$$E := \{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$$

是 $X$ 的闭子集.

**证明:** 设 $\xi$ 是 $E$ 中的一个网，有极限 $x$，则由于 $f, g$ 连续，保网的极限，并且 $Y$ Hausdorff，从而极限唯一，于是我们知道

$$f(x) = \lim f \circ \xi = \lim g \circ \xi = g(x)$$

从而极限还在 $E$ 中，于是 $E$ 是闭集. $\square$

# 5 乘积空间

**定义 5.1.** 考虑一族映射 $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ 是一族映射，其中 $(Y_i, \tau_i)$ 是拓扑空间，则 $X$ 上的初始拓扑由

$$\{f_i^{-1}(V_i)\colon i \in I, V_i \in \tau_i\}$$

作为子基生成的拓扑.

**评注 5.2.** 换言之，始拓扑就是使得所有 $f_i$ 连续的最粗的拓扑. 有时也称为弱拓扑.

**例 5.3.** 子空间拓扑就是初始拓扑.

**命题 5.4.** $f\colon X \to Y$ 是同胚嵌入当且仅当 $f$ 是单射并且 $X$ 的拓扑恰好是 $f$ 生成的初始拓扑.

**证明:** $\Rightarrow$ 是显然的.

$\Leftarrow$：由于是单射，我们知道存在

$$g\colon f(X) \to X$$

其中 $g = f^{-1}$，由于配备了初始拓扑，所以我们只需要验证 $g$ 是连续的，对于 $X$ 的拓扑基 $V$，其中

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

其中 $V_i = f^{-1}(U_i)$，$U_i$ 为 $Y$ 的开集. 于是我们知道

$$g^{-1}(V) = g^{1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} g^{-1}(V_i) = \bigcap_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

于是 $g$ 是连续的，所以是同胚嵌入. □

**命题 5.5** (初始拓扑的泛性质)**.** 设 $\mathcal{O}$ 是 $X$ 上由 $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ 生成的初始拓扑，$Z$ 为拓扑空间，$h\colon Z \to X$，则 $h\colon Z \to (X, \mathcal{O})$ 连续当且仅当每一个 $f_i \circ h\colon Z \to Y_i$ 连续.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f_i \circ h"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

**命题 5.6.** 设 $\mathcal{O}$ 为 $X$ 由 $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ 生成的初始拓扑，$\xi\colon (D, \sqsubseteq) \to X$ 是一个网，$x \in X$，则 $\xi$ 关于 $\mathcal{O}$ 收敛于 $x$ 当且仅当对每个 $i \in I$，$f_i \circ \xi$ 收敛于 $f_i(x)$.

**定义 5.7** (乘积空间)**.** 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族拓扑空间，则其乘积空间的拓扑定义为所有的投射 $\{p_j\colon \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j\}_{j\in I}$ 生成的初始拓扑.

**命题 5.8.** 下面是一些关于乘积空间的事实：

- 乘积空间的基本开集具有以下形状：$\prod_{i\in J} U_i \times \prod_{i\notin J} X_i$，其中 $J$ 是 $I$ 的一个有限子集.
- 每个投射 $p_j$ 都是连续开映射.
- 映射 $h\colon Z \to \prod X_i$ 当且仅当每个复合映射 $p_j \circ h$ 是连续的，特别地，任给一族连续映射 $\{f_i\colon Z \to X_i\}_{i\in I}$，对角映射连续:

$$\Delta_{i\in I} f_i\colon Z \to \prod_{i\in I} X_i, \quad z \mapsto (f_i(z))_{i\in I}$$

- 若每个 $f_i\colon X_i \to Y_i$ 都连续，则乘积映射连续：

$$\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i, \quad (x_i) \mapsto (f_i(x_i))$$

- 乘积空间中的网的收敛就是按坐标收敛，也就是说乘积空间 $\prod_{i\in I} X_i$ 的网

$$\xi\colon (D, \sqsubseteq)\colon \prod_{i\in I} X_i$$

  收敛于 $x$，当且仅当对于每一个 $j$，网 $p_j \circ \xi\colon (D, \sqsubseteq) \to X_j$ 收敛于 $x_j$. 从而可以知道一族闭集的乘积是闭集，特别地有

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subset \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

**命题 5.9.** $X$ 是 *Hausdorff* 空间当且仅当 $X \times X$ 的对角线 $\{(x,x)\colon x \in X\}$ 是闭子集.

**引理 5.10** (管形邻域引理)**.** $X, Y$ 为拓扑空间，$K \subset X$ 为紧子集，$W$ 为乘积空间 $X \times Y$ 的开集，$b \in Y$，如果 $K \times \{b\} \subset W$，则存在 $X$ 的开集 $U$ 与 $Y$ 的开集 $V$ 满足

$$K \subset U, \quad b \in V, \quad U \times V \subset W$$

**定理 5.11** (Kuratowski)**.** $X$ 紧当且仅当对任意拓扑空间 $Y$，$p_Y\colon X \times Y \to Y$ 都是闭映射.

**证明:** p119. □

**定义 5.12.** $f\colon X \to Y$ 是连续的闭映射，若 $Y$ 的每个点 $y$ 的原像 $f^{-1}(y)$ 都是 $X$ 的紧子集，则称 $f$ 为紧映射.

**引理 5.13.** $f\colon X \to Y$ 是拓扑空间的映射，$B \subset Y$，若 $f$ 是连续(闭，紧)映射，则 $f_B\colon f^{-1}(B) \to B$ 是连续(闭，紧)映射.

**命题 5.14.** 若 $f\colon X \to Y$ 是紧映射，则任给 $Y$ 的紧子集 $K$，$f^{-1}(K)$ 是 $X$ 的紧子集.

**推论 5.15.** 紧映射的复合是紧映射.

**推论 5.16.** $f\colon X \to Y$ 是满的紧映射，则 $X$ 紧当且仅当 $Y$ 紧.

**定理 5.17.** $f\colon Y \to Z$ 是连续映射，*TFAE*:

- $f$ 紧.
- 对任意拓扑空间 $X$，$f \times 1_X\colon Y \times X \to Z \times X$ 是紧映射.
- 对任意拓扑空间 $X$，$f \times 1_X\colon Y \times X \to Z \times X$ 是闭映射.

**命题 5.18.** 正则，$T_0, T_1, T_2, T_3$ 都是任意可乘的.

**命题 5.19.** $C2$，$C1$，可分与可度量化都是可数可乘的.

**引理 5.20** (Alexander子基引理)**.** 设 $(X, \mathcal{O})$ 是拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{O}$ 的一个子基，若 $X$ 的每个由 $\mathcal{B}$ 的元素构成的覆盖都有有限子覆盖，则 $(X, \mathcal{O})$ 是紧空间.

**定理 5.21** (Tychonoff乘积定理)**.** 紧性任意可乘.

**命题 5.22.** *Cantor* 集 $C$ 同胚与离散空间 $\{0,1\}$ 的可数次幂. 即 $C \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

# 6 商空间

给定集合 $X$ 上的等价关系 $E$，则由等价类构成的元素的集合

$$X/E := \{[x] : x \in X\}$$

称为 $X$ 关于 $E$ 的商，直观上做商就是把一些点黏在一起，我们把映射

$$q\colon X \to X/E, \quad x \mapsto [x]$$

称为粘合映射，粘合映射显然是满射，并且

$$E = \{(x, y) \in X \times X : q(x) = q(y)\}$$

反过来，任给映射 $f\colon X \to Y$，容易验证

$$E(f) := \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

是 $X$ 上的等价关系，称为由 $f$ 诱导的等价关系，我们考虑映射

$$\overline{f}\colon X/E \to Y, \quad [x] \mapsto f(x)$$

容易知道 $\overline{f}$ 是单射，并且 $\overline{f} \circ q = f$，其中 $q\colon X \to X/E(f)$ 是粘合映射.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & X/E(f) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

这表明如果 $f\colon X \to Y$ 是满射，可以把 $Y$ 等同于 $X$ 关于等价关系 $E(f)$ 的商 $X/E(f)$.

**定义 6.1.** 设 $X$ 是一个集合，$\{f_i\colon Y_i \to X\}$ 是一族映射，$Y_i$ 是一族拓扑空间，容易验证

$$\mathcal{O} := \{U \subset X : \forall i \in I, f_i^{-1}(U) \text{是 } Y_i \text{ 的开集}\}$$

是 $X$ 的一个拓扑，称之为 $\{f_i\}$ 生成的终拓扑.

**评注 6.2.** 终拓扑是使得所有 $f_i$ 连续的最细的拓扑.

**命题 6.3** (终拓扑的泛性质)**.** 设 $\mathcal{O}$ 是 $X$ 上由 $\{f_i\colon Y_i \to X\}$ 生成的终拓扑，则任给拓扑空间 $Z$ 和映射 $g\colon X \to Z$，则 $g$ 关于 $\mathcal{O}$ 连续当且仅当每个 $g \circ f_i\colon Y_i \to Z$ 连续.

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g \circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

**评注 6.4.** 终拓扑是始拓扑的对偶，这一点把所有箭头反向就可以看出来.

**定义 6.5.** 设 $X,Y$ 是拓扑空间，$f\colon X\to Y$ 是映射，若 $f$ 是满射，并且 $Y$ 的拓扑是 $f$ 生成的终拓扑，则称 $f$ 为商映射，$Y$ 为 $X$ 关于 $E(f)$ 的商空间.

**命题 6.6.** 关于商映射，有下面的事实

- 满映射 $f\colon X\to Y$ 是商映射当且仅当任给 $Y$ 的子集 $V$，恒有
$$V \text{ 是 } Y \text{ 的开集} \iff f^{-1}(V) \text{ 是 } X \text{ 的开集}$$
- 满映射 $f\colon X\to Y$ 是商映射当且仅当任给 $Y$ 的子集 $F$，恒有
$$F \text{ 是 } Y \text{ 的闭集} \iff f^{-1}(F) \text{ 是 } X \text{ 的闭集}$$
- 商映射是连续映射.
- 商映射的复合是商映射.

**命题 6.7.** 连续开满射和连续闭满射都是商映射，特别地，同胚是商映射.

**定理 6.8.** $f\colon X\to Y$ 是连续映射，$E(f)$ 是 $f$ 诱导的等价关系，考虑映射
$$\overline{f}\colon X/E(f)\to Y,\quad \overline{f}([x])=f(x)$$
则我们知道 $\overline{f}$ 连续，并且 $\overline{f}$ 是同胚当且仅当 $f$ 是商映射.

**证明:** 连续由商映射泛性质立刻得到，下面我们考虑
$$\begin{aligned}
f \text{ 是商映射} &\iff f \text{ 满射，且 } V \text{ 开当且仅当 } f^{-1}(V) \text{ 开}\\
&\iff \overline{f} \text{ 满，并且 } V \text{ 开当且仅当 } f^{-1}(V)=q^{-1}(\overline{f}^{-1}(V)) \text{ 开}\\
&\iff \overline{f} \text{ 满，且 } V \text{ 开当且仅当 } \overline{f}^{-1}(V) \text{ 开}(q \text{ 是商映射})\\
&\iff \overline{f} \text{ 是连续双射，并且是开映射}
\end{aligned}$$
□

**评注 6.9.** 注意到如果 $f\colon X\to Y$ 是商映射，则 $X/E(f)$ 是同胚于 $Y$ 的，这一事实可以帮助我们得到一些商空间的构造方法，比如证明 $[0,1]/\{(0,1)\}\cong\mathbb{S}^1$ 或者 $\mathbb{R}/\sim\cong\mathbb{S}^1$，其中 $x\sim y$ 为 $x-y\in\mathbb{Z}$.

这两个同胚分别是利用连续闭满射和连续开满射得到商映射.

**命题 6.10.** 正规空间的闭连续像是正规空间，$T_4$ 空间的闭连续像是 $T_4$ 空间.

**定理 6.11** (Alexandroff定理)**.** 设 $X$ 为紧 *Hausdorff* 空间，$E$ 为 $X$ 上的等价关系，*TFAE*:

- $X/E$ 是紧 *Hausdorff* 空间.

- $E$ 是乘积空间 $X \times X$ 闭子集.

- 粘合映射 $q\colon X \to X/E$ 是闭映射.

**证明:** P 146. $\square$

**定义 6.12.** $\sim$ 称为 $X$ 上的闭等价关系，如果等价关系 $E$ 是 $X \times X$ 上的闭子集.

**评注 6.13.** 上面的定理告诉我们紧 *Hausdorff* 空间关于闭等价关系的商空间还是紧 *Hausdorff* 空间.

**定义 6.14.** 设 $\sim_X$ 与 $\sim_Y$ 分别是 $X, Y$ 上的等价关系，定义 $X \times Y$ 上的等价关系为

$$(x,y) \sim (x',y') \iff x \sim_X x', y \sim_Y y'$$

则 $\sim$ 是 $X \times Y$ 上的等价关系，称为 $\sim_X$ 与 $\sim_Y$ 的乘积.

**推论 6.15.** $X, Y$ 是紧 *Hausdorff* 空间，$\sim_X$ 与 $\sim_Y$ 为闭等价关系，$\sim$ 是其乘积，则

$$(X \times Y)/\sim \cong (X/\sim_X) \times (Y/\sim_Y)$$

# 7 连通与道路连通

**定义 7.1.** $X$ 为拓扑空间，若 $X$ 非空且不能表示非两个非空的不交闭集的并，则称 $X$ 连通. 若 $X$ 的子集 $A$ 在赋予子空间拓扑的意义下是连通空间，则称 $A$ 是 $X$ 的连通子集.

**命题 7.2.** $X$ 是拓扑空间，则 *TFAE*:

- $X$ 连通.
- $X$ 不能写成两个非空不交开集的并.
- $X$ 的既开又闭的集合只有 $\emptyset$ 和 $X$.
- $X$ 到离散空间的连续映射都是常值映射.
- $X$ 到离散空间 $\{0,1\}$ 的连续映射都是常值映射.

**命题 7.3.** 连通空间的连续像是连通的，特别地，连通是拓扑性质.

**命题 7.4.** $A$ 是 $X$ 的连通子集并且 $A \subset B \subset \overline{A}$，则 $B$ 连通. 特别地，连通子集的闭包连通.

**证明:** 利用常值映射条件来推，注意到

$$f(\mathrm{cl}_B(A)) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A))$$

□

**推论 7.5.** 若 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $X$ 的一族连通子集并且 $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$，则 $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ 连通.

**定理 7.6.** 连通是乘积性质.

**定义 7.7.** 任给 $X$ 的一个点 $x$，令 $C(x)$ 表示 $X$ 中全体含 $x$ 的连通子集的并，我们知道 $C(x)$ 是连通子集，并且是极大的连通子集. 我们称 $X$ 的极大连通子集为连通分支.

**命题 7.8.** 拓扑空间的连通分支都是闭集.

**定义 7.9.** 设 $X$ 为拓扑空间，若任给 $x$ 以及 $x$ 的邻域 $U$，存在 $X$ 的连通子集 $K$ 使得 $x \in K^\circ \subset K \subset U$，则称 $X$ 局部连通. 换言之，局部连通空间的每个点的每个邻域都包含该点的一个连通邻域.

**命题 7.10.** $X$ 为拓扑空间，*TFAE:*

- $X$ 局部连通.
- $X$ 的每个开子空间的连通分支都是 $X$ 的开子集.
- $X$ 有一个由连通开集构成的基.

**评注 7.11.** 从而我们知道局部连通空间的连通分支既开又闭.

**命题 7.12.** 局部连通空间的商空间局部连通.

## Cantor集的拓扑刻画

**定义 7.13.** 若 $X$ 有一个 *clopen* 基，则称 $X$ 为零维空间.

**评注 7.14.** 显然，零维空间是正则空间：考虑 $x$ 和一个开邻域 $U$，则由于存在 *clopen* 基，存在 *clopen* 集 $V$ 使得

$$x \in V = \overline{V} \subset U$$

从而我们知道是正则的. 于是还能知道零维的 $T_0$ 空间是 *Hausdorff* 空间.

**定理 7.15.** 每个非空的，没有孤立点的零维紧度量空间都与 *Cantor* 集同胚.

**证明:** P 157. □

**定义 7.16.** $X$ 为拓扑空间，$A \subset X$，若存在连续映射 $r\colon X \to A$，满足 $r \circ i = 1_A$，其中 $i\colon A \to X$ 是含入映射，则称 $A$ 为 $X$ 的一个收缩核.

**推论 7.17.** 每个零维的紧度量空间都是 *Cantor* 集的收缩核. 特别地，*Cantor* 集的每个非空闭子集都是它的收缩核.

## 全不连通空间

**定义 7.18.** 设 $X$ 是非空的拓扑空间，若 $X$ 的连通子集都是单点集，则称 $X$ 为全不连通空间.

**评注 7.19.** 显然，全不连通空间是 $T_1$ 空间，零维的 $T_0$ 空间全不连通.

**定理 7.20.** 设 $X$ 为非空的紧拓扑空间，*TFAE:*

- $X$ 是全不连通的 *Hausdorff* 空间.
- 任给 $X$ 的两个不同的点 $x, y$，存在 *clopen* 集 $G$ 使得 $x \in G, y \notin G$.
- $X$ 是零维的 $T_0$ 空间.

**定义 7.21.** $X$ 为拓扑空间，$x, y \in X$，若 $\alpha\colon [0,1] \to X$ 连续且 $\alpha(0) = x$，$\alpha(1) = y$，则称 $\alpha$ 为从 $x$ 到 $y$ 的一条道路. 若对拓扑空间 $X$ 中的任意两点 $x, y$ 都存在从 $x$ 到 $y$ 的道路，则称 $x$ 道路连通.

**命题 7.22.** 道路连通空间是连通的. 道路连通空间的连续像道路连通，一族道路连通空间的乘积道路连通.

**命题 7.23.** 若 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 $X$ 的一族道路连通子集，并且 $\bigcap A_i \neq \emptyset$，则 $\bigcup A_i$ 道路连通.

**定义 7.24.** 极大的道路连通子集称为 $X$ 的道路连通分支.

**评注 7.25.** 与连通分支不同，道路连通分支的闭包不必道路连通，道路连通分支不必是闭集.

**定义 7.26.** $X$ 为拓扑空间，若对于任意 $x \in X$，以及任意一个邻域 $U$，存在道路连通子集 $K$ 满足

$$x \in K^\circ \subset K \subset U$$

则称 $X$ 是局部道路连通的.

**命题 7.27.** $X$ 是拓扑空间，*TFAE:*

- $X$ 局部道路连通.
- $X$ 的每个开子空间的道路连通分支都是 $X$ 的开子集.
- $X$ 有一个由道路连通的开集构成的基.

虽然连通不能得到道路连通，但是我们可以知道局部道路连通的连通空间是道路连通的.

**命题 7.28.** 局部道路连通的连通空间是道路连通的.

**证明:** 容易看出来局部道路连通空间的道路连通分支是开集，所以设 $X = \bigcup C_i$ 为道路连通分支的不交并，于是我们注意到任取一个 $C_i$，他本身是开集，同时又是 $\bigcup\limits_{j \neq i} C_i$ 的补集，所以是闭集，所以既开又闭，又因为 $X$ 是连通的，所以 $C_i = X$，所以只能有一个道路连通分支，所以 $X$ 是道路连通的. □

**定理 7.29** (Brouwer不动点定理)**.** 每个连续映射 $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 都有不动点，其中 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的单位闭圆盘.

**证明:** P 167. □

**定理 7.30** (Borsuk-Ulam定理)**.** 设 $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \colon \|p\| = 1\}$，若 $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ 连续，则存在 $p \in \mathbb{S}^2$ 使得 $f(p) = f(-p)$.

# 8 Urysohn 引理与 Urysohn 度量化定理

**定理 8.1** (Urysohn 引理)**.** $X$ 为正规空间，若 $F, G$ 是 $X$ 中不交闭集，则存在连续函数 $f\colon X \to [0,1]$，使得 $f(F) \subset \{0\}, \quad f(G) \subset \{1\}$.

**定义 8.2.** $X$ 为拓扑空间，$f\colon X \to \mathbb{R}$ 是映射，若

- $\forall t \in \mathbb{R}$，$f^{-1}((-\infty, t])$ 闭，称 $f$ 下半连续.
- $\forall t \in \mathbb{R}$，$f^{-1}([t, +\infty))$ 闭，称 $f$ 上半连续.

**命题 8.3.** 一些关于半连续函数的事实：

- $f$ 连续当且仅当上半连续且下半连续.
- $A \subset X$，$\chi_A$ 是下半连续函数当且仅当 $A$ 是开集，$\chi_A$ 是上半连续函数当且仅当 $A$ 是闭集.
- $f, g$ 都是某半连续函数，则 $\min\{f, g\}$ 和 $\max\{f, g\}$ 都是某半连续函数.

**定理 8.4** (Hahn-Tong插入定理)**.** $X$ 正规，$h\colon X \to \mathbb{R}$ 下半连续，$g\colon X \to \mathbb{R}$ 上半连续，若对任意的 $x \in X$，有 $g(x) \le h(x)$，则存在连续函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 使得 $g \le f \le h$.

**评注 8.5.** *Urysohn* 引理是 *Hahn-Tong* 插入定理的特例.

**定理 8.6** (Tietze扩张定理)**.** $X$ 是正规空间，$M$ 是 $X$ 的闭子集，$f\colon M \to \mathbb{R}$ 连续，则存在连续函数 $f^*\colon X \to \mathbb{R}$ 使得 $f^*|_M = f$.

**评注 8.7.** *Urysohn* 引理是 *Tietze* 扩张定理的特例.

**引理 8.8.** $X$ 是拓扑空间，*TFAE*:

- $X$ 正规.
- 任给 $X$ 的开集 $U$ 和闭集 $F$，若 $F \subset U$，则存在可数个开集 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $F \subset \bigcup\limits_{n\in N} V_n$ 并且对每个 $n$ 都有 $\overline{V_n} \subset U$.

**命题 8.9.** 有可数基的正则空间是正规空间.

**定理 8.10** (Urysohn度量化定理)**.** 有可数基的 $T_3$ 空间可度量化. 特别地，有可数基的紧 *Hausdorff* 空间可度量化.

**定理 8.11** (Urysohn度量化定理)**.** 第二可数空间可度量化当且仅当 $T_4$.*(*$T_3$ + 可数基可推 $T_4$*)*

**推论 8.12.** 有可数基的 $T_3$ 空间同胚于 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的一个子空间.

**引理 8.13.** 紧度量空间的 *Hausdorff* 连续像是紧度量空间.

**定理 8.14** (Hausdorff-Alexandroff定理)**.** *Hausdorff* 空间 $X$ 是 *Cantor* 集的连续像当且仅当 $X$ 是非空的紧度量空间.

# 9 滤子与超滤

**定义 9.1.** 设 $X$ 为非空集，$\mathcal{F}$ 为 $X$ 的一个子集族，若 $\mathcal{F}$ 满足以下条件：

*(F1)* $\emptyset \notin \mathcal{F}$，$X \in \mathcal{F}$.

*(F2)* 若 $A \in \mathcal{F}$，$A \subset B$，则 $B \in \mathcal{F}$.

*(F3)* 若 $A, B \in \mathcal{F}$，则存在 $C \in \mathcal{F}$，使得 $C \subset A \cap B$.

则称 $F$ 为 $X$ 上的一个滤子.

**评注 9.2.** 由于对任意的 $A, B \in \mathcal{F}$，都有 $C \subset A \cap B$，但是由于 *(F2)*，我们知道 $A \cap B \in F$，所以滤子中集合的有限交在 $\mathcal{F}$ 中. 所以有等价定义：

设 $X$ 为任意非空集合，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$（$\mathcal{P}(X)$ 为幂集）是 $X$ 上的一个**滤子**，当且仅当满足：

1. **非空性**：$\mathcal{F} \neq \varnothing$ 且 $X \in \mathcal{F}$
2. **向上封闭**：
$$\forall A \in \mathcal{F},\, \forall B \subseteq X : (A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F})$$
3. **有限交封闭**：
$$\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$$

（特别地，$A \cap B \neq \varnothing$）

**评注 9.3.** 显然一个滤子中任意有限个成员的交集非空，反过来，对于任意一个满足有限交性质的子集族 $\mathcal{A}$，有
$$\{B \subset X : \exists A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset B\}$$
是 $X$ 上的滤子，称为由 $\mathcal{A}$ 生成的滤子.

**命题 9.4.** $X$ 上的所有滤子之集 $\mathscr{F}(X)$ 在包含关系下成为一个偏序集，且

- $\mathscr{F}(X)$ 的每个非空子族的交是 $X$ 上的滤子.
- 偏序集 $(\mathscr{F}(X), \subseteq)$ 的每个定向子集[8]的并是 $X$ 上的滤子.

**评注 9.5.** 从而我们由 *Zorn* 引理知道 $(\mathscr{F}(X), \subseteq)$ 存在极大元. 我们将其中的极大元称为 $X$ 的***超滤(ultrafilter)*** 或者极大滤子.

**例 9.6.**

[8]即网中的定向集.

- 若 $A$ 是 $X$ 的非空子集，则 $\uparrow A := \{B \subset X : A \subset B\}$ 是 $X$ 的滤子，特别地

$$\uparrow x := \{A \subset X : x \in A\}$$

  是 $X$ 上的滤子，称为 $x$ 生成的**主滤*(principal filter)***. 每个主滤都是超滤.

- 若 $X$ 是无限集，则

$$\mathcal{F} := \{A \subset X : |X \backslash A| < +\infty\}$$

  是 $X$ 上的滤子，称为 $X$ 的 *Frechet* 滤子. 包含 $\mathcal{F}$ 的超滤都不是主滤.

**定理 9.7.** 设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的滤子，*TFAE*:

- $\mathcal{F}$ 是超滤.
- 若 $X$ 的子集 $A$ 和 $\mathcal{F}$ 的每个元素都相交，则 $A \in \mathcal{F}$.
- 若 $A \cup B \in \mathcal{F}$，则 $A \in \mathcal{F}$ 或者 $B \in \mathcal{F}$.
- 任给 $A \subset X$，$A \in \mathcal{F}$ 或者 $A^c \in \mathcal{F}$.

**评注 9.8.** 我们用 $\mathscr{U}(X)$ 表示 $X$ 上所有超滤的集合.

**命题 9.9.** 每个滤子都可以写成一族超滤的交.

**定义 9.10.** 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是 $X$ 上的两个滤子，若 $\mathcal{F}$ 的每个元素和 $\mathcal{G}$ 的每个元素都相交，则称 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 相容. 换言之，$\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 相容当且仅当 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ 满足有限交性质.

**评注 9.11.** 由于 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ 满足有限交性质，从而可以生成滤子，也即两个相容的滤子可以生成一个更大的包含它们的滤子.

**评注 9.12.** 拓扑空间 $X$ 是 *Hausdorff* 空间当且仅当 $X$ 的不同点的邻域系作为滤子不相容.

**定义 9.13.** 设 $X$ 是拓扑空间，$\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的滤子，$x \in X$.

- 若 $\mathcal{F}$ 包含 $x$ 的邻域系 $\mathcal{N}(X)$，则称 $x$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个极限或者 $\mathcal{F}$ 收敛于 $x$.
- 若 $\mathcal{F}$ 与 $x$ 的邻域系 $\mathcal{N}(x)$ 相容，则称 $x$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个聚点.

极限之集记为 $\lim \mathcal{F}$，聚点之集记为 $\operatorname{clust} \mathcal{F}$.

**命题 9.14.** $X$ 是拓扑空间，$\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 是滤子.

- $\operatorname{clust} \mathcal{F} = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.
- 若 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$，则 $\lim \mathcal{F} \subset \lim \mathcal{G}$，$\operatorname{clust} \mathcal{G} \subset \operatorname{clust} \mathcal{F}$.

- 若 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的超滤，则 $\lim \mathcal{F} = \operatorname{clust} \mathcal{F}$.

**定理 9.15.** $X$ 拓扑空间，$A \subset X$，$x \in X$，*TFAE:*

- $x \in \overline{A}$.
- 存在 $X$ 上的超滤 $\mathcal{G}$ 使得 $A \in \mathcal{G}$ 且 $\mathcal{G}$ 收敛于 $x$.
- 存在 $X$ 上的滤子 $\mathcal{F}$ 使得 $A \in \mathcal{F}$ 且 $\mathcal{F}$ 收敛于 $x$.

**评注 9.16.** 设 $f\colon X \to Y$ 是映射，$\mathcal{F} \in \mathscr{F}(X)$，令

$$f(\mathcal{F}) = \{B \subset Y \colon f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

则 $f(\mathcal{F})$ 是 $Y$ 上的滤子. 进一步， $f$ 还把超滤送到超滤.

**命题 9.17.** $X, Y$ 拓扑空间，$f\colon X \to Y$，*TFAE:*

- $f\colon X \to Y$ 连续.
- 任给 $X$ 上的滤子 $\mathcal{F}$，有 $f(\lim \mathcal{F}) \subset \lim f(\mathcal{F})$.
- 任给 $X$ 上的超滤 $\mathcal{G}$，有 $f(\lim \mathcal{G}) \subset \lim f(\mathcal{G})$.

**例 9.18.** 设 $\xi\colon (D, \sqsubseteq) \to X$ 为 $X$ 的网，令

$$\mathcal{F}_\xi := \{A \subset X \colon \xi \text{ 终在 } A\}$$

则 $\mathcal{F}_\xi$ 为 $X$ 上的滤子，称由 $\xi$ 生成的滤子.
设 $\mathcal{F}$ 为 $X$ 上的滤子，令

$$D_{\mathcal{F}} := \{(x, A) \colon x \in A \in \mathcal{F}\}$$

规定

$$(x, A) \sqsubseteq (y, B) \iff A \supseteq B$$

不难验证 $(D_{\mathcal{F}}, \sqsubseteq)$ 是定向集，从而

$$\xi_{\mathcal{F}} \colon (D_{\mathcal{F}}, \sqsubseteq) \to X, \quad (x, A) \mapsto x$$

是网，称为由 $\mathcal{F}$ 生成的网.

**命题 9.19.** $X$ 为拓扑空间，$\xi$ 为其上的网，$\mathcal{F}$ 为其上的滤子，则

- $\lim \xi = \lim \mathcal{F}_\xi$，$\operatorname{clust} \xi = \operatorname{clust} \mathcal{F}_\xi$.
- $\lim \mathcal{F} = \lim \xi_{\mathcal{F}}$，$\operatorname{clust} \mathcal{F} = \operatorname{clust} \xi_{\mathcal{F}}$.

# 10 滤子与网的发展历史

## 一、诞生背景：为何需要超越序列？

**1. 序列极限的局限性**

在度量空间中，序列收敛足以刻画拓扑性质（如闭集、连续性等）. 但在一般拓扑空间中，序列收敛可能失效：

- **闭集非序列闭**：例如 $[0, \omega_1]$ 在序拓扑中
- **非序列收敛点**：平凡拓扑中任意序列不收敛但拓扑收敛
- **连续函数异常**：连续函数未必保序列极限

**2. 分析学发展的需求**

20 世纪初泛函分析（弱收敛）和代数拓扑（紧化）的发展，要求处理不可数结构：

- 不可数覆盖
- 非可数邻域基
- 高维空间紧性判别

## 二、网的诞生（Moore-Smith Convergence）

**定义核心**：

- **网**：从**有向集** $(D, \leq)$ 到拓扑空间 $X$ 的函数
- **收敛**：$x_\alpha \to x \iff \forall U \in \mathcal{N}_x,\ \exists \alpha_0 \in D,\ \forall \alpha \geq \alpha_0,\ x_\alpha \in U$

**关键创新**：

- 以**有向集**替代自然数下标 $\mathbb{N}$
- 邻域最终被“捕获”

**历史背景**：1922 年由 E. H. Moore 和 H. L. Smith 提出，源自统一分析极限（级数、积分等）的需求.

## 三、滤子的诞生（Cartan-Bourbaki Theory）

**定义核心**：

- **滤子** $\mathcal{F}$：$X$ 的非空子集族满足：

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

- **收敛**：$\mathcal{F} \to x \iff \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$

**关键创新**：

- 用**集合族包含关系**直接描述“逼近”
- 消除序结构冗余

**历史背景**：1937 年 H. Cartan 提出，Bourbaki 学派系统化发展.

## 四、网与滤子的本质联系

### 4.1 结构互译：收敛等价性

| **网 $\to$ 滤子** | **滤子 $\to$ 网** |
|---|---|
| 尾段滤子构造：$\mathcal{F}_{(x_\alpha)} = \{A \subseteq X \mid \exists \alpha_0,\ \forall \alpha \geq \alpha_0,\ x_\alpha \in A\}$ | 有向集构造：$D = \{(A, x) \mid A \in \mathcal{F},\ x \in A\}$, $(A, x) \leq (B, y) \iff A \subseteq B$ |
| 收敛等价：$x_\alpha \to x \iff \mathcal{F}_{(x_\alpha)} \to x$ | 映射定义：$\varphi((A, x)) = x$ 满足 $\varphi \to x \iff \mathcal{F} \to x$ |

### 4.2 核心概念对比

| **概念** | **网 (Nets)** | **滤子 (Filters)** |
|---|---|---|
| 收敛对象 | 函数 $x_\alpha : D \to X$ | 集族 $\mathcal{F}$ |
| 序列推广 | 有向集下标（$\mathbb{N}$ 的推广） | 集合包含关系 |
| 收敛本质 | $x_\alpha$ 最终进入每个邻域 | $\mathcal{F}$ 包含每个邻域 |
| 子结构 | 子网（需保序性+余终性） | 滤子加细（$\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$） |
| 紧性刻画 | 网有收敛子网 $\iff$ 紧 | 滤子有收敛加细 $\iff$ 紧 |

## 五、历史意义的统一性

### 1. 修复序列缺陷

- **闭集刻画**：$A$ 闭 $\iff$ $A$ 中的网/滤子极限 $\in A$
- **连续性**：$f$ 连续 $\iff$ $f$ 保网/滤子收敛

**2. 紧性的革命性刻画**

$$\forall \text{ 网存在收敛子网} \iff X \text{ 紧}$$
$$\forall \text{ 滤子存在收敛加细} \iff X \text{ 紧}$$

**3. 语言选择偏好**

- **网**：分析学偏好（贴近 $\varepsilon$-$\delta$ 语言）
- **滤子**：范畴论适用（Bourbaki 学派基础工具）

## 六、哲学内涵：如何理解本质？

**统一视角**

两者通过抽象方式替代序列：

- **下标集推广**：有向集（网）
- **尾段推广**：滤子基（滤子）
- **最终统一**：格论（lattice theory）的**共终性**（cofinality）

**核心价值**

- 建立**不依赖可数性**的极限理论
- 支撑现代拓扑结构：
  - 拓扑向量空间
  - 纤维丛理论
  - 紧生成空间

**总结**: 网与滤子是描述拓扑收敛的**孪生工具**，二者本质等价. 网通过"广义序列"模拟逼近，滤子通过集合包含直接过滤信息. 它们的诞生标志着拓扑从度量空间到抽象空间的历史性突破.

# 11 紧Hausdorff空间的超滤刻画

**命题 11.1.** *TFAE:*

- $X$ 是 *Hausdorff* 空间.
- $X$ 上的每个滤子至多有一个极限.
- $X$ 上的每个超滤至多有一个极限.

**命题 11.2.** *TFAE:*

- $X$ 紧.
- $X$ 的每个滤子都有聚点.
- $X$ 的每个超滤都收敛.

**推论 11.3.** $X$ 是紧 *Hausdorff* 空间当且仅当每一个超滤都有且仅有一个极限.

从而每一个紧 Hausdorff 空间都确定了一个映射

$$c\colon \mathscr{U}(X) \to X, \quad \mathcal{G} \mapsto \lim \mathcal{G}$$

设 $f\colon X \to Y$ 是一个映射，由于超滤的像还是超滤，从而我们得到一个映射

$$\mathscr{U}(f)\colon \mathscr{U}(X) \to \mathscr{U}(Y), \quad \mathcal{G} \mapsto f(\mathcal{G})$$

设 $X$ 是非空集，$\mathscr{U}(X)$ 是 $X$ 上的超滤集，$\mathscr{U}(\mathscr{U}(X))$ 是 $\mathscr{U}(X)$ 上的超滤集，令 $\mathfrak{U} \in \mathscr{U}(\mathscr{U}(X))$，令

$$\sigma(\mathfrak{U}) = \bigcup_{A\in\mathfrak{U}} \bigcap_{\mathcal{G}\in A} \mathcal{G}$$

我们知道 $\bigcap\limits_{\mathcal{G}\in A} \mathcal{G}$ 是一族滤子的交，从而还是滤子，并且容易知道 $\left\{\bigcap\limits_{\mathcal{G}\in A} \mathcal{G}\right\}$ 成为一个定向集，从而并还是滤子.

于是我们知道 $\sigma(\mathfrak{U})$ 是 $X$ 的滤子，称为滤子 $\mathfrak{U}$ 的对角滤子. 事实上，$\sigma(\mathfrak{U})$ 还是 $X$ 上的超滤.

从而得到映射

$$\sigma\colon \mathscr{U}(\mathscr{U}(X)) \to \mathscr{U}(X)$$

**定理 11.4** (Manes)**.** $X$ 是紧 *Hausdorff* 空间，映射 $c\colon \mathscr{U}(X) \to X$ 把每个超滤映为它的极限，则 $c$ 满足:

- 任给 $x \in X$，$c(\uparrow x) = x$.

- 任给 $\mathfrak{U} \in \mathscr{U}(\mathscr{U}(X))$，$c \circ \sigma(\mathfrak{U}) = c \circ \mathscr{U}(c)((U))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U}(\mathscr{U}(X)) \arrow[r, "\mathscr{U}(c)"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathscr{U}(X) \arrow[d, "c"] \\
\mathscr{U}(X) \arrow[r, "c"'] & X
\end{tikzcd}$$

反过来，任给非空集合 $X$ 与映射 $c\colon \mathscr{U}(X) \to X$，若 $c$ 满足上面两个条件，则存在唯一的拓扑 $\mathcal{O}$ 使得对 $X$ 上的每一个超滤 $\mathcal{G}$，恒有

$$c(\mathcal{G}) = x \iff \mathcal{G} \text{ 关于 } \mathcal{O} \text{ 收敛于 } x$$

特别地，$(X, \mathcal{O})$ 是紧 *Hausdorff* 空间.

# 12 Tychonoff空间

**定义 12.1.** $X$ 为拓扑空间.

- $X$ 的一个紧化指一个序对 $(Y,c)$，其中 $Y$ 是紧空间，$c\colon X\to Y$ 是同胚嵌入，并且 $c(X)$ 是 $Y$ 的稠子集.
- $X$ 的紧化 $(Y,c)$ 称为 *Hausdorff* 紧化，若 $Y$ 是紧 *Hausdorff* 空间.
- 若 $(Y,c)$ 是 $X$ 的一个紧化，称 $Y\backslash c(X)$ 为紧化 $(Y,c)$ 的剩余.

**定义 12.2.** $X$ 为拓扑空间，若任意给定 $X$ 的开集 $U$ 以及 $x\in U$，总是存在连续函数 $f\colon X\to[0,1]$ 满足

$$f(x)=0,\quad f(X\backslash U)\subset\{1\}$$

则称 $X$ 完全正则. 完全正则的 $T_0$ 空间称为 *Tychonoff* 空间*($T_{3.5}$)*.

**命题 12.3.** $T_4\Rightarrow T_{3.5}\Rightarrow T_3$.

**定义 12.4.** $\{f_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ 是一族映射，始拓扑就是使得每一个 $f_i$ 连续的最粗的拓扑，如果 $X$ 配备了始拓扑，则称 $\{f_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ 为一个初始源.

**评注 12.5.** 连续当且仅当开集的原像是开集，从而开集越多越容易连续，开集越少越不容易连续.

**引理 12.6.** $\{f_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ 是一个初始源，当且仅当

$$\left\{\Delta_{i\in I}f_i\colon X\to\prod_{i\in I}Y_i\right\}$$

是初始源，其中 $\Delta_{i\in I}f_i$ 是对角映射.

**证明:** 由乘积空间的泛性质显然. □

**命题 12.7.** $X$ 完全正则当且仅当

$$\{f\colon X\to[0,1]\}_{f\in\Lambda_X}$$

是初始源，其中 $\Lambda_X$ 是 $X\to[0,1]$ 的全体连续映射.

**证明:** $\Rightarrow$: 设 $\mathcal{O}$ 为 $X$ 自身的拓扑，$\Omega$ 为始拓扑，显然我们有 $\Omega\subset\mathcal{O}$.

另一方面，设 $U\in\mathcal{O}$，对于 $x\in U$，由于 $(X,\mathcal{O})$ 完全正则，我们知道存在 $f_x\in\Lambda_X$ 使得

$$f_x(x)=0,\quad f_x(X\backslash U)\subset\{1\}$$

我们知道 $f_x^{-1}([0,1))\in\Omega$. 因此我们知道

$$U=\bigcup_{x\in U}f_x^{-1}([0,1))$$

从而我们知道 $\mathcal{O} \subset \Omega$.

$\Leftarrow$: 由于是 $X$ 的拓扑是始拓扑，我们知道

$$\{[0,a),(a,1]\colon a\in(0,1)\}$$

是 $[0,1]$ 的一个子基，而 $\Lambda_X$ 是 $X$ 到 $[0,1]$ 的全体连续函数. 不难验证

$$\{f^{-1}([0,1))\colon f\in\lambda_X\}$$

是 $X$ 的一个子基[9]. 设 $U$ 是 $X$ 的开集，$x_0\in U$，由于子基，我们知道存在 $g_1,\cdots,g_n\in\Lambda_X$ 使得

$$x_0\in\bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}([0,1))\subset U$$

令

$$g(z)=\max\{g_i(z)\colon i\le n\},\forall z\in X$$

我们知道 $g$ 连续，并且 $g(x_0)<1$，定义 $h\colon[0,1]\to[0,1]$ 如下：

$$h(t)=\begin{cases}0, & t\le g(x_0)\\ \dfrac{t-g(x_0)}{1-g(x_0)}, & t>g(x_0)\end{cases}$$

令 $f=h\circ g\colon X\to[0,1]$，我们知道 $f$ 连续并且 $f(x_0)=0$，$f(X\backslash U)\subset\{1\}$. 从而 $X$ 完全正则. □

**推论 12.8.** 完全正则是遗传性质和乘积性质.

**证明:**

**遗传性质：** 我们只需要考虑 $U\subset X$ 为一个子空间，则对于 $U$ 中的闭集 $K$ 与 $x$，我们知道存在 $X$ 中的闭集 $T$ 使得 $K=T\cap U$，并且 $x\notin T$，从而存在连续函数 $f$ 使得 $f(x)=0$，$f(T)\subset\{1\}$.

从而我们知道 $f|_U$ 满足条件，从而子空间是遗传性质.

**乘积性质：** 若 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一列完全正则空间，我们取

$$\vec{x}=(x_i)_{i\in I},\quad \text{open set } U\subset\prod_{i\in I}X_i, \text{s.t. } \vec{x}\in U$$

不妨设

$$U=U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_n}\times\prod_{j\neq i_1,\cdots,i_n}X_j$$

这说明

$$x_{i_k}\in U_{i_k}$$

[9]需要注意到 $f$ 是连续函数，则 $1-f$ 与 $af$ 都是连续函数，从而会导致存在 $f^{[0,a)}$ 与 $f^{-1}((a,1])$.

这说明存在连续函数

$$f_{i_k}\colon X_{i_k} \to [0,1], \quad \text{s.t. } f_{i_k}(x_{i_k}) = 0,\ f_{i_k}(X_{i_k} \backslash U_{i_k}) \subset \{1\}$$

从而我们只需定义

$$f\colon \prod_{i\in I} X_i \to [0,1], \quad \vec{z} \mapsto \max_{1\le k\le n}\{f_{i_k}(z_{i_k})\}$$

容易验证满足条件，从而是完全正则的. □

**定理 12.9.** *$X$ 拓扑空间，TFAE:*

- *$X$ 是 Tychonoff 空间.*
- *$X$ 同胚于闭区间 $[0,1]$ 某次幂的一个子空间.*
- *$X$ 同胚于某紧 Hausdorff 空间的子空间.*
- *$X$ 有 Hausdorff 紧化.*

**证明:** (1) 推 (2): 若 $X$ 是 Tychonoff 空间，我们知道

$$\{f\colon X \to [0,1]\}_{f\in\Lambda_X}$$

是初始源. 从而我们考虑对角映射：

$$k := \Delta_{f\in\Lambda_X} f\colon X \to [0,1]^{\Lambda_X}$$

由于 $X$ 是 Tychonoff 空间，且 $k$ 是单射，我们知道 $k$ 是始拓扑，从而 $k$ 是同胚嵌入.

(2) 推 (3): 显然.

(3) 推 (4): $Z$ 是紧 Hausdorff 空间，$k\colon X \to Z$ 是同胚嵌入，令 $Y = \overline{k(X)}$，则 $Y$ 是紧 Hausdorff 空间，我们知道 $(Y,c)$ 为 $X$ 的 Hausdorff 紧化，其中 $c$ 与 $k$ 完全一样，不过把值域限制到 $Y$ 上.

(4) 推 (1): 紧 Hausdorff 空间是 Tychonoff 空间，而 Tychonoff 空间的子空间也是 Tychonoff 空间. □

# 13 Stone-$\check{C}ech$紧化

设 $X$ 为拓扑空间，令 $\Lambda_X$ 表示 $X \to [0,1]$ 空间的全体连续映射，令 $k_X$ 表示对应的对角映射

$$k_X\colon X \to [0,1]^{\Lambda_X}, \quad x \mapsto (h(x))_{h\in\Lambda_X}$$

记 $k_X(X)$ 在乘积空间 $[0,1]^{\Lambda_X}$ 中的闭包为 $\beta X$，即

$$\beta X = \overline{k_X(X)}$$

则 $\beta X$ 是紧 Hausdorff 空间，令

$$\eta_X\colon X \to \beta X$$

为 $k_X$ 把值域限制到 $\beta X$ 得到的映射，则我们知道 $\eta_X(X)$ 是 $\beta X$ 的稠子集.

**定理 13.1.** $X$ 是拓扑空间，$Y$ 是紧 *Hausdorff* 空间，则任给连续映射 $f\colon X \to Y$，都存在唯一的连续映射 $f^*\colon \beta X \to Y$，使得 $f = f^* \circ \eta_X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\exists! f^*"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

为了证明这个定理，我们给出几个引理：

**引理 13.2.** 若 $X$ 是 *Tychonoff* 空间，则 $\eta_X\colon X \to \beta X$ 是同胚嵌入，$(\beta X, \eta_X)$ 是 $X$ 的一个 *Hausdorff* 紧化.

**证明:** 注意到完全正则当且仅当 $\eta_X$ 诱导初始拓扑即证明. $\square$

**引理 13.3.** $X$ 紧 *Hausdorff*，则 $\eta_X\colon X \to \beta X$ 是同胚.

**证明:** 由于紧 Hausdorff 可以推 Tychonoff，而 $\eta_X$ 是连续单射，由于 $X$ 紧，$\beta X$ Hausdorff，所以 $\eta_X$ 闭映射，从而同胚. $\square$

**引理 13.4.** 任给连续映射 $h\colon X \to [0,1]$，存在唯一的连续映射 $h^*\colon \beta X \to [0,1]$ 使得 $h = h^* \circ \eta_X$.

**证明:** 由于 $h \in \Lambda_X$，从而我们考虑

$$p_h\colon [0,1]^{\Lambda_X} \to [0,1]$$

为 $h$-方向的投影映射，$h^*$ 表示 $p_h$ 在 $\beta_X$ 上的限制，从而我们知道 $h^*$ 满足要求.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k_X"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, "h"] & {[0,1]^{\Lambda_X}} \arrow[d, dashed, "p_h"] \\ \beta X \arrow[r, dashed, "h^*=p_h|_{\beta X}"] & {[0,1]_h} \end{tikzcd}$$

唯一性由 $[0,1]$ 是 Hausdorff 空间并且 $\eta_X(X)$ 是 $\beta X$ 的稠子集得到. $\square$

**定理 13.1 的证明：** 由于 $Y$ 是 Hausdorff 空间，$\eta_X(X)$ 在 $\beta X$ 中稠，若 $f^*$ 存在，则必然唯一. 下面说明存在性.

对于任意的 $h \in \Lambda_Y$，令

$$f_h = p_h \circ k_Y \circ f \colon X \to Y \to [0,1]^{\Lambda_Y} \to [0,1]$$

我们知道存在唯一的连续映射 $f_h^* \colon \beta X \to [0,1]$ 使得 $f_h = f_h^* \circ \eta_X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[r, "f_h^*"] \arrow[d, dashed, "f^*"'] \arrow[dr, "g"] & {[0,1]} \\ & Y \arrow[r, "k_Y"'] & {[0,1]^{\Lambda_Y}} \arrow[u, "p_h"'] \end{tikzcd}$$

其中 $g \colon \beta X \to [0,1]^{\Lambda_Y}$ 是 $\{f_h^*\}_{h\in\Lambda_Y}$ 的对角映射，即 $g$ 是满足 $f_h^* = p_h \circ g$ 的唯一映射.

由于

$$\begin{aligned} g(\beta X) &= g(\overline{\eta_X(X)}) \subset \overline{(g\circ\eta_X)(X)} \\ &= \overline{(k_Y\circ f)(X)} = \overline{k_Y(f(X))} \\ &= k_Y\left(\overline{f(X)}\right) \quad (k_Y \text{ 是闭映射}) \\ &\subset k_Y(Y) \end{aligned}$$

所以 $g$ 的像含于 $\beta Y$，令 $\widetilde{g} \colon \beta X \to \beta Y$ 表示把 $g$ 的值域限制为 $\beta Y$ 得到的映射，由于 $Y$ 是紧 Hausdorff 空间，$\eta_Y \colon Y \to \beta Y$ 是同胚，令

$$f^* = \eta_Y^{-1} \circ \widetilde{g} \colon \beta X \to \beta Y \to Y$$

则 $f^*$ 满足要求. $\square$.

**定义 13.5.** 若 $X$ 是 *Tychonoff* 空间，则 $(\beta X, \eta_X)$ 是 $X$ 的一个 *Hausdorff* 紧化，称为它的 *Stone-Čech* 紧化.

**定义 13.6.** 设 $X$ 是 *Tychonoff* 空间，$(Y_1, c_1)$ 与 $(Y_2, c_2)$ 是 $X$ 的 *Hausdorff* 紧化，若存在连续映射 $f \colon Y_1 \to Y_2$，使得 $c_2 = f \circ c_1$，则称 $(Y_1, c_1)$ 比 $(Y_2, c_2)$ 大，记为 $(Y_2, c_2) \sqsubseteq (Y_1, c_1)$. 由于

$Y_1, Y_2$ 都是紧 *Hausdorff* 空间，$f$ 一定是满射，于是 $Y_2$ 是 $Y_1$ 的连续像.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dd, "f"] \\ X \arrow[ur, "c_1"] \arrow[dr, "c_2"'] & \\ & Y_2 \end{tikzcd}$$

**评注 13.7.** 显然 $\sqsubseteq$ 具有传递性.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Y_2 \arrow[d, "g"] \\ & Y_3 \end{tikzcd}$$

**推论 13.8.** *Tychonoff* 空间的 *Stone-Čech* 紧化是它的最大的 *Hausdorff* 紧化，也就是说任何 $X$ 的 *Hausdorff* 紧化 $(Y, c)$ 都有 $(Y, c) \sqsubseteq (\beta X, \eta_X)$.

**定义 13.9.** 设 $X$ 是 *Tychonoff* 空间，$(Y_1, c_1)$ 与 $(Y_2, c_2)$ 是 $X$ 的 *Hausdorff* 紧化，若存在同胚映射

$$f\colon Y_1 \to Y_2$$

使得 $c_2 = f \circ c_1$，则称 $(Y_1, c_1)$ 与 $(Y_2, c_2)$ 等价.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dd, "f"] \\ X \arrow[ur, "c_1"] \arrow[dr, "c_2"'] & \\ & Y_2 \end{tikzcd}$$

**命题 13.10.** $X$ 为 *Tychonoff* 空间，$(Y_1, c_1)$ 与 $(Y_2, c_2)$ 为 *Hausdorff* 紧化，则 $(Y_1, c_1)$ 与 $(Y_2, c_2)$ 等价当且仅当 $(Y_1, c_1) \sqsubseteq (Y_2, c_2)$ 且 $(Y_2, c_2) \sqsubseteq (Y_1, c_1)$.

**证明:** 必要性是显然的，下面说明充分性，若存在连续映射 $f$，$g$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[d, "c_2"] \arrow[dr, "c_1"] & \\ Y_1 \arrow[r, "f"] & Y_2 \arrow[r, "g"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

我们有

$$g \circ f \circ c_1 = c_1$$

结合 $Y_1$ 是 Hausdorff 空间，并且 $c_1(X)$ 是 $Y_1$ 的稠子集，我们知道 $g \circ f = 1_{Y_1}$，同理知道 $f \circ g = 1_{Y_2}$，从而 $f$ 是同胚，于是等价. $\square$

**定理 13.11.** $(Y, c)$ 是 *Tychonoff* 空间 $X$ 的 *Hausdorff* 紧化，*TFAE:*

- $(Y, c)$ 和 $X$ 的 *Stone-*$\check{C}ech$ 紧化等价.
- 任给紧 *Hausdorff* 空间 $Z$ 和连续映射 $f\colon X \to Z$，存在 $f^*\colon Y \to Z$ 使得 $f = f^* \circ c$.
- 任给连续映射 $f\colon X \to [0, 1]$，存在连续映射 $f^*\colon Y \to [0, 1]$，使得 $f = f^* \circ c$.

# 14 局部紧空间与最小 Hausdorff 紧化

**定义 14.1.** $X$ 为拓扑空间，若任给 $x \in X$ 以及 $x$ 的邻域 $U$，存在 $X$ 的紧子集 $K$ 使得 $x \in K^\circ \subset K \subset U$，则称 $X$ 局部紧.

**命题 14.2.** *Hausdorff* 空间 $X$ 局部紧当且仅当 $X$ 的每一点都有一个紧邻域 $K$.

**命题 14.3.** 正则的紧空间是局部紧的.

**定义 14.4.** 正则空间的每个点的每个邻域都包含该点的一个闭邻域，从而有时也罢正则空间称为局部闭空间.

**命题 14.5.** 局部紧空间的开子空间与闭子空间局部紧.

**引理 14.6.** *Hausdorff* 空间的局部紧稠子集是开集.

**引理 14.7.** $D$ 是 *Hausdorff* 空间 $X$ 的稠子集，$f\colon X \to Y$ 是连续映射，若 $f|_D\colon D \to Y$ 是同胚嵌入，则 $f(X \backslash D) \subset Y \backslash f(D)$.

**定义 14.8.** 设 $X$ 是非紧的局部紧 *Hausdorff* 空间，令 $\alpha X = X \cup \{\infty\}$，其中 $\infty \notin X$，令

$$\mathcal{O} = \{X \text{ 的全体开集}\} \cup \{U \subset \alpha X \colon \infty \in U, X \backslash U \text{ 是 } X \text{ 的紧子集}\}$$

则 $(\alpha X, \mathcal{O})$ 是紧 *Hausdorff* 空间，并且含入映射 $\varphi_X\colon X \to (\alpha X, \mathcal{O})$ 是同胚嵌入并且 $X$ 是 $(\alpha X, \mathcal{O})$ 的稠子集. $\alpha X$ 称为 $X$ 的单点紧化.

**命题 14.9.** $X$ 是非紧的 *LCH* 空间，则 $\alpha X$ 是 $X$ 的最小 *Hausdorff* 紧化.

**引理 14.10.** $X$ 是非紧的拓扑空间，$(Y, c)$ 是 $X$ 的最小 *Hausdorff* 紧化，则 $Y \backslash c(X)$ 是单点集.

**定理 14.11.** $X$ 为非紧的 *Hausdorff* 空间，*TFAE:*

- $X$ 局部紧.
- $X$ 有一个最小的 *Hausdorff* 紧化.
- $X$ 是 *Tychonoff* 空间并且是它的每个 *Hausdorff* 紧化的开子空间.
- $X$ 是 *Tychonoff* 空间并且是它的 *Stone-Čech* 紧化的开子空间.
- $X$ 同胚于某 *Hausdorff* 空间的一个开子空间.

**定理 14.12** (Whitehead定理)**.** 若 $X$ 是局部紧空间，$f\colon Y \to Z$ 是商映射，则乘积映射

$$f \times 1_X \colon Y \times X \to Z \times X$$

是商映射.

**定义 14.13.** 若拓扑空间 $X$ 的子集 $S$ 满足以下任何一个等价定义，则称 $S$ 为 $X$ 的一个局部闭子集.

- $S$ 是某个开集和某个闭集的交，即存在开集 $U \subset X$ 和闭集 $F \subset X$ 使得 $S = U \cap F$.
- $S$ 在其闭包中是开集，即存在开集 $U \subset X$ 使得 $S = U \cap \overline{S}$.
- 对于每个点 $x \in S$，存在一个开邻域 $V_x$，使得 $S \cap V_x$ 在 $V_x$ 的子空间拓扑是闭集.

**证明:** 下面我们说明这三个定义是等价的:

(1) $\implies$ (3)：取 $V_x = U$ 即可.

(3) $\implies$ (2)：我们令 $U = \bigcup\limits_{x \in S} V_x$，$F = \overline{S}$，下面说明 $S = U \cap F$. 显然有 $S \subset U \cap F$，只需要说明反方向.

对任意的 $y \in U \cap F = U \cap \overline{S}$，由于 $y \in U$，从而存在 $x \in S$ 使得 $y \in V_x$，由于 $y \in \overline{S}$，我们知道包含 $y$ 的任意开集与 $S \cap V_x$ 相交，于是 $y \in \overline{S \cap V_x}$，由于 $S \cap V_x$ 在 $V_x$ 中是闭集，于是我们知道

$$\overline{S \cap V_x} \cap V_x = S \cap V_x$$

于是有

$$y \in \overline{S \cap V_x} \cap V_x = S \cap V_x \subset S$$

所以 $U \cap F \subset S$.

(2) $\implies$ (1)：显然. $\square$

# 15 拓扑完备空间

**定义 15.1.** 若拓扑空间 $X$ 可完备度量化，则称 $X$ 拓扑完备.

**命题 15.2.** 关于拓扑完备.

- 拓扑完备是闭遗传性质.
- 拓扑完备是开遗传性质.
- 拓扑完备是可数可乘性质.

**定理 15.3.** $X$ 是拓扑空间，$A \subset X$.

- 若 $X$ 拓扑完备，$A$ 是 $X$ 的 $G_\delta$ 集，则 $A$ 拓扑完备.
- 若 $A$ 拓扑完备，$X$ 可度量化，则 $A$ 是 $X$ 的 $G_\delta$ 集.

**定义 15.4.** $X$ 为拓扑空间，若 $X$ 同胚与某 *Hausdorff* 空间的一个 $G_\delta$ 集，则称 $X$ $\check{C}ech$ 完备.

**定理 15.5.** 设 $X$ 为 *Tychonoff* 空间，*TFAE:*

- $X$ 是 $\check{C}ech$ 完备空间.
- $X$ 是它的 *Stone-*$\check{C}ech$ 紧化的 $G_\delta$ 集.
- $X$ 是它的每个 *Hausdorff* 紧化的 $G_\delta$ 集.
- 若 $X$ 是 *Tychonoff* 空间 $Y$ 的稠子集，则 $X$ 是 $Y$ 的 $G_\delta$ 集.

**命题 15.6.** 完备度量空间是 $\check{C}ech$ 完备空间.

**定理 15.7.** 拓扑空间 $X$ 拓扑完备当且仅当 $X$ 是可度量化的 $\check{C}ech$ 完备空间.

**命题 15.8.** $\check{C}ech$ 完备空间是 *Baire* 空间.

# 参考文献


[1] 一般拓扑学基础/张德学

[2] 助教提供的作业答案

[3] DeepSeek-R1