数理方程笔记 Chapter 3

Chapter 3 二阶线性抛物方程

3.1 热传导方程

考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t),t>0$$

其基本解记为 $E(x,t)$，考虑

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}-a^2\Delta E(x,t)=\delta(x,t)$$

在 x 方向做 Fourier 变换

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{E}(t,\xi)+a^2|\xi|^2\widehat{E}(t,\xi)=\delta(t)$$

于是得到

$$\widehat{E}(t,\xi)=H(t)e^{-a^2|\xi|^2t}$$

于是有

$$\begin{aligned}E(x,t)&=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\widehat{E}(t,\xi)\\&=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}H(t)e^{-a^2|\xi|^2t}\mathrm{d}\xi\\&=(2\pi)^{-n}(a\sqrt{2}t)^{-n}H(t)\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{ix(a\sqrt{2}\xi)}{a\sqrt{2}t}}e^{-\frac{1}{2}|a\sqrt{2}t\xi|^2}\mathrm{d}(a\sqrt{2}t\xi)\end{aligned}$$

回忆

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$$

从而

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}\right)$$

于是我们知道

$$E(t,x)=(a\sqrt{2}t)^{-n}H(t)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{a\sqrt{2}t}\right|^2}=(4\pi a^2t)^{-\frac{n}{2}}H(t)e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},t>0$$

3.1.1 Cauchy 问题

考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

我们考虑叠加原理，只需要分别解方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

我们先解决齐次方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

对 u 在 x 方向做 Fourier 变换，将其变成 ODE 的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}(t,\xi)}{\mathrm{d}t} + a^2|\xi|^2\widehat{u}(t,\xi) = 0 \\ \widehat{u}(t,\xi)|_{t=0} = \widehat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

我们可以得到

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

由于

$$\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2} \implies f_1 * f_2 = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2})$$

令 $f_1 = \varphi(x), \widehat{f_1} = \widehat{\varphi}(\xi)$，与 $\widehat{f_2}(\xi) = e^{-a^2|\xi|^2 t}$，于是我们有

$$f_2 = \mathcal{F}^{-1}(e^{-a^2|\xi|^2 t}) = (4\pi a^2 t)^{\frac{-n}{2}} H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} = E(x,t)$$

所以知道

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\varphi}(\xi) \cdot \widehat{E}(x,t)\right) = E(x,t) *_x \varphi(x)$$

从而计算得到形式解

$$u(x,t) = (4\pi a^2 t)^{\frac{-n}{2}} H(t) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}y$$

可以验证满足方程和初值条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)(E(x,t) *_x \varphi(x)) = \delta(x,t) *_x \varphi(x) = \langle \delta(y,t), \varphi(x-y) \rangle_y = \delta(t)\varphi(x) = 0(t>0)$$

下面验证满足初值，即

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \varphi(x)$$

这等价于证明

$$\lim_{t \to 0^+} E(x,t) *_x \varphi(x) = \varphi(x)$$

即证明

$$\lim_{t\to 0^+} E(x,t)=\delta(x)\in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

(作业) Homework

这是因为：对于任意的试验函数 $\phi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，都有

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\phi(x)dx=\phi(0)$$

对于任意 $t>0$，函数 $E(t,x)$ 在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上的积分恒为 1：

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}(4\pi a^2t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}dx$$

我们做一个换元，令 $y=\dfrac{x}{\sqrt{4a^2t}}$，那么 $x=\sqrt{4a^2t}\cdot y$，有

$$dx=(\sqrt{4a^2t})^n dy=(4a^2t)^{\frac{n}{2}}dy$$

代入积分中：

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx=(4\pi a^2t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|y|^2}(4a^2t)^{\frac{n}{2}}dy$$

系数项正好消掉：

$$=\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|y|^2}dy=1$$

下面我们需要证明，当 $t\to 0^+$ 时，除了原点的一个任意小的邻域外，其他地方的积分都趋向于0，任取一个 $\epsilon>0$，我们将积分区域分成两部分：一个是以原点为中心、半径为 ϵ 的球 $B(0,\epsilon)$，以及它的补集 $\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)$：我们来考察在球外部分的积分：

$$\int_{|x|\geq\epsilon} E(t,x)dx=\int_{|x|\geq\epsilon}(4\pi a^2t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}dx$$

再次使用换元 $y=\dfrac{x}{\sqrt{4a^2t}}$，那么积分区域变为 $|y|\geq\dfrac{\epsilon}{\sqrt{4a^2t}}$：

$$=\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{|y|\geq\frac{\epsilon}{\sqrt{4a^2t}}}e^{-|y|^2}dy$$

当 $t\to 0^+$ 时，积分下限 $\dfrac{\epsilon}{\sqrt{4a^2t}}\to\infty$，这意味着我们是在一个半径趋于无穷大的球外部进行积分，由于 $e^{-|y|^2}$ 是一个快速衰减的函数，它在无穷远处的积分为0，所以：

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{|x|\geq\epsilon}E(t,x)dx=0$$

现在计算 $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}E(t,x)\phi(x)dx$，我们知道

$$\phi(0) = \phi(0) \cdot 1 = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\phi(0) dx$$

因此，我们要考察的极限可以写成：

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\phi(x) dx - \phi(0) = \lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)[\phi(x) - \phi(0)] dx$$

我们想证明这个极限等于0，我们将积分拆分成两部分，以任意小的 $\epsilon > 0$ 为界：

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)[\phi(x) - \phi(0)] dx = \underbrace{\int_{|x|<\epsilon} E(t,x)[\phi(x) - \phi(0)] dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{|x|\geq\epsilon} E(t,x)[\phi(x) - \phi(0)] dx}_{I_2}$$

因为 $\phi(x)$ 是一个连续函数，当 $|x| < \epsilon$ 时，$\phi(x)$ 非常接近 $\phi(0)$。根据连续性的定义，对于任意 $\eta > 0$，我们总可以找到一个足够小的 $\epsilon > 0$，使得当 $|x| < \epsilon$ 时，有 $|\phi(x) - \phi(0)| < \eta$，因此：

$$|I_1| \leq \int_{|x|<\epsilon} E(t,x)|\phi(x) - \phi(0)| dx < \eta \int_{|x|<\epsilon} E(t,x) dx$$

由于 $E(t,x) > 0$ 且总积分为1，我们有 $\int_{|x|<\epsilon} E(t,x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x) dx = 1$，所以 $|I_1| < \eta$.

由于 $\phi(x)$ 是紧支集函数，它在某个大球之外恒为0，因此是有界的。设 $|\phi(x)| \leq M$ 对所有 x 成立。那么 $|\phi(x) - \phi(0)| \leq |\phi(x)| + |\phi(0)| \leq 2M$.

$$|I_2| \leq \int_{|x|\geq\epsilon} E(t,x)|\phi(x) - \phi(0)| dx \leq 2M \int_{|x|\geq\epsilon} E(t,x) dx$$

根据步骤二的结论，我们知道 $\lim_{t \to 0^+} \int_{|x|\geq\epsilon} E(t,x) dx = 0$，因此，对于给定的 ϵ，我们总能找到一个 $T > 0$，当 $0 < t < T$ 时，使得 $\int_{|x|\geq\epsilon} E(t,x) dx$ 足够小，比如小于 $\frac{\eta}{2M}$，这样 $|I_2| < \eta$.

综上所述，对于任意给定的 $\eta > 0$，我们可以先选择一个足够小的 ϵ 使得 $|I_1| < \eta$ 成立，然后对于这个 ϵ，再选择一个足够小的 t 使得 $|I_2| < \eta$ 成立，所以，当 $t \to 0^+$ 时，

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)[\phi(x) - \phi(0)] dx \right| \leq |I_1| + |I_2| < 2\eta$$

因为 η 是任意小的正数，这证明了极限为0：

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)[\phi(x) - \phi(0)] dx = 0$$

即：

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\phi(x) dx = \phi(0)$$

现在考察方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

笔记:

这里可以使用 Duhamel 原理求解：我们考虑函数 $U(x,t,\tau)$ 满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U, & t > \tau > 0 \\ U|_{t=\tau} = f(x,\tau), \end{cases}$$

现在令

$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau$$

下面说明 u 就是方程的解，现在我们计算

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u &= U(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial U(x,t,\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau \\ &= f(x,t) + a^2\int_0^t \Delta U(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= f(x,t) + a^2\Delta\int_0^t U(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= f(x,t) + a^2\Delta u(x,t) \end{aligned}$$

于是得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t)$$

并且

$$u|_{t=0} = \int_0^0 U\mathrm{d}\tau = 0$$

所以满足所求. 现在利用前面求的第一种情况可以知道 U 的形状，即

$$U(x,t,\tau) = E(x,t-\tau) *_x f(x,\tau) = (4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{-n}{2}}H(t-\tau)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}y$$

代入 $u(x,t)$ 的表达式即

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t U(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t (4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{-n}{2}}H(t-\tau)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} f(y,\tau)\left((4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{-n}{2}}H(t-\tau)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \\ &= E(x,t) * (Heat(t)f(x,t)) \end{aligned}$$

其中 $Heat$ 为 Green 函数，热核.

PS:孩子们我不懂，我乱抄的，这一段也许应该skip

现在考虑用基本解的方法来解这个方程

$$(P): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t), & t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

我们期望使用基本解的性质，现在有

$$Pu = f$$

已知 E 是 P 的基本解，则

$$u = E * f$$

为 $Pu=f$ 的 $\mathscr{D}'$ 解，而 $P = \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ 的基本解我们已经得到. 现在令

$$\widetilde{u}(x,t) = H(t)u(x,t)$$

有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\widetilde{u}(x,t) \overset{\Delta}{=} F(x,t)$$

希望 $F(x,t)$ 中包含方程的初值条件 $\varphi(x)$，从而得到

$$\widetilde{u}(x,t) = E(x,t) * F(x,t) \overset{t>0}{=} u(x,t)$$

证明如下:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\widetilde{u}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(H(t)u(x,t)) - a^2\Delta(H(t)u(x,t)) \\ &= \delta(t)u(x,t) + H(t)\frac{\partial u}{\partial t} - H(t)a^2\Delta u \\ &= \delta(t)u(x,t) + H(t)f(x,t) \end{aligned}$$

对于任意的 $\psi \in C_0^\infty$，我们计算

$$\begin{aligned} \langle \delta(t)u(x,t), \psi(t)\rangle &= \langle \delta(t), u(x,t)\psi(t)\rangle \\ &= u(x,0)\psi(0) \\ &= \varphi(x)\langle \delta(t), \psi(t)\rangle \\ &= \langle \varphi(x)\delta(t), \psi(t)\rangle \end{aligned}$$

于是在 $\mathscr{D}'$ 中，有

$$\delta(t)u(x,t) = \varphi(x)\delta(t)$$

于是我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)\widetilde{u}(x,t)=\varphi(x)\delta(t)+H(t)f(x,t)$$

利用基本解的性质，我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(x,t) &= E(x,t)*(\varphi(x)\delta(t)+H(t)f(x,t)) \\
&= E(x,t)*(\delta(t)\varphi(x))+E(x,t)*(H(t)f(x,t)) \\
&:= I_1+I_2
\end{aligned}$$

回忆

$$E(x,t)=(4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}}H(t)e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

对于积分 I_1 而言：对 $\delta(t)$ 磨光，设 $\Phi_\varepsilon(x)$ 为磨光核，令

$$\delta_\varepsilon(t)=\delta(t)*\Phi_\varepsilon(t)$$

于是有

$$\begin{aligned}
(\delta_\varepsilon(t)\varphi(x))*E(x,t) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}\delta_\varepsilon(\tau)\varphi(y)E(x-y,t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y \\
&= \int\varphi(y)\mathrm{d}y\int\delta_\varepsilon(\tau)E(x-y,t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \langle\varphi(y),\langle\delta_\varepsilon(\tau),E(x-y,t-\tau)\rangle\rangle
\end{aligned}$$

取极限有

$$(\delta(t)\varphi(x))*E(x,t)=\langle\varphi(y),\langle\delta(\tau),E(x-y,t-\tau)\rangle\rangle=\langle\varphi(y),E(x-y,t)\rangle=E(x,t)*_x\varphi(x)$$

对于积分 I_2 而言：

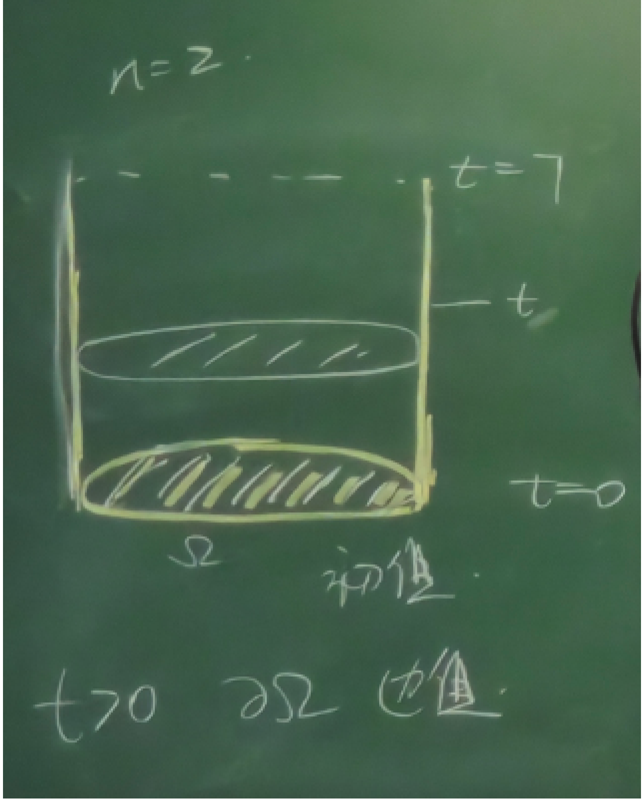
$$\begin{aligned}
E(x,t)*(H(t)f(x,t)) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}H(\tau)f(y,\tau)E(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}H(\tau)f(y,\tau)(4\pi a^2(t-\tau))^{-\frac{n}{2}}H(t-\tau)e^{-\frac{|x|^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t f(y,\tau)(4\pi a^2(t-\tau))^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

容易验证满足方程.

3.1.2 热传导方程的初边值问题

考虑方程:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t), & x\in\Omega,t>0 \\
u|_{\partial\Omega}=\mu(x,t) \\
u|_{t=0}=\varphi(x)
\end{cases}$$



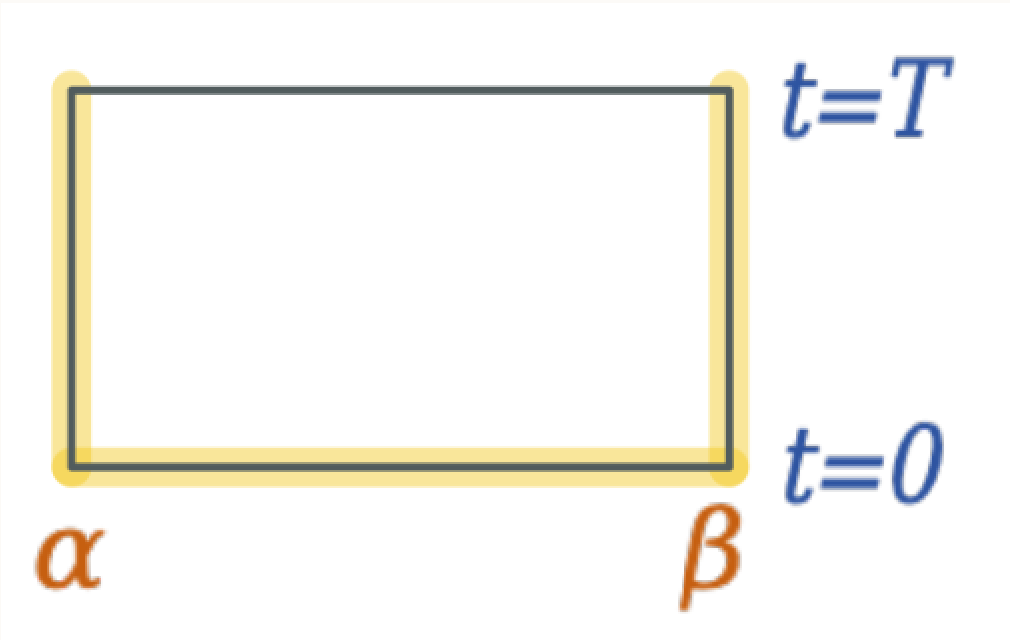
其抛物边界为：侧边+底边.

(定理) 极值原理(n=1)

设 $u(x,t)$ 在矩形 $R_T=\{\alpha\le x\le\beta,0\le t\le T\}$ 上连续，并在 R_T 的内部满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

则在 R_T 的抛物边界 Γ_T



上取到最大值和最小值，即

$$\sup_{R_T} u=\sup_{\Gamma_T} u,\quad \inf_{R_T} u=\inf_{\Gamma_T} u$$

证明：

经典反证法，但是不是直接用u在内部取到的最大值点，而是构造辅助函数V，热传导算子作用在V上在最大值点处的符号问题
构造V的方式很巧妙，应该需要背下来：①在边界上<M；②在（x*,t*）处=0；③热传导算子作用后在最大值点⩾0【推矛盾】

证明：只需证：$\max\limits_{R_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$，因为将 $-u$ 代替 u，最小值的情形将变为最大值的情形

反证：假设 $u(x,t)$ 在内部 (x^*,t^*) 取到最大值 $M >$ 边界最大值 m，$x^* \in (\alpha,\beta), t^* \in (0,T]$

作函数 $V(x,t) = u(x,t) + \dfrac{M-m}{4}\dfrac{(x-x^*)^2}{l^2}$，其中 $l = \beta - \alpha$

$$\Rightarrow V(x,t)|_{\Gamma_T} = u(x,t)|_{\Gamma_T} + \frac{M-m}{4}\frac{(x-x^*)^2}{l^2}\bigg|_{\Gamma_T} \xrightarrow{\frac{(x-x^*)^2}{l^2}<1} V(x,t)|_{\Gamma_T} < m + \frac{M-m}{4} = \frac{M+3m}{4} = \theta M, 0<\theta<1;$$

而 $V(x^*,t^*) = u(x^*,t^*) + 0 = M \Rightarrow$ 在 R_T 内部已经存在比边界最大值更大的点了，设 $V(x,t)$ 在 (x_1,t_1) 取到最大（不一定在 (x^*,t^*)）

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{(x_1,t_1)} \leqslant 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0, \text{因为} \begin{cases} \text{当} 0<t_1<T \text{时，} & \text{有} \dfrac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{(x_1,t_1)} = 0 \\ \text{当} t_1 = T \text{时，} & \text{有} \dfrac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0 \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow \text{于是有} \frac{\partial V}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} \text{但是，由} V(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2 \text{代入} (\partial_t - a^2\partial_x^2)V &= \boxed{(\partial_t - a^2\partial_x^2)u(x,t)} + (\partial_t - a^2\partial_x^2)\frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2 \\ &\quad = 0 \ \text{齐次方程} \\ &= -a^2\frac{M-m}{2l^2} < 0, \text{矛盾！} \Rightarrow m = M \end{aligned}$$

（定理）初边值问题的唯一性与稳定性

考虑方程

$$(P): \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u(\alpha,t) = \mu_1(t), u(\beta,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

方程的解是唯一的，且是稳定的.

证明：

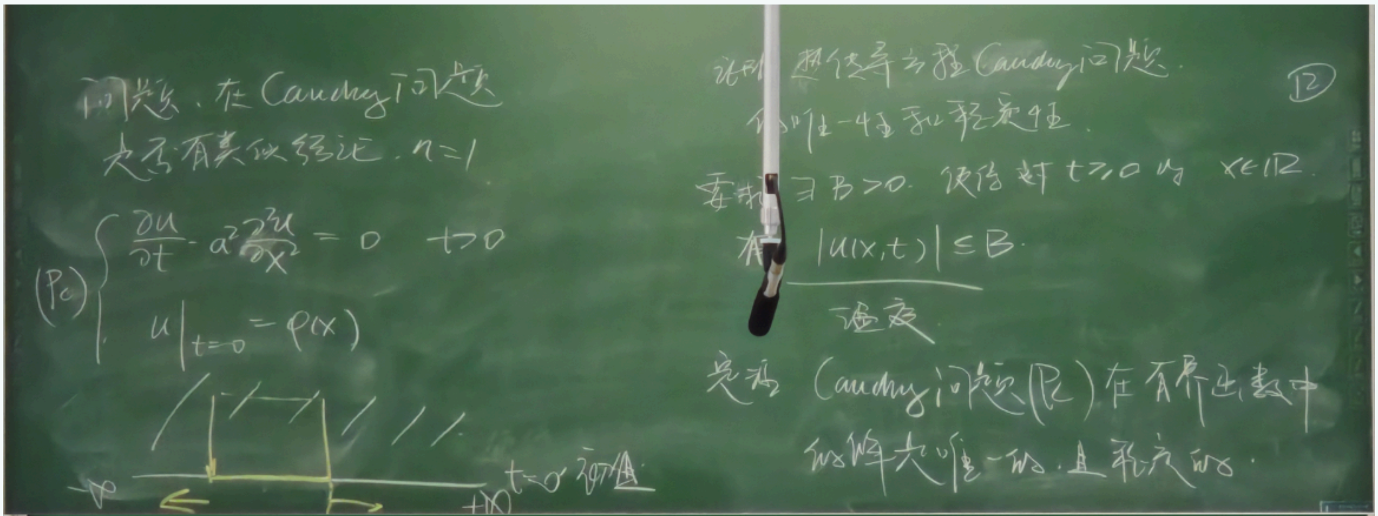
设 $u_1(x,t), u_2(x,t)$ 均满足 (P)，令 $u(x,t) = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} (\partial_t - a^2\partial_x^2)u = 0, t>0 \\ u|_{\Gamma_T} = 0 \text{【整个抛物边界都是0】} \end{cases}$

极值原理 $\max\limits_{R_T} u(x,t) = \max\limits_{\Gamma_T} u(x,t); \min\limits_{R_T} u(x,t) = \min\limits_{\Gamma_T} u(x,t); \Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$

u_1, u_2 分别满足 (P_i) $\begin{cases} (\partial_t - a^2\partial_x^2)u = f(x,t), & t>0 \\ u|_{\Gamma_T} = g_i(x), i = 1,2 \end{cases}$，且 $\max\limits_{\Gamma_T}|g_1 - g_2| \leqslant \varepsilon$

$u = u_1 - u_2$ 满足 $\begin{cases} (\partial_t - a^2\partial_x^2)u = 0, & t>0 \\ u|_{\Gamma_T} = g_1 - g_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{极值原理}} |u_1 - u_2| \leqslant \max\limits_{\Gamma_T}|g_1 - g_2| \leqslant \varepsilon$

⚠️ **注意：**



问题. 在 Cauchy 问题中是否有类似结论. $n=1$

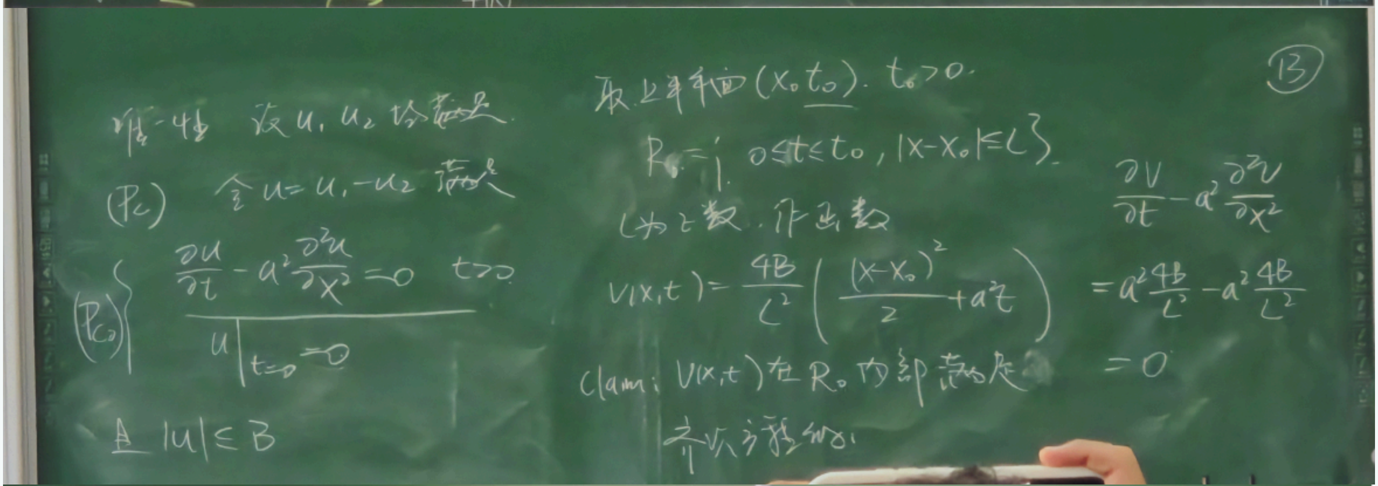
$$(P_c)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

$t=0$ 初值

定理 热传导方程 Cauchy 问题的唯一性和稳定性.

要求 $\exists B>0$. 使得对 $t\geq 0$ 的 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|u(x,t)|\leq B$.

定理 Cauchy 问题 (P_c) 在有界函数中的解是唯一的. 且稳定的.



唯一性 设 u_1, u_2 均满足 (P_c) 令 $u=u_1-u_2$ 满足

$$(P_{c_0})\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & t>0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

且 $|u|\leq B$

取上半平面 (x_0,t_0). $t_0>0$.

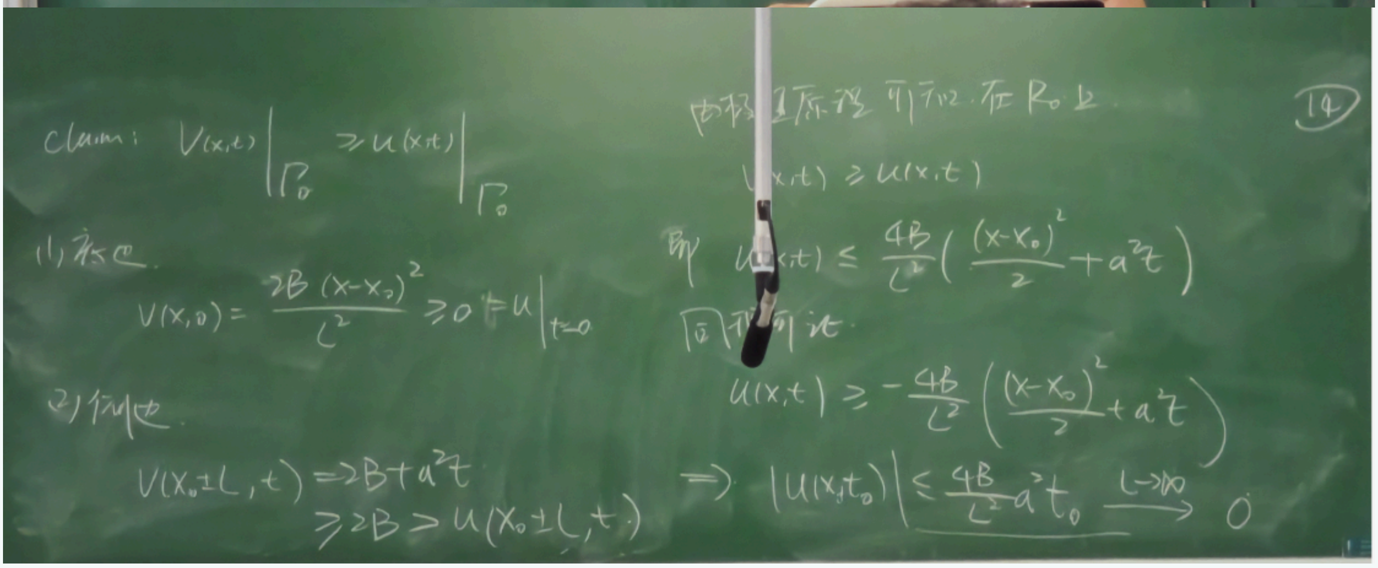
$R_0=\{0\leq t\leq t_0,\ |x-x_0|\leq L\}$

L 为正数. 作函数

$$V(x,t)=\frac{4B}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t\right)$$

Claim: $V(x,t)$ 在 R_0 内部满足齐次方程的.

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=a^2\frac{4B}{L^2}-a^2\frac{4B}{L^2}=0$$



Claim: $V(x,t)\big|_{\Gamma_0}\geq u(x,t)\big|_{\Gamma_0}$

1) 底边.
$$V(x,0)=\frac{2B(x-x_0)^2}{L^2}\geq 0=u|_{t=0}$$

2) 侧边.
$$V(x_0\pm L,t)=2B+a^2t\geq 2B>u(x_0\pm L,t)$$

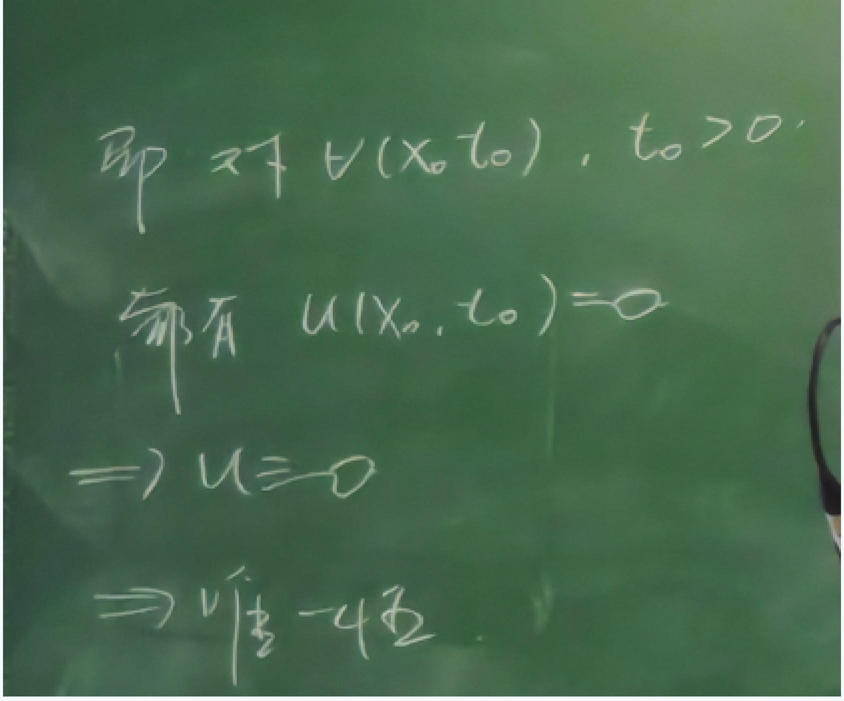
由极值原理可知. 在 R_0 上 $V(x,t)\geq u(x,t)$

即 $u(x,t)\leq\dfrac{4B}{L^2}\left(\dfrac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t\right)$

同理可证

$$u(x,t)\geq-\frac{4B}{L^2}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t\right)$$

$$\Rightarrow |u(x_0,t_0)|\leq\frac{4B}{L^2}a^2t_0\xrightarrow{L\to\infty}0$$



稳定性：考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\rho_1(x)\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\rho_2(x)\end{cases}$$

对任意的 $\varepsilon>0$，我们来说如明果存在一个充分小的 $\delta>0$ 使得

$$\sup|\rho_1(x)-\rho_2(x)|\le\delta$$

两个方程的有界解 u_1,u_2 满足

$$\sup|u_1-u_2|\le\varepsilon$$

任取上半平面上一点 (x_0,t_0)，我们考虑一个矩形区域

$$R=\{(x,t)\mid 0\le t\le t_0,|x-x_0|\le L\}$$

由于 $u=u_1-u_2$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & t>0\\ u(x,t)|_{t=0}=\rho_1(x)-\rho_2(x)\end{cases}$$

我们来证明上半平面的极值原理：

（定理）上半平面的极值原理

设 $u(x,t)$ 是柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},0<t\le T\\ u(x,0)=\phi(x)\end{cases}$$

的一个有界解(即存在 M 使得 $|u(x,t)| \leq M$)，则

$$u(x,t) \leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)$$

证明：

设 $M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)$ 是初始值的上确界，我们要证明对于任意点 (x,t)，都有 $u(x,t) \leq M_0$. 考虑比较函数：

$$v(x,t) = M_0 + \frac{2M}{L^2}(x^2 + 2a^2 t)$$

其中 M 是解 u 的绝对值的上界（$|u| \leq M$），L 是某个选定的大数。

容易验证：

$$v_t - a^2 v_{xx} = \frac{2M}{L^2}(2a^2) - a^2\frac{2M}{L^2}(2) = 0$$

所以 v 满足热方程，现在我们考虑差函数 $z(x,t) = v(x,t) - u(x,t)$，z 也满足热方程 $z_t - a^2 z_{xx} = 0$。

我们在矩形区域 $D_L = [-L, L] \times [0, T]$ 上应用有界区域的极值原理。$z(x,t)$ 的最小值必须在边界 $\partial_p D_L$ 上取得。

我们检查边界上的值：

1. **底面** $(t = 0)$：

$$z(x,0) = v(x,0) - u(x,0) = M_0 + \frac{2M}{L^2}x^2 - \phi(x)$$

因为 $\phi(x) \leq M_0$ 且 $\frac{2M}{L^2}x^2 \geq 0$，所以：

$$z(x,0) \geq M_0 - M_0 = 0$$

2. **侧面** $(x = \pm L)$：

$$z(\pm L,t) = v(\pm L,t) - u(\pm L,t) = M_0 + \frac{2M}{L^2}(L^2 + 2a^2 t) - u(\pm L,t)$$

$$= M_0 + 2M + \frac{4Ma^2 t}{L^2} - u(\pm L,t)$$

因为我们已知 $|u| \leq M$，所以 $-u \geq -M$。

$$z(\pm L,t) \geq M_0 + 2M + 0 - M = M_0 + M$$

假设 $M_0 + M \geq 0$ (这通常成立，因为M是绝对值的界，$M \geq |M_0|$，所以 $M + M_0 \geq 0$。如果解恒为负，逻辑稍微调整即可，这里通常假设 M 足够大)。

总之，这是非负的。实际上更简单地看：
$v(\pm L,t) \geq \dfrac{2M}{L^2}L^2 = 2M > M \geq u(\pm L,t)$，所以 $v > u$，即 $z > 0$。

结论：
在 D_L 的整个抛物边界上，都有 $z(x,t) \geq 0$。

根据有界区域的极值原理（最小值原理），在整个矩形内部 D_L 中，都有：

$$z(x,t) \geq 0 \implies u(x,t) \leq v(x,t)$$

即：

$$u(x,t) \leq M_0 + \frac{2M}{L^2}(x^2 + 2a^2 t)$$

现在我们在任意固定的点 (x,t) 处观察上述不等式。由于 L 是我们可以任意选取的，我们可以让 $L \to \infty$。当 $L \to \infty$ 时，$\dfrac{2M}{L^2}(x^2 + 2a^2 t) \to 0$。
因此，我们得到：

$$u(x,t) \leq M_0$$

即

$$u(x,t) \leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)$$

利用上半平面的极值原理立刻得到稳定性.

3.1.3 一维热传导方程初边值问题的求解

方程为：

$$(P): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & t > 0, x \in (0,l) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

第一步：化为零边值条件：构造 $\widetilde{u}(x,t)$ 满足

$$\widetilde{u}(0,t) = \mu_1(t), \quad \widetilde{u}(l,t) = \mu_2(t)$$

直接用直线来拟合：

$$\widetilde{u}(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

令 $v = u - \widetilde{u}$，我们发现

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

所以我们只需要求解方程

$$(P_0): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f_v(x,t), \quad t>0, x\in(0,l) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi_v(x) \end{cases}$$

我们把字母换回 u，即解方程:

$$(P_0): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad t>0, x\in(0,l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

第二步: 利用叠加原理，我们考虑两个方程

$$(P_1): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t>0, x\in(0,l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, \quad (P_2): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad t>0, x\in(0,l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

分别取 (P_1) 与 (P_2) 的解 u_1, u_2，我们知道 u_1+u_2 就是 (P_0) 的解.

第三步: 解齐次方程 (P_1).

$$(P_1): \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t>0, x\in(0,l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

我们假设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入方程可以得到

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$$

于是知道

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\mu$$

其中 μ 为一个常数，于是知道

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

我们对 μ 与 0 的大小关系进行分类讨论，当 $\mu<0$ 的时候，有

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}x}$$

代入边值条件 $X(0) = X(l) = 0$，发现 $C_1 = C_2 = 0$ 为平凡解.

当 $\mu = 0$ 的时候，我们知道 X 形如

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

代入边值条件发现还是零解.

当 $\mu > 0$ 的时候，我们知道

$$X(x) = C_1\cos(\sqrt{\mu}x) + C_2\sin(\sqrt{\mu}x)$$

代入边值条件，解得

$$C_1 = 0, \quad C_2\sin(\sqrt{\mu}l) = 0$$

如果想要非平凡解，那就是

$$\sin(\sqrt{\mu}l) = 0$$

我们考虑

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

对 $k \geq 1$，取

$$X_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

> 1. 确定常数 μ 的值，使得常微分方程初值问题有非平凡解，此问题称为 Sturm-Liouville 问题.
> 2. 得到的 μ_k 的值称为**特征值**，$X_k(x)$ 称为**特征函数**.
> 3. $\{X_k(x)\}_{k\geq1}$ 为**特征函数系**，是 $\mathcal{L}^2([0, l])$ 的**完全正交系**.

现在我们说明 $\{X_k(x)\}$ 是正交系，我们已有:

$$\begin{cases} X''_m(x) + \mu_m X_m(x) = 0 \\ X_m(0) = X_m(l) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} X''_n(x) + \mu_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X_n(l) = 0 \end{cases}$$

我们进行恒等变换，有

$$(X''_m(x) + \mu_m X_m(x))X_n(x) - (X''_n(x) + \mu_n X_n(x))X_m(x) = 0$$

得到

$$(\mu_m - \mu_n)X_m(x)X_n(x) = X_m(x)X''_n(x) - X''_m(x)X_n(x)$$

两边同时积分，得到

$$LHS = (\mu_m - \mu_n)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\mathrm{d}x$$

与

$$RHS = \int_0^l X_m(x)X''_n(x)\mathrm{d}x - X''_m(x)X_n\mathrm{d}x = X_mX'_n|_0^l - X'_mX_n|_0^l = 0$$

由于 $\mu_m \neq \mu_n$，于是知道

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

即正交.

现在回到 $T(t)$ 的计算，由于

$$\frac{T_k'(t)}{a^2T_k(t)} = -\mu_k$$

我们知道

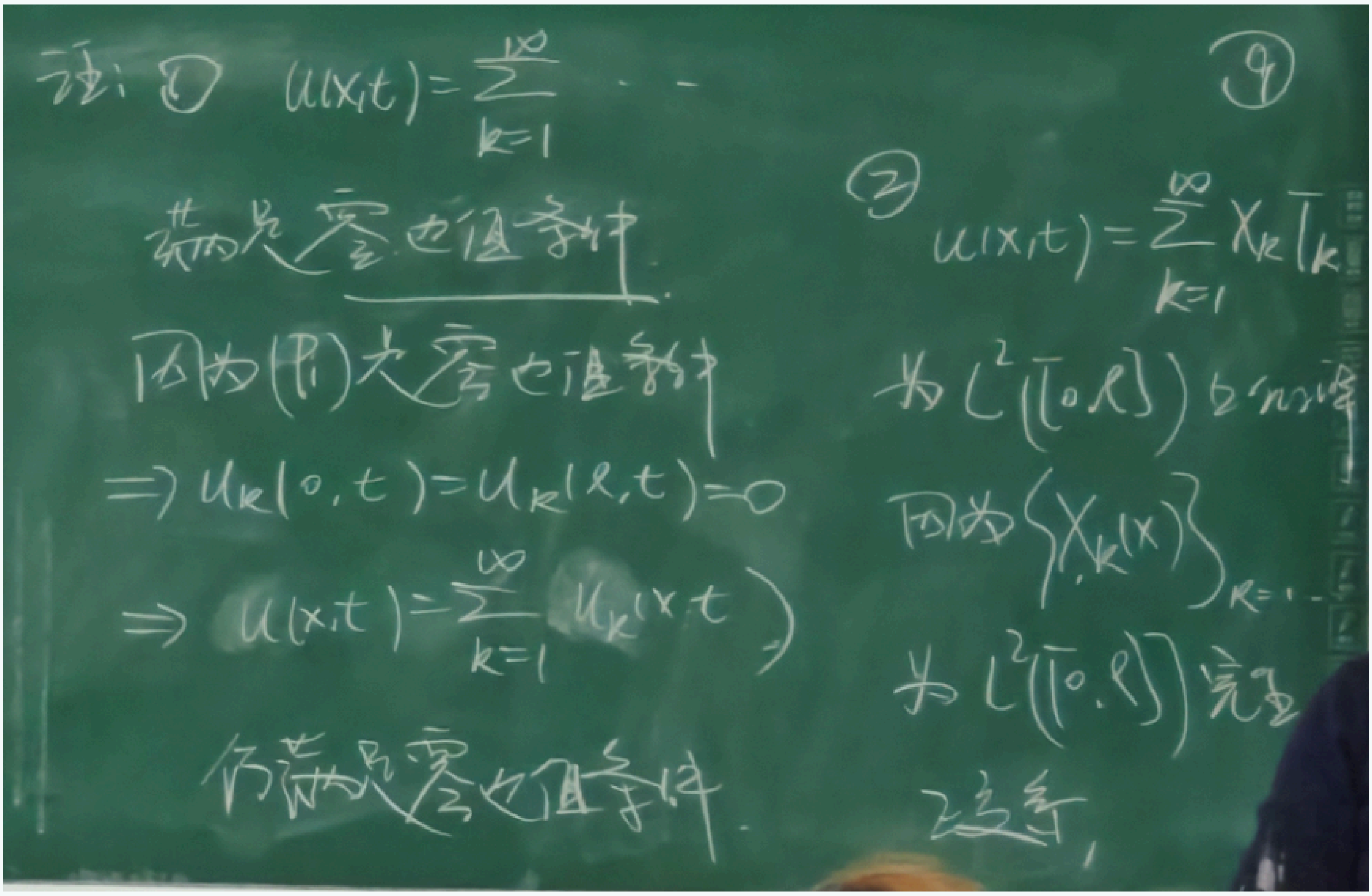
$$T_k(t) = \widetilde{A_k}e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}$$

于是有

$$\mu_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = A_k e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

从而有

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

> ⚠️ **注意:**
>
> 
>

现在我们需要求出 A_k，使得满足初值条件，由于

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

我们直接积分立刻得到

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

于是最终答案为：

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

容易发现 $|A_k|$ 一致有界，e^{-ct} 关于 t 速降，从而可以得到上式的收敛性.

第四步： 求解非齐次方程 (P_2):

$$(P_2):\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=f(x,t), & t>0,x\in(0,l)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

第一个方法是使用 Duhamel 原理：我们考虑 $v(x,t,s)$ 是方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(x,t,s)=0, & t>s\\ v(0,t,s)=v(l,t,s)=0\\ v(x,s,s)=f(x,s)\end{cases}$$

我们说明

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t,s)\mathrm{d}s$$

为非齐次方程的解：我们首先计算

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) &= \int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(x,t,s)\mathrm{d}s+v(x,t,t)\\ &= v(x,t,t)=f(x,s)\end{aligned}$$

并且

$$u(0,t)=\int_0^t v(0,t,s)\mathrm{d}s=0=\int_0^t v(l,t,s)\mathrm{d}s=u(l,t)$$

最后有

$$u(x,0)=\int_0^0 v(x,t,s)\mathrm{d}s=0$$

所以就得到 u 确实是方程的解，现在我们利用齐次的边值问题来解 v，由前面结论我们知道

$$v(x,t-s)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2(t-s)}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

所以我们知道

$$u(x,t)=\int_0^t\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2(t-s)}\sin\frac{k\pi}{l}x\right)\mathrm{d}s$$

第二个方法是使用常数变易法，由于我们已经得到了特征函数系，我们可以把方程

$$(P_0):\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & t>0, x\in(0,l)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

中的 u,f,φ 均使用正交系展开，得到

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad f_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$\xi_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\xi(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x,\xi\in\{u,f\},\quad \varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

将上式代入 (P_0) 中，一通化简得到(注意相等是逐系数相等)：

$$\begin{cases}u_k'(t)+\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2u_k(t)=f_k(t)\\ u_k(0)=\varphi_k\end{cases}$$

从而我们得到

$$u_k=\left(\varphi_k+\int_0^t f_k(s)e^{a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2s}\mathrm{d}s\right)e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}=\underbrace{\varphi_k e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}}_{(P_1)}+\underbrace{\left(\int_0^t f_k(s)e^{a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2s}\mathrm{d}s\right)e^{-a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2t}}_{(P_2)}$$

Example

我们可以计算一些例子：考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<\pi,t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\\ u(x,0)=\sin x\end{cases}$$

这是一个齐次的方程，我们直接套公式得到：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^\pi\sin x\sin kx\,\mathrm{d}x\right)e^{-k^2t}\sin kx\\ &=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi\sin^2x\,\mathrm{d}x\right)e^{-t}\sin x\\ &=e^{-t}\sin x\end{aligned}$$

Example

考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x(l-x), \quad 0<x<l\\ u(0,t)=0=\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)\\ u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{l}-x\end{cases}$$

对应齐次方程为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<l\\ u(0,t)=0=\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)\end{cases}$$

要流氓不妨设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，别问为什么可以分离变量，因为这样能做出来. 然后分情况一通剥蒜讨论，解出来正交系然后展开即可. 非齐次的情况继续展开.

3.2 L^2 理论

本节介绍研究抛物型方程的一种基本方法 —— 能量方法. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 分片光滑， $T>0$ 为一常数，在区域 $Q_T=\Omega\times(0,T)$ 上考虑非齐次热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(x,t). \tag{3.1.1}$$

与椭圆型方程不同的是，对这种方程我们不能在 Q_T 的全部边界上加定解条件. 一种典型的定解条件是

$$u\Big|_{\partial pQ_T}=g(x,t),$$

其中 ∂pQ_T 表 Q_T 的抛物边界，即 Q_T 的边界去掉 $\Omega\times\{t=T\}$ 那一部分. 求方程 (3.1.1) 之满足这种条件的问题称为第一初边值问题. 为简单计，我们只考虑 $g(x,t)\Big|_{\partial_l Q_T}\equiv 0$ 的情形，即定解条件为

$$u(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{3.1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\Omega \tag{3.1.3}$$

的情形，有时甚至只考虑 $g(x,t)\equiv 0$ 的情形，即零初边值条件

$$u\Big|_{\partial pQ_T}=0 \tag{3.1.4}$$

的情形. 当 $g(x,t)$ 在 Q_T 上适当光滑时，我们可以考虑关于 $u-g$ 的方程，而 $u-g$ 便满足零初边值条件.

(定义) Def

定义 3.1.1 称函数 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 为第一初边值问题 (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) 的弱解，如果对任意的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$，下面的积分等式成立

$$\iint_{Q_T} (u_t\varphi + \nabla u \cdot \nabla\varphi)dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi dxdt, \tag{3.1.5}$$

且 $\gamma u(x,0) = u_0(x)$ a.e. 于 Ω.

⚠ **注意：**

注 3.1.1 由于 $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 在 $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ 中稠密，积分等式 (3.1.5) 中的检验函数 φ 可取为 $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ 中的任意函数.

(定义) Def

定义 3.1.2 称函数 $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ 为方程 (3.1.1) 的弱解，如果对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$，积分等式 (3.1.5) 成立.

注 3.1.2 不难证明，若 $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ 为方程 (3.1.1) 的弱解，则对任意 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$，从而对任意 $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$，积分等式 (3.1.5) 恒成立.

(命题) Prop

命题 3.1.1 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 对任意的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 满足积分等式 (3.1.5)，当且仅当对任意的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 满足

$$\iint_{Q_T} (u_t\varphi_t + \nabla u \cdot \nabla\varphi_t)dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi_t dxdt. \tag{3.1.6}$$

证明：

证明 设 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 满足积分恒等式 (3.1.5). 对任给的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 由于 $\varphi_t \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 故积分等式 (3.1.6) 成立.

反之, 如果 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 满足积分恒等式 (3.1.6), 则对任给的 $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 由于 $\int_0^t \psi(x,s)ds \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 故 $\int_0^t \psi(x,s)ds$ 可取作式 (3.1.6) 中的检验函数, 从而得到

$$\iint_{Q_T} (u_t\psi + \nabla u \cdot \nabla\psi)dxdt = \iint_{Q_T} f\psi dxdt.$$

由于 ψ 是任给的, 故 u 满足积分恒等式 (3.1.5).

(命题) Prop

命题 3.1.2 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 对任意的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 满足积分等式 (3.1.5), 当且仅当对任意的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 满足

$$\iint_{Q_T} (u_t\varphi_t + \nabla u \cdot \nabla\varphi_t)\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi_t\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt, \tag{3.1.7}$$

其中 θ 为任意给定常数.

证明:

证明 设 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 满足积分恒等式 (3.1.5). 对任给的 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 由于 $\varphi_t\mathrm{e}^{-\theta t} \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 故

$$\iint_{Q_T} (u_t\varphi_t\mathrm{e}^{-\theta t} + \nabla u \cdot \nabla\varphi_t\mathrm{e}^{-\theta t})dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi_t\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt,$$

即积分等式 (3.1.7) 成立.

反之, 设 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 满足积分恒等式 (3.1.7). 对任给的 $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 考虑函数 $\varphi(x,t) = \psi(x,t)\mathrm{e}^{\theta t} - \theta\int_0^t \psi(x,s)\mathrm{e}^{\theta s}ds$. 由于显然有 $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 故 φ 可取作式 (3.1.7) 中的检验函数, 从而得到

$$\iint_{Q_T} (u_t\psi_t + \nabla u \cdot \nabla\psi_t)dxdt = \iint_{Q_T} f\psi_t dxdt.$$

由 $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$ 的任意性和命题 3.1.1, 便知 u 满足积分恒等式 (3.1.5).

⚠️ **注意:**

注 3.1.3 由于 $V(Q_T) \subset \mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$, 而 $\mathring{C}^\infty(\overline{Q}_T)$ 在 $\mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ 中是稠密的, 故积分恒等式 (3.1.6) 和 (3.1.7) 中的检验函数 φ 可取为 $V(Q_T)$ 中的任意函数.

注: $V(Q_T)=\{u\in W_2^{1,1}(Q_T)$

$\nabla u_t \in L^2(Q_T;\mathbb{R}^n)\}$

内积定义为

$$(u,v)_{V(Q_T)} = (u,v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} + (Du_t, Dv_t)_{L^2(Q_T)}$$

$V(Q_T)$ 在 $\mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$

稠密,

从而试验函数 可取 $\varphi\in V(Q_T)$

3.2.1 Lax-Milgram 定理变体

(引理) Lem

引理 3.1.1 设 H 为 Hilbert 空间, $V \subset H$ 为 H 的稠子空间, T 为 V 到 H 的有界线性算子, T^{-1} 存在. 则 T 的共轭算子 T^* 的值域为全空间 H, 即 $R(T^*) = H$.

证明：

证明 对任意取定的 $h \in H$, 往证存在 $u \in H$, 使得 $T^*u = h$. 为此，考虑定义在 $R(T) = D(T^{-1})$(T^{-1} 的定义域) 上的线性泛函

$$F(z) = (h, T^{-1}z), \quad \forall z \in R(T).$$

由于

$$\|F\| = \sup_{\|z\|=1} |F(z)| \leqslant \|h\| \cdot \|T^{-1}\|,$$

故 $F(z)$ 为 $R(T)$ 上的有界线性泛函，从而也可以扩张成为 $\overline{R(T)}$ 上的有界线性泛函. 因为 $\overline{R(T)}$ 也是 Hilbert 空间，故由 Riesz 表示定理 (2.3.2 节) 可知，存在 $u \in \overline{R(T)}$, 使得

$$(u, z) = F(z) = (h, T^{-1}z), \quad \forall z \in R(T).$$

从而

$$(u, Ty) = (h, y), \quad \forall y \in V,$$

亦即

$$(T^*u, y) = (h, y), \quad \forall y \in V.$$

由于 V 在 H 中稠密，必有

$$(T^*u, y) = (h, y), \quad \forall y \in H.$$

这表明 $T^*u = h$. 所以 $R(T^*) = H$.

(定理) Thm

Lax-Milgram 定理的一个变体 设 H 为一 Hilbert 空间，$V \subset H$ 为 H 的稠子空间，$a(u,v)$ 为 $H \times V$ 上的双线性型，且满足下列条件：

(i) 存在常数 $M \geqslant 0$，使得

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_H \cdot \|v\|_V, \quad \forall u \in H, v \in V;$$

(ii) 存在常数 $\delta > 0$，使得

$$a(v,v) \geqslant \delta\|v\|_H^2, \quad \forall v \in V.$$

则对 H 上任一有界线性泛函 $F(v)$，恒存在惟一的 $u \in H$，使得

$$F(v) = a(u,v), \quad \forall v \in V. \tag{3.1.8}$$

证明：

证明 因为对任一固定的 $v \in V$，$a(\cdot,v)$ 为 H 上的有界线性泛函，其有界性包含在条件 (i) 中，故由 Riesz 表示定理，存在惟一的 $Av \in H$，使得

$$a(u,v) = (u, Av)_H, \quad \forall u \in H. \tag{3.1.9}$$

由于 $a(u,v)$ 是双线性的，又满足条件 (i)，易见如此定义的 A 是从 V 到 H 的有界线性算子．条件 (ii) 和式 (3.1.9) 包含

$$(v, Av)_H \geqslant \delta\|v\|_H^2, \quad \forall v \in V,$$

从而

$$\|Av\|_H \geqslant \delta\|v\|_H, \quad \forall v \in V,$$

故 A^{-1} 存在．应用引理 3.1.1 便知 A 的共轭算子 A^* 的值域 $R(A^*) = H$.

对 $F(v)$ 用 Riesz 表示定理知，存在惟一的 $h \in H$，使得

$$F(v) = (h,v)_H, \quad \forall v \in H. \tag{3.1.10}$$

因为 $R(A^*) = H$，故必有 $u \in H$，使得 $A^*u = h$，从而

$$(u, Av)_H = (A^*u, v)_H = (h,v)_H, \quad \forall v \in V.$$

与式 (3.1.9)，式 (3.1.10) 联合便得式 (3.1.8)，即

$$F(v) = a(u,v), \quad v \in V.$$

3.2.2 弱解唯一性

(引理) Lem

引理 3.1.2 设 $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, 则对几乎所有的 $t \in (0,1)$, 有

$$h(t) - \int_\Omega (\gamma u(x,0))^2 dx = 2\int_0^t \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} dx ds,$$

其中 $h(t) = \displaystyle\int_\Omega u^2(x,t)dx$.

证明:

证明 按 $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ 的定义，存在 $u_m \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{Q}_T)$, 使

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)} = 0.$$

由此及 Fubini 定理 (见命题 1.4.1 的证明) 便知，对几乎所有的 $t \in (0,1)$, 有

$$\lim_{m\to\infty} h_m(t) = h(t)$$

其中 $h_m(t) = \displaystyle\int_\Omega u_m^2(x,t)dx$. 在

$$h_m(t) - h_m(0) = \int_0^t h_m'(s)ds = 2\int_0^t \int_\Omega u_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dx ds$$

两端令 $m \to \infty$ 取极限，注意到

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^t \int_\Omega u_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dx ds = \int_0^t \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} dx ds$$

以及注 1.4.1

$$\lim_{m\to\infty} h_m(0) = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m^2(x,0)dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\gamma u(x,0))^2 dx$$

就知引理的结论成立.

(定理) Thm

定理 3.1.1 设 $f \in L^2(Q_T)$, 则第一初边值问题 (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) 的弱解是惟一的.

证明:

证明 设 u_1 和 u_2 为第一初边值问题 (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) 的两个弱解, 并记 $u = u_1 - u_2$, 则由弱解的定义 (定义 3.1.1) 和注 3.1.1 可知, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $\gamma u(x,0) = 0$, 且

$$\iint_{Q_T} (u_t\varphi + \nabla u \cdot \nabla\varphi)dxdt = 0, \quad \forall\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T).$$

特别取 $\varphi = u$, 便得到

$$\iint_{Q_T} (u_t u + |\nabla u|^2)dxdt = 0.$$

从而

$$\iint_{Q_T} uu_t dxdt \leqslant 0.$$

利用引理 3.1.2, 注意到 $\gamma u(x,0) = 0$, 由此推出

$$\iint_{Q_T} u^2 dxdt \leqslant 0.$$

故必有 $u = 0$ a.e. 于 Q_T, 即 $u_1 = u_2$ a.e. 于 Q_T.

下面讨论弱解的存在性. 本节只考虑初值 $u_0(x)$ 也为零的情形, 即具零初边值条件 (3.1.4) 的情形. 我们将借助于前述 Lax-Milgram 定理的变体证明第一初边值问题 (3.1.1), (3.1.4) 弱解的存在性. §3.2 和 §3.3 将用其他方法对具一般初值的第一初边值问题 (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) 证明弱解的存在性.

(定理) Thm

定理 3.1.2 设 $f \in L^2(Q_T)$, 则第一初边值问题 (3.1.1), (3.1.4) 存在弱解 $u \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$.

证明:

证明 令

$$a(u,v)=\iint_{Q_T}(u_tv_t+\nabla u\cdot\nabla v_t)\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt,$$
$$u\in\overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(Q_T),\ v\in V(Q_T),$$

其中 $\theta>0$ 为常数. 显然

$$|a(u,v)|\leqslant\|u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)}\cdot\|v\|_{V(Q_T)},$$
$$\forall u\in\overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(Q_T),\quad\forall v\in V(Q_T).\tag{3.1.11}$$

对 $v\in V(Q_T)$, 我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T}\nabla v\cdot\nabla v_t\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt\\=&\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\mathrm{e}^{-\theta t}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla v|^2dxdt\\=&\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(|\nabla v|^2\mathrm{e}^{-\theta t}\right)dxdt+\frac{\theta}{2}\iint_{Q_T}|\nabla v|^2\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt\\=&\frac{\mathrm{e}^{-\theta T}}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\Big|_{t=T}dx-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\Big|_{t=0}dx\\&+\frac{\theta}{2}\iint_{Q_T}|\nabla v|^2\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt.\end{aligned}$$

因为 $v\in V(Q_T)$, 故在迹的意义下 $\nabla v\Big|_{t=0}=0$, 从而

$$\int_\Omega|\nabla v|^2\Big|_{t=0}dx=0.$$

于是

$$\iint_{Q_T} \nabla v\cdot\nabla v_t \mathrm{e}^{-\theta t}dxdt \geqslant \frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta T}}{2}\iint_{Q_T}|\nabla v|^2 dxdt. \tag{3.1.12}$$

另一方面，由于 $\overset{\bullet}{C}^\infty(\overline{Q}_T)$ 在 $V(Q_T)$ 中稠密，如下形式的 Poincaré 不等式仍然成立

$$\iint_{Q_T} v^2 dxdt \leqslant \mu\iint_{Q_T}|\nabla v|^2 dxdt.$$

故由式 (3.1.12) 进而可得到

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T}\nabla v\cdot\nabla v_t \mathrm{e}^{-\theta t}dxdt\\ \geqslant&\frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta T}}{4}\iint_{Q_T}|\nabla v|^2dxdt+\frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta T}}{4\mu}\iint_{Q_T}v^2dxdt.\end{aligned}$$

于是我们有

$$a(v,v)\geqslant\delta\|v\|^2_{W_2^{1,1}(Q_T)},\quad \forall v\in V(Q_T), \tag{3.1.13}$$

其中

$$\delta=\min\left\{\mathrm{e}^{-\theta T},\frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta T}}{4},\frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta T}}{4\mu}\right\}.$$

取 $H=\overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $V=V(Q_T)$. 由命题 1.3.1 知 $V\subset H$ 是 H 的稠子空间. 式 (3.1.11) 和式 (3.1.13) 表明： Lax-Milgram 定理的变体中的条件 (i) 和 (ii) 都满足. 显然 $\displaystyle\iint_{Q_T} fv_t\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt$ 对 v 是 H 上的有界线性泛函，故存在惟一的 $u\in H=\overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, 使得

$$a(u,v)=\iint_{Q_T} fv_t\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt,\quad \forall v\in V(Q_T),$$

即

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T}(u_tv_t+\nabla u\cdot\nabla v_t)\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt\\ =&\iint_{Q_T} fv_t\mathrm{e}^{-\theta t}dxdt,\qquad \forall v\in V(Q_T).\end{aligned}$$

由命题 3.1.2 便知 u 是问题 (3.1.1), (3.1.4) 的弱解.