

数理方程笔记 Chapter 2

Chapter 2 二阶线性椭圆方程

2.1 Laplace 方程

2.1.1 基本解

(定义) 基本解

设 $P(D) = \sum_{|a| \leq m} a_a \partial^a$ 是一常系数 m 阶线性偏微分算子. 若 $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ 满足方程

$$P(D)E = \delta,$$

则称 E 为算子 $P(D)$ 的基本解.

我们可利用基本解研究线性偏微分算子的局部可解性. 考虑方程

$$P(D)u = f,$$

其中 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为开区域. 应用单位分解后, 我们可设 $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$. 因此, $E * f$ 是可定义的广义函数.

于是, 我们有

(定理) Thm

$u = E * f$ 是方程 $P(D)u = f$ 之广义函数解.

证明:

由于

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f$$

有时写作为

$$P(D_x)E(x, y) = \delta(x - y),$$

相应的解可写为 $u = \int E(x, y)f(y)dy$.

Example

⑩

例 $\frac{d}{dx}$ 的基础解

解 $E(x)$ 为 $\frac{d}{dx}$ 的基础解

$E(x) = H(x) + C$

齐次方程 $\frac{dy}{dx} + ay = 0$

$\Rightarrow y = Ce^{-ax}$

$\Rightarrow E(x) = C(x)e^{-ax}$ 其中 $C(x)$ 待定

$\frac{d}{dx}(C(x)e^{-ax}) + aC(x)e^{-ax}$

$= C'(x)e^{-ax} + C(x)\cancel{(-a)}e^{-ax} + aC(x)\cancel{e^{-ax}}$

$= \delta(x)$

例 $\frac{d}{dx} + a$ 的基础解

解: 设 $E(x)$ 为 $\frac{d}{dx} + a$ 的基础解

$\frac{dE(x)}{dx} + aE(x) = \delta(x)$

$\Rightarrow C'(x) = \frac{e^{ax}\delta(x)}{e^{ax}}$

$= \delta(x)$

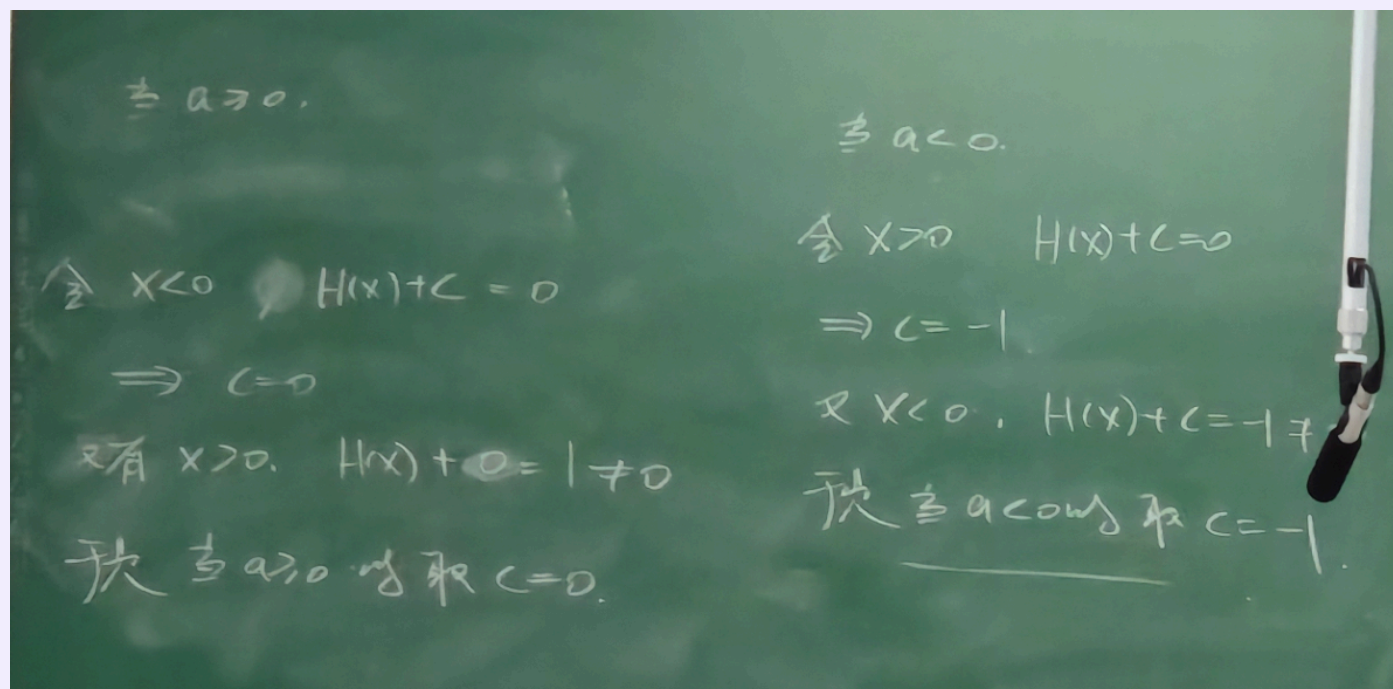
$\Rightarrow C(x) = H(x) + C$

于是有 $E(x) = (H(x) + C)e^{-ax}$

希望能多应用 Fourier 变换, 待定 C

这里最后一句话的意思是我们想对其使用傅里叶变换, 也就是说需要落在 Schwartz 函数

空间内，所以需要是缓增的广义函数，所以需要杀死 e^{-ax} 的增速爆炸的一段，也就是：



2.1.2 Δ 算子的基本解

考虑

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$$

设 $E(x)$ 为 Δ 的基本解，即

$$\Delta E(x) = \delta(x)$$

物理背景看成单位正电荷产生的电厂，告诉我们 $E(x)$ 仅与 $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 有关，我们把 $|x|$ 记为 r ，令

$$\Delta E(r) = \delta(r)$$

由于

$$\frac{\partial E(r)}{\partial x_j} = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{dE(r)}{dr} \frac{x_j}{r}$$

于是

$$\frac{\partial^2 E(r)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{dE(r)}{dr} \frac{x_j}{r} \right) = \frac{r^2 - x_j^2}{r^3} \frac{dE(r)}{dr} + \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 \frac{d^2 E(r)}{dr^2}$$

所以：

$$\Delta E(r) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{r^2 - x_j^2}{r^3} \frac{dE(r)}{dr} + \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \right) = \frac{n-1}{r} \frac{dE(r)}{dr} + \frac{d^2 E(r)}{dr^2}$$

所以我们需要解的方程变成：

$$\frac{n-1}{r} \frac{dE(r)}{dr} + \frac{d^2 E(r)}{dr^2} = \delta(r)$$

我们令

$$w(r) = \frac{dE(r)}{dr}$$

有

$$\frac{dw(r)}{dr} + \frac{n-1}{r} w(r) = \delta(r)$$

两边同时乘 r^{n-1} ($n \geq 2$)，有

$$r^{n-1} \frac{dw(r)}{dr} + r^{n-2}(n-1)w(r) = r^{n-1}\delta(r) = 0$$

也就是

$$\frac{d}{dr} (r^{n-1} w(r)) = r^{n-1} \frac{dw(r)}{dr} + r^{n-2}(n-1)w(r) = 0$$

所以

$$r^{n-1} w(r) = c \implies w(r) = \frac{c}{r^{n-1}}$$

所以我们得到

$$\frac{dE(r)}{dr} = \frac{c}{r^{n-1}}$$

当 $n = 2$ 的时候，我们有

$$E(r) = c \ln r + c' = c_2 \ln r + c'$$

当 $n > 2$ 的时候，我们有

$$E(r) = \frac{c}{2-n} r^{2-n} + c' = c_n r^{2-n} + c'$$

问题在于怎么确定常数.

(引理) Green 第二恒等式

对于比较好的函数，有

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS$$

我们对 $v = r^{2-n}$ 使用 Green 恒等式, 设 $B(Q)$ 是 Q 的一个半径为 ε 的球邻域, P 是动点, 令 $|PQ| = r$, 我们有

$$\int_{\Omega-B(Q)} \left[u\Delta \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u \right] dV = \int_{\partial(\Omega-B(Q))} \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] dS$$

把第二个式子的边界拆开, 有

$$\int_{\partial(\Omega-B(Q))} \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] dS = \left(\int_{\partial\Omega} - \int_{\partial B(Q)} \right) \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right]$$

由于我们有

$$\Delta c_n r^{2-n} = \delta$$

于是有在 $\Omega - B(Q)$ 中有

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0$$

所以有

$$\int_{\Omega-B(Q)} u \Delta \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) dV = 0$$

另外, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] &= \int_{\partial B(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \right] \\ &= -\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(Q)} u dS - \frac{n-2}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} dS \end{aligned}$$

由积分中值定理我们得到

$$\int_{\partial B(Q)} u dS = u(Q^*) \varepsilon^{n-1} (n-2) |S^{n-1}|, \quad \int_{\partial B(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} dS = \frac{\partial u}{\partial r}(Q') \varepsilon^{n-1} (n-2) |S^{n-1}|$$

于是我们知道

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] = -(n-2) |S^{n-1}| u(Q)$$

带回原方程, 我们有

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dV = \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] dS + (n-2) |S^{n-1}| u(Q)$$

整理就得到

$$u(Q) = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|} \left[\int_{\partial\Omega} r^{2-n} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS_P - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} r^{2-n} dS_P - \int_{\Omega} r^{2-n} \Delta u dV_P \right]$$

这个公式也被称为**位势积分**.

现在对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $r = |PQ|$, 我们都有

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= \langle \delta(Q-P), \varphi(P) \rangle_P \\ &= \langle \Delta(c_n r^{2-n}), \varphi(P) \rangle_P \\ &= c_n \langle r^{2-n}, \Delta \varphi(P) \rangle_P \\ &= c_n \int_{\Omega} r^{2-n} \Delta \varphi(P) dV_P \end{aligned}$$

由于 $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$, 所以我们将上面位势积分中的 u 变成 φ , 知道式子前两项都是 0, 于是有

$$c_n \int_{\Omega} r^{2-n} \Delta \varphi dV_P = \varphi(Q) = -\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|} \int_{\Omega} r^{2-n} \Delta \varphi dV_P$$

所以我们得到了

$$c_n = -\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}$$

⚠ 注意:

我们常用 $\Gamma(P, Q)$ 来表示 Laplace 方程的基本解, 其中 P 是动点而 Q 是定点. 此时位势积分也记为

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} -\Gamma(P, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS_P + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Gamma(P, Q) dS_P + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q) \Delta u dV_P$$

记录一下三维情况的位势积分:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \right]$$

2.1.3 调和函数的平均值公式与最大模原理

(定理) 平均值公式

设 u 是调和函数, 令 $\Omega = B(R, Q)$, 我们有球面平均值:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial\Omega} u(P) dS_P$$

和球体平均值

$$u(Q) = \frac{1}{|B(R, Q)|} \int_{\Omega} u(P) dV_P$$

证明:

由位势积分, 我们有

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(R, Q)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + u \frac{1}{r^2} \right] dS_P$$

我们给出一个 Claim, 即如果 $\Delta u = 0$ 在 Ω 上恒成立, 而 $\partial\Omega$ 光滑, 则有 $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = 0$.

证明只需要对 $v = 1$ 使用 Green 第二恒等式. 所以我们立刻得到

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(R, Q)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + u \frac{1}{r^2} \right] dS_P = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(R, Q)} u(P) dS_P$$

于是证明了球面平均值公式, 我们此时对 R 积分就得到球体平均值公式, 即

$$|B(R, Q)|u(Q) = \int_0^R |S(r, Q)|u(Q)dr = \int_0^R \int_{S(r, Q)} u(P) dS_P dr = \int_{B(R, Q)} u(P) dV_P$$

(定理) 最大模原理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个连通开集, 若 u 在 Ω 中调和并且不为常数, 则 u 不能在 Ω 内达到上下确界. 立刻可以得到若调和, 则最大模和最小模一定在边界上取到.

证明:

和最大模原理的证明几乎一模一样, 若内部可以取到最大值, 则我们利用平均值公式知道周围都是最大值, 则我们对于任意一条路径都可以找到一个有限覆盖从而证明路径的首尾两端都是相等的. 然后利用欧式空间是局部道路连通空间, Ω 是连通开集知道 Ω 是道路连通集合, 从而我们知道 Ω 中任意两点处的值一样, 从而是常数.

利用极值原理我们可以证明 Laplace 方程的唯一性和稳定性:

Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

的解是唯一的，并且方程的解具有稳定性.

证明：

设 u_1, u_2 都是解，令 $u = u_1 - u_2$ ，我们知道 u 是方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的解，并且 u 是调和函数，所以最大值在边界取到，所以 $u = 0$ ，所以解是唯一的.
对于稳定性，设 g 是一个函数，满足

$$|h| = |f - g| < \varepsilon$$

则方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的解记为 u_g ，之前的解记为 u_f ，我们有 $u_f - u_g$ 是方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f - g \end{cases}$$

的解，由最大值原理知道

$$|u_f - u_g| \leq \max |h| \leq \varepsilon$$

此即解的稳定性.

2.1.4 简单区域中的 Dirichlet 边值问题

我们考虑三种边值问题：

第一种就是Dirichlet边值：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

第二种是 Neumann 边值问题 (P1):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

还有一种混合边值问题，也称为第三边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ au|_{\partial\Omega} + b \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

这里聚焦于 Dirichlet 边值问题，下面我们先引入 Green 函数：考虑边值问题：

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = -\Gamma(P, Q) \end{cases}$$

有

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} -\Gamma(P, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS_P + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Gamma(P, Q) dS_P + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q) \Delta u dV_P$$

代入 Dirichlet 边值问题的条件，右边最后一项为 0，于是得到

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} -\Gamma(P, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS_P + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Gamma(P, Q) dS_P$$

再注意到

$$0 = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV_P = \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + \Gamma(P, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] dS_P$$

于是我们知道

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS_P + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Gamma(P, Q) dS_P = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (v + \Gamma(P, Q)) dS_P$$

于是我们就得到了

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} f(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (v + \Gamma(P, Q)) dS_P = \int_{\partial\Omega} f(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G(P, Q) dS_P$$

其中

$$G(P, Q) = \Gamma(P, Q) + v$$

称作 **Green 函数**. 是一个在 $P = Q$ 处有奇点的调和函数.

类似地, 我们可以有这样子的方程(P2):

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

我们仍然考虑

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = -\Gamma(P, Q) \end{cases}$$

然后有

$$\int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Omega} v \Delta u - u \Delta v = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$$

由位势积分, 我们有

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_{\partial\Omega} -\Gamma(P, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS_P + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Gamma(P, Q) dS_P + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q) \Delta u dV_P \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS_P - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} v dS_P + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q) \Delta u dV_P \\ &= \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q) \Delta u dV_P \\ &= \int_{\Omega} \Delta u (\Gamma(P, Q) + v) dV_P \\ &= \int_{\Omega} f(P) G(P, Q) dV_P \end{aligned}$$

于是我们发现位势积分可以写成

$$u(Q) = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dV_P + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q) \Delta u dV_P$$

其中 v 是前面提到的边值问题的解.

(定理) 叠加原理

我们现在可以求解方程 (P):

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

证明:

我们利用方程 (P1) 和方程 (P2)

$$(P1): \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}, \quad (P2): \begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

设其解分别为 u_1, u_2 , 我们发现 $u_1 + u_2$ 就是 (P) 的解, 所以我们知道

$$u(Q) = u_1(Q) + u_2(Q) = \int_{\partial\Omega} g(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \vec{n}} dS_P + \int_{\Omega} f(P) G(P, Q) dV_P$$

其中 G 为 Green 函数.

2.1.5 Green 函数的性质

Green 函数的性质总结如下:

(命题) Prop

Green 函数性质:

- (1) $G(P, Q)|_{\partial\Omega} = 0$.
- (2) $\Delta G(P, Q) = \Delta(\Gamma(P, Q) + v) = \Delta\Gamma(P, Q) + 0 = \delta(P - Q)$.
- (3) 交换性: $G(P, Q) = G(Q, P)$.
- (4) 当 $n = 3$ 时, 有

$$0 < -G(P, Q) < \frac{1}{r(P, Q)}, \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G(P, Q) dS_P = 1$$

证明:

懒得写了，直接调包：

和证明位势积分的思路一样，在挖去两个小球的空间上用Green公式，再拆开写

证明：设 $\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon(Q_1) - B_\varepsilon(Q_2)$, $u_1 = G(P, Q_1)$, $u_2 = G(P, Q_2)$

在 Ω_ε 上对 u_1, u_2 使用 Green 公式：由于 $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$, 且 $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0$

$$\text{则有 } 0 = \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1) + \partial B_\varepsilon(Q_2)} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} dS,$$

$$\text{即 } \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1) + \partial B_\varepsilon(Q_2)} G(P, Q_1) \frac{\partial G(P, Q_2)}{\partial n} dS = \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1) + \partial B_\varepsilon(Q_2)} G(P, Q_2) \frac{\partial G(P, Q_1)}{\partial n} dS$$

$$\text{即 } \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)} G(P, Q_1) \frac{\partial G(P, Q_2)}{\partial n} - G(P, Q_2) \frac{\partial G(P, Q_1)}{\partial n} dS = \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_2)} G(P, Q_2) \frac{\partial G(P, Q_1)}{\partial n} - G(P, Q_1) \frac{\partial G(P, Q_2)}{\partial n} dS$$

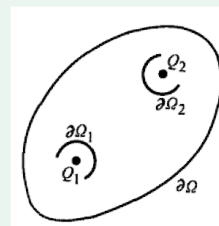
$$\text{左边：由于 } P \in \partial B_\varepsilon(Q_1), \sup_{P \in \partial B_\varepsilon(Q_1)} |G(P, Q_1)| = \sup_{P \in \partial B_\varepsilon(Q_1)} |\Gamma(P, Q_1) + v(P)| = \sup_{P \in \partial B_\varepsilon(Q_1)} \left| v(P) - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} + c_1$$

$$\sup_{P \in \partial B_\varepsilon(Q_1)} \left| \frac{\partial G(P, Q_2)}{\partial n} \right| \leq c_2, \text{ 则 } \left| \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)} G(P, Q_1) \frac{\partial G(P, Q_2)}{\partial n} dS \right| \leq 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} + c_1 \right) c_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

同样类似求位势积分的操作，在小球边界上化简形式，积分中值取极限

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)} -G(P, Q_2) \frac{\partial G(P, Q_1)}{\partial n} dS &= \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)} -G(P, Q_2) \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right) \left[-\frac{1}{4\pi r} + v(P) \right] dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)} G(P, Q_2) \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial}{\partial r} v(P) \right] dS \\ &\xrightarrow{\text{积分中值}} G(P^*, Q_2) + 4\pi\varepsilon^2 \left(G \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right)(\tilde{P}), \text{ 其中 } P^* \tilde{P} \in \partial B_\varepsilon(Q_1) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(Q_1, Q_2) \end{aligned}$$

同理，右式 $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(Q_2, Q_1)$, 即得 $G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1)$



交换性证明

$$0 < -G(P, Q) < \frac{1}{r(P, Q)} \text{ 证明}$$

v 在 Ω 上调和，其模长能被边界上的取值所限制住，两边放缩

$$\text{证明：由 } G(P, Q)|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r} + v, v = \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r} \end{cases}, \text{ 由极值原理, } \min_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r} \leq v \leq \max_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r}$$

$$\text{一方面, } -G(P, Q) = \frac{1}{4\pi r(P, Q)} - v(P) \geq \frac{1}{4\pi r(P, Q)} - \max_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(P, Q)} \rightarrow +\infty (P \rightarrow Q), \text{ 则 } \exists \delta > 0$$

$$\text{s.t. } \forall P \in B_\delta(Q), -G(P, Q) > 0 \Rightarrow \forall P \in \Omega \setminus B_\delta, \text{ 有 } \begin{cases} \Delta(-G(P, Q)) = 0 \\ -G(P, Q)|_{\partial\Omega} = 0 \\ -G(P, Q)|_{\partial B_\delta(Q)} > 0 \end{cases}, \text{ 由极值原理得 } G(P, Q) > 0, \forall P \in \Omega \setminus B_\delta$$

$$\text{另一方面 } -G(P, Q) = \frac{1}{4\pi r(P, Q)} - v(P) \leq \frac{1}{4\pi r(P, Q)} - \min_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(P, Q)} \leq \frac{1}{4\pi r(P, Q)} < \frac{1}{r(P, Q)}$$

要证明=1的积分形式恰为边界取值恒为1的Dirichlet问题的形式解，而u恒为1满足方程

要证明=1的积分形式恰为边界取值恒为1的Dirichlet问题的形式解，而u恒为1满足方程

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_P = 1 \text{ 证明}$$

$$\text{证明：对于 } (P_1) \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} \Rightarrow u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_P, \text{ 而 } u \equiv 1 \text{ 一定是 } (P_1) \text{ 的解} \xrightarrow{\text{Dirichlet问题的唯一性}} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_P = 1$$

2.1.6 调和函数更多性质

(定理) 平均值公式逆定理

$u(Q) \in C(\Omega)$ 满足平均值公式 $\iff$ 调和.

证明:

我们构造一个在边界上和 u 相同的调和函数, 然后利用极值原理说明确实就是 u : 取小球 $B \subseteq \Omega$, 令

$$\begin{cases} \Delta v = 0, x \in B \\ v|_{\partial B} = u|_{\partial B} \end{cases}$$

v 在 B 上调和, 满足平均值公式, 即

$$u(Q) = \frac{1}{|B|} \int_B u(P) dx_P, v(Q) = \frac{1}{|B|} \int_B v(P) dx_P$$

则 $u - v$ 在 B 上满足平均值公式, 而考虑到平均值公式 $\Rightarrow$ 极值原理, 由于 $u - v|_{\partial B} = 0$, 则 $u \equiv v, x \in \bar{B}$, 则 u 在 B 中调和, 由于 $B \subseteq \Omega$ 的任意性, $\Delta u = 0, x \in \Omega$.

(定理) 可去奇点定理

当 $n = 2$ 时, 若 $u(Q)$ 在 A 点 (设为原点) 附近 (但 A 点可能除外) 调和, 而且

$$u(Q) = o(1) \ln r(A, Q)$$

则可以补充 $u(Q)$ 在 A 之值使 u 在包括 A 点在内的 A 的某邻域中调和.

证明:

证明调和函数的可去奇点定理: 在以 A 为球心 R 为半径的小球上研究问题, 构造补充定义后的函数 u_1 , 用 W 衡量两个函数的差距, 手段是再构造一个 V 比较 V 和 W . 先让 $Q \rightarrow A$, 极值原理证明 $|W| \leq V$ 在小圆环上成立, 再让 $\varepsilon \rightarrow 0$, 证明在去心圆盘上成立.

$u(Q)$ 的奇性不能超过基本解

当 $n = 2$ 时, 若 $u(Q)$ 在 A 点附近调和, 且 $u(Q) = o(1) \ln r(A, Q)$, 则可补充定义, s. t. $\Delta u = 0, x \in B_\delta(A)$

证明: 取小球 $B_R(A) \subset \Omega$ 作为研究的对象, $B_\delta(A) \subset B_R(A)$

设 u_1 满足 $\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_{\partial B_R} = u|_{\partial B_R} \end{cases}$, 下证明 u_1 和 u 在除了 A 点点地方都离得很近

【手段: 构造辅助函数】令 $W = u_1 - u \Rightarrow \begin{cases} \Delta W = 0, B_R \setminus B_\delta \\ W|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}$,

令 $V_\varepsilon = \varepsilon \left(\ln \frac{1}{r(A, Q)} - \ln \frac{1}{R} \right)$, 则 V_ε 满足 $\begin{cases} \Delta V_\varepsilon = 0 \\ V_\varepsilon|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}$, 进而通过比较 V_ε 和 W 来说明 u_1 和 u 离得很近

可去奇点定理

和证明 $G(P, Q)$ 的取值范围时的思路相同

由条件, $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{u(Q)}{\ln r(A, Q)} = 0$, 则有 $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{u_1(Q)}{\ln r(A, Q)} = 0$, 则 $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{|W|}{\ln r(A, Q)} = \lim_{Q \rightarrow A} \frac{|u_1 - u|}{\ln r(A, Q)} = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \lim_{Q \rightarrow A} \frac{|W|}{V_\varepsilon} = 0$

则在 Q 附近存在一个小邻域 B_{δ_0} 满足 $\frac{|W|}{V_\varepsilon} < 1$, 即 $|W| \leq V_\varepsilon, \forall x \in \partial B_{\delta_0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(W - V_\varepsilon) = 0, B_R \setminus B_{\delta_0} & \text{, 在去掉小圆盘上调和} \\ (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_R} = 0 & \text{, 在大圆盘边界上是0} \\ (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_{\delta_0}} \leq 0 \text{ 或 } \geq 0 & \text{, 在小圆盘边界上保号} \end{cases}$ 由于极值原理 $\Rightarrow W - V_\varepsilon$ 在 $B_R \setminus B_{\delta_0}$ 上保号, 令 $\delta_0 \rightarrow 0^+$ 仍成立

则 $|W| \leq V_\varepsilon$ 在 $B_R \setminus \{A\}$ 上成立, 再让 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则 $|W| = |u_1 - u| = 0, B_R \setminus \{A\}$, 即可在 $u(A)$ 处补充定义使之成为 u_1

当 $n = 3$ 时, 若 $u(Q)$ 在 A 点 (设为原点) 附近 (但 A 点可能除外) 调和, 而且

$$u(Q) = o(1) \frac{1}{r(A, Q)}$$

则可以补充 $u(Q)$ 在 A 之值使 u 在包括 A 点在内的 A 的某邻域中调和.

证明:

我们取 $B(R, A) \subset \Omega$, 有 u 在 $B(R, A) - \{A\}$ 调和, 我们取 v 为下面方程的解:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial B(R, A)} = u|_{\partial B(R, A)} \end{cases}$$

令

$$w(Q) = v(Q) - u(Q)$$

我们只需要证明 $w(Q)$ 在一个 A 的邻域恒为零即可. 为方便起见, 我们令 $A_{\delta, R}$ 表示 A 的内半径为 δ 外半径为 R 的闭环域, 我们知道 $w(Q)$ 在 $A_{\delta, R}$ 上调和. 我们构造辅助函数

$$\phi_\varepsilon(Q) = w(Q) + \varepsilon \left(\frac{1}{r(A, Q)} - \frac{1}{R} \right)$$

由于在外边界 $\partial B(R, A)$ 上, $w(Q) = 0$, 所以显然有 $\phi_\varepsilon|_{\partial B(R, A)} \equiv 0$, 所以外边界上 ϕ_ε 恒为零.

因为 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{w(Q)}{1/\delta} = 0$, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 我们可以选择 δ 足够小, 使得 $\frac{|w(Q)|}{1/\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, 这意味着

$$|w(Q)| < \frac{\varepsilon}{2\delta}$$

那么在 $r = \delta$ 上:

$$\phi_\varepsilon(Q) = w(Q) - \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{R} < \frac{\varepsilon}{2\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\varepsilon}{2\delta} + \frac{\varepsilon}{R}$$

当 δ 足够小时, 这个值一定是负的, 综上, 我们可以在 $A_{\delta, R}$ 的两个边界上都得到 $\phi_\varepsilon(Q) \leq 0$. 根据调和函数的**最大值原理**, 对于 $A_{\delta, R}$ 内的任意一点 Q , 都有 $\phi_\varepsilon(Q) \leq 0$, 即:

$$w(Q) \leq \varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

这个不等式对任意固定的 Q ($r > 0$) 和任意的 $\varepsilon > 0$ 都成立, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 我们得到:

$$w(Q) \leq 0$$

同理我们可以证明

$$W(Q) \geq 0$$

于是我们证明了在 A 附近, 有

$$v(Q) = u(Q)$$

我们补充定义

$$u(A) = v(A)$$

即可.

(定理) Liouville 定理

全空间上有界调和函数必为常数.

证明:

$$\begin{aligned} \text{证明: } \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ 取 } B_R(0), B_R(x), \text{ 由于 } u \text{ 调和, 有平均值公式 } u(0) &= \frac{1}{|B_R(0)|} \int_{B_R(0)} u(P) dx_P, u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(P) dx_P \\ |u(x) - u(0)| &= \frac{1}{|B_R|} \left| \int_{B_R(0)} u(y) dy - \int_{B_R(x)} u(y) dy \right| \leq \frac{1}{|B_R|} \left(\int_{B_R(0) \setminus B_R(x)} u(y) dy + \int_{B_R(x) \setminus B_R(0)} u(y) dy \right) \\ &\leq \frac{M}{|B_R|} \left(\int_{B_R(0) \setminus B_R(x)} 1 dy + \int_{B_R(x) \setminus B_R(0)} 1 dy \right) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad |y-x| > R, |y| \leq R \quad |y-x| \leq R, |y| > R \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad R - |x| < |y| \leq R \quad R < |y| \leq |x| + R \\ &\leq \frac{M}{|B_R|} \int_{R-|x|}^{R+|x|} 1 dy \\ &= \frac{M}{c_n \cdot R^n} c_n ((R+|x|)^n - (R-|x|)^n) \\ &= O\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

即得 $u(x) \equiv u(0)$, 即 $u(x)$ 恒为常数 【对 n 维成立】

(定理) Harnack定理

调和函数的一致收敛极限是调和函数.

证明:

思路: $u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} f(P) dS_P$ 是 $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$ 的形式解

取 $B \subseteq \Omega$, u_n 在 ∂B 上一致收敛于 u , $f_n(P) = u_n|_{\partial B} \Rightarrow f(P) = u|_{\partial B} (n \rightarrow \infty)$

$$\Rightarrow u_n(Q) = \int_{\partial B} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} f_n(P) dS_P \rightarrow \int_{\partial B} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} f(P) dS_P$$

$$\downarrow \\ u(Q)$$

$\Rightarrow \Delta u = 0, x \in B$, 由 B 的任意性得在 V 中调和

(定理) Harnack 不等式

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为连通开集, $K \subset \Omega$ 为紧集, u 是非负调和函数, 则存在 c 使得

$$\sup_K u \leq c \inf_K u$$

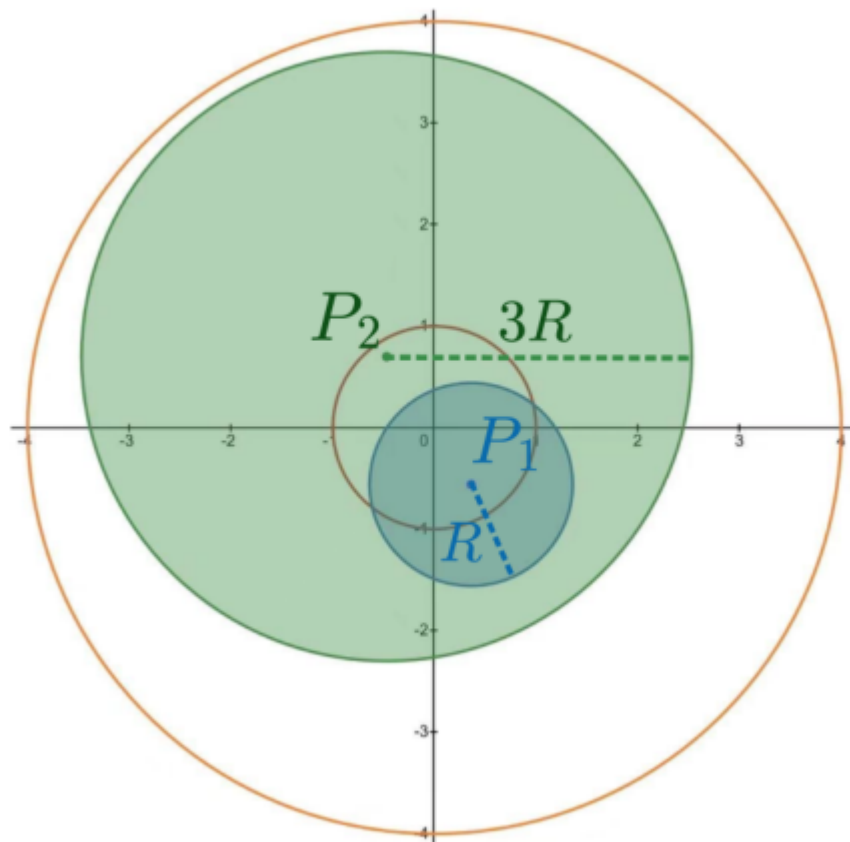
证明:

证明了在小球中的结论

$$\text{证明: 取 } P_1, P_2 \in B_R, u(P_1) = \frac{1}{|B_R(P_1)|} \int_{B_R(P_1)} u(y) dy, u(P_2) = \frac{1}{|B_{3R}|} \int_{B_{3R}(P_2)} u(y) dy$$

$$\Rightarrow B_R(P_1) \subset B_{3R}(P_2) \xrightarrow{u \text{ 非负}} \left[\int_{B_R(P_1)} u(y) dy \leq \int_{B_{3R}(P_2)} u(y) dy \right] \Rightarrow |B_R| u(P_1) \leq |B_{3R}| u(P_2) \Rightarrow u(P_1) \leq \frac{|B_{3R}|}{|B_R|} u(P_2)$$

$$|B_R| = c_n R^n, |B_{3R}| = c_n (3R)^n \Rightarrow u(P_1) \leq 3^n u(P_2), \text{ 由 } P_1, P_2 \text{ 的任意性, } \sup_{B_R} u \leq 3^n \inf_{B_R} u$$



在紧集 K 中，添加若干个辅助点，每两点都在一个小球中，有限个小球覆盖 K

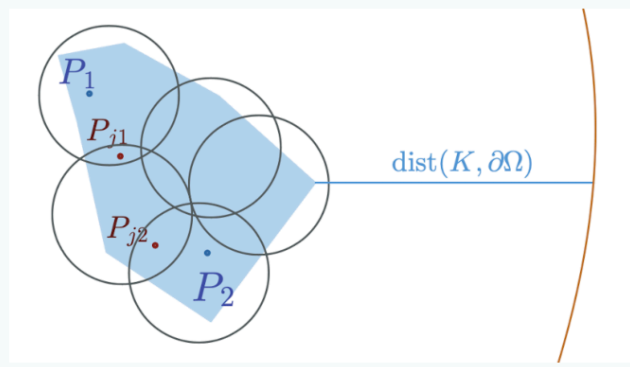
对连通紧子集 $K \rightarrow$ 可由有限个球覆盖住 $\rightarrow$ 球的半径如何取

取 $R = \frac{1}{4} \text{dist}(K, \partial\Omega)$ (因 Ω 无非负调和), $\exists$ 以 R 为半径的球 $B_1, \dots, B_n$, s.t. $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_k$ 【有限个在 Ω 中的小球把 K 盖上】

$\forall P_1, P_2 \in K$, 设 $P_1 \in B_{i1}, P_2 \in B_{i2}$. 则 $\exists P_{j1}, \dots, P_{jm}$, s.t. $P_1, P_{j1} \in B_{i1}; P_{j1}, P_{j2} \in B_{j1}; P_{j2}, P_{j3} \in B_{j2}; \dots; P_{jm}, P_2 \in B_{i2}$

【保证每两点都在同一个小球中】 $\Rightarrow u(P_1) \leq 3^n u(P_{j1}), \dots, u(P_{j1}) \leq 3^n u(P_{j2}), \dots, u(P_{jm}) \leq 3^n u(P_2)$

$\Rightarrow u(P_1) \leq c u(P_2) \Rightarrow \sup_K u \leq c \inf_K u$



(定理) Thm

调和函数是实解析函数.

2.1.7 亚椭圆

我们现在要证明 $\Delta u = 0$ 的广义函数解的奇支集为空. 这件事与拉普拉斯方程基本解的奇性分布有关.

不论在 $n = 2$ 或 $n > 2$ 时, 基本解 $C \ln \left(\frac{1}{x} \right)$ 或 Cr^{2-n} 的奇支集都是一个孤立点 $\{r = 0\}$.

现在我们给出如下的定义:

(定义) Def

若 C^∞ 系数的线性偏微分算子

$$P = \sum_{|a| \leq m} \alpha_a(x) D^a$$

具有以下性质就称 P 是亚椭圆的: 对任意 $u \in \mathcal{D}'$,

$$\text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu$$

换句话说: P 是亚椭圆的当且仅当对任意开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 及任意 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 由 $Pu \in C^\infty$ 可得 $u \in C^\infty(\Omega)$.

证明:

等价定义的证明:

证: $\Rightarrow$ 已知 $Pu \in C^\infty$ 且 $\text{sing supp } Pu = \emptyset$
由亚椭圆定义:
 $\text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu = \emptyset$
 $\Rightarrow \text{sing supp } u = \emptyset \Rightarrow u \in C^\infty$

⇐ 证明 $Pu \in C^\infty$ 则有 $u \in C^\infty$

对 Ω 中开集成立

即 u 的光滑区域大于 Pu
光滑的区域

$$\Rightarrow \text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu.$$

笔记:

亚椭圆算子不会将一个非光滑的（有奇点的）解 u 变成一个完全光滑的函数 Pu 。如果 Pu 变得光滑了，那只能是因为 u 本来就是光滑的。它保证了“解的正则性（光滑性）”可以从方程的右端项（ Pu ）继承过来。

Pu 的光滑点一定是 u 的光滑点，反过来就是 u 的非光滑点一定是 Pu 的非光滑点，也即

$$\text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu$$

笔记:

奇异支撑集 (Singular Support, $\text{sing supp } u$)

这是一个至关重要的概念。一个分布 u 的奇异支撑集是指 u 不是一个 C^∞ 函数的点的集合。换句话说，它是 u 的“奇点”或“不光滑”的点构成的集合。

例子:

- 如果 u 本身就是一个 C^∞ 函数，那么它没有任何奇点，所以 $\text{sing supp } u = \emptyset$ （空集）。
- 如果 u 是亥维赛阶跃函数 $H(x)$ （ $x < 0$ 时为 0， $x > 0$ 时为 1），它在 $x = 0$ 点不光滑，所以 $\text{sing supp } H = \{0\}$ 。

- 如果 u 是狄拉克 δ 函数, 它的奇点也在原点, 所以 $\text{sing supp } \delta = \{0\}$ 。

因此, 若 E 是亚椭圆算子 P 的基本解: $PE = \delta$, 则因

$$\text{sing supp } PE = \text{sing supp } \delta = \{0\}$$

所以 $\text{sing supp } E \subset \{0\}$. 重要的是, 若 P 还是常系数算子, 上述结果的逆也成立.

(定理) Thm

设 P 为常系数线性偏微分算子, 而且有一基本解 $E(x)$ 使

$$\text{sing supp } E = \{0\}$$

则 P 必为亚椭圆的.

证明:

设 $u \in \mathcal{D}'$, 对任意 $x \notin \text{sing supp } Pu$, 必存在 x 的 ε 邻域 $B_\varepsilon(x)$, 使得

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \cap \text{sing supp } Pu = \emptyset$$

令 $\varphi \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x))$, 且 $\varphi|_{B_{\varepsilon/2}(x)} = 1$, 则 $\varphi Pu \in C_0^\infty$, 而 $P(\varphi u) = \varphi Pu + v$, v 中各项皆含有 φ 的不低于 1 阶的微商作为因子, 故在 $B_\varepsilon(x)$ 外及 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 内 $v = 0$.

现在

$$E * P(\varphi u) = E * (\varphi Pu) + E * v$$

其中 $E * (\varphi Pu)$ 为 C^∞ 函数, 对第二项, 有

$$\text{sing supp } (E * v) \subset \text{sing supp } v + \{0\} = \text{sing supp } v \subset \text{supp } v$$

因此 $E * v$ 在 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 上是 C^∞ 的, 但另一方面

$$E * P(\varphi u) = P(E * (\varphi u)) = (PE) * (\varphi u) = \delta * (\varphi u) = \varphi u$$

所以 φu 在 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 上是 C^∞ 的, 即 $x \notin \text{sing supp } u$. 于是

$$\text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu$$

P 为亚椭圆的.

把这个结果用于拉普拉斯方程即知 Δ 是亚椭圆的. 特别是可以得到著名的外尔 - 许瓦兹(Weyl-Schwartz)引理:

$\Delta y = 0$ 的一切 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 解皆为 $C^\infty(\Omega)$ 解.

2.2 Poisson 方程

2.2.1 Poisson 方程变分方法

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 分片光滑. 在 Ω 上考虑 Poisson 方程

$$-\Delta u = f(x),$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$, Δ 为 n 维 Laplace 算子, 即

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

而 $f \in L^2(\Omega)$. 为简单计, 我们只讨论方程之具齐边值条件

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

的 Dirichlet 问题. 假如所给边值条件为

$$u|_{\partial\Omega} = g(x),$$

而 $g(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上适当光滑, 则可代替方程而考虑关于 $u(x) - g(x)$ 的方程, 它仍是一个 Poisson 方程, 只不过右端换成了另一个函数.

2.2.1.1 弱解的概念

假设 $u \in C^2(\Omega)$ 是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的解, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 是任一函数. 将 u 代入方程, 两端同乘以 φ , 然后在 Ω 上积分

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

通过分部积分可将左端积分中加在 u 上的导数运算部分地或全部地转移到 φ 上. 事实上, 由于 φ 的支集含在 Ω 内, 我们有

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi dx \\
&= - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\
&= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds - \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx \\
&= - \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx,
\end{aligned}$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 因此,式可改写为

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

或

$$- \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

这表明: 若 $u \in C^2(\Omega)$ 是方程的解,则对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立. 反之,若对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 函数 $u \in C^2(\Omega)$ 满足积分等式
倒推回去便可得到

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) \varphi dx = 0.$$

由于此式对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立,根据 φ 的这种任意性,由此便可推断: 在 Ω 内,

$$-\Delta u - f = 0$$

即函数 u 是方程的解. 上面等于 0 是因为: 令 $g(x) = -\Delta u(x) - f(x)$, 由于我们假设 $u \in C^2(\Omega)$ 并且通常 f 也是连续的, 所以 $g(x)$ 是 Ω 内的一个连续函数。我们已知条件是: 对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 都有

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = 0$$

假设结论不成立, 至少存在一个点 $x_0 \in \Omega$, 使得 $g(x_0) \neq 0$, 不失一般性, 我们假设 $g(x_0) > 0$, 因为 $g(x)$ 是一个连续函数, 存在一个半径为 $r > 0$ 的小球, 它完全包含在 Ω 内, 并且对于所有在这个小球里的点 x , 都有 $g(x) > 0$ 。

我们可以构造一个 $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, 它满足以下性质: 对所有 x 成立, 在小球 $B(x_0, r)$ 的中心区域, $\varphi_0(x) > 0$, $\varphi_0(x)$ 的支集完全包含在小球 $B(x_0, r)$ 内部, 代入积分等式中:

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi_0(x) dx = \int_{B(x_0, r)} g(x) \varphi_0(x) dx > 0$$

与假设矛盾, 所以只能有 $g(x) \equiv 0$.

(定义) Def

称函数 $u \in H^1(\Omega)$ 为 Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的弱解,如果对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 积分等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

都成立.

⚠ 注意:

因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中还是稠密的,故若对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 积分等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

都成立,则对任何 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

也成立.

⚠ 注意:

利用积分等式

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

我们可以定义一种更弱的解,即在分布意义下满足方程的函数. 我们不准备讨论这种弱解.

(定义) Def

称函数 $u \in H_0^1(\Omega)$ 为 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的弱解,如果对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 积分等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

成立.

⚠ 注意:

具非齐边值条件的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的弱解可定义为 $H^1(\Omega)$ 中这样的函数 u , 它对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 满足积分等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

且 $u - g \in H_0^1(\Omega)$. 若 $g \in H^1(\Omega)$, 则知, 对任何 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 函数 $w = u - g$ 满足

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (f \varphi - \nabla g \cdot \nabla \varphi) dx$$

为了求解 Dirichlet 问题

$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ 首先(也是关键)就要找出与之相应的泛函, 而将问题转化为求这一泛函的极值元, 也就

综上所述, 我们证明了

(命题) Prop

若 $u \in H_0^1(\Omega)$ 为泛函 $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的极值元, 则 u 是 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的弱解; 若极值元 $u \in C^2(\Omega)$, 则 u 在通常意义下满足 Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

若极值元 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则 u 是 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的古典解.

为证泛函 $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上取得极小值, 首先证明

引理 2.1.1 设 $f \in L^2(\Omega)$, 则泛函 $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有下界.

证明 由 Poincaré 不等式 (1.2.8 节) 和带 ε 的 Cauchy 不等式 (1.1.1 节) 知, 对 $v \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} v^2 + \frac{1}{2\varepsilon} f^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon \right) \int_{\Omega} v^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx, \end{aligned}$$

其中 $\mu > 0$ 是 Poincaré 不等式中的常数, $\varepsilon > 0$ 为可任取的常数. 假如取 $\varepsilon \leq \frac{1}{\mu}$, 则由上式得

$$J(v) \geq -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx.$$

泛函 $J(v)$ 的下方有界性于是得到了证明.

泛函 $J(v)$ 既然有下界, 就有下确界. 按下确界的定义, 必存在 $u_k \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \inf_{H_0^1(\Omega)} J(v).$$

$\{u_k\}$ 称为泛函 $J(v)$ 的极小序列.

引理 2.1.2 泛函 $J(v)$ 的极小序列 $\{u_k\}$ 中存在弱收敛子序列 $\{u_{k_i}\}$:

$$u_{k_i} \rightharpoonup u \quad (i \rightarrow \infty) \text{ 于 } H_0^1(\Omega),$$

这里“ $\rightharpoonup$ ”表弱收敛, u 为 $H_0^1(\Omega)$ 中某一函数.

证明 因为极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k)$ 存在, 故存在常数 $M > 0$, 使得 $|J(u_k)| \leq M$. 利用带 ε 的 Cauchy 不等式和 Poincaré 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx &= 2 \int_{\Omega} f u_k dx + 2J(u_k) \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} u_k^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx + 2M \\ &\leq \varepsilon \mu \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 dx + 2M.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2\mu}$ 便得到

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} f^2 dx + 2M.$$

从而

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx \leq 4\mu \int_{\Omega} f^2 dx + 4M.$$

再利用 Poincaré 不等式, 进而又得到

$$\int_{\Omega} u_k^2 dx \leq 4\mu^2 \int_{\Omega} f^2 dx + 4\mu M.$$

上面二式表明, $\{u_k\}$ 含在 $H_0^1(\Omega)$ 的一个闭球中, 而 $H_0^1(\Omega)$ 中的任何闭球都是弱紧的, 故 $\{u_k\}$ 中存在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛的子序列.

引理 2.1.3 $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是弱下半连续的, 即对 $H_0^1(\Omega)$ 中任何弱收敛序列 $\{v_k\}$, 若

$$v_k \rightharpoonup v \quad (k \rightarrow \infty) \text{ 于 } H_0^1(\Omega),$$

则

$$J(v) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k).$$

证明 由 L^2 范数的弱下半连续性, 我们有

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx.$$

又由 $\{v_k\}$ 的弱收敛性, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f v_k dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

故

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = \frac{1}{2} \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f v_k dx$$

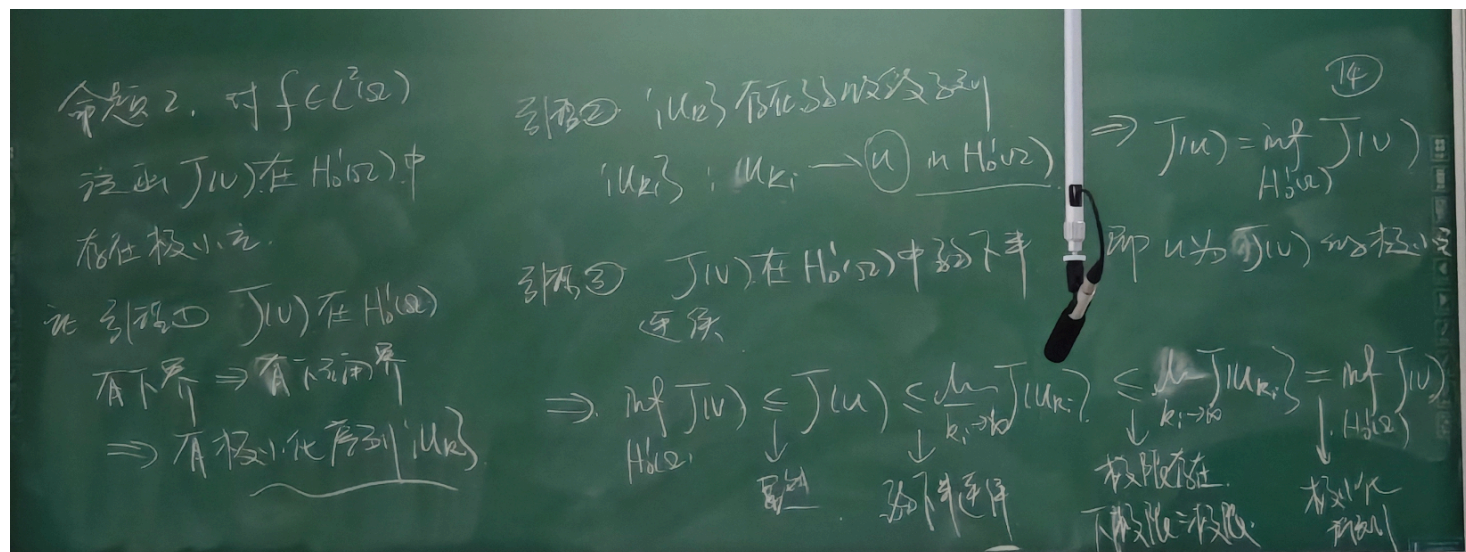
$$\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx = J(v).$$

命题 2.1.2 对任何 $f \in L^2(\Omega)$, 泛函 $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有极小元存在.

证明 根据引理 2.1.1, $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有下界. 设 $\{u_k\}$ 为 $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的极小序列. 由引理 2.1.2 知, $\{u_k\}$ 中存在弱收敛子序列 $\{u_{k_i}\}$, 设其弱极限为 u . $J(v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的弱下半连续性包含

$$\inf_{H_0^1(\Omega)} J(v) \leq J(u) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} J(u_{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} J(u_{k_i}) = \inf_{H_0^1(\Omega)} J(v),$$

故 $J(u) = \inf_{H_0^1(\Omega)} J(v)$.



定理 2.1.1 对任何 $f \in L^2(\Omega)$, Poisson 方程的 Dirichlet 问题 (2.1.1), (2.1.2) 恒存在惟一的弱解.

证明 弱解的存在性联合命题 2.1.1 和命题 2.1.2 即知. 只须再证弱解的惟一性. 设 $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ 为 Dirichlet 问题 (2.1.1), (2.1.2) 的两个弱解, 则由弱解的定义及 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的稠密性, 有

$$\int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (i = 1, 2).$$

令 $u = u_1 - u_2$, 则

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

特别取 $\varphi = u$ 便得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

由此知 $\nabla u = 0$ a.e. 于 Ω . 进而利用齐边值条件可推出 $u = 0$ a.e. 于 Ω . 此事也可利用 Poincaré 不等式

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C(n, \Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

来推断.

