

数理方程笔记 Chapter 1

Settings

- 授课教师：魏雅薇
- 参考教材：广义函数与数学物理方程/齐民友
- 分数组成：
- 参考文献：
 - 《椭圆与抛物型方程引论》伍卓群
 - 《广义函数与数学物理方程》齐民友
 - 《数理方程》谷超豪
 - PDE, Evans
- Contents
 1. 准备知识
 1. 常用不等式 + 基本定理
 2. 磨光：截断函数+单位分解
 3. 广义函数
 4. 傅里叶变换
 5. Sobolev 空间+Holder空间
 2. 二阶线性椭圆方程
 1. Laplace 方程：基本解，Green 函数及其性质，调和函数性质
 2. Poisson 方程：变分法及 2-阶线性估计
 3. $\mathcal{C}^2$ 理论
 3. 二阶线性抛物方程
 1. 热传导方程：基本解，初值问题，初边值问题($n = 1$).
 2. 能量方法
 3. Galerkin 方法
 4. 二阶线性双曲方程
 1. 波动方程：基本解，初值问题($n = 1, 2, 3$)，初边值问题($n = 1$)，能量方法
 2. 半群理论

2025-09-08

Chapter 1：准备知识

1.1 常用不等式

1.1.1 Young 不等式

(定理) Thm

$a, b > 0, p, q > 1$, 有 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

证明:

我们注意到 $x^{\frac{1}{p}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是上凸的, 所以我们知道在 $x = 1$ 处的切线 $y = \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}$ 在整条曲线的上方, 即对于任意的 $x > 0$, 有 $y = \frac{1}{p}x + \frac{1}{q} \geq x^{\frac{1}{p}}$, 我们令 $x = \frac{u}{v}$, 得到

$$\frac{u}{pv} + \frac{1}{q} \geq \frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}}$$

化简得到

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} \geq u^{\frac{1}{p}} v^{1-\frac{1}{p}} = u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}}$$

再令 $u = a^p, v = b^q$, 我们立刻得到

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

一个常用的推论是带 ε 的 Young 不等式, 即

(推论) Cor

相同的条件, 对 $\varepsilon > 0$, 有 $\varepsilon a^p + \varepsilon^{-\frac{p}{q}} b^q \geq ab$.

证明:

只需要在 Young 不等式中取 $a = \varepsilon^{\frac{1}{p}} a, b = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} b$ 即可.

1.1.2 Holder 不等式

(定理) Thm

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为可测开集, $p, q > 1$, 有 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 设 $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, 则有 $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, 并

且 $\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$.

证明:

在 Young 不等式中令

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{\mathcal{L}^p}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{\mathcal{L}^q}}$$

我们得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f(x)\|_{\mathcal{L}^p} \|g(x)\|_{\mathcal{L}^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f(x)\|_{\mathcal{L}^p}} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g(x)\|_{\mathcal{L}^q}}$$

在两边积分立刻得到

$$\frac{\|fg\|_{\mathcal{L}^1}}{\|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

于是我们得到了

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$$

1.1.3 Minkovski 不等式

(定理) Thm

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $p \geq 1$, 并且 $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 则有 $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}$.

证明:

首先我们需要说明 $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 这是因为

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (2 \max(|f(x)|, |g(x)|))^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

所以 $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, 令 $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, 我们注意到 $(f + g)^{p/q} \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, 由 Holder 不等式有

$$\|f \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q}, \quad \|g \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q}$$

再结合

$$|f + g|^p = |f + g| \cdot |f + g|^{p/q} \leq |f| \cdot |f + g|^{p/q} + |g| \cdot |f + g|^{p/q}$$

对两边积分, 有

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \|f \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} + \|g \cdot (f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|(f + g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q}$$

注意到

$$\|(f+g)^{p/q}\|_{\mathcal{L}^q} = \|f+g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q}$$

所以有

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}) \|f+g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q}$$

约分即

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}$$

1.1.4 列紧性

(定理) (Arzela-Ascoli)

$F \subset C(M)$, M 为紧集, $C(M)$ 为 M 上的连续函数, 有: F 列紧 $\iff F$ 一致有界且等度连续.

(定义) Def

拓扑空间 X 的子集 M 称为**相对紧**的, 如果其闭包为紧集.

这玩意实际上应该叫做**预紧**(precompact).

(定义) Def

拓扑空间 X 的子集 F 称为**弱列紧**, 如果任取其中任一序列存在弱收敛子列. 称为**弱相对收敛**, 如果其闭包中任一序列存在弱收敛子列. F 称为**强列紧**, 如果任取其序列均存在强收敛子列.

(定理) Thm

当 $1 < p < \infty$ 时, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ 中的集合为弱列紧的 $\iff$ 为其范数有界.

(定理) Thm

当 $1 < p < \infty$ 时, 函数列 $X \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ 相对强列紧的充分必要条件为:

(1) $\{\|f\|_{\mathcal{L}^p} \mid f \in X\}$ 有界.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$ 对 $f \in X$ 一致成立, 则称为 X 等度连续.

(3) 对 $f \in X$ 一致有 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R, x \in \Omega} |f(x)|^p dx = 0$.

1.2 磨光, 截断函数, 单位分解

(定义) Def

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ 为重指标, 有 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 我们定义 $|\alpha| = \sum \alpha_i$.

我们定义

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} u \dots \partial^{\alpha_n} u}$$

于是我们可以定义

(定义) Def

$C^k(\Omega)$ 为 Ω 中 k -阶连续可微的全体函数集合, 并且定义

$$|u|_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha u|$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, 我们定义

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha! := \prod_{i=1}^n (\alpha_i!)$$

RMK: $C^k(\Omega)$ 是完备的赋范线性空间和 Banach 空间.

1.2.1 磨光变换

(定义) Def

$C_0^\infty(\Omega)$ 为 Ω 上具有紧支集的光滑函数.

我们可以定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中如何收敛, 设 $\{\phi_n(x)\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ 收敛于 0 指

- 存在一个紧集 K , 使得对于任意的 $\phi_n(x)$, 有 $\text{supp } \phi_n \subset K$.

- $\phi_n(x)$ 的任意固定阶 α 微分的序列对 x 一致收敛到 0. 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \phi_k(x)| \right) = 0$$

(定义) Def

设 $j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一非负函数, 满足 $\text{supp } j(x) \subset \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$, 且满足 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$, 对于 $\varepsilon > 0$, 我们记 $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 称 $j_\varepsilon(x)$ 为磨光核.

如果 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$, 则我们有 $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\frac{x}{\varepsilon} = 1$, 所以磨光核的积分值也是 1. 并且磨光核 $j_\varepsilon(x)$ 的支集包含在 $\overline{B_\varepsilon(0)}$ 中.

例子：磨光核

$j(x)$ 的典型例子是

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} e^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

其中 $A = \int_{B_1(0)} e^{1/(|x|^2-1)} dx$.

(定义) Def

对于函数 $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, 令

$$u_\varepsilon(x) = (j_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

称 $u_\varepsilon(x)$ 为 $u(x)$ 的磨光.

函数 f 属于 $L_{loc}^1(\Omega)$, 当且仅当对于任意紧集 $K \subset \Omega$, 都有:

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

我们注意,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(y) f(x-y) dy = \int_{B_\varepsilon(0)} j_\varepsilon(y) f(x-y) dy$$

这告诉我们如果 f 定义在 U 上, 则 f_ε 就可以定义在 $\{x \in U \mid d(x, \partial U) > \varepsilon\}$ 上.

C.5. Convolution and smoothing. We next introduce tools that will allow us to build smooth approximations to given functions.

NOTATION. If $U \subset \mathbb{R}^n$ is open and $\epsilon > 0$, we write

$$U_\epsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}.$$

DEFINITIONS.

(i) Define $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ by

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1, \end{cases}$$

the constant $C > 0$ selected so that $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

(ii) For each $\epsilon > 0$, set

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

We call η the *standard mollifier*. The functions η_ϵ are C^∞ and satisfy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1, \quad \text{spt}(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

DEFINITION. If $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ is locally integrable, define its *mollification*

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad \text{in } U_\epsilon.$$

That is,

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y) \, dy = \int_{B(0, \epsilon)} \eta_\epsilon(y) f(x-y) \, dy$$

for $x \in U_\epsilon$.

THEOREM 7 (Properties of mollifiers).

- (i) $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.
- (ii) $f^\epsilon \rightarrow f$ a.e. as $\epsilon \rightarrow 0$.
- (iii) If $f \in C(U)$, then $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformly on compact subsets of U .
- (iv) If $1 \leq p < \infty$ and $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$, then $f^\epsilon \rightarrow f$ in $L^p_{\text{loc}}(U)$.

Proof.

1. Fix $x \in U_\epsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$, and h so small that $x + he_i \in U_\epsilon$. Then

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x + he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] f(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) \right] f(y) \, dy \end{aligned}$$

for some open set $V \subset\subset U$. As

$$\frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \eta_{x_i} \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right)$$

uniformly on V , the partial derivative $f_{x_i}^\epsilon(x)$ exists and equals

$$\int_U \eta_{\epsilon, x_i}(x - y) f(y) dy.$$

A similar argument shows that $D^\alpha f^\epsilon(x)$ exists, and

$$D^\alpha f^\epsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy \quad (x \in U_\epsilon),$$

for each multiindex α . This proves (i).

2. According to Lebesgue's Differentiation Theorem (§E.4),

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

for a.e. $x \in U$. Fix such a point x . Then

$$\begin{aligned} |f^\epsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x, \epsilon)} \eta_\epsilon(x - y) [f(y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x, \epsilon)} \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq C \int_{B(x, \epsilon)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

by (4). Assertion (ii) follows.

3. Assume now $f \in C(U)$. Given $V \subset\subset U$, we choose $V \subset\subset W \subset\subset U$ and note that f is uniformly continuous on W . Thus the limit (4) holds uniformly for $x \in V$. Consequently the calculation above implies $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformly on V .

4. Next, assume $1 \leq p < \infty$ and $f \in L_{\text{loc}}^p(U)$. Choose an open set $V \subset\subset U$ and, as above, an open set W so that $V \subset\subset W \subset\subset U$. We claim that for sufficiently small $\epsilon > 0$

$$(5) \quad \|f^\epsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}.$$

To see this, we note that if $1 \leq p < \infty$ and $x \in V$,

$$\begin{aligned} |f^\epsilon(x)| &= \left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon^{1-1/p}(x-y) \eta_\epsilon^{1/p}(x-y) |f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) dy \right)^{1-1/p} \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Since $\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) dy = 1$, this inequality implies

$$\begin{aligned} \int_V |f^\epsilon(x)|^p dx &\leq \int_V \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) dx \right) dy = \int_W |f(y)|^p dy, \end{aligned}$$

provided $\epsilon > 0$ is sufficiently small. This is (5).

5. Now fix $V \subset\subset W \subset\subset U$, $\delta > 0$, and choose $g \in C(W)$ so that

$$\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Then

$$\begin{aligned} \|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f^\epsilon - g^\epsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} \quad \text{by (5)} \\ &\leq 2\delta + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Since $g^\epsilon \rightarrow g$ uniformly on V , we have $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta$. $\square$

2025-09-10

特别地, 如果 $f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 设 $\text{supp } f \subset K$, 其中 K 是紧集, 则我们有结论:

$$f_\epsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

并且有

$$\text{supp } f_\epsilon \subseteq K_\epsilon := \{x \mid d(x, K) \leq \epsilon\}$$

这是因为

$$f_\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon(0)} j_\epsilon(y) f(x-y) dy$$

当 $d(x, K) > \epsilon$ 时, 对于 $y \in B_\epsilon(0)$, 有 $f(x-y) \notin K$, 从而 $f(x-y) = 0$, 于是 $f_\epsilon(x) = 0$.

我们还有结论: 当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时, $f_\epsilon \rightarrow f$.

设 Ω 为开集, $f(x) \in C(\Omega)$, 则对 Ω 的任意紧子集 K , 存在一系列函数 $\{\tilde{f}_\varepsilon(x)\}$ 在 K 上一致收敛到 $f(x)$.

证明:

已知 $K \subset \Omega$, 由欧式空间的正规性, 知道存在闭集 F 使得 $K \subset F^\circ \subset \overline{F} \subset \Omega$.

所以我们知道存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$, 我们令

$$\widetilde{f(x)} = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\varepsilon_0} \end{cases}$$

对于任意的 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, 取 J_ε 为磨光核, 有

$$\widetilde{f_\varepsilon}(x) = J_\varepsilon(x) * \widetilde{f}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

有

$$\text{supp } \widetilde{f_\varepsilon} \subset K_{\varepsilon_0+\varepsilon} \subset K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$$

于是对于任意的 $x \in K$, 我们计算

$$\begin{aligned} |\widetilde{f_\varepsilon}(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) (f(x) - \widetilde{f}(y)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) |f(x) - \widetilde{f}(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in K, |x-y| \leq \varepsilon} |f(x) - \widetilde{f}(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \sup_{x \in K, |x-y| \leq \varepsilon} |f(x) - \widetilde{f}(y)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

这个估计是对 $x \in K$ 一致的, 所以得证.

Ω 是开集, 如果 $f(x) \in C^k(\Omega)$, 则对 Ω 内的任一紧集 K , 可以构造一族光滑紧支集函数 $\tilde{f}_\varepsilon$ 使得对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, 有

$$\partial_x^\alpha \widetilde{f_\varepsilon}(x) \rightarrow \partial_x^\alpha f(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

证明:

同理我们知道存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$ ，我们令

$$\widetilde{f(x)} = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\varepsilon_0} \end{cases}$$

对于任意的 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ，取 J_ε 为磨光核，有

$$\widetilde{f_\varepsilon}(x) = J_\varepsilon(x) * \widetilde{f}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

我们估计

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \widetilde{f_\varepsilon} - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &\leq \sup_{|x-y| < \varepsilon} |\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |J_\varepsilon(y)| dy \end{aligned}$$

当 $x \in K$ 时，由于 $|x-y| < \varepsilon$ ，所以 $y \in K_\varepsilon$ ，所以 $\widetilde{f}(y) = f(y)$ ，所以

$$\sup_{|x-y| < \varepsilon} |\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| = \sup_{|x-y| < \varepsilon} |\partial_y^\alpha f(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)$$

所以我们知道一致趋于零。

⚠ 注意:

我们需要解释其中一步，即

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

这个公式的成立是基于高维空间中的分部积分法 (Integration by Parts)，并且是弱导数 (Weak Derivative) 或分布导数 (Distributional Derivative) 定义的核心思想。

我们先从一维单次求导的情况开始理解，这会更直观。假设 $n = 1$ 且 $|\alpha| = 1$ 。我们想要证明:

$$-\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

经典的分部积分公式是 $\int u dv = uv - \int v du$ 。

我们令 $u = \widetilde{f}(y)$ 并且 $dv = \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y) dy$ ，那么 $du = \frac{d}{dy} \widetilde{f}(y) dy$ 并且 $v = J_\varepsilon(x-y)$ 。

将其代入分部积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_{\varepsilon}(x-y) dy = \left[\tilde{f}(y) J_{\varepsilon}(x-y) \right]_{y=-\infty}^{y=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} J_{\varepsilon}(x-y) \frac{d}{dy} \tilde{f}(y) dy$$

这里的关键在于函数 $J_{\varepsilon}(z)$ 的性质。 J_{ε} 是一个**磨光核 (mollifier)**，它具有**紧支撑集 (compact support)**。

- **紧支撑集**意味着这个函数在一个有界区域之外恒等于零。也就是说，存在一个半径 R (通常是 ε)，使得当 $|z| > R$ 时， $J_{\varepsilon}(z) = 0$ 。
- 对于我们的被积函数 $J_{\varepsilon}(x-y)$ ，当 $|x-y| > \varepsilon$ 时，函数值为零。这意味着对于任意固定的 x ，当 y 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时， $|x-y|$ 必然会大于 ε 。
- 因此，无论 $\tilde{f}(y)$ 的值是什么，边界项 $\left[\tilde{f}(y) J_{\varepsilon}(x-y) \right]_{y=-\infty}^{y=\infty}$ 在两个端点处都等于零。

所以，分部积分公式简化为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_{\varepsilon}(x-y) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} \tilde{f}(y) J_{\varepsilon}(x-y) dy$$

两边乘以 -1，就得到了一维情况下的结果。

这个思想可以推广到 n 维空间和任意阶的多重指标导数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 。

在高维空间中，分部积分法源于**高斯散度定理 (Gauss's Divergence Theorem)**。通过反复应用这个定理，我们可以将导数从一个函数“转移”到另一个函数上。

这个推导的核心技巧是**构造一个巧妙的矢量场**，然后将散度定理应用其上。

我们一步一步来。我们的目标是证明，对于任意一个方向 y_i (例如 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中的一个)，以下公式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \frac{\partial J_{\varepsilon}(x-y)}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \tilde{f}(y)}{\partial y_i} J_{\varepsilon}(x-y) dy$$

我们知道，对于两个函数 g 和 h ，它们乘积的偏导数是：

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (g \cdot h) = \frac{\partial g}{\partial y_i} h + g \frac{\partial h}{\partial y_i}$$

移项后得到：

$$g \frac{\partial h}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} (g \cdot h) - \frac{\partial g}{\partial y_i} h$$

现在，我们在整个 $\mathbb{R}^n$ 空间中对这个等式进行积分：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i} (g \cdot h) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h dy \quad (*)$$

我们的任务就是证明右边的第一项积分等于零。为了使用散度定理，我们需要一个矢量场。我们来构造一个非常特殊的矢量场 $\mathbf{F}$ ，它在所有分量上都为零，**除了第 i 个分量**：

$$\mathbf{F}(y) = (0, \dots, 0, \underbrace{g(y)h(y)}_{\text{第 } i \text{ 个分量}}, 0, \dots, 0)$$

现在，我们来计算这个矢量场 $\mathbf{F}$ 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = 0 + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_i}(g(y)h(y)) + \cdots + 0$$

所以，我们得到：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h)$$

高斯散度定理告诉我们： $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$ 。

我们的积分是在整个 $\mathbb{R}^n$ 空间上进行的，在实际操作中，我们取一个非常大的区域 V （例如一个半径为 R 的超球体），计算积分，然后让 R 趋向于无穷大，这个区域 V 的边界就是 S （半径为 R 的超球面）。

将我们构造的 $\mathbf{F}$ 代入散度定理：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

其中 $\mathbf{n}$ 是边界 S 的单位外法向量。 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 的点积结果是 $F_1 n_1 + \cdots + F_i n_i + \cdots = (g \cdot h) n_i$ 。所以我们有：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = \int_S (g \cdot h) n_i dS$$

现在，我们把具体的函数代入。令 $g(y) = \tilde{f}(y)$ 并且 $h(y) = J_\varepsilon(x - y)$ 。

边界积分项就变成了 $\int_S \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x - y) n_i dS$ 。

这里的**决定性因素**是磨光核 J_ε 具有**紧支撑集 (compact support)**。对于充分大的区域，积函数在整个边界 S 上都为零，那么边界积分的结果自然就是零：

$$\int_S \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x - y) n_i dS = 0$$

因为边界项为零，所以我们证明了：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{V_R} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy = 0$$

现在回到我们第一步的公式 (*)：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) dy}_0 - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h dy$$

于是我们就得到了：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h dy$$

这就是高维空间中的分部积分法。

每转移一次偏导数 ∂_{y_i} ，就会产生一个负号。例如，我们将 ∂_{y_i} 从 J_ε 转移到 $\tilde{f}$ ：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \partial_{y_i} J_\varepsilon(x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{y_i} \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

边界项同样因为 J_ε 的紧支撑性质而消失。

我们要转移的导数是 $\partial_y^\alpha = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{y_n}^{\alpha_n}$ 。这个过程包含了总共 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 次求导。每次转移一个一阶偏导数，都会引入一个 (-1) 的系数。因此，在把所有 $|\alpha|$ 次求导都从 $J_\varepsilon(x-y)$ 转移到 $\tilde{f}(y)$ 之后，总共会产生一个 $(-1)^{|\alpha|}$ 的系数。

这就得到了最终的公式：

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy$$

笔记：

这个公式在现代数学分析中至关重要，因为它正是**弱导数**的定义方式。

函数 $\tilde{f}$ 可能不是传统意义上可微的（例如，它可能在某些点有尖角或跳跃）。然而，我们可以通过这个积分公式来**定义**它的导数。

我们称函数 g 是 $\tilde{f}$ 的 α -阶弱导数（记作 $g = \partial^\alpha \tilde{f}$ ），如果对于**所有**光滑且具有紧支撑的“测试函数” ϕ （在我们的例子中， $J_\varepsilon(x-y)$ 就扮演了这个角色），以下等式都成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \phi(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \partial^\alpha \phi(y) dy$$

所以，公式实际上可以看作是用光滑的磨光核 J_ε 来定义（或计算）函数 $\tilde{f}$ 的弱导数 $\partial_y^\alpha \tilde{f}$ 。这种“通过积分将导数作用转移到光滑函数上”的方法，是处理非光滑函数求导的核心工具。

（引理）卷积的Young不等式

假设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 并且 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 。设 $1 \leq p, q, r \leq \infty$ 并且满足以下关系：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

那么，它们的卷积 $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$ 是良定义的（对于几乎所有的 x ），并且属于 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 空间。其 L^r 范数满足以下不等式：

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

特例 1： $q = 1$

如果 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ，那么条件变为 $\frac{1}{p} + 1 = 1 + \frac{1}{r}$ ，这意味着 $r = p$ 。

不等式变为：

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$$

这是最常用的一个版本。它说明，用一个 L^1 函数去卷积一个 L^p 函数，得到的结果仍然是一个 L^p 函数，并且其范数被两个原始函数的范数乘积所控制。这在偏微分方程中，当 g 是一个基本解（通常是 L^1 函数）时尤其有用。

特例 2： $r = \infty$

如果我们想让卷积结果 $f * g$ 是一个有界函数（属于 L^∞ ），那么 $\frac{1}{r} = 0$ 。

条件变为 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。这组 (p, q) 是一对**共轭指数**（与赫尔德不等式中的指数相同）。

不等式变为：

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

这说明，如果 $f \in L^p$ 且 $g \in L^q$ 并且 p, q 是共轭的，那么它们的卷积是一个**有界连续函数**。

(定理) Thm

$u(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ，可以定义 $u_\varepsilon(x) = J_\varepsilon(x) * u(x)$ ，我们有结论：

(1) 若 $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\overline{\Omega})$ ，则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。

(2) 若 $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\overline{\Omega})$ ， $\text{supp } u \subset K \subset \subset \Omega$ ，且 $\text{dist}(\text{supp } u, \partial\Omega) > \varepsilon$ ，则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。

(3) $u \in \mathcal{L}^p(\Omega) (1 \leq p < \infty)$ ，则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ，且

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^p}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p} = 0$$

证明：

前两个结果在前面已经证明，现在证明第三个结果。首先我们使用卷积的 Young 不等式，所以自然有

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} = \|u * J_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^p} \cdot \|J_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1} = \|u\|_{\mathcal{L}^p}$$

记得

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) J_\varepsilon(x - y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) J_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy$$

所以我们有

$$\|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy \right|^p dx$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy = \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy$$

由积分的绝对连续性，知道

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy = 0$$

并且我们知道

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) J_\varepsilon(x - y) dy \right| \leq |u_\varepsilon(x)| + |u(x)|$$

右边是 $\mathcal{L}^p$ 可积函数，所以是控制函数，所以由 DCT 我们知道

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p}^p = 0$$

1.2.2 截断函数

考虑 $K \subset\subset \Omega$ 为紧集，称 $f(x)$ 为**截断函数**，如果 f 满足 $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 并且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K_{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

我们现在来构造截断函数：对于 $K \subset\subset \Omega$ ，取 K_{ε_0} 上的特征函数 $\chi(x)$ ，对 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 我们令

$$f_\varepsilon = J_\varepsilon * \chi$$

我们自然有 $f_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ，并且 $\text{supp } f \subseteq K_{2\varepsilon_0}$ ，所以是截断函数。

(定理) Thm

我们可以对截断函数作估计，对于固定的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ，存在常数 C 使得

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C \cdot \varepsilon^{-|\alpha|}$$

证明：

直接计算

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha f(x) &= \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) J_\varepsilon(x - y) dy \\ &= \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \frac{1}{\varepsilon^n} J\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \chi(y) (\partial_x^\alpha J)\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) dy \end{aligned}$$

于是，我们可以知道

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha f(x)| &\leq \varepsilon^{-|\alpha|} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| (\partial_x^\alpha J) \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right| dy \\
&= \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} |(\partial_x^\alpha J)(y)| dy = C \varepsilon^{-|\alpha|}
\end{aligned}$$

于是有, 对于截断函数 $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \notin \Omega_2 \end{cases}$$

其中 $\Omega_1 \subset \Omega_2$, 并且 $\text{dist}(\Omega_1, \Omega_2) = d > 0$, 则有

$$|\nabla f(x)| \leq \frac{C}{d}$$

其中 C 只和 f 有关.

1.2.3 单位分解

(引理) Lem

设 X 为正规空间, $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq X$ 为开集, $\bigcup_{i \leq n} U_i = X$. 则存在开集 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 使得 $\bigcup_{i \leq n} V_i = X$ 并且对每个 $i \leq n$ 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

证明:

只考虑 $n \geq 2$. 我们逐个构造 V_i .

闭集 $X \setminus \bigcup_{i \geq 2} U_i \subseteq U_1$. 由 X 正规, 取开集 V_1 使得 $X \setminus \bigcup_{i \geq 2} U_i \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$, 则 $V_1 \cup \bigcup_{i \geq 2} U_i = X$.

设 $1 \leq k \leq n-1$ 且已取定使得开集 $V_1, V_2, \dots, V_k$ 满足 $\bigcup_{i \leq k} V_i \cup \bigcup_{i > k+1} U_i = X$ 并且对每个 $i \leq k$ 有

$\overline{V_i} \subseteq U_i$, 则闭集 $X \setminus \left(\bigcup_{i < k} V_i \cup \bigcup_{i > k+2} U_i \right) \subseteq U_{k+1}$.

由 X 正规, 取开集 V_{k+1} 使得 $X \setminus \left(\bigcup_{i \leq k} V_i \cup \bigcup_{i \geq k+2} U_i \right) \subseteq V_{k+1} \subseteq \overline{V_{k+1}} \subseteq U_{k+1}$, 则 $\bigcup_{i < k+1} V_i \cup \bigcup_{i > k+2} U_i = X$.

这样便依次得到 $V_1, V_2, \dots, V_n$, 使得 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_i = X$ 并且对每个 $i \leq n$, 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

(定理) 紧集上的单位分解

设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $U_1, \dots, U_k$ 为 K 的一个开覆盖, 则存在函数 $\eta_1 \in C_0^\infty(U_1), \dots, \eta_N \in C_0^\infty(U_N)$, 使得

$$(1) \quad 0 \leq \eta_i(x) \leq 1, \quad \forall x \in U_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \quad \forall x \in K.$$

证明:

因为 $K \subset \mathbb{R}^n$ 仍然正规, 由引理, 我们做出有限多个开集 $D_1, \dots, D_N$ 使得 $D_i \subset \overline{D_i} \subset U_i$, 使得 $\{D_i\}_{i=1}^N$ 还是一个开覆盖.

由于 $D_i \subset \subset U_i$, 我们可以做出 D_i 的截断函数 $\zeta_i \in C_0^\infty(U_i)$, 使得 $\zeta_i(x) \geq 0$ 在 U_i 上成立, 并且在 D_i 上为正, 由于 $K \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$, 所以 $\sum_{i=1}^N \zeta_i(x) > 0, \forall x \in K$, 于是可以令

$$\eta_i(x) = \frac{\zeta_i(x)}{\sum_{i=1}^N \zeta_i(x)}$$

于是自然有 $\sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \forall x \in K$.

(引理) Lem

第二可数, 局部紧的 Hausdorff 空间存在一个紧穷竭, 即存在紧集 $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$.

证明:

令 X 为一个这样的空间, 由于 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间, 所以存在一个预紧开集基, 再由第二可数性质知道存在可数的预紧开集基, 令 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ 为这个预紧开集基.

令 $K_1 = \overline{U_1}$, 下面归纳定义, 假设 $K_1, \dots, K_k$ 满足 $U_j \subset K_j$, 并且 $K_{j-1} \subset K_j^\circ, j = 1, \dots, k$. 现在我们来定义 K_{k+1} , 由于 K_k 是紧的, 所以存在 m_k 使得 $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} U_j$, 令 $K_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{m_k} \overline{U_j}$, 并且满足 K_{k+1} 是紧集, 并且 $K_k \subset K_{k+1}^\circ$. 所以我们得到一个紧穷竭.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\{U_i\}_{i \in I}$ 为 Ω 的开覆盖, 一族 C_0^∞ 函数 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 称为从属于 $\{U_i\}_{i \in I}$ 的单位分解, 如果满足:

- (1) $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$
- (2) $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $\{U_i\}_{i \in I}$ 的局部有限加细.
- (3) $\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) \equiv 1$.

证明:

由于 Ω 继承 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑, 知道 Ω 自然是一个第二可数的, 局部紧的 Hausdorff 空间, 所以存在一个紧穷竭 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 此时有 $A_j - A_{j-1}^\circ$ 是紧集, $A_{j+1}^\circ - A_{j-2}$ 是开集, 有

$$A_j - A_{j-1}^\circ \subset \subset A_{j+1}^\circ - A_{j-2}$$

并且结合 $\{U_i \cap (A_{j+1} - A_{j-2}^\circ) \mid i \in I\}$ 为紧集 $B_j = A_j - A_{j-1}^\circ$ 的开覆盖, 所以我们可以做 B_j 从属于这个开覆盖的一个单位分解 $\Phi_j = \{\varphi_\alpha^{(j)}\}$.

对于任意的 $x \in \Omega$, 我们知道存在 j 使得 $x \in B_j$, 并且 $x \notin B_k$, 其中 $k \geq j+2$, 于是对于 Φ_k 中的 $\varphi_\alpha^{(k)}$, 有 $\varphi_\alpha^{(k)}(x) = 0$. 所以我们有

$$\sigma(x) := \sum_{\alpha, j} \varphi_\alpha^{(j)}(x)$$

在任意 x 附近都是有限和, 从而 $\sigma(x)$ 有意义, 令

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\sum_j \varphi_\alpha^{(j)}(x)}{\sigma(x)}$$

则 $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 即为我们所求单位分解.

证明:

另外证明, 这个证明可以把紧集上的单位分解延拓到全空间上, 是更有优势的.

证明:

$\forall x \in K, \exists W_k$ 是 x 的邻域。它的紧闭包, $\overline{W_k} \subseteq V_i$, 对于某个 i 。由于 K 是紧的, 所以, $\exists x_1, \dots, x_k \in K, K \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{W_{x_i}}$ 。

我们可以按照如下规则定义集合 J_i , $j \in J_i \Leftrightarrow \overline{W_{x_j}} \subseteq V_i$. $H_i = \bigcup_{j \in J_i} \overline{W_{x_j}}$ 。

H_i 紧, 且 $H_i \subseteq V_i$ (这也是我们取 J_i 的意义所在, 我们希望把找到的紧覆盖局限在 V_i 上) 是一个紧集合, 显然。由前一个引理, 知, 有光滑函数 g_i , 使得

$$0 \leq g_i \leq 1, \text{supp}(g_i) \subseteq V_i, g_i|_{H_i} = 1。$$

我们定义:

$$h_1 = g_1, h_2 = (1 - g_1)g_2, \dots, h_m = (1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_{m-1})g_m。$$
$$\text{Supp}(h_i) \subseteq V_i,$$

注意到 $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m H_i$

$$\sum_{i=1}^m h_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g_i(x)) \text{ 满足要求。}$$

定理的证明还是很有意思的。。其实不是很好想, 有一定组合的韵味。

2025-09-15

1.2.4 修正磨光法

由磨光算子的定义, 我们可以看出: 磨光函数在某点的值依赖于函数本身在这点附近的值. 因此当我们考虑, 用光滑函数在边界附近去逼近一给定函数时上面引进的磨光法并不合适. 为此, 我们可以先延拓给定的函数然后磨光, 有时也可以采用下面的修正磨光法(上面引进的磨光法也称为标准磨光法).

作为例子, 我们取区域为

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n\}$$

而考虑 Q 的顶边

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_n = 1, |x_i| < 1, i = 1, \dots, n-1\}$$

和底边

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_n = -1, |x_i| < 1, i = 1, \dots, n-1\}$$

附近的磨光.

(定义) Def

设 $u \in L^1(Q)$, 定义

$$J_{\varepsilon}^{-} u(x) = \int_Q j_{\varepsilon}(x_1 - y_1) \cdots j_{\varepsilon}(x_{n-1} - y_{n-1}) j_{\varepsilon}(x_n - y_n - 2\varepsilon) u(y) dy$$

$$J_{\varepsilon}^{+} u(x) = \int_Q j_{\varepsilon}(x_1 - y_1) \cdots j_{\varepsilon}(x_{n-1} - y_{n-1}) j_{\varepsilon}(x_n - y_n + 2\varepsilon) u(y) dy$$

其中 $j_{\varepsilon}(\tau)$ 为一维磨光核.

容易验证, $J_{\varepsilon}^{-} u(x)$ 在 Q 的顶边上有定义, 而 $J_{\varepsilon}^{+} u(x)$ 在 Q 的底边上有定义.

2025-09-17

1.2.5 区域边界的局部拉平

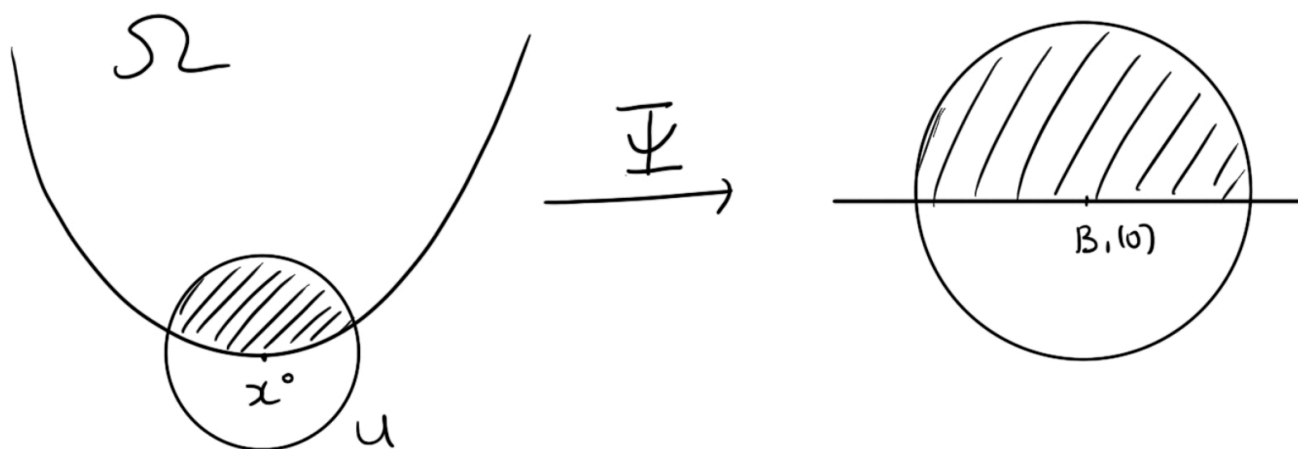
在边值问题中总是要讨论区域边界上的光滑性, 而边界上的光滑性一般是通过局部拉平来定义的:

(定义) Def

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界区域, 称 $\partial\Omega$ 具有 C^k 光滑性, 记为 $\partial\Omega \in C^k$, 如果对任意的 $x^0 \in \partial\Omega$, 存在 x^0 的一个邻域 U 和一个数域 C^k 的可逆映射 $\Psi: U \rightarrow B_1(0)$, 使得

$$\Psi(U \cap \Omega) = B_1^+(0) = \{y \in B_1(0), y_n > 0\}$$

$$\Psi(U \cap \partial\Omega) = \partial B_1^+(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n, y_n = 0\}$$



1.3 广义函数

1.3.1 基本定义

(定义) 试验函数空间

我们称 $C_0^\infty(\Omega)$ 为 Ω 上的光滑紧支集函数，函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中收敛到零定义为：

- (1) 存在一个紧集 $K \subset \Omega$ 使得 $\text{supp } \varphi_n \subset K$ 对所有 n 成立.
- (2) φ_n 的固定阶偏导对 x 一致收敛到 0 (不要求对阶数有一致性) .

$C_0^\infty(\Omega)$ 赋予上述收敛之后称为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 空间， $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的元素被称为**试验函数**.

笔记：

空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的 "D" 是 Distribution 的首字母，不过这里存在一个容易混淆但非常关键的点： $\mathcal{D}(\Omega)$ 空间本身并不是分布空间，而是**试验函数空间** (space of test functions)。它的命名源于它在定义“分布”时所起的关键作用。

"D" 来自于 Distribution 这个词。这个理论主要由法国数学家洛朗·施瓦茨 (Laurent Schwartz) 在20世纪40年代系统地建立起来。他将线性泛函作用于一个性质非常良好的函数空间 (即试验函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$) 上，从而定义出一种广义函数，他称之为“分布” (Distribution) 。

选择 "Distribution" 这个词，是因为这个概念推广了之前物理和数学中已经存在的、用于描述点电荷、偶极子等理想化物理量的“函数”。这些物理量在空间中的分布非常集中 (例如，点电荷只在一点上有“值”，其他地方都为零)，无法用传统的函数来描述，但可以用测度或一种“分布”来刻画。

施瓦茨的理论提供了一个严谨的数学框架来处理这些对象，其核心思想是：一个“广义函数” (分布) 的性质，完全由它如何作用于所有“试验函数”来确定。

我们不去直接定义一个分布 T 在某一点 x 的值 $T(x)$ ，而是定义它作用于一个试验函数 φ 后的值，记作 $\langle T, \varphi \rangle$ 。这个值是一个标量 (实数或复数) 。

$\mathcal{D}(\Omega)$ 空间被设计成一个“足够好”的函数空间，以确保作用于其上的线性泛函 (即分布) 具有良好的性质。前面给出的收敛定义非常严格，它保证了：

1. **紧支撑性**: 所有函数的“作用范围”都被限制在一个固定的紧集 K 内，这避免了无穷远处可能出现的麻烦。
2. **任意阶导数一致收敛**: 这个条件非常强，它保证了对分布进行求导、积分等运算时，结果依然是良好定义的。

因此，整个体系的逻辑是：

- 首先，我们定义一个非常“优秀”的**试验函数空间**，它具有我们期望的所有良好性质 (光滑、紧支撑)。这个空间我们称之为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 。
- 然后，我们定义这个空间上的所有连续线性泛函。这些泛函的集合，我们称之为**分布空间** (Space of Distributions)，记作 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 。

所以，虽然 $\mathcal{D}(\Omega)$ 本身是试验函数空间，但它的命名是为了构建分布 (Distribution) 理论，因此用 "D" 来标记它，以显示其与分布理论的紧密联系。你可以把它理解为“Distribution-defining space”或“the domain for Distributions”。

(定义) Def

广义函数即 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函， l ，即有

(1) 对于实数或者复数 c_1, c_2 ，有

$$l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1l(\varphi_1) + c_2l(\varphi_2)$$

(2) 如果在 $\mathcal{D}$ 中 $\varphi_j \rightarrow 0$ ，则 $l(\varphi_j) \rightarrow 0$ ，我们也常将 $l(\varphi)$ 写作 $\langle l, \varphi \rangle$ 。

我们将所有广义函数构成的集合记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 。

我们常省略连续两字而简称为线性泛函，连续性有一个等价写法为：

(3) 对于任意的紧集 $K \subset \Omega$ ，必然存在常数 c 与非负整数 k 使得

$$|l(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

下面我们来说明 (2) 与 (3) 是等价的：

证明：

(3) 推 (2): 任取 $\varphi_m \rightarrow 0$ ，由定义我们知道存在紧集 $K \subset \Omega$ 使得对于所有的 m ，都有 $\text{supp } \varphi_m \subset K$ ，并且对于任意固定的 α ，有 $\partial^\alpha \varphi_m$ 在 K 上一致收敛到 0，即

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_m| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_m(x)| \rightarrow 0, \text{ 所以由 (3) 自动有 } \langle l, \varphi_m \rangle \rightarrow 0.$$

(2) 推 (3): 反证，假设不等式不成立，即存在某个紧集 K 使得对于任意常数 c 和整数 k ，都存在一个函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(K)$ 并且有

$$|l(\varphi)| > c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|$$

不妨令 $c = k = j$ ，从而有

$$|l(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|$$

用 $\frac{\varphi_j}{|\langle l, \varphi_j \rangle|}$ 替代 φ_j ，有

$$1 > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|$$

但是由于有

$$|\partial^\alpha \varphi_j| \leq \frac{1}{j}$$

对于任意的 $|\alpha| \leq j$ 成立，于是由定义我们知道 $\varphi_j \rightarrow 0$ ，但是我们知道 $\langle l, \varphi_j \rangle = 1$ ，也就是说 l 不是连续泛函，矛盾。

例子：正则广义函数

如果 $f(x)$ 是 Ω 上的局部可积函数，则对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

这个积分实际上是在 Ω 上的紧子集 $\text{supp } \varphi$ 上积分，因而是有意义的. 所以我们知道每一个局部可积函数都可以生成一个线性泛函，我们记为 f ，这种广义函数称之为**正则广义函数**.

例子：Dirac 函数

我们定义 **Dirac 函数** δ 为任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，使得

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

很容易证明这确实是一个线性泛函，也即广义函数，我们知道 δ 有一种奇异性，从而决不存在一个局部可积函数 f 按照上面积分的方式生成 δ ，所以广义函数确实推广了函数的概念，称正则广义函数以外的广义函数为**奇异广义函数**.

(定义) Def

如果对于一切的 $\varphi \in C_0^\infty(U)$ 都有 $\langle u, \varphi \rangle = 0$ ，则称广义函数 u 在 U 上为 0.

(定义) Def

广义函数 u 的支集 $\text{supp } u$ 是 u 在其上为 0 的最大开子集的余集，我们知道 $\text{supp } u$ 恒为闭集.

广义函数作为线性泛函，其线性运算，如加法与数乘的定义是自明的。

(定义) Def

两个广义函数 u_1, u_2 之差 $u_1 - u_2$ 若在 U 上为 0，则说明 u_1 与 u_2 在 u 上相等.

若 u 在 Ω 上为 0，则其在 Ω 上的任一开子集上的限制为 0，反过来如果 Ω 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ ，并且 $u|_{U_\alpha} = 0$ 对于任意的 α 成立，则 $u = 0$ 。

证明：

前一部分是自明的，现在我们来证明后一部分，即广义函数实际上满足层的唯一性。对于任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ，令 $K = \text{supp } \varphi$ ，则存在 $\{U_\alpha\}$ 的有限子覆盖 $\{U_1, \dots, U_k\}$ ，我们作其单位分解 $\psi_1, \dots, \psi_k$ ，有

$$\varphi = \varphi \sum_{j=1}^k \psi_j = \sum_{j=1}^k \varphi \psi_j = \sum_{j=1}^k \varphi_j, \quad \varphi_j = \varphi \psi_j$$

我们自然有 $\text{supp } \varphi_j \subset \text{supp } \psi_j \subset U_j$ ，由于 $u|_{U_j} = 0$ ，所以我们自然有

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^k \langle u, \varphi_j \rangle = 0$$

从而知道 $u = 0$ 。

2025-09-22

1.3.2 微分运算与乘子运算

广义函数的微分思想来自于紧支集光滑函数的分部积分公式，考虑光滑函数 f 和光滑紧支集函数 φ ，有

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx$$

第二个等式是因为 $\varphi(x)$ 是紧支集的，所以边界项是零，现在我们可以借助这个想法来定义广义函数的导数。

(定义) Def

广义函数 $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 的导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ，定义为

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

任何广义函数 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 可以微分任意多次, 并且有

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

(定义) Def

$a(x) \in C^\infty(\Omega)$ 称为一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 乘子, 可以对任一 $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 定义乘子运算 $a \cdot u$

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle$$

我们还可以定义其上的线性运算, 对于实数 c_1, c_2 , $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 定义

$$\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, \varphi \rangle := c_1 \langle f_1, \varphi \rangle + c_2 \langle f_2, \varphi \rangle$$

对于 C^∞ 系数微分算子 $P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} \langle P(x, \partial_x) f, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha f, \varphi \right\rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha(x) \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial_x^\alpha f, a_\alpha(x) \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha \varphi) \right\rangle \\ &= \langle f, P^t(x, \partial_x) \varphi \rangle \end{aligned}$$

其中 P^t 为 P 的转置算子, 如果硬要写的话就是 $P^t(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) \cdot -)$.

 例子: Heaviside 函数:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

我们有

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

所以有

$$H'(x) = \delta(x)$$

在 $n > 1$ 维情况的推广为

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

则我们有

$$\frac{\partial^n H(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = \delta(x)$$

1.3.3 极限运算

设有一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 广义函数序列 $\{f_n\}$ ，我们可以定义其收敛性

(定义) Def

在 $\mathcal{D}'$ 中 $f_n \rightarrow f$ 是指对于任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

这样的收敛我们称之为**弱*收敛**.

(定理) Thm

设 $f_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ， $f_n \rightarrow f$ 弱*收敛，则对于任意固定的 α 有 $\partial^\alpha f_n \rightarrow \partial^\alpha f$ 弱star收敛.

证明:

证 任取 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ，则由微商的定义

$$\langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

由假设 $f_n \rightarrow f$ (于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中)，而 $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ，故上式右方之极限是 $(-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle,$$

而定理得证.

 例子：逐点收敛极限和弱star极限

例如取 $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \end{cases}$ ，我们求其逐点极限和弱星收敛极限.

逐点收敛的情况下，对于 $\forall x \neq 0$ ，显然有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = 0$ ，对于 $x = 0$ ，我们有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(0) = +\infty$.

对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty$ ，我们有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{2\varepsilon} dx = \varphi(0)$$

所以我们知道 f_ε 的弱星收敛极限是 Dirac 函数 δ .

(定理) Thm

设 $\Phi_\varepsilon(x)$ 为磨光核，我们有 $\Phi_\varepsilon(x) \rightarrow \delta$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 意义下.

证明过程也是显然的.

定理 2.3.12. 设有 $C^\infty(\mathbf{R})$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 适合

(i) 对任意 $M > 0$, 当 $|a| < M, |b| < M$ 时

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq c ,$$

c 只与 M 有关;

(ii) 固定 a 和 b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b, \end{cases}$$

则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x) .$$

证 令

$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi) d\xi .$$

由条件(i), 在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

利用著名的关于积分号下取极限的勒贝格控制收敛定理^①有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n(x) \varphi(x) dx \\ &= \int H(x) \varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) . \end{aligned}$$

特别是

$$\begin{aligned} \langle f_n, \varphi \rangle &= \langle F_n', \varphi \rangle = - \langle F_n, \varphi' \rangle \rightarrow \\ &= - \langle H, \varphi' \rangle = \langle H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

因此定理得证.

例3. $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} .$

利用 $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1$, 即可很容易看到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} = \delta(x) .$$

这个结果在傅里叶级数理论中十分有用.

1.3.4 紧支集广义函数

1. 基本定义 我们要提出一个值得注意的事实: $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 原来是定义为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的泛函, 但对于不一定具有紧支集的函数 φ , $\langle u, \varphi \rangle$ 有时也可能是有意义的, 只要 $K = \text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ 为紧集即可. 实际上, 作一个截断函

数 $\alpha(x) \in C_0^\infty$ 使在 K 上 $\alpha(x) = 1$, 则有

$$\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(x) + (1 - \alpha(x))\varphi(x).$$

第一项 $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$, 因此 $\langle u, \alpha\varphi \rangle$ 有意义. 第二项 $(1 - \alpha)\varphi$ 在 $\text{supp } u$ 附近恒为 0. 因为在 $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ 上, $1 - \alpha = 0$. 在 $\text{supp } u \cap (\text{supp } \varphi \text{ 的余集})$ 上 $\varphi = 0$, 所以

$$\langle u, (1 - \alpha)\varphi \rangle = 0.$$

今定义 $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \alpha\varphi \rangle$ 即可将 u 的作用推广到这种 φ 上去. 可以证明, 这样定义的 $\langle u, \varphi \rangle$ 之值与 α 的选取无关, 所以这个定义是合理的.

按照这个说明可知, 设 $K = \text{supp } u$ 为紧集, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 则 u 也可作为 $C^\infty(\Omega)$ 上的线性泛函, 它的定义即为 $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \alpha\varphi \rangle$, 其中 $\alpha(x)$ 为使在 K 上等于 1 的 $C_0^\infty(\Omega)$ 截断函数. 上面已经说过, 这个定义与 α 的选取无关. 但是, 为使这一线性形式连续, 则需定义 $C^\infty(\Omega)$ 中的收敛性, 即对 $C^\infty(\Omega)$ 赋以拓扑, 下面的定义给出了这个拓扑.

定义 2.5.1. 空间 $\mathcal{E}(\Omega)$ 是对 $C^\infty(\Omega)$ 空间赋以下面规定的收敛性以后所成的空间: $\varphi_j(x) \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中即在任一紧集 $K \subset \Omega$ 中对任一选定的重指标 α , $\partial^\alpha \varphi_j(x)$ 皆为一致收敛于 0. $\mathcal{E}(\Omega)$ 上的线性连续泛函之集记作 $\mathcal{E}'(\Omega)$, 其元即称为 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 广义函数. 这些泛函的连续性 (即当 $\varphi_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 时, 有 $\langle u, \varphi_j \rangle \rightarrow 0, u \in \mathcal{E}'(\Omega)$) 等价于下面的形式表述: 存在常数 C , 整数 $m \geq 0$ 以及紧集 $K \subset \Omega$ 使

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{E}(\Omega). \quad (49)$$

定理 2.5.2. $\mathcal{E}'(\Omega) = \{u; u \in \mathcal{D}'(\Omega), \text{supp } u \subset\subset \Omega\}$.

证 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 且 $\text{supp } u$ 为紧, 则可取 $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, 且 $\chi(x) = 1$ 于 $\text{supp } u$ 的某个邻域上, 记 $K = \text{supp } \chi$, 对任意 $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, 由(23), 有

$$\begin{aligned} |\langle u, \varphi \rangle| &= |\langle u, \chi\varphi \rangle| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha (\chi\varphi)| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \end{aligned} \quad (50)$$

因此 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

反之, 若 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, 因此自然地有 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 今证 $\text{supp } u$ 为紧. 用反证法. 设 $\text{supp } u$ 非紧, 因而无界(紧集即有界闭集, 所以 $\text{supp } u$ 非紧时必为无界), 所以一定有 $\varphi_j(x) \in \mathcal{E}(\Omega)$, 而 $\text{supp } \varphi_j \subset \text{supp } u \cap \{x; |x| > j\}$, 使 $\langle u, \varphi_j \rangle \neq 0$. 同时, 不妨设 $\langle u, \varphi_j \rangle = 1$. 但若取任一紧集 $K \subset \Omega$, 必有正整数 N 使 $K \subset \{x; |x| \leq N\}$. 所以凡 $j > N$ 必有 $\varphi_j \equiv 0$ 于 K 中, 即知 $\varphi_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中, 而应有 $\langle u, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$, 这与 $\langle u, \varphi_j \rangle = 1$ 矛盾. 所以 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 之元必为 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 之元而有紧支集者. 证毕.

由此可知 $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. 所以, 前面各节中所讲的关于广义函数的运算、性质等等对于 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 之元也都成立. 又 $u_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 中即对于任意 $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, 皆有 $\langle u_j, \varphi \rangle \rightarrow 0$. 但 $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$, 所以对任一个 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 也有 $\langle u_j, \varphi \rangle \rightarrow 0$. 所以又有 $u_j \rightarrow 0$ 于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中. 所以不但作为一个集合 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 包含于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中而且 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 中的极限关系在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中也得以保持(所以前述 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的极限的性质对 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 依然成立), 这种情况称为 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 连续嵌入在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中, 记作

$$\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \quad (51)$$

定理 2.5.3. 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω 及 Ω_1 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, 且 $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, 则可以找到一支集在 $\overline{\Omega_1}$ 的某一邻域中的连续函数 f 和整数 $m \geq 0$, 使得在 Ω_1 上

$$u = \frac{\partial^{mf}}{\partial x_1^m \cdots \partial x_n^m}. \quad (52)$$

定理 2.5.4. 对 $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ 必可找到若干个连续函数 f_a 使在 Ω 上

$$u = \sum_{|\alpha| \leq r} \partial^\alpha f_\alpha(x). \quad (54)$$

定理 2.5.3 中的偏导是广义函数意义的偏导，即

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle f, \frac{\partial^{mn} \varphi}{\partial x_1^m \cdots \partial x_n^m} \right\rangle$$

定理 2.5.5. 若 $\text{supp } u = \{0\}$ ，则 u 必可表示为 $\delta(x)$ 及其微商的有限线性组合。

证 设 u 的阶数为 $k (< +\infty)$ ，若 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ， Ω 为原点的一个邻域，由泰勒公式，

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) \cdot x^\alpha + \eta(x),$$

其中 $\eta \in C^\infty$ 满足 $\partial^\alpha \eta(0) = 0$ ， $|\alpha| \leq k$ 。我们可证明 $u(\eta) = 0$ ，于是

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle \delta, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

其中 $a_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} u(x^\alpha)$ ，这意味着

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \delta^{(\alpha)}.$$

下面证明 $u(\eta) = 0$ ，令 $\chi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，且当 $|x| \leq \epsilon$ 时 $\chi_\epsilon(x) = 1$ ，当 $|x| \geq 3\epsilon$ 时 $\chi_\epsilon(x) = 0$ ，则当 $|x| < \epsilon$ 时， $\eta(1 - \chi_\epsilon) = 0$ ，但 $\text{supp } u = \{0\}$ ，使得 $\langle u, \eta(1 - \chi_\epsilon) \rangle = 0$ ，所以 $\langle u, \eta \rangle = \langle u, \eta \chi_\epsilon \rangle$ ，因此

$$|\langle u, \eta \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha (\eta \chi_\epsilon)|,$$

按莱布尼茨公式， $\partial^\alpha (\eta \chi_\epsilon) = \sum_{\alpha' \leq \alpha} c \partial^{\alpha - \alpha'} \eta \partial^{\alpha'} \chi_\epsilon$ ，且当 $|\alpha| \leq k$ ， $|x| \leq 3\epsilon$ 时，

$$|\partial^\alpha \chi_\epsilon(x)| \leq C_\alpha \epsilon^{-|\alpha|}, \quad |\partial^\alpha \eta(x)| \leq C'_\alpha \epsilon^{k+1-|\alpha|},$$

$$|\langle u, \eta \rangle| \leq C' \epsilon,$$

其中 C' 与 ϵ 无关 ($\epsilon < 1$)，由 ϵ 的任意性可得到 $|\langle u, \eta \rangle| = 0$ ，即 $\langle u, \eta \rangle = 0$ 。

1.3.5 广义函数与函数的卷积

(定义) Def

给定 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ， $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ， $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$)，则可以定义 f, g 的卷积为

$$(f * g)(x) := \langle f(\bullet), g(x - \bullet) \rangle$$

一个重要的例子是对于 Dirac 函数 δ , 有

$$(\delta * f)(x) = \langle \delta, f(x - \bullet) \rangle = f(x)$$

需要注意的是, 函数与广义函数的卷积不是交换的!

(引理) Lem

设 $\omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集, $\varphi(x, y) \in C^\infty(\Omega \times \omega)$ 且有紧集 $K \subset \Omega$ 使得当 $x \notin K$ 时有 $\varphi(x, y) = 0$ 对于任意的 $y \in \omega$ 成立. 如果 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 则函数

$$y \mapsto \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle$$

是一个 C^∞ 函数, 并且有

$$\partial_y^\alpha \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle = \langle u, \partial_y^\alpha \varphi(\bullet, y) \rangle$$

证明:

证 对固定 $y \in \omega$, $\varphi(\bullet, y) \in C_0^\infty(\Omega)$, 它关于 y 的泰勒展开式是

$$\varphi(x, y + h) = \varphi(x, y) + \sum_{j=1}^m h_j \partial_{y_j} \varphi(x, y) + \psi(x, y, h),$$

其中 $\psi(\bullet, y, h) \in C_0^\infty(\Omega)$, 且

$$\sup_x |\partial_x^\alpha \psi(x, y, h)| = O(|h|^2), \quad \text{当 } h \rightarrow 0, \forall \alpha.$$

因为 $|\langle u, \psi(\bullet, y, h) \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_x |\partial_x^\alpha \psi(x, y, h)|$, 故 $\langle u, \psi(\bullet, y, h) \rangle = O(|h|^2)$. 所以

$$\langle u, \varphi(\bullet, y + h) \rangle = \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle$$

$$+ \sum h_j \langle u, \partial_{y_j} \varphi(\bullet, y) \rangle + O(|h|^2),$$

故函数 $\langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle$ 是可微的, 且有

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \langle u, \varphi(\bullet, y) \rangle = \langle u, \partial_{y_j} \varphi(\bullet, y) \rangle,$$

用归纳法便可证明(2).

(定理) Thm

如果 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), 则

(1) $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$(2) \operatorname{supp} f * \varphi \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} \varphi.$$

$$(3) \partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g = (\partial^\alpha f) * g$$

证明:

(1) 由上面引理是显然的.

(2) 设 $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} \varphi$, 则很显然不存在 y 使得 $y \in \operatorname{supp} f$ 并且 $x - y \in \operatorname{supp} \varphi$, 也就是说 $\operatorname{supp} \varphi(x - \bullet) = x - \operatorname{supp} \varphi$, 也就是说 $\operatorname{supp} \varphi(x - \bullet) \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, 所以

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, \varphi(x - \bullet) \rangle = 0$$

所以我们有 $\operatorname{supp} f * \varphi \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} \varphi$.

(3) 由上面的引理, 我们知道

$$\partial^\alpha(f * \varphi)(x) = \partial^\alpha \langle f, \varphi(x - \bullet) \rangle = \langle f, \partial^\alpha \varphi(x - \bullet) \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi(x - \bullet) \rangle$$

所以成立, 由此我们甚至有, 如果 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 则

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} \varphi)$$

下面我们尝试说明卷积的运算是结合的, 为此需要先介绍一个引理:

引理 3.1.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \omega)$ 且 $\operatorname{supp} \varphi \subset K_1 \times K_2$, 这里 $K_1 \subset \Omega$, $K_2 \subset \omega$ 为紧集, 如果 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 则

$$\int \langle u, \varphi(\cdot, y) \rangle dy = \langle u, \int \varphi(\cdot, y) dy \rangle. \quad (5)$$

证 由引理 3.1.2 知 $\langle u, \varphi(\cdot, y) \rangle$ 是光滑函数, 且其支集含于 K_2 , 所以是可积的. 为简便计可扩展 K_2 为 m 维正方体 $\tilde{K}_2$, 则积分可取在 $\tilde{K}_2$ 上. 等分 $\tilde{K}_2$ 为边长为 h 的小正方体, 可作黎曼和

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \langle u, \varphi(\cdot, kh) \rangle h^m = \langle u, \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \varphi(\cdot, kh) h^m \rangle,$$

令 $h \rightarrow 0$, 则一方面 $\sum \langle u, \varphi(\cdot, kh) \rangle h^m \rightarrow \int \langle u, \varphi(\cdot, y) \rangle dy$. 另一方面

$$\psi_h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \varphi(x, kh) h^m \rightarrow \int \varphi(x, y) dy,$$

不但如此，还可证明这里的收敛性是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的收敛性. 这首先是因为 $\text{supp } \phi_h$ 及 $\text{supp } \int \varphi(x, y) dy$ 都包含在 K_1 内, $\varphi(x, y)$ 在 $K_1 \times K_2$ 上是一致连续的, 因此, 上式的收敛性关于 x 是一致的, 此外对任意重指标 α 又可证明当 $h \rightarrow 0$ 时, 对 $x \in K_1$ 一致地有

$$\partial^\alpha \phi_h(x) \rightarrow \int \partial_x^\alpha \varphi(x, y) dy.$$

于是知道上式是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的收敛性, 所以(5)式成立, 作为一个习题, 请读者详细写出这个证明.

 笔记:

这里由于 f 是连续线性泛函, 我们可以这样子理解他:

$$\int \langle f, \varphi(x) \rangle \psi(x) dx = \lim \sum \langle f, \varphi(x_i) \rangle \psi(x_i) \Delta x_i = \lim \left\langle f, \sum \varphi(x_i) \psi(x_i) \Delta x_i \right\rangle = \left\langle f, \int \varphi(x) \psi(x) dx \right\rangle$$

(定理) DCC 式的卷积是结合的

若 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$(f * \psi) * \varphi = f * (\psi * \varphi)$$

证明:

证 $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi * \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} ((f * \psi) * \varphi)(x) &= \int \langle f(\cdot), \psi(z - \cdot) \rangle \varphi(x - z) dz \\ &= \langle f(\cdot), \int \psi(z - \cdot) \varphi(x - z) dz \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \int \psi(x - u - \cdot) \varphi(u) du \rangle \\ &= \langle f(\cdot), (\psi * \varphi)(x - \cdot) \rangle \\ &= (f * (\psi * \varphi))(x). \end{aligned}$$

1.3.6 广义函数的正则化

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, Φ_ε 为磨光核, 则 $f_\varepsilon = f * \Phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 意义下收敛到 f .

证明:

任取磨光核 $\varphi_\varepsilon(x)$, 我们定义反射 $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, 现在任取 $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 对于任一广义函数 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 有

$$(T * \psi)(0) = \langle T(\bullet), \psi(-\bullet) \rangle = \langle T, \check{\psi} \rangle$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \langle f * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle &= ((f * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0) \\ &= (f * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi}))(0) \\ &= \langle f, \varphi_\varepsilon * \check{\psi} \rangle \\ &= \langle f, \check{\varphi}_\varepsilon * \psi \rangle \end{aligned}$$

由于 $\check{\varphi}_\varepsilon$ 仍然是磨光核, 所以我们知道在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中有

$$\check{\varphi}_\varepsilon * \psi \rightarrow \psi$$

从而我们有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, \check{\varphi}_\varepsilon * \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle$$

从而我们知道有 $f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f$.

2025-09-22

1.3.7 广义函数与广义函数的卷积

1. 两个广义函数卷积的定义 首先说明一下, 广义函数作为 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函, 即 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, \varphi \rangle$ 确定为一实数(或复数), 且若 $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使 $\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$, 则 $u_1 = u_2$. 但我们还可以用卷积给出 $u_1 = u_2$ 的另一种条件. 利用定义3.1.1知道对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle u, \varphi \rangle = (u * \check{\varphi})(0). \quad (7)$$

所以对于 $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 可从等式

$$u_1 * \varphi = u_2 * \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

推出 $u_1 = u_2$.

两个广义函数卷积的定义，可由 $\mathcal{D}'$ 广义函数与 C_0^∞ 函数卷积定义推广而得。如果 $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $g, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ，则由定义3.1.1及定理3.1.5知

$$\begin{aligned}\langle (f * g), \varphi \rangle &= ((f * g) * \check{\varphi})(0) \\ &= (f * (g * \check{\varphi}))(0) \\ &= \langle f, (g * \check{\varphi})^\vee \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \left(\int g(y) \varphi(y - \cdot) dy \right)^\vee \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \int g(y) \varphi(y + \cdot) dy \rangle \\ &= \langle f(\cdot), \langle g(y), \varphi(y + \cdot) \rangle \rangle.\end{aligned}$$

但是此式右方即使 g 不是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数也可以有定义。于是，我们可利用这

笔记:

我们梳理一下这个技术，就是考虑 $(f * \varphi)(0) = \langle f, \varphi(-x) \rangle_x = \langle f, \check{\varphi} \rangle$ ，那如果把 0 换成别的呢？我们有

$$(f * \varphi)(-x) = \langle f, \varphi(-x - y) \rangle_y = \langle f, \check{\varphi}(x + y) \rangle_y$$

我们把这个式子反过来使用，就是

$$\langle f, \varphi(x + y) \rangle_y = (f * \check{\varphi})(-x)$$

(定义) Def

设 $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{E}'$ ，则我们可以定义

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x + y) \rangle_y \rangle_x$$

现在我们要说明定义3.2.1之合理性, 即证明(8)右方确实定义了 $\varphi \in \mathcal{D}$ 的一个连续线性泛函. 由定义3.1.1知 $\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle = (g * \check{\varphi})(-x)$, 由定理3.1.3知 $(g * \check{\varphi})(-x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 因此(8)右端有意义, 且显然 $\langle f * g, \varphi \rangle$ 关于 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是线性的, 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中), 即 $\text{supp } \varphi_j \subset K$ (紧集), 且 φ_j 在 K 上一致地收敛于0, 记 $\psi_j(x) = (g * \varphi_j)(-x)$, 则由定理3.1.3

$$\text{supp } \psi_j \subset K + \text{supp } g,$$

故 $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 很容易证明对一切重指标 α , 有 $\partial^\alpha \psi_j(x)$ 关于 x 一致收敛于0. 即 $\psi_j(x) = \langle g(y), \varphi_j(x+y) \rangle \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中). 因此 $\langle f(x), \psi_j(x) \rangle \rightarrow 0$, 即有

$$\langle f * g, \varphi_j \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi_j(x+y) \rangle \rangle \rightarrow 0.$$

这就证明了 $f * g$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函, 即 $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

类似地, 当 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 时, 用(8)仍可以定义 $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

总之要注意, f 与 g 中至少有一个有紧支集. 对两个一般的 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 不能一般地定义其卷积, 但在有些特定情况下, $f * g$ 仍有定义.

(性质) 卷积代数

广义函数卷积的性质, 卷积代数: 设 $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 且其中至少有两个具有紧支集, 则

- (1) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (2) $f * g = g * f$
- (3) $\text{supp } (f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$
- (4) $f * \delta = \delta * f = f$
- (5) $\partial^\alpha (f * g) = (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} g), \quad \forall \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
- (6) 卷积运算关于每个因子都是线性的.

证明:

证 1) 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned} \langle f * (g * h), \varphi \rangle &= \langle f(x), \langle (g * h)(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x), \langle g(y), \langle h(z), \varphi(x+y+z) \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle (f * g)(x), \langle h(z), \varphi(x+z) \rangle \rangle \\ &= \langle (f * g) * h, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

这里等式每一步都用到(8)或定理3.1.3的1), 2). 由它们可得 $\langle h(z), \varphi(x+$

$y+z) \rangle \in C^\infty$ (当 $h \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ 时), 或 $\langle h(z), \varphi(x+y+z) \rangle \in C_0^\infty$ (当 $h \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ 时).

2) 对于任意 $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 由(6)及连续函数卷积的可交换性与1), 有

$$\begin{aligned} ((f * g) * \varphi) * \psi &= (f * g) * (\varphi * \psi) = (f * g) * (\psi * \varphi) \\ &= ((f * g) * \psi) * \varphi = (f * (g * \psi)) * \varphi \\ &= f * ((g * \psi) * \varphi) = f * (\varphi * (g * \psi)) \\ &= (f * \varphi) * (g * \psi) = (g * \psi) * (f * \varphi) \\ &= g * (\psi * (f * \varphi)) = g * ((f * \varphi) * \psi) \\ &= (g * f) * (\varphi * \psi) = ((g * f) * \varphi) * \psi, \end{aligned}$$

于是有

$$(f * g) * \varphi = (g * f) * \varphi.$$

所以 $f * g = g * f$.

3) 对任意其支集包含在 $\text{supp } f + \text{supp } g$ 的余集中的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 它满足 $\text{supp } \varphi \cap (\text{supp } f + \text{supp } g) = \emptyset$, 于是有 $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = 0$ (事实上, 对 $x \in \text{supp } f$, 或者 $y \in \text{supp } g$, 有 $\varphi(x+y) = 0$, 或者 $y \in \text{supp } g$, 都可得 $\langle g(y), \varphi(x+y) \rangle = 0$). 因此 $f * g$ 在 $\text{supp } f + \text{supp } g$ 的余集上为零. 所以

$$\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

4) 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

即 $f * \delta = f$, 由2)知 $\delta * f = f * \delta = f$.

5) 对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, 应用广义函数微商的定义及引理3.1.2可得

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (f * g), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f * g, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \langle g(y), \partial^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), (-1)^{|\alpha_2|} \langle g(y), \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), \langle \partial_y^{\alpha_2} g(y), \partial_x^{\alpha_1} \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), \partial_x^{\alpha_1} \langle \partial_y^{\alpha_2} g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \partial_x^{\alpha_1} f(x), \langle \partial_y^{\alpha_2} g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} g), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

所以5)成立.

6) 是显然的.

上述卷积运算 $*$ 的结合律、交换律及(12)使得广义函数(严格讲是紧支集的)在卷积运算下成为一个有单位元的代数, 其单位元为 δ 函数, 称其为卷积代数.

书上这个 (3) 的证明是错误的，因为你要说明 $\text{supp } f \cap \text{supp } \psi = \emptyset$ ，其中 $\psi = \langle g, \varphi(x+y) \rangle_y$ ，但是书上的证明是无法弥补的，他只能说明支集的内部不交，边界相交的情况按照这个证明方法很难说明. 我们可以采取另外一种方式，见 [slfc 2025-09-22 and 09-24 作业](#)

1.4 傅里叶变换

我们回忆一下一般而言的 Fourier 变换是什么，给定 $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ， f 的 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

1.4.1 速降函数空间 $\mathcal{S}$

(定义) Def

速降空间，又叫 Schwartz 空间，记为 $\mathcal{S}$ ，而所有满足以下条件的函数 $f(x)$ 的空间：对于任意的重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ，存在常数 $c(\alpha, \beta) \geq 0$ 使得

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq c(\alpha, \beta)$$

$f_j(x)$ 在 $\mathcal{S}$ 中趋于 0，是指对于固定的 α, β ，有

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f_j(x)| \rightarrow 0$$

由定义直接可知， $\mathcal{S}$ 中之元连同其各阶微商在 ∞ 处皆以高于任意次多项式倒数的阶趋于 0，所以 $\mathcal{S}$ 空间也称为急减函数空间。

由定义直接可以看到，取任意多项式 $Q(x)$ 和常系数偏微分算子 $P(D)$ ，都有

$$Q(x)P(D)\mathcal{S} \subset \mathcal{S},$$

及

$$P(D)Q(x)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}.$$

⚠ 注意：

我更喜欢用速降而不是急减.

(定义) Def

对于 $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ ，请以其 Fourier 变换为

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx$$

由于 $\varphi(x)$ 在 ∞ 处速降，所以上面的积分是收敛的，我们来证明一下：

(引理) Lem

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1.$$

证明：

由定义，我们知道存在 $C > 0$ ，使得 $\sup |x^\alpha \varphi(x)| \leq C$ ，也就是说 $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{|x^\alpha|}$ ，我们取充分大的 α 使得 $\frac{C}{|x^\alpha|}$ 在 $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$ 上是可积的，于是我们知道

$$\int |\varphi| dx = \int_{B(0,1)} |\varphi| dx + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} |\varphi| dx \leq C_1 + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{C}{|x^\alpha|} dx < \infty$$

实际上这个玩意还能加强，即

(定理) Thm

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^p (\infty > p \geq 1)$$

证明：

证明和 $p = 1$ 的情况是完全一样的.

我们定义 $D_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}$

$\varphi \in \mathcal{S}$, 记其 Fourier 变换为 $F: \varphi \mapsto \hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, 而且

$$F(D^\alpha \varphi)(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi), \quad F(x^\alpha \varphi)(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$$

证明:

证 由于 $\varphi(x)$ 急减, 我们可以在积分号下求微商, 也可以作分部积分而且积分号外之项为 0, 所以

$$\begin{aligned} \int e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha \varphi(x) dx &= \int [(-D_x)^\alpha e^{-ix \cdot \xi}] \varphi(x) dx \\ &= \int \left[\left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \right] \varphi(x) dx \\ &= \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

又因为 $x_j e^{-ix \cdot \xi} = -D_{\xi_j} e^{-ix \cdot \xi}$, 所以

$$\begin{aligned} \int e^{-ix \cdot \xi} x^\alpha \varphi(x) dx &= \int (-D_\xi)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= (-D_\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| &= \left| \int e^{-ix \cdot \xi} D_x^\alpha [(-x)^\beta \varphi(x)] dx \right| \\ &\leq \int |(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2} (1 + |x|^2)^{(n+1)/2} D_x^\alpha [(-x)^\beta \varphi(x)]| dx \\ &\leq C \sup_{\mathbf{R}^n} |(1 + |x|^2)^{(n+1)/2} D_x^\alpha [(-x)^\beta \varphi(x)]| < \infty. \end{aligned}$$

所以 F 映 $\mathcal{S}$ 中之元到 $\mathcal{S}$ 中, 而且由 $\mathcal{S}$ 中趋于 0 的定义, $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 是连续的, 这一点留作习题.

我们有 $\int e^{-ix \cdot \xi} e^{-|x|^2/2} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-|\xi|^2/2}$

证明:

证 因为

$$-ix \cdot \xi - |x|^2/2 = -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n x_j (i\xi_j) + \sum_{j=1}^n (i\xi_j)^2 \right) - \frac{1}{2} |\xi|^2,$$

所以

$$\int e^{-ix \cdot \xi} e^{-|x|^2/2} dx = e^{-|\xi|^2/2} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_j + i\xi_j)^2/2} dx_j.$$

对积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_j + i\xi_j)^2/2} dx_j$, 应用柯西定理来改变积分路径如图 4-1, 即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_j + i\xi_j)^2/2} dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2} dx_j = \sqrt{2\pi}.$$

于是(8)得证.

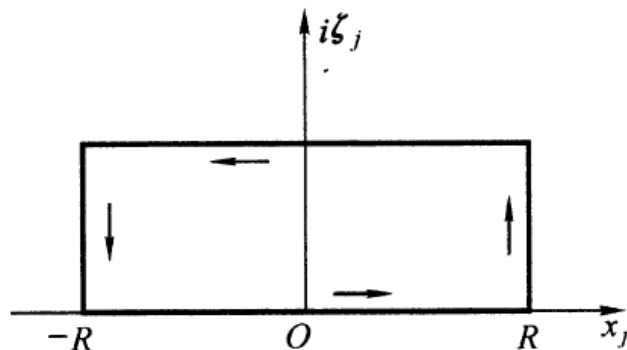


图 4-1

例子: Gauss 函数

我们称 $g(x) = e^{-|x|^2/2}$ 为 Gauss 函数, 这个函数的特点是其傅里叶变换就是自身(差一个常数因子).

2025-09-29

(定理) Thm

$F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 有连续的逆映射 $F^{-1}: \widehat{\varphi} \mapsto \varphi$, 由下式给出

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

证明:

证 取上述高斯函数 $g(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ 有

$$\begin{aligned}\int \hat{\varphi}(\xi) g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi &= \int g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \int \varphi(y) e^{-iy \cdot \xi} dy \\&= \iint e^{i\xi \cdot (x-y)} g(\xi) \varphi(y) dy d\xi \\&= \int \varphi(y) dy \int g(\xi) e^{-i(y-x) \cdot \xi} d\xi \\&= \int \varphi(y) \hat{g}(y-x) dy \\&= \int \hat{g}(y) \varphi(x+y) dy.\end{aligned}$$

用 $g(\varepsilon\xi)$ ($\varepsilon > 0$) 代替 $g(\xi)$, 则 $\hat{g}(y)$ 应改为 $\varepsilon^{-n} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$ (见下面的(12)式), 令 $y = \varepsilon y_1$ 代入上式有

$$\int \hat{\varphi}(\xi) g(\varepsilon\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi = \int \hat{g}(y_1) \varphi(x + \varepsilon y_1) dy_1.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$g(0) \int \hat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \varphi(x) \int \hat{g}(y_1) dy_1 = (2\pi)^n \varphi(x).$$

这里用到了引理 4.1.4 知 $\hat{g}(y_1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-|y_1|^2/2}$, 又 $\int e^{-|y_1|^2/2} dy_1 = (2\pi)^{n/2}$,

所以 $\int \hat{g}(y_1) dy_1 = (2\pi)^n$. 因为 $g(0)=1$, 于是定理得证.

下面讨论傅里叶变换的性质, 有一些明显的性质作为习题.

1) 傅里叶变换与反射:

$$F: \check{\varphi} \mapsto F(\check{\varphi})(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(-x) dx = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi). \quad (10)$$

2) 傅里叶变换与平移:

$$F: \tau_h \varphi \mapsto F(\tau_h \varphi)(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x - h) dx = e^{-ih \cdot \xi} F(\varphi)(\xi). \quad (11)$$

3) 傅里叶变换与相似变换:

$$\begin{aligned} F: \varphi(cx) &\mapsto F(\varphi(c \cdot))(\xi) \\ &= \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(cx) dx \\ &= |c|^{-n} F(\varphi)\left(\frac{\xi}{c}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $F(\varphi(c \cdot))(\xi)$ 表示先将 φ 之自变量乘以 c 再作傅里叶变换, 即

$$F(\varphi(c \cdot))(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(cx) dx.$$

4) 傅里叶变换与非奇异线性变换: 设 $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则由 $y = Ax$ 及 $x = A^{-1}y$ 有

$$\begin{aligned} F: \varphi(Ax) &\mapsto F(\varphi(A \cdot))(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(Ax) dx \\ &= \int e^{-i(A^{-1}y) \cdot \xi} \varphi(y) dy \quad (y = Ax) \\ &= |\det A|^{-1} \int e^{-i\langle y, {}^t A^{-1} \xi \rangle} \varphi(y) dy \\ &= F(\varphi)({}^t A^{-1} \xi) \cdot |\det A|^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

这里我们用到了线性代数中关于内积记号及双线性形式的一个公式: 若线性变换 B 的表示矩阵为 (b_{ij}) , 则

$$\begin{aligned} (By) \cdot \xi &\triangleq \langle By, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_i \xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} \xi_j \right) y_i = \langle y, {}^t B \xi \rangle. \end{aligned}$$

5) 傅里叶变换与微分运算: 傅里叶变换把微分运算变成为乘运算, 它也把乘法运算变成为微分运算, 即对 $f \in \mathcal{S}$ 及任意重指标 α 有

$$\begin{aligned} F(D^\alpha f)(\xi) &= \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \\ F(x^\alpha f(x))(\xi) &= (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

我们还有结论：速降函数的卷积的偏导可以乱放，即如果 $f, g \in \mathcal{S}$ ，则有

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$$

(定理) Thm

若 $f, g \in \mathcal{S}$ ，则 $f * g \in \mathcal{S}$ ，并且

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

证明：

证 $(f * g)^\wedge(\xi)$ 其实是一个逐次积分

$$\int e^{-ix \cdot \xi} dx \int f(y) g(x - y) dy .$$

因为 f, g 都急减，所以另一个逐次积分 $\int f(y) dy \int g(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx$ 是存在的。因此，由数学分析中的定理，这两个逐次积分相等：

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int f(y) dy \int g(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int f(y) dy \int g(x - y) e^{-i(x-y) \cdot \xi} e^{-iy \cdot \xi} dx \\ &= \int e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \int g(t) e^{-it \cdot \xi} dt \quad (t = x - y) \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) . \end{aligned}$$

因为两个 $\mathcal{S}$ 函数之积仍为 $\mathcal{S}$ 函数，所以 $(f * g)^\wedge \in \mathcal{S}$ 。又因为傅里叶变换是由 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}$ 的线性同构，所以 $(f * g) \in \mathcal{S}$ 。定理得证。

(推论) Cor

我们有 $\widehat{f \cdot g}(\xi) = (2\pi)^{-n} (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$

证明：

由于 $f \cdot g \in \mathcal{S}$, 所以 $f, g \in \mathcal{S}$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\widehat{f \cdot g}(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) g(x) dx \\&= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(x) dx \\&= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \eta} \hat{g}(\eta) d\eta \\&= (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\eta) d\eta \int e^{-ix \cdot (\xi - \eta)} f(x) dx \\&= (2\pi)^n \int \hat{g}(\eta) \hat{f}(\xi - \eta) d\eta \\&= (2\pi)^n (\hat{f} * \hat{g})(\xi)\end{aligned}$$

下面我们证明 Parseval 等式!!!!

(定理) Parseval 等式

如果 $f, g \in \mathcal{S}$, 则有

$$\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle$$

如果令 $(f, g) = \int f \bar{g} dx$, 则有

$$(f, g) = (2\pi)^{-n} (\hat{f}, \hat{g})$$

证明:

证 将绝对收敛的二重积分化为逐次积分有

$$\begin{aligned}\iint f(\xi) g(x) e^{-ix \cdot \xi} dx d\xi &= \int g(x) dx \int e^{-ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi \\&= \int f(\xi) d\xi \int g(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.\end{aligned}$$

后两个式子即为 $\langle \hat{f}, g \rangle$ 和 $\langle f, \hat{g} \rangle$.

同样

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{-n}(\hat{f}, \hat{g}) &= (2\pi)^{-n} \iint f(x) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-ix \cdot \xi} dx d\xi \\
 &= \int f(x) dx \cdot (2\pi)^{-n} \int \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-ix \cdot \xi} d\xi \\
 &= \int f(x) dx \overline{(2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi} = (f, g).
 \end{aligned}$$

! 警告:

我不是很明白这张黑板在些什么, 自行领悟吧.

黑板上的推导如下:

$$\begin{aligned}
 \text{定义 } T_{\xi}(\zeta) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \zeta^{\alpha} \\
 \text{则 } P_{\alpha, D_x} &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} T_{\xi}(\zeta) F_{x \rightarrow \xi} \\
 \text{则 } \varphi &\in \mathcal{S} \text{ 且 } \varphi(x) \in \text{SUR}^n \\
 F_{\xi \rightarrow x}^{-1} T_{\xi}(\zeta) F_{x \rightarrow \xi}(\varphi(x)) &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\sigma(\xi) \hat{\varphi}(\xi)) \\
 &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \zeta^{\alpha} \hat{\varphi}(\xi) \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) F_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\zeta^{\alpha} \hat{\varphi}(\xi)) \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} \varphi(x) = P_{\alpha, D_x} \varphi(x)
 \end{aligned}$$

1.4.2 缓增广义函数及其傅里叶变换

(定义) 缓增广义函数

$\mathcal{S}$ 的连续线性泛函称为缓增广义函数, 记为 $\mathcal{S}'$.

这里 $u \in \mathcal{S}'$ 的连续性可以理解为: 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{S}$ 中), 则 $u(\varphi_j) \rightarrow 0$. 它的必要充分条件是: 存在非负整数 k, m 以及常数 $c_{k,m} \geq 0$ 使对一切 $\varphi \in \mathcal{S}$ 有

$$|u(\varphi)| \leq c_{k,m} \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq m} \sup_{\mathbf{R}^n} |x^{\alpha} \partial_x^{\beta} \varphi|. \quad (18)$$

我们实际上有包含关系，首先在集合层面有

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$$

然而还不止于此. 例如设 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}$ 中), 则一切 φ_j 有共同紧支集, 在其外一切 $\varphi_j \equiv 0$. 而且对任意 β , $\partial_x^\beta \varphi_j$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致趋于 0. 再给任意 α , 也易见 $x^\alpha \partial_x^\beta \varphi_j$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致趋于 0. 这就是说 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{S}$ 中). 所以对 $\varphi_j \in \mathcal{D}$, 不但有 $\varphi_j \in \mathcal{S}$, 而且给出了一个连续的嵌入算子 $l: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$, $l\varphi_j = \varphi_j$, 但左方的 φ_j 认为是 $\mathcal{D}$ 中之元, 右方的 φ_j 认为是 $\mathcal{S}$ 中之元. 当左方的 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}$ 中) 时, $l\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{S}$ 中), 所以说嵌入算子 $l: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ 是连续的. 同样可以证明嵌入算子 $l: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ 也是连续的. 于是把上述包含关系和嵌入算子的连续性综合在一起, 记作

于是我们实际上有

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}.$$

现在来看广义函数. 显然 $\mathcal{E}'$ 之一切元都是 $\mathcal{S}'$ 之元, $\mathcal{S}'$ 之一切元都是 $\mathcal{D}'$ 之元, 这是(19)式的直接推论. 例如设 $u \in \mathcal{S}'$, $\varphi_j \in \mathcal{D}$, 则因 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, 所以 $\varphi_j \in \mathcal{S}$, 而 $u(\varphi_j)$ 有意义且是线性泛函. 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}$ 中), 则由(19)式也有 $\varphi_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{S}$ 中), 从而 $u(\varphi_j) \rightarrow 0$. 这就是说 u 作为 $\mathcal{D}$ 上的线性泛函也是连续的, 所以 $u \in \mathcal{D}'$. 亦即 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. 同理 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$. 此外, 若 $u_j \in \mathcal{S}'$ 而且 $u_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{S}'$ 中), 则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, $u_j(\varphi) \rightarrow 0$. 但因 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, 所以对任意 $\varphi \in \mathcal{D}$ 也有 $u_j(\varphi) \rightarrow 0$, 即是 $u_j \rightarrow 0$ (于 $\mathcal{D}'$ 中). 这就是说, 嵌入映射 $l: \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ 也是连续的. 用这样的方法我们证明了:

(定理) Thm

我们有嵌入

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

于是我们之前关于 $\mathcal{D}'$ 中元素得到的性质都可以运用在 $\mathcal{S}'$. 但是乘子运算是不一样的, 前面说过, 对于任意的 $a(x) \in C^\infty$ 都是 $\mathcal{D}'$ 乘子, 所以对于 $u \in \mathcal{S}'$, au 仍然是有意义的, 但是一般来说只能保证 $au \in \mathcal{D}'$ 而不能保证在 $\mathcal{S}'$ 中. 所以此时我们需要定义 $\mathcal{S}'$ 乘子.

(定义) $\mathcal{S}'$ 乘子

令 $a(x) \in C^\infty$ 使得对于任意重指标 α , 存在 $c(\alpha) > 0$ 和整数 $N(\alpha)$ 使得

$$|D^\alpha a(x)| \leq c(\alpha)(1 + |x|^2)^{N(\alpha)}$$

则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}$, 仍然有 $a\varphi \in \mathcal{S}$, 所以用

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

来定义 au , 可以保证 $au \in \mathcal{S}'$, 称这种 a 为**缓增函数**, 所有缓增函数的集合记为 $\mathcal{O}_M$.

⚠ 注意:

缓增函数的充分必要条件为:

集记作 $\mathcal{O}_M$. 可以证明, 只有 $\mathcal{O}_M$ 之元才能是 $\mathcal{S}'$ 乘子. 不但如此, 我们还可以证明, $u \in \mathcal{S}'$ 的充分必要条件就是它可以写为 $u = \partial^\alpha [(1 + |x|^2)^{m/2} f(x)]$, $f(x)$ 是有界连续函数. 所以在一定意义上可以说 u 本身也是“缓增”的. 缓增广义函数的名称来源就在于此. 所以例如 $e^{|x|^2}$ 就不可能是 $\mathcal{S}'$ 广义函数. 这

证明我们就默认他.

下面来讨论 $\mathcal{S}'$ 的傅里叶变换, 他是建立在 Parseval 恒等式的基础上的, 即对于 $f, g_j \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\langle \widehat{f}, \varphi_j \rangle = \langle f, \widehat{\varphi_j} \rangle$$

现在如果 $f \in \mathcal{S}'$, 则上式左方没有意义, 但是右方是有意义的, 因为傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 把速降函数送到速降函数, 并且当在 $\mathcal{S}$ 中的意义下 $\varphi_j \rightarrow 0$ 时, 我们知道 $\widehat{\varphi_j} \rightarrow 0$, 于是自然有 $\langle \widehat{f}, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$, 所以 $\widehat{f}$ 是连续线性泛函.

(定义) 广义函数的傅里叶变换

若 $f \in \mathcal{S}'$, 则对于 $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, 我们定义 f 的傅里叶变换为

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$$

📌 笔记:

我们来证明 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ 是一个连续线性映射:
线性是因为:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(aT_1 + bT_2), \varphi \rangle &= \langle aT_1 + bT_2, \widehat{\varphi} \rangle && \text{(根据 } \mathcal{F} \text{ 在 } \mathcal{S}' \text{ 上的定义)} \\
&= a\langle T_1, \widehat{\varphi} \rangle + b\langle T_2, \widehat{\varphi} \rangle && \text{(因为 } T_1, T_2 \text{ 本身是线性泛函)} \\
&= a\langle \mathcal{F}(T_1), \varphi \rangle + b\langle \mathcal{F}(T_2), \varphi \rangle && \text{(再次使用 } \mathcal{F} \text{ 在 } \mathcal{S}' \text{ 上的定义)} \\
&= \langle a\mathcal{F}(T_1) + b\mathcal{F}(T_2), \varphi \rangle && \text{(根据广义函数的加法和数乘定义)}
\end{aligned}$$

连续性是因为任意给定 $T_k \rightarrow T$ 弱*收敛, 则我们知道

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

于是对于任意的 $\varphi \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}(T_k), \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$$

所以我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_k) = \mathcal{F}(T)$$

所以连续性得证.

 **例子:** $\mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty)$ 可以嵌入 $\mathcal{S}'$

设 $f \in \mathcal{L}^p (\infty > p > 1)$, 则对于 $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, 我们有

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int |f(x) \varphi(x)| dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{L}^q}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 我们早在先前就已经说明了 $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^q$. 所以自然有 $f \in \mathcal{S}'$.

当 $p = \infty$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi(x) \rangle| &= \left| \int f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \text{ess sup } |f| \int |\varphi(x)| dx \\
&\leq \text{ess sup } |f| \sup_{\mathbf{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^n \varphi(x) \right| \int \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n}.
\end{aligned}$$

当 $p = 1$ 的情况. 利用勒贝格控制收敛定理即可证明 $L^1 \subset \mathcal{S}'$. 总之, $f \in L^p$ 时, 按 $\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$ 定义了一个 $\mathcal{S}'$ 广义函数. 所以 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 函数都是 $\mathcal{S}'$ 广义函数.

我们记傅里叶变换为 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$, 我们可以说明

(定理) $\mathcal{S}'$ 中广义函数的傅里叶变化是线性同构

$\mathcal{S}'$ 中广义函数的傅里叶变化是线性同构.

证明:

我们只需要证明 $\mathcal{F}^{-1}$ 的存在, 对于任意的 $g \in \mathcal{S}'$, 存在 $f \in \mathcal{S}'$ 使得 $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}$. 由于 $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 是线性同构(我们在前面已经证明了傅里叶逆变换公式), 我们定义

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \check{\varphi} \rangle$$

于是我们知道

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \check{\check{\varphi}} \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$$

⚠ 注意:

实际上构造的过程是:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$$

(性质) 缓增广义函数傅里叶变换的微分

对于 $f \in \mathcal{S}'$, 我们有

$$\widehat{D_x^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

证明:

首先对于任意的 $\varphi \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\langle \widehat{D_x^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle D_x^\alpha f, \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D_x^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, (-D_x)^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{x^\alpha \varphi(x)} \rangle = \langle \widehat{f}, x^\alpha \varphi(x) \rangle = \langle x^\alpha \widehat{f}, \varphi(x) \rangle$$

于是第一个式子成立, 对于第二个式子, 我们有

$$\langle \widehat{x^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle x^\alpha f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, x^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{D_\xi^\alpha \varphi} \rangle = \langle \widehat{f}, D_\xi^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \widehat{f}, (-D_\xi)^\alpha \varphi \rangle = \langle (-D_\xi)^\alpha \widehat{f}, \varphi \rangle$$

所以我们知道第二个式子成立.

⚠ 注意:

这两个性质的证明完美地体现了对偶思想。我们在 $\mathcal{S}'$ 上证明一个性质, 通过定义把运算转移到测试函数上, 最终归结为在 $\mathcal{S}$ 上证明其“对偶”的性质。

- 证明“导数变乘法” $\widehat{Df} = \xi \widehat{f}$, 需要用到“乘法变导数” $\widehat{x\varphi} = -D\widehat{\varphi}$.
- 证明“乘法变导数” $\widehat{x^\alpha f} = -D\widehat{f}$, 需要用到“导数变乘法” $\widehat{D\varphi} = \xi \widehat{\varphi}$.

正在施工:

$S'(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换.
 Δ 卷积.
 对 $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $g \in S(\mathbb{R}^n)$.
 $\Rightarrow (f * g)(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle$
 $\Delta \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$
 注: 其实也有 $f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$g \in S(\mathbb{R}^n)$.
 $f * g \in$ 缓增 C^∞ 函数 $\subset S'(\mathbb{R}^n)$.
 即 $S'(\mathbb{R}^n)$ 的乘空间
 $\Rightarrow \widehat{f * g} \xrightarrow{\text{LHS}} \widehat{f * g}$ 又 Fourier 变换,
 $\in S'(\mathbb{R}^n)$
 RHS $\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{g} \in S(\mathbb{R}^n)$
 $\in$ 缓增 C^∞

①
 视为乘积
 $\rightarrow \widehat{f} \cdot \widehat{g} \in S'(\mathbb{R}^n)$

(定理) 物理学家的歪打正着

若 $g \in \mathcal{O}' \subset \mathcal{S}'$, 则 $\hat{g}(\xi) = \langle g, e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x \in \mathcal{O}_M$.

证明:

证 因 $g \in \mathcal{E}'$, 则 $g * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 这里 φ_ε 是磨光核, 且 $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$ (于 $\mathcal{E}'$ 中) (当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时). 从而由 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ 知 $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$ (于 $\mathcal{S}'$ 中), 于是 $F(g * \varphi_\varepsilon) \rightarrow F(g)$ (于 $\mathcal{S}'$ 中), 而

$$F(g * \varphi_\varepsilon)(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} (g * \varphi_\varepsilon)(x) dx,$$

且 $\text{supp}(g * \varphi_\varepsilon) \subset \text{supp} g + \text{supp} \varphi_\varepsilon \subset \text{supp} g + B_1$ (取 $\varepsilon < 1$). 由引理 3.1.4, 则有

$$\begin{aligned} F(g * \varphi_\varepsilon)(\xi) &= \int \langle g(y), \varphi_\varepsilon(x - y) \rangle e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \langle g(y), \int \varphi_\varepsilon(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \rangle. \end{aligned}$$

当 ξ 在任意一紧集 K 上时, 由定理 2.2.4 知 $\int \varphi_\varepsilon(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \rightarrow e^{-iy \cdot \xi}$ 于 $\mathcal{D}(\mathbf{R}_y^n)$ 中 (关于 ξ 一致地), 这便得到, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时

$$F(g * \varphi_\varepsilon)(\xi) \rightarrow \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y$$

关于 $\xi \in K$ 一致地成立. 于是

$$F(g)(\xi) = \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y.$$

所以, 再由引理 3.1.2 便知 $\hat{g}(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, 并且, 对任一重指标 α , 有

$$D^\alpha \hat{g}(\xi) = \langle g(y), (-y)^\alpha e^{-iy \cdot \xi} \rangle_y.$$

由 $g \in \mathcal{E}'$, 应用第二章 §5 估计式(49), 于是可得: 存在常数 c , 整数 $m \geq 0$ 以及紧集 K , 有

$$\begin{aligned} |D^\alpha \hat{g}(\xi)| &\leq c \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{y \in K} |\partial_y^\beta (-y)^\alpha e^{-iy \cdot \xi}| \\ &\leq c \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{y \in K} \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} c' |(-y)^{\alpha - \beta_1} (-\xi)^{\beta_2} e^{-iy \cdot \xi}| \end{aligned}$$

$$\leq c(K, m, \alpha) \sum_{|\beta| \leq m} (1 + |\xi|)^{|\beta|} \leq c(g, \alpha) (1 + |\xi|)^m.$$

此即表明 $\hat{g}(\xi)$ 满足(21)式, 所以它是一个缓增函数.

 例子: 常见傅里叶变换

例 1. $\delta \in \mathcal{D}'$, 因此由上面的定理

$$\hat{\delta}(\xi) = \langle \delta(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle = 1.$$

也因此, $F^{-1}(1) = \delta(x)$, 这就是许多物理书中的公式

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} d\xi = \delta(x)$$

的含义.

例 2. $1 \in \mathcal{S}'$, 这是显然的, 所以由定义

$$\begin{aligned} \langle \hat{1}, \varphi \rangle &= \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{i0 \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

因此

$$\hat{1} = (2\pi)^n \delta(x).$$

例 4. $\delta(x, t)$ 的关于 x 的部分傅里叶变换是

$$\langle \delta(x, t), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x = \delta(t).$$

事实上, $\delta(x, t)$ 可正则化: $\delta(x, t) * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, 其中 $\delta(x, t) * \varphi_\varepsilon \rightarrow \delta(x, t)$ 于 $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ 中, 再关于 x 作部分傅里叶变换 $\langle \delta(x, t) * \varphi_\varepsilon, e^{-ix \cdot \xi} \rangle \in C^\infty(\mathbf{R}_{\xi, t}^{n+1})$, 对任意 $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, 有

$$\begin{aligned} &\langle \langle \delta(x, t) * \varphi_\varepsilon, e^{-ix \cdot \xi} \rangle, \varphi(t) \rangle \\ &= \langle \delta(x, t) * \varphi_\varepsilon, e^{-x \cdot \xi} \varphi(t) \rangle \\ &\rightarrow \langle \delta(x, t), e^{-ix \cdot \xi} \varphi(t) \rangle \\ &= \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \quad (\text{当 } \varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

而

$$\langle \langle \delta(x, t) * \varphi_\varepsilon, e^{-x \cdot \xi} \rangle, \varphi(t) \rangle \rightarrow \langle \langle \delta(x, t), e^{-x \cdot \xi} \rangle, \varphi(t) \rangle,$$

即有

$$\langle \delta(x, t), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x = \delta(t).$$

1.5 Sobolev 空间与 Holder 空间

1.5.1 Soblev 空间

(定义) 弱导数

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. 如果存在 $g_i \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} g_i \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

则称 g_i 为 u 关于变量 x_i 的弱导数,仍用通常的记号记为

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$$

有时也记为 $D_i u = g_i$. 如果对所有的 $1 \leq i \leq n$, u 关于变量 x_i 的弱导数 g_i 都存在,则称

$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ 为 u 的弱梯度,记为 $\nabla u = \mathbf{g}$,有时也记为 $Du = \mathbf{g}$. 这时我们也称函数 u 是弱可微的,并记 $u \in W^1(\Omega)$. 类似地可引进 k 阶弱导数和 k 次弱可微. 如果函数 u 在 Ω 上是 k 次弱可微的,则记 $u \in W^k(\Omega)$.

(定义) Sobolev 空间

设 k 为非负整数, $p \geq 1$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 我们称集合

$$\{u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{对满足 } |\alpha| \leq k \text{ 的任意 } \alpha\}$$

赋以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

后得到的线性赋范空间为 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$.

⚠ 注意:

- ① $W^{k,p}(\Omega)$ 为 Banach 空间.
- ② $p = 2$ 记为 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$
- ③ $W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega, z)$ 中的闭包

不加证明地介绍下面的定理和命题:

(定理) Sobolev 空间的性质

(1) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, $W^{0,p}(\Omega) = W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, 但对有界区域 Ω , 当 $k \geq 1$ 时 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 的真子空间.

(2) $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中是稠密的.

(命题) (乘积运算)

设 $u, v \in H^1(\Omega)$, 则

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(命题) 变量替换

设 Ω, D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $u(x) \in W^1(\Omega)$, $\Phi(y) : D \rightarrow \Omega$ 为一连续可微映射. 则

$$\frac{\partial u(\Phi(y))}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad k = 1, \dots, n$$

其中 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$.

(命题) 复合运算

设 $f(s)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, $f'(s)$ 分段连续, 其间断点的集合记为 L , 且存在常数 K , 使得 $|f'(s)| \leq K$. 又设 $u \in W^1(\Omega)$, 则 $f(u) \in W^1(\Omega)$, 且

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_i} = \begin{cases} f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{若 } u \notin L, \\ 0, & \text{若 } u \in L. \end{cases}$$

1.5.2 Sobolev 空间的内插不等式

(定义) 一致内锥性质

我们说区域 Ω 具有一致内锥性质, 如果存在有限锥 V , 使得每一点 $x \in \Omega$ 是一个包含于 Ω 内且全等于 V 的有限锥 V_x 的顶点.

(定理) (Ehrling-Nirenberg-Gagliardo 插值不等式)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为具有一致内锥性质的有界区域, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 恒存在只依赖于 $p \geq 1, k, \varepsilon$ 与区域 Ω 的常数 $C > 0$, 使得对任何 $u \in W^{k,p}(\Omega)$, 有

$$\sum_{|\beta| \leq k-1} \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^p dx \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx + C \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

这个不等式揭示的是这样一个重要事实： $W^{k,p}(\Omega)$ 中函数的中间导数的 L^p 模可通过它本身及其最高阶导数的 L^p 模估出。

证明：

定理的详细证明可参看 Adams 《Sobolev Spaces》 第 4 章. 证明的基本精神从如下特殊情形的讨论即可看出： $k=2, n=1, \Omega=(0,1)$,且 $u \in C^2[0,1]$. 设 $0 < \xi < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < \eta < 1$. 由中值定理知, 存在 $\lambda \in (\xi, \eta)$,使得

$$|u'(\lambda)| = \left| \frac{u(\eta) - u(\xi)}{\eta - \xi} \right| \leq 3|u(\xi)| + 3|u(\eta)|.$$

因此对任意的 $x \in (0,1)$,有

$$|u'(x)| = \left| u'(\lambda) + \int_{\lambda}^x u''(t) dt \right| \leq 3|u(\xi)| + 3|u(\eta)| + \int_0^1 |u''(t)| dt.$$

对 ξ 在 $(0, 1/3)$ 上,对 η 在 $(2/3, 1)$ 上积分上述不等式可得

$$\frac{1}{9}|u'(x)| \leq \int_0^{1/3} |u(\xi)| d\xi + \int_{2/3}^1 |u(\eta)| d\eta + \frac{1}{9} \int_0^1 |u''(t)| dt \leq \int_0^1 |u(t)| dt + \frac{1}{9} \int_0^1 |u''(t)| dt.$$

由 Hölder 不等式进而有

$$|u'(x)|^p \leq 2^{p-1} \cdot 9^p \int_0^1 |u(t)|^p dt + 2^{p-1} \int_0^1 |u''(t)|^p dt.$$

故

$$\int_0^1 |u'(t)|^p dt \leq K_p \int_0^1 |u''(t)|^p dt + K_p \int_0^1 |u(t)|^p dt,$$

其中 $K_p = 2^{p-1} \cdot 9^p$. 对任意区间 (a,b) ,经变量替换,利用上面的不等式就可得到

$$\int_a^b |u'(t)|^p dt \leq K_p(b-a)^p \int_a^b |u''(t)|^p dt + K_p(b-a)^{-p} \int_a^b |u(t)|^p dt$$

不妨设 $\varepsilon \in (0,1)$. 取正整数 N_2 ,使得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{K_p} \right)^{1/p} \leq \frac{1}{N} \leq \left(\frac{\varepsilon}{K_p} \right)^{1/p}.$$

对 $j=0,1,\dots,N$,令 $a_j = \frac{j}{N}$,则 $a_j - a_{j-1} = \frac{1}{N}$. 对区间 (a_{j-1}, a_j) 利用式 (1.2.2), 然后对 j 从 1 到 N 求和就得到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |u'(t)|^p dt &= \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} |u'(t)|^p dt \\
&\leq K_p \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{N^p} \int_{a_{j-1}}^{a_j} |u''(t)|^p dt + N^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |u(t)|^p dt \right\} \\
&\leq \varepsilon \int_0^1 |u''(t)|^p dt + \frac{2^p K_p^2}{\varepsilon} \int_0^1 |u(t)|^p dt.
\end{aligned}$$

1.5.3 Holder 空间

(定义) 半范数

设 $u(x)$ 是定义于 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数. 对于 $0 < \alpha < 1$, 引入 Hölder 半范数

$$[u]_{\alpha; \Omega} = \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

用 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 表示 Ω 上满足 $[u]_{\alpha; \Omega} < +\infty$ 的函数全体, 并定义范数如下:

$$|u|_{\alpha; \Omega} = |u|_{0; \Omega} + [u]_{\alpha; \Omega},$$

其中 $|u|_{0; \Omega}$ 表示 $u(x)$ 在 Ω 上的最大模, 即

$$|u|_{0; \Omega} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

进一步, 可对非负整数 k , 定义函数空间

$$C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u; D^\beta u \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \text{ 对满足 } |\beta| \leq k \text{ 的任意 } \beta \right\},$$

并定义半范数

$$[u]_{k, \alpha; \Omega} = \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha; \Omega},$$

$$[u]_{k, 0; \Omega} = [u]_{k; \Omega} = \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u|_{0; \Omega}$$

和范数

$$|u|_{k, \alpha; \Omega} = \sum_{|\beta| \leq k} |D^\beta u|_{\alpha; \Omega},$$

$$|u|_{k, 0; \Omega} = |u|_{k; \Omega} = \sum_{|\beta| \leq k} |D^\beta u|_{0; \Omega}.$$

如果对任意的 $\Omega' \subset \subset \Omega$, 都有 $u \in C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}')$, 则称 $u \in C^{k, \alpha}(\Omega)$. 在不引起混淆的情况下, 我们有时省略 Hölder 半范数和范数的下标中的集合 Ω .

这个概念可能初看起来有些抽象，但它其实是为了描述一类“恰到好处”的光滑函数而生的。它们比普通连续函数更“规整”，但又不像可微函数那样要求严格。

让我们循序渐进地来理解它。

1. 从我们熟悉的概念出发：函数的“光滑程度”

在学习微积分时，我们已经接触了衡量函数光滑程度的标尺：

- **连续函数 C^0** ：函数图像是连在一起的，没有“断点”或“跳跃”。这是最基本的要求。
- **连续可微函数 C^1** ：函数不仅连续，其导数也连续。这意味着函数图像不仅没有断点，还没有“尖角”，处处都有光滑的切线。
- **k 阶连续可微函数 C^k** ：函数的直到 k 阶的导数都存在且连续。 k 越大，函数就越光滑。

这个标尺很好，但它在 C^0 和 C^1 之间留下了一个巨大的“鸿沟”。

思考一个问题：一个函数可以是连续的（属于 C^0 ），但不是连续可微的（不属于 C^1 ）。最经典的例子就是 $f(x) = |x|$ ，它在 $x = 0$ 处是连续的，但不可导。

那我们能否更精细地刻画这个鸿沟里的函数呢？比如，有些函数虽然在某些点不可导，但它们“趋向于不可导”的方式比别的函数要“温和”一些。Hölder 连续性就是为了度量这种“温和程度”而生的。

2. Hölder 连续性的核心思想与定义

Hölder 连续性描述了当两个点无限靠近时，函数值的差是如何被控制的。

定义 (Hölder 连续)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集。一个函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为在 Ω 上是 **Hölder 连续的**（或 α -Hölder 连续的），如果存在一个常数 $C \geq 0$ 和一个指数 $\alpha \in (0, 1]$ ，使得对于 Ω 中所有的 x, y ，下式都成立：

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

- $|f(x) - f(y)|$ 是函数值的差。
- $|x - y|$ 是两个点之间的欧几里得距离。
- α 被称为 **Hölder 指数**，它衡量了函数的光滑程度。
- C 被称为 **Hölder 常数**。

直观理解 α 的作用

我们可以把上面的不等式改写为：

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq C|x - y|^{\alpha-1} \quad (\text{当 } x \neq y)$$

左边是连接 $(x, f(x))$ 和 $(y, f(y))$ 的割线斜率的绝对值。

- 当 $\alpha = 1$ 时 (Lipschitz 连续) :

不等式变为 $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ 。这意味着割线的斜率是有界的。这是 Hölder 连续中最光滑的情况。如果一个可微函数的导数有界，那么它一定是 Lipschitz 连续的。

- 当 $0 < \alpha < 1$ 时:

当 x 和 y 靠得很近，即 $|x - y| \rightarrow 0$ 时，右边的 $|x - y|^{\alpha-1}$ 会趋向于无穷大（因为指数 $\alpha - 1$ 是负的）。这允许割线的斜率在某些点变得无限大，从而函数可以在这些点上不可导（形成“尖点”）。

α 越大，函数越光滑。因为 α 越大，对函数变化的限制 $|x - y|^\alpha$ 就越强（当 $|x - y| < 1$ 时， α 越大，这个值越小）。

经典例子：函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上。

它在 $x = 0$ 处的导数是无穷大，所以它不是 C^1 的。但是，它可以被证明是 $\frac{1}{2}$ -Hölder 连续的，即满足 $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{1/2}$ 。这说明它比一般的连续函数更“规整”，但又达不到 C^1 的标准。

注意：如果 $\alpha > 1$ ，那么函数 f 必须是常数。因为此时 $|x - y|^{\alpha-1} \rightarrow 0$ ，这意味着函数的导数处处为零。所以我们只关心 $\alpha \in (0, 1]$ 。

3. Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega)$

现在我们可以正式定义 Hölder 空间了。它由具有一定阶数连续导数、且最高阶导数满足 Hölder 连续性的所有函数组成。

- $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 或 $C^\alpha(\Omega)$:

这是最简单的 Hölder 空间，它包含了所有在 Ω 上有界的 α -Hölder 连续函数。

- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ (其中 k 是非负整数, $\alpha \in (0, 1]$) :

这个空间包含所有在 Ω 上 k 阶连续可微的函数 f ，并且其所有 k 阶偏导数 $D^\beta f$ (这里 β 是一个多重指标，其长度 $|\beta| = k$) 本身都是 α -Hölder 连续的。

关系谱系:

$$\dots \subset C^2 \subset C^{1,\alpha} \subset C^{1,\beta} \subset C^1 \subset C^{0,\alpha} \subset C^{0,\beta} \subset C^0 \quad (\text{其中 } 0 < \beta < \alpha \leq 1)$$

Hölder 空间完美地填充了 C^k 和 C^{k+1} 之间的“鸿沟”，为我们提供了一个更精细的函数光滑度标尺。

4. Hölder 范数

为了让 Hölder 空间成为一个有用的数学结构（具体来说，是一个巴拿赫空间），我们需要定义一个“范数”来衡量其中每个函数“大小”。

一个函数的“大小”不仅包括其振幅，还包括其“不光滑”的程度。因此，Hölder 范数通常由两部分组成：一部分衡量函数本身的大小，另一部分衡量其 Hölder 连续的程度。

$C^{0,\alpha}$ 范数

对于函数 $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ (这里我们考虑闭域 $\bar{\Omega}$ 以确保上确界有定义), 其范数定义为:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + [f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

其中:

1. C^0 范数 (或 sup 范数): 衡量函数的最大振幅。

$$\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$$

2. Hölder 半范数 (Seminorm): 衡量函数的 Hölder “规整度”。它是满足定义的最小 Hölder 常数 C 。

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

这个半范数捕捉了函数最“剧烈”变化的部分。

为什么要加在一起?

只用半范数 $[f]$ 是不够的, 因为它对任何常数函数都等于0 (例如 $f(x) = 5$), 而范数只应该对零函数等于0。通过加上 C^0 范数, 我们确保了 $\|f\|_{C^{0,\alpha}} = 0$ 当且仅当 $f(x) = 0$ 。

$C^{k,\alpha}$ 范数

这个概念可以自然地推广到 $C^{k,\alpha}$ 空间。我们需要控制函数本身、它直到 $k-1$ 阶的导数的大小, 以及它 k 阶导数的 Hölder 规整度。

其范数定义为:

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + [f]_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

其中:

1. C^k 范数: 控制函数及其直到 k 阶所有导数的最大值。

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\beta f(x)|$$

($D^\beta f$ 表示所有阶数不超过 k 的偏导数)。

2. 最高阶导数的 Hölder 半范数:

$$[f]_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\beta|=k} [D^\beta f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

这衡量了所有 k 阶偏导数的 Hölder 规整度。

总结与在数理方程中的意义

- **是什么：** Hölder 空间 $C^{k,\alpha}$ 是一个函数空间，它通过指数 α 精细地刻画了函数及其导数的光滑性，填补了传统 C^k 空间之间的空白。其范数同时度量了函数的振幅和光滑程度。
- **为什么重要：** 在偏微分方程 (PDE) 领域，Hölder 空间至关重要。
 1. **解的正则性理论 (Regularity Theory)：** 很多 PDE 理论 (特别是椭圆和抛物方程的 Schauder 理论) 的结论是这样的形式：“如果方程的系数和边界条件是 $C^{k,\alpha}$ 的，那么方程的解就是 $C^{k+2,\alpha}$ 的。”这表明解比问题的数据更光滑。Hölder 空间为精确描述这种光滑性的提升提供了完美的语言。
 2. **存在唯一性：** 许多 PDE 解的存在唯一性定理都是在 Hölder 空间框架下建立的。
 3. **从弱解到强解：** 在现代 PDE 理论中，我们常常先在更大的空间 (如 Sobolev 空间) 中找到一个“弱解”，然后再证明这个弱解实际上足够光滑，属于某个 Hölder 空间，从而是一个真正意义上的“强解”或“经典解”。

简而言之，Hölder 空间和它的范数是分析偏微分方程解的性质时不可或缺的强大工具。它们使得数学家能够精确地描述和证明解的光滑程度。

不难证明, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 为 Banach 空间. 在上述定义中如果 $\alpha = 1$, 则得到的空间称为 Lipschitz 空间.

由 Hölder 半范数和范数的定义, 可直接得到

(命题) Prop

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u, v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 则

- (i) $[uv]_{\alpha;\Omega} \leq |u|_{0;\Omega}[v]_{\alpha;\Omega} + [u]_{\alpha;\Omega}|v|_{0;\Omega}$;
- (ii) $|uv|_{\alpha;\Omega} \leq |u|_{\alpha;\Omega}|v|_{\alpha;\Omega}$.

1.5.4 Holder 空间的内插不等式

(定理) Holder 空间的内插不等式

设 B_ρ 为 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 ρ 的球, $u \in C^{1,\alpha}(\bar{B}_\rho)$. 则对任意的 $0 < \sigma \leq \rho$, 有

$$[u]_{1;B_\rho} \leq \sigma^\alpha [u]_{1,\alpha;B_\rho} + \frac{C(n)}{\sigma} |u|_{0;B_\rho}, \quad [u]_{\alpha;B_\rho} \leq \sigma [u]_{1,\alpha;B_\rho} + \frac{C(n)}{\sigma^\alpha} |u|_{0;B_\rho}$$

证明:

对任一 $y \in B_\rho$, 选取 $\bar{x} \in B_\rho$, 使得 $y \in B_{\sigma/2}(\bar{x}) \subset B_\rho$. 在 $B_{\sigma/2}(\bar{x})$ 上对 $D_i u$ 积分, 由 Green 公式可得

$$\int_{B_{\sigma/2}} D_i u dx = \int_{\partial B_{\sigma/2}} u \cos(\mathbf{n}, x_i) ds,$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 $\partial B_{\sigma/2}$ 的单位外法向量. 对上式左端用中值定理, 知存在 $\bar{y} \in B_{\sigma/2}$, 使得

$$D_i u(\bar{y})|_{B_{\sigma/2}} = \int_{B_{\sigma/2}} D_i u dx.$$

于是

$$|D_i u(\bar{y})| = \frac{1}{|B_{\sigma/2}|} \left| \int_{\partial B_{\sigma/2}} u \cos(\mathbf{n}, x_i) ds \right| \leq \frac{|\partial B_{\sigma/2}|}{|B_{\sigma/2}|} |u|_0 = \frac{2n}{\sigma} |u|_0,$$

又

$$\begin{aligned} |D_i u(y)| &= |D_i u(y) - D_i u(\bar{y})| + |D_i u(\bar{y})| \\ &\leq \frac{|D_i u(y) - D_i u(\bar{y})|}{|y - \bar{y}|^\alpha} |y - \bar{y}|^\alpha + \frac{2n}{\sigma} |u|_0 \\ &\leq \sigma^\alpha [u]_{1,\alpha} + \frac{2n}{\sigma} |u|_0 \end{aligned}$$

由于 y 是任意的, 故有 $[u]_1 \leq \sigma^\alpha [u]_{1,\alpha} + \frac{C(n)}{\sigma} |u|_0$. 于是第一个式子得到了证明.

注意到, 当 $|x - y| < \sigma$ 时, 有

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} = \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} |x - y|^{1-\alpha} < \sigma^{1-\alpha} [u]_1,$$

而当 $|x - y| \geq \sigma$ 时, 有

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{2}{\sigma^\alpha} |u|_0.$$

可见不论在何种情形下, 都有

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \sigma^{1-\alpha} [u]_1 + \frac{2}{\sigma^\alpha} |u|_0.$$

于是第二个式子成立.

笔记:

这个定理被称为 Hölder 空间的内插不等式 (Interpolation Inequality)。“内插”这个词是关键, 它意味着我们可以用一个“高阶”范数和一个“低阶”范数来“控制”或“估计”一个“中阶”范数。

让我们一步步来拆解和理解这个不等式。

1. 符号解读: 各项的含义

首先, 我们必须清楚每个符号代表什么“物理意义”或“几何意义”。假设我们有一个函数 u , 它定义在半径为 ρ 的球 B_ρ 上, 并且属于 $C^{1,\alpha}(\bar{B}_\rho)$ 。

- $|u|_{0;B_\rho}$: 这是 C^0 范数, 即 $\sup_{x \in B_\rho} |u(x)|$ 。它代表了函数 u 在这个球里 **振幅的最大值**。你可以把它想象成波的“最高峰”或“最低谷”的绝对值。这是**最低阶**的量。
- $[u]_{\alpha;B_\rho}$: 这是 u 的 $C^{0,\alpha}$ **半范数**。它代表了函数 u 本身的 Hölder **连续程度**, 衡量了函数图像的“摆动”或“不光滑”程度。
- $[u]_{1;B_\rho}$: 这是 u 的 C^1 **半范数**, 即 $\sup_{x \in B_\rho} |Du(x)|$ (其中 Du 是 u 的梯度)。它代表了函数 u 的**梯度的最大值**, 可以直观理解为函数图像上“最陡峭处的斜率”。
- $[u]_{1,\alpha;B_\rho}$: 这是 u 的 $C^{1,\alpha}$ **半范数**, 即梯度 Du 的 $C^{0,\alpha}$ 半范数 $[Du]_{\alpha;B_\rho}$ 。它衡量了**梯度的 Hölder 连续程度**, 也就是说, 它描述了“斜率的变化有多剧烈”。这是我们这里**最高阶**的量。
- σ : 这是一个**尺度参数 (scale parameter)**, 取值在 $(0, \rho]$ 之间, 单位是长度。这是理解整个不等式的钥匙。你可以把它想象成你用来观察函数的“放大镜”的视野大小, 或者你手中尺子的“长度”。

2. 直观理解: 尺度与权衡 (Scale and Trade-off)

这两个不等式的核心思想是: 对一个量的估计, 取决于你观察它的尺度 σ 。

在不同的尺度下, 函数的行为由不同的属性主导。

理解第一个不等式: 控制“最大斜率” $[u]_1$

$$[u]_{1;B_\rho} \leq \sigma^\alpha [u]_{1,\alpha;B_\rho} + \frac{C(n)}{\sigma} |u|_{0;B_\rho}$$

这个不等式说, 我们可以通过两部分来控制函数的最大斜率 $[u]_1$:

1. **高阶项**: $\sigma^\alpha [u]_{1,\alpha;B_\rho}$, 与梯度的“摆动”有关。
2. **低阶项**: $\frac{C(n)}{\sigma} |u|_{0;B_\rho}$, 与函数的“振幅”有关。

σ 的作用像一个“**权衡旋钮**”:

- 当你选择一个很小的 σ (微观尺度, Zoom In):
 - σ^α 项变得非常小, 意味着高阶项 $[u]_{1,\alpha}$ 的贡献被压制了。
 - $1/\sigma$ 项变得非常大, 意味着低阶项 $|u|_0$ 的贡献占主导。
 - **直观解释**: 在非常小的尺度 σ 上看, 要产生一个很大的斜率, 函数值必须在这么短的距离内发生显著变化。这种变化最终受限于函数的总振幅 $|u|_0$ 。比如, 斜率近似为 $\Delta u / \sigma$, 而 Δu 不可能超过 $2|u|_0$, 所以斜率被 $|u|_0 / \sigma$ 控制。这就是第二项 $\frac{C(n)}{\sigma} |u|_{0;B_\rho}$ 的来源。
- 当你选择一个很大的 σ (宏观尺度, Zoom Out):

- σ^α 项变大，高阶项的贡献变得重要。
- $1/\sigma$ 项变小，低阶项的贡献被压制。
- **直观解释：**考虑任意一点 x 的斜率 $Du(x)$ 。我们可以用中值定理，把它和另一点 y 的斜率 $Du(y)$ 联系起来。由 $[u]_{1,\alpha}$ 的定义，我们有 $|Du(x) - Du(y)| \leq [u]_{1,\alpha} |x - y|^\alpha$ 。在一个大尺度 σ 上，我们可以将 $Du(x)$ 与整个球上的某种“平均斜率”比较。这个平均斜率又和函数的整体边界值有关，最终还是和 $|u|_0$ 有关，但其影响被大尺度 σ 削弱了。此时，斜率的变化更多地由其自身的 Hölder 连续性 $[u]_{1,\alpha}$ 来主导。

理解第二个不等式：控制“函数摆动” $[u]_\alpha$

$$[u]_{\alpha; B_\rho} \leq \sigma [u]_{1,\alpha; B_\rho} + \frac{C(n)}{\sigma^\alpha} |u|_{0; B_\rho}$$

这个不等式控制的是函数 u 本身的 Hölder 连续性，逻辑完全类似。它把函数的“摆动” $[u]_\alpha$ 分解为两部分：一部分来自“斜率的摆动”（高阶项），另一部分来自“函数的振幅”（低阶项）。同样地， σ 扮演了权衡的角色。

3. 应用与意义：为什么这个不等式如此强大？

1. **自由选择最优尺度：**不等式对任意的 $0 < \sigma \leq \rho$ 都成立。这意味着在证明中，我们可以根据需要，策略性地选择一个最优的 σ 来让右边的上界变得尽可能小。
例如，对于第一个不等式，如果我们对右侧求关于 σ 的最小值，我们会发现一个最优的 σ 使得两项达到某种平衡。这通常会导出下面这种形式的“无尺度”内插不等式：

$$[u]_1 \leq C' [u]_{1,\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha}} |u|_0^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

这种形式在所谓的 “a priori” 估计中极为常见和有用。

2. **从高阶和低阶信息推出中阶信息：**在偏微分方程的研究中，我们经常能通过方程本身得到关于解的高阶范数（比如 $[u]_{1,\alpha}$ ）的估计，以及通过边界条件得到低阶范数（比如 $|u|_0$ ）的估计。这个内插不等式就像一个桥梁，能让我们自动地获得所有中阶范数（比如 $[u]_1$ 和 $[u]_\alpha$ ）的估计，而无需重新进行繁琐的推导。
3. **正则性理论的基石：**这类不等式是椭圆和抛物方程 Schauder 理论的核心构件。它们被反复用于从一个较弱的范数估计出发，通过“自举法 (bootstrapping)”一步步提升解的正则性，最终证明解是经典解（例如 $C^{2,\alpha}$ ）。

总结

一句话理解：

Hölder 内插不等式告诉你，一个函数的中阶光滑性（如最大斜率 $[u]_1$ 或自身的摆动 $[u]_\alpha$ ），可以被它的最高阶光滑性（斜率的摆动 $[u]_{1,\alpha}$ ）和最低阶属性（振幅 $|u|_0$ ）共同控制。控制的方式取决于你选择的观察尺度 σ ，它允许你在“微观”和“宏观”的视角之间进行权衡，以获得最有利的估计。

这组不等式是分析中一个极其深刻和强大的工具，它完美体现了不同函数空间范数之间的内在结构联系。

类似还有以下结论：

(定理) Thm

设 B_ρ 为 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 ρ 的球, $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_\rho)$, 则对任意的 $0 < \sigma \leq \rho$, 有

$$\sigma^\alpha [u]_{\alpha; B_\rho} + \sigma [u]_{1; B_\rho} + \sigma^{1+\alpha} [u]_{1,\alpha; B_\rho} + \sigma^2 [u]_{2; B_\rho} \leq \sigma^{2+\alpha} [u]_{2,\alpha; B_\rho} + C(n) |u|_{0; B_\rho}$$

在上述内插不等式中令 σ 取特殊的值, 可得到一些特殊的内插不等式. 例如在式 (1.2.3) 中取 $\sigma = \varepsilon^{1/\alpha} \rho$, 则得

$$[u]_{1; B_\rho} \leq \varepsilon \rho^\alpha [u]_{1,\alpha; B_\rho} + \frac{C(n)}{\varepsilon^{1/\alpha}} \rho^{-1} |u|_{0; B_\rho}$$

1.5.5 Sobolev 嵌入定理

(定理) 嵌入定理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界区域, $1 \leq p \leq +\infty$.

(i) 若 Ω 满足一致内锥条件, 则当 $p = n$ 时, 有

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty$$

而且对任意的 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(n, q, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad 1 \leq q < +\infty$$

当 $p < n$ 时, 有

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-p}$$

而且对任意 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(n, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad 1 \leq q \leq p^*$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 适当光滑, 则当 $p > n$ 时, 有

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$$

而且对任意 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{\alpha;\Omega} \leq C(n, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$$

这里, 我们称 p^* 为 p 的 Sobolev 共轭指数, 而称上述三个不等式中的常数 C 为嵌入常数.

上述嵌入定理可简记作

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-p} \\ L^q(\Omega), & 1 \leq q < +\infty, \\ C^\alpha(\bar{\Omega}), & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}, \end{cases}$$

需要说明的是上面的第三个嵌入, 即

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

其含义是, 对任意的 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 总可以通过修改 u 在一个零测度集上的函数值, 使 u 为 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的函数.

笔记:

这个定理的核心思想可以概括为一句话: 一个函数的“平均光滑程度”可以决定它本身具有的“更好的性质”(比如更高的可积性, 甚至是连续性)。

让我们一步步来拆解这个定理。

第一步: 理解其中的“演员”——函数空间

要理解这个定理, 我们首先要明白它是在哪些“舞台”上表演的, 也就是这些数学符号代表的函数空间是什么。

1. $L^p(\Omega)$ 空间 (Lebesgue 空间)

- **直观理解:** $L^p(\Omega)$ 空间衡量的是函数在区域 Ω 上的“大小”或“可积性”。一个函数 u 属于 $L^p(\Omega)$, 意味着将它的绝对值进行 p 次方后, 在区域 Ω 上的积分是有限的。
- **范数:** $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$ 。这个范数就是对函数“大小”的量化。 p 越大, 对函数在峰值处的“惩罚”就越重。

2. $W^{1,p}(\Omega)$ 空间 (Sobolev 空间)

- **直观理解:** 这是定理的核心。 $W^{1,p}(\Omega)$ 空间不仅衡量函数本身的大小, 还同时衡量其一阶导数的大小。这里的“导数”是一种推广的导数, 称为弱导数 (weak derivative), 它允许我们处理那些不满足经典可微条件的函数 (比如有尖点的函数)。
- **范数:** $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$ 。
 - $\|u\|_{L^p(\Omega)}^p$ 是函数本身的大小。

- $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx$ 是函数梯度（所有一阶偏导数构成的向量）的大小。

- **关键点:** 一个函数在 $W^{1,p}(\Omega)$ 空间里，意味着这个函数和它的一阶弱导数都是 L^p 可积的。这就可以被看作是函数的“平均光滑程度”。 p 越大，或者导数的范数越小，函数就越“光滑”。

3. $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 空间 (Hölder 空间)

- **直观理解:** 这个空间描述的是比普通连续函数更“好”的函数。一个函数属于 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ ，意味着它不仅在闭区域 $\bar{\Omega}$ 上连续，而且是 α -Hölder 连续的。
- **定义:** 存在一个常数 M ，使得对区域内任意两点 x, y ，都有 $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ 。
- **关键点:** 这个性质描述的是函数在点态意义下的光滑性。 α 越大，函数就越光滑。当 $\alpha = 1$ 时，就是我们熟悉的 Lipschitz 连续。

第二步：理解“嵌入”(⊂)的含义

这里的符号 $\subset$ 不仅仅是集合的包含关系。它表示 **连续嵌入** (Continuous Embedding)。

$A \subset B$ 意味着：

4. **集合包含:** 空间 A 中的每一个函数也都在空间 B 中。

5. **连续性:** 存在一个常数 C （即定理中的**嵌入常数**），使得对于任何 $u \in A$ ，都有：

$$\|u\|_B \leq C\|u\|_A$$

这表示 A 空间的范数比 B 空间的范数“更强”。如果一个函数在 A 范数下很“小”，那么它在 B 范数下也一定很“小”。

第三步：剖析定理的三个主要部分 (核心内容)

现在，我们可以把定理看成一个关于“平滑度预算”的故事。

- **你的资本:** 你有一个 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的函数，你的“平滑度预算”由指数 p 决定。
- **环境的挑战:** 空间的维度 n 是你面临的“挑战”或“成本”。维度越高，函数“伸展”的空间越大，保持良好性质就越困难。

定理根据预算 p 和成本 n 的关系，给出了三种不同的结果：

(i) **情况一:** $p < n$ (次临界情况 - 预算不足)

- **定理内容:** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ，其中 q 最大可以取到 Sobolev **共轭指数** $p^* = \frac{np}{n-p}$ 。
- **直观解释:** 你的平滑度预算 p 不足以“支付”在 n 维空间中获得点态性质（如连续性）的“成本”。但是，你可以用你的 $W^{1,p}$ “资本”（即导数的可积性）来“交换”函数本身更好的可积性。原本函数只是 L^p 可积的，现在我们知道它实际上是 L^q 可积的，并且 q 可以比 p 大，最大能达到 p^* 。

- **比喻:** 你用“导数的可控性”换取了“函数本身的更强的可控性”。 p^* 是你换到的极限。

(i) 情况二: $p = n$ (临界情况 - 预算刚刚好)

- **定理内容:** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, 对于任意有限的 $q \geq 1$ 。
- **直观解释:** 你的平滑度预算 p 刚好和空间的维度 n 持平。这是一个临界点。你几乎可以得到任意好的可积性 (任何有限的 L^q)，但仍然无法保证函数是连续的，甚至无法保证它是有界的 (L^∞)。你无限接近于获得很好的点态性质，但就差那么一点点。
- **比喻:** 你几乎可以在“可积性”的世界里为所欲为，但通往“连续性”世界的大门依然对你紧闭。

(ii) 情况三: $p > n$ (超临界情况 - 预算充裕)

- **定理内容:** $W^{1,p}(\Omega) \subset C^\alpha(\bar{\Omega})$, 其中 $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ 。
- **直观解释:** 你的平滑度预算 p 远远超过了空间维度 n 的挑战。你有如此之多的“平均光滑度”，以至于它能转化为实实在在的点态光滑度。函数不仅是连续的，而且还是 Hölder 连续的。
- **比喻:** 你的预算非常充裕，你不仅买得起“连续性”这个基本商品，还能额外获得 α 等级的“豪华装修” (Hölder 连续)。你的初始预算 p 越大，你得到的 α 就越大，函数就越光滑。

最后，关于一些技术细节

- **区域的条件** (Ω 满足一致内锥条件 / $\partial\Omega$ 适当光滑): 为什么需要这个? 因为如果区域的边界非常“糟糕” (比如有一条无限细的裂缝或者一个非常尖锐的角)，函数在边界附近的行为可能会变得很奇异，即使它在内部很光滑。这些几何条件保证了区域足够“规整”，使得函数在内部的良好性质可以平滑地延伸到边界，从而让嵌入定理成立。
- **嵌入常数 C :** 这个常数不依赖于你选择的具体函数 u ，它只依赖于空间的维度 n 、指数 p, q 和区域 Ω 的几何形状。这使得这个不等式非常强大，因为它对整个函数空间中的所有函数都成立。

总结

Sobolev 嵌入定理是一个强大的“翻译器”，它搭建了不同函数空间之间的桥梁：

如果一个函数...	那么它也...	条件
它和它的一阶导数是 p 次可积的 ($W^{1,p}$)	它本身是 q 次可积的 (L^q with $q > p$)	$p < n$
它和它的一阶导数是 n 次可积的 ($W^{1,n}$)	它本身是任意有限次可积的 (L^q for any finite q)	$p = n$
它和它的一阶导数是 p 次可积的 ($W^{1,p}$)	它本身是 Hölder 连续的 (C^α)	$p > n$

这个定理在偏微分方程领域是不可或缺的工具。例如，当我们求一个方程的解时，通常更容易在一个“弱”的空间（如 Sobolev 空间）中证明解的存在性。然后，利用嵌入定理，我们可以“提升”这个解的正则性（regularity），证明它实际上是一个更光滑、更符合我们直觉的经典解（比如连续解或可微解）。

重复应用结论 k 次可得

(推论) Cor

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}, & kp < n, \\ L^q(\Omega), & 1 \leq q < +\infty, & kp = n, \\ C^\alpha(\bar{\Omega}), & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{n}{kp}, & kp > n. \end{cases}$$

(定义) 紧嵌入

设 X, Y 为 Banach 空间, $X \subset Y$, 若满足

(1) $\|f\|_Y \leq C\|f\|_X$

(2) 对 X 中有界序列, 必存在子序列在 Y 中强收敛.

则称 $X \subset\subset Y$ 紧嵌入.

(定理) (紧嵌入定理)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界区域, $1 \leq p \leq +\infty$.

(i) 若 Ω 满足一致内锥条件, 则当 $p \leq n$ 时下列嵌入是紧的:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p^*, \quad p < n,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty, \quad p = n$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 适当光滑, 则当 $p > n$ 时下列嵌入是紧的:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}.$$

⚠ 注意:

对于空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$, 同样也有定理 1.2.4 和定理 1.2.5 所述的嵌入关系和紧嵌入关系. 而且结论对任意区域 Ω 都成立, 嵌入常数也不依赖于 Ω .

⚠ 注意:

紧嵌入是指, 对被嵌入空间的任何有界序列, 总存在一个在嵌入空间强收敛的子序列, 即嵌入算子是紧的.

1.5.6 Poincare 不等式

(定理) (Poincaré不等式)

设 $1 \leq p < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界区域.

(i) 若 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq C \int_{\Omega} |Du|^p dx$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 满足局部 Lipschitz 条件, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx \leq C \int_{\Omega} |Du|^p dx$$

其中 C 是仅依赖于 n, p 和 Ω 的常数,

$$u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$$

这里我们用 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度.

证明:

先证明第一个式子. 由 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的稠密性知, 只须对 $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ 来证明. 作一个包含 Ω 的方体

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; a_i < x_i < a_i + d, i = 1, 2, \dots, n\},$$

其中 $d = \text{diam } \Omega$. 在 Ω 外补充定义 $u = 0$, 则 $u \in C_0^{\infty}(Q)$, 且对任意的 $x \in Q$, 有

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &= \left| \int_{a_1}^{x_1} D_1 u(s, x_2, \dots, x_n) ds \right|^p \\ &= \left| \int_{a_1}^{a_1+d} D_1 u(s, x_2, \dots, x_n) ds \right|^p \\ &\leq d^{p-1} \int_{a_1}^{a_1+d} |D_1 u(s, x_2, \dots, x_n)|^p ds \end{aligned}$$

关于 x 在 Q 上积分, 进而得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u(x)|^p dx &= \int_Q |u(x)|^p dx \\
&\leq d^{p-1} \int_Q \int_{a_1}^{a_1+d} |D_1 u(s, x_2, \dots, x_n)|^p ds dx \\
&\leq d^p \int_Q |D_1 u(x_1, x_2, \dots, x_n)|^p dx \\
&\leq d^p \int_Q |Du|^p dx
\end{aligned}$$

取 $C = d^p$ 就得到第一个式子.

为简单起见, 我们仅就 $p > 1$ 的情形证明第二个式子, 至于 $p = 1$ 的情形. 由于在 u 上加一个常数后, 二式不变, 故不妨设 $u_{\Omega} = 0$. 现在假设不真, 则对任意正整数 $k \geq 1$, 都存在 $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$, 满足 $\int_{\Omega} u_k(x) dx = 0$, 但是

$$\int_{\Omega} |u_k|^p dx > k \int_{\Omega} |Du_k|^p dx$$

令

$$w_k(x) = \frac{u_k(x)}{\|u_k\|_{L^p(\Omega)}}, \quad x \in \Omega \quad (k = 1, 2, \dots)$$

则 $w_k \in W^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} w_k(x) dx &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \\
\|w_k\|_{L^p(\Omega)} &= 1 \quad (k = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

和

$$\int_{\Omega} |Dw_k|^p dx < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

蕴含 $\|w_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ 有界, 故利用 $W^{1,p}(\Omega)$ 中有界集的弱列紧性和紧嵌入定理, 知存在 $\{w_k\}$ 的子列, 不妨设为其本身, 和 $w \in W^{1,p}(\Omega)$, 使得

$$w_k \rightarrow w \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{在 } L^p(Q) \text{ 中}$$

$$Dw_k \rightharpoonup Dw \quad (k \rightarrow \infty) \text{ 在 } L^p(Q, \mathbb{R}^n) \text{ 中}$$

这里 “ $\rightharpoonup$ ” 表弱收敛, 知 $Dw(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$, 因而 $w(x) = \text{常数}$, a.e. $x \in \Omega$, 又知 $\int_{\Omega} w(x) dx = 0$,

故

$w(x) = 0$, a.e. $x \in \Omega$. 知 $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$, 故矛盾.

 笔记:

核心思想：直观理解

想象一下, 你有一根有弹性的绳子, 或者一个弹性的膜 (比如鼓面)。

- **情况 (i) (边界为零):** 如果你把这根绳子/膜的边缘固定在高度为零的位置 (这就是 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 的直观含义), 那么绳子/膜的整体“起伏程度” (由 $\int |u|^p$ 度量) 会被它的“陡峭程度” (由 $\int |Du|^p$ 度量) 所控制。
 - 换句话说, 一个边界被钉死在0的函数, 如果它想在中间变得“很高”或“很深” (即 $|u|$ 很大), 那么它必然在某个地方会变得“很陡峭” (即 $|Du|$ 很大)。你不可能在保持整体平缓 ($|Du|$ 很小) 的同时, 让函数值远离0。
- **情况 (ii) (一般情况):** 现在, 绳子/膜的边缘不要求固定为零。它可以整体“悬浮”在空中。比如, 一个常数函数 $u(x) = 1000$ 。这个函数非常“平坦”, 它的“陡峭程度” $|Du|$ 处处为0。但是它的“起伏程度” $\int |u|^p$ 却非常大。这时, 情况 (i) 的不等式显然不成立。
 - 怎么修正呢? 我们不再关心函数的绝对高度, 而是关心它相对于其平均高度的偏离程度。这个偏离就是 $u - u_\Omega$ 。
 - 所以, 情况 (ii) 的意思是: 一个函数偏离其自身平均值的程度 (由 $\int |u - u_\Omega|^p$ 度量), 被它的“陡峭程度” (由 $\int |Du|^p$ 度量) 所控制。一个非常“平坦” ($|Du|$ 很小) 的函数, 它必然处处都非常接近它的平均值。

一言以蔽之: 庞加莱不等式建立了函数的“大小/振幅”与其导数的“大小/陡峭程度”之间的桥梁。它告诉我们, 只要一个函数被某种方式“锚定” (在边界处为0, 或者减去其均值), 那么它的梯度的大小就能控制其自身的大小。

定理各项的数学解释

现在, 我们来逐一拆解这个定理中的数学符号。

1. 索博列夫空间 (Sobolev Space) $W^{1,p}(\Omega)$ 与 $W_0^{1,p}(\Omega)$

- 你可以粗略地将 $W^{1,p}(\Omega)$ 理解为一个函数空间, 里面的函数 u 不仅自身是“行为良好”的 (技术上说, 是 L^p 可积的, 即 $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$), 而且它的一阶 (弱) 导数 Du 也是“行为良好”的 (即 $\int_\Omega |Du|^p dx < \infty$)。
- $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 的一个子空间, 它额外要求函数在边界 $\partial\Omega$ 上的值为0。这就是我们前面比喻中“把边缘固定在零”的数学表达。这里的“边界值为0”是在一个推广的意义 (迹为0) 下理解的, 但对于光滑函数, 就意味着 $u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$ 。

2. 梯度 (Gradient) Du

- Du 是函数 u 的梯度向量, 即 $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ 。
- $|Du|$ 是这个梯度向量的长度 (范数), $|Du| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + \dots + (\frac{\partial u}{\partial x_n})^2}$ 。它衡量了函数 u 在某一点上变化最快的速率, 即“陡峭程度”。

- $\int_{\Omega} |Du|^p dx$ 可以看作是函数 u 在整个区域 Ω 上的**总陡峭程度**的一种度量。

3. L^p 范数 (Lp Norm)

- 表达式 $\int_{\Omega} |u|^p dx$ 是函数 u 的 L^p 范数的 p 次方，即 $\|u\|_{L^p(\Omega)}^p$ 。它衡量了函数 u 在整个区域 Ω 上的**总大小或总能量**。

4. 平均值 u_{Ω}

- $$u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$$
- 这是函数 u 在区域 Ω 上的标准算术平均值。 $|u - u_{\Omega}|$ 就表示函数在某一点的值与其平均值的偏差。

5. 常数 C

- 这个常数 C 非常关键。不等式告诉我们存在这样一个常数，并且它**只依赖于空间的维度 n 、指数 p 和区域 Ω 的几何形状（大小、是否“细长”等），而不依赖于具体的函数 u** 。这使得该不等式成为一个普适的工具，可以应用于空间中所有的函数。

一个简单的一维例子 ($p = 2$)

让我们在最简单的情况下证明并感受一下这个不等式。

设 $\Omega = (0, L)$ 是一个一维区间， $p = 2$ 。

情况 (i): $u \in W_0^{1,2}(0, L)$

这意味着 u 是一个在 $(0, L)$ 上可微（某种意义上）的函数，且 $u(0) = 0$ 和 $u(L) = 0$ 。我们只用 $u(0) = 0$ 就够了。

根据微积分基本定理，对于任意 $x \in (0, L)$ ：

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t) dt$$

现在，我们对这个等式两边取绝对值，并使用一个非常重要的不等式——柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)：

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x 1 \cdot u'(t) dt \right| \\ &\leq \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{x} \left(\int_0^x |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

注意到 $\int_0^x |u'(t)|^2 dt \leq \int_0^L |u'(t)|^2 dt$ ，因为我们只是把积分区间扩大了。所以：

$$|u(x)| \leq \sqrt{x} \left(\int_0^L |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

现在我们对上式两边平方：

$$|u(x)|^2 \leq x \left(\int_0^L |u'(t)|^2 dt \right)$$

最后，我们在整个区域 $\Omega = (0, L)$ 上对 x 进行积分：

$$\begin{aligned} \int_0^L |u(x)|^2 dx &\leq \int_0^L x \left(\int_0^L |u'(t)|^2 dt \right) dx \\ &= \left(\int_0^L |u'(t)|^2 dt \right) \left(\int_0^L x dx \right) \\ &= \left(\int_0^L |u'(t)|^2 dt \right) \cdot \frac{L^2}{2} \end{aligned}$$

看！我们得到了：

$$\int_0^L |u(x)|^2 dx \leq \frac{L^2}{2} \int_0^L |u'(x)|^2 dx$$

这就是一维情况下的庞加莱不等式 (i)。这里的常数 $C = L^2/2$ ，它只和区域 $\Omega = (0, L)$ 的大小有关，和函数 u 无关。这个推导完美地展示了函数值（左边）是如何被其导数值（右边）控制的。

为什么这个不等式如此重要？

庞加莱不等式是现代分析和偏微分方程理论的基石之一。

6. 先验估计 (A Priori Estimates): 在求解偏微分方程时，我们常常只能得到关于解的导数的估计（比如从方程本身得到能量估计）。庞加莱不等式允许我们将这个导数的估计“转化”为对解本身的估计。这是证明解的存在性、唯一性和稳定性的关键一步。

7. 范数等价性: 对于 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间，庞加莱不等式说明了半范数 $\|Du\|_{L^p}$ 和完整的 $W^{1,p}$ 范数 $\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|Du\|_{L^p}^p)^{1/p}$ 是等价的。这在理论分析中提供了巨大的便利。

8. 谱理论: 庞加莱常数 C 的最佳值与拉普拉斯算子在对应边界条件下的第一个非零特征值紧密相关，连接了分析与几何。

希望这个从直观到严谨的解释能帮助你透彻地理解庞加莱不等式！如果你对其中任何一个环节还有疑问，请随时提出。

(推论) Cor

设 B_R 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 R 为半径的球。

(i) 若 $u \in W_0^{1,p}(B_R), 1 \leq p < +\infty$, 则

$$\int_{B_R} |u|^p dx \leq C(n, p) R^p \int_{B_R} |Du|^p dx$$

(ii) 若 $u \in W^{1,p}(B_R), 1 \leq p < +\infty$, 则

$$\int_{B_R} |u - u_R|^p dx \leq C(n, p) R^p \int_{B_R} |Du|^p dx$$

其中

$$u_R = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(x) dx.$$

证明：

使用 Rescaling 技术,即作变换 $y = x/R$,可以归结为单位球 B_1 上的不等式. 利用定理不难给出它的证明.

⚠ 注意：

利用嵌入定理可知,当 $1 \leq p < n$ 时,在定理中不等式左端的指数 p 可以换成任何满足条件

$1 \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-p}$ 的实数 q ,即我们有

(i) 若 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < n$,则对任何 $1 \leq q \leq p^*$,有

$$\left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p, \Omega) \left(\int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{1/p};$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 满足局部 Lipschitz 条件, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < n$,则对任何 $1 \leq q \leq p^*$,有

$$\left(\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p, \Omega) \left(\int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{1/p}.$$

证明：

下面我将为你分步证明这两个结论。证明的核心思想是相同的：我们首先利用已知的端点嵌入定理，然后通过赫尔德不等式将结果“插值”到所有较小的指数 q 上。

在此证明中，我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界的开集（即其测度 $|\Omega|$ 是有限的），这是应用赫尔德不等式的关键前提。

(i) 证明 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的情况

我们的目标是证明：

若 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $1 \leq p < n$ ，则对任何满足 $1 \leq q \leq p^*$ 的 q ，存在一个常数 C 使得：

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

其中 $\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{1/q}$ 且 $\|Du\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{1/p}$ 。

证明步骤:

1. 基础: 索博列夫-庞加莱不等式 (Sobolev-Poincaré Inequality)

我们首先从标准的索博列夫嵌入定理 (有时也称为 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式) 出发。对于 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 和 $1 \leq p < n$, 该定理保证了 u 嵌入到 $L^{p^*}(\Omega)$ 中, 其中 $p^* = \frac{np}{n-p}$ 是索博列夫临界指数。具体来说, 存在一个常数 $C_1 = C_1(n, p)$ 使得:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

这个不等式是我们的出发点。

2. 处理特殊情况

当 $q = p^*$ 时, 不等式显然成立, 这正是我们出发的索博列夫嵌入定理。所以我们只需要证明当 $1 \leq q < p^*$ 时的情况。

3. 应用赫尔德不等式 (Hölder's Inequality)

现在, 我们来估计 $\|u\|_{L^q(\Omega)}$ 。我们可以在积分中巧妙地乘以 1, 然后使用赫尔德不等式。

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} |u|^q dx = \int_{\Omega} |u|^q \cdot 1 dx$$

我们使用赫尔德不等式 $\int fg \leq \|f\|_{L^r} \|g\|_{L^s}$, 其中 $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ 。

我们想让 $|u|^q$ 的部分与我们已知的 L^{p^*} 范数联系起来。因此, 我们取 $f = |u|^q$, 并选择一个合适的指数 r 。

令 $r = \frac{p^*}{q}$ 。因为我们假设 $q < p^*$, 所以 $r > 1$, 这是一个有效的赫尔德指数。

其共轭指数 s 满足:

$$\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{q}{p^*} = \frac{p^* - q}{p^*}$$

现在应用赫尔德不等式:

$$\int_{\Omega} |u|^q \cdot 1 dx \leq \left(\int_{\Omega} (|u|^q)^r dx \right)^{1/r} \left(\int_{\Omega} 1^s dx \right)^{1/s}$$

代入 $r = p^*/q$ 和 $1/s = (p^* - q)/p^*$:

$$\int_{\Omega} |u|^q dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} (|\Omega|)^{\frac{p^*-q}{p^*}}$$

其中 $|\Omega|$ 是区域 Ω 的勒贝格测度。

4. 整理并结合索博列夫不等式

我们对上式两边同时取 $1/q$ 次方:

$$\left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq \left(\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} \right)^{1/q} \left(|\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \right)^{1/q}$$

化简指数:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}}$$

这可以写成：

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

现在，我们将第1步中的索博列夫不等式 $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|Du\|_{L^p(\Omega)}$ 代入上式：

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(C_1 \|Du\|_{L^p(\Omega)} \right) \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

5. 最终结论

我们定义一个新的常数 C ：

$$C = C_1(n, p) \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

因为 Ω 是一个给定的有界区域，所以 $|\Omega|$ 是一个有限的正常数。这个新的常数 C 依赖于 n, p, q 和区域 Ω ，但它不依赖于函数 u 。因此，我们证明了：

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

这便完成了 (i) 的证明。

(ii) 证明 $W^{1,p}(\Omega)$ 的情况 (庞加莱-维尔丁格不等式)

我们的目标是证明：

若 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 局部 Lipschitz， $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 且 $1 \leq p < n$ ，则对任何满足 $1 \leq q \leq p^*$ 的 q ，存在一个常数 C 使得：

$$\left(\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{1/p}$$

其中 $u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$ 是 u 在 Ω 上的平均值。

证明步骤：

这个证明的逻辑与 (i) 完全相同，只是我们作用的对象是函数 $v = u - u_{\Omega}$ 。

6. 基础：庞加莱-索博列夫不等式 (Poincaré-Sobolev Inequality)

对于边界条件较好（如局部 Lipschitz）的有界区域 Ω ，我们有庞加莱-索博列夫不等式，它同样是索博列夫嵌入定理的一个推论。它表明对于 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ，函数 $u - u_{\Omega}$ 满足：

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_2 \|D(u - u_{\Omega})\|_{L^p(\Omega)}$$

因为 u_{Ω} 是一个常数，它的导数为零，所以 $D(u - u_{\Omega}) = Du$ 。因此，不等式可以写为：

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_2 \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

这里的常数 $C_2 = C_2(n, p, \Omega)$ 。

7. 应用相同的插值论证

我们令 $v(x) = u(x) - u_\Omega$ 。那么我们已知 $\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_2 \|Dv\|_{L^p(\Omega)}$ 。

我们的目标是证明 $\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Dv\|_{L^p(\Omega)}$ 对于所有 $1 \leq q \leq p^*$ 成立。

这与 (i) 中的问题是完全一样的，只是把 u 换成了 v 。我们可以完全重复 (i) 中的第 3 步和第 4 步的推导过程，直接得到：

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

8. 结合与结论

现在，我们将第1步中的庞加莱-索博列夫不等式代入：

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(C_2 \|Dv\|_{L^p(\Omega)} \right) \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

将 $v = u - u_\Omega$ 和 $Dv = Du$ 代回：

$$\|u - u_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(C_2 \|Du\|_{L^p(\Omega)} \right) \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

定义一个新的常数 $C = C_2 \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$ ，这个常数依赖于 n, p, q, Ω ，但不依赖于 u 。于是我们得到了最终的不等式：

$$\left(\int_{\Omega} |u - u_\Omega|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega} |Du|^p dx \right)^{1/p}$$

这便完成了 (ii) 的证明。

总结：

这个证明的核心技巧是利用赫尔德不等式，从已知的“端点”嵌入 $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ 出发，通过插值方法证明了对于所有中间的 q （即 $p \leq q \leq p^*$ ），嵌入 $W^{1,p} \hookrightarrow L^q$ 同样成立。这是一个在泛函分析和偏微分方程中非常常用且强大的技巧。

⚠ 注意：

同理，推论中不等式左端的指数 p 也可以换成任何满足 $1 \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-p}$ 的任何实数 q 。这时我们有

(i) 若 $u \in W_0^{1,p}(B_R)$, $1 \leq p < n$, 则对任何 $1 \leq q \leq p^*$, 有

$$\left(\int_{B_R} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p) R^{1+n/q-n/p} \left(\int_{B_R} |Du|^p dx \right)^{1/p};$$

(ii) 若 $u \in W^{1,p}(B_R)$, $1 \leq p < n$, 则对任何 $1 \leq q \leq p^*$, 有

$$\left(\int_{B_R} |u - u_R|^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p) R^{1+n/q-n/p} \left(\int_{B_R} |Du|^p dx \right)^{1/p}.$$

在利用嵌入定理时，为了确定不等式右端常数 C 对 R 的依赖关系，可以像推论的证明那样使用 Rescaling 技术。当 $p \geq n$ 时，注的不等式左端的指数 q 可以取为任何不小于 1 的实数。但当 $p = n$ 时，不等式右端的常数

C 还依赖于 q .

1.5.7 t 向异性的 Sobolev 空间

由于抛物型方程中空间变量 x 和时间变量 t 的“地位”不同,所以在研究抛物型方程时所借助的函数空间与在研究椭圆型方程时所借助的函数空间有一定的差别. 本节介绍适合于抛物型方程特点的 t 向异性 Sobolev 空间和 Hölder 空间.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

(定义) Def

设 k 为非负整数, $1 \leq p < +\infty$. 我们称集合

$$\{u; D^\alpha D_t^r u \in L^p(Q_T), \text{对满足 } |\alpha| + 2r \leq 2k \text{ 的任意 } \alpha \text{ 和 } r\}$$

赋以范数

$$\|u\|_{W_p^{2k,k}(Q_T)} = \sum_{|\alpha|+2r \leq 2k} \|D^\alpha D_t^r u\|_{L^p(Q_T)}$$

后得到的线性赋范空间为 Sobolev 空间 $W_p^{2k,k}(Q_T)$.

可以证明, $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 在上述范数下是一个 Banach 空间. $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 中元素的 t 向弱导数的阶低于 x 向弱导数的阶.

我们还需要引进如下的定义.

(定义) Def

设 m, k 为 0 或 1, $1 \leq p < +\infty$. 我们称集合

$$\{u; D^\alpha u, D_t^r u \in L^p(Q_T), \text{对满足 } |\alpha| \leq m \text{ 和 } r \leq k \text{ 的任意 } \alpha \text{ 和 } r\}$$

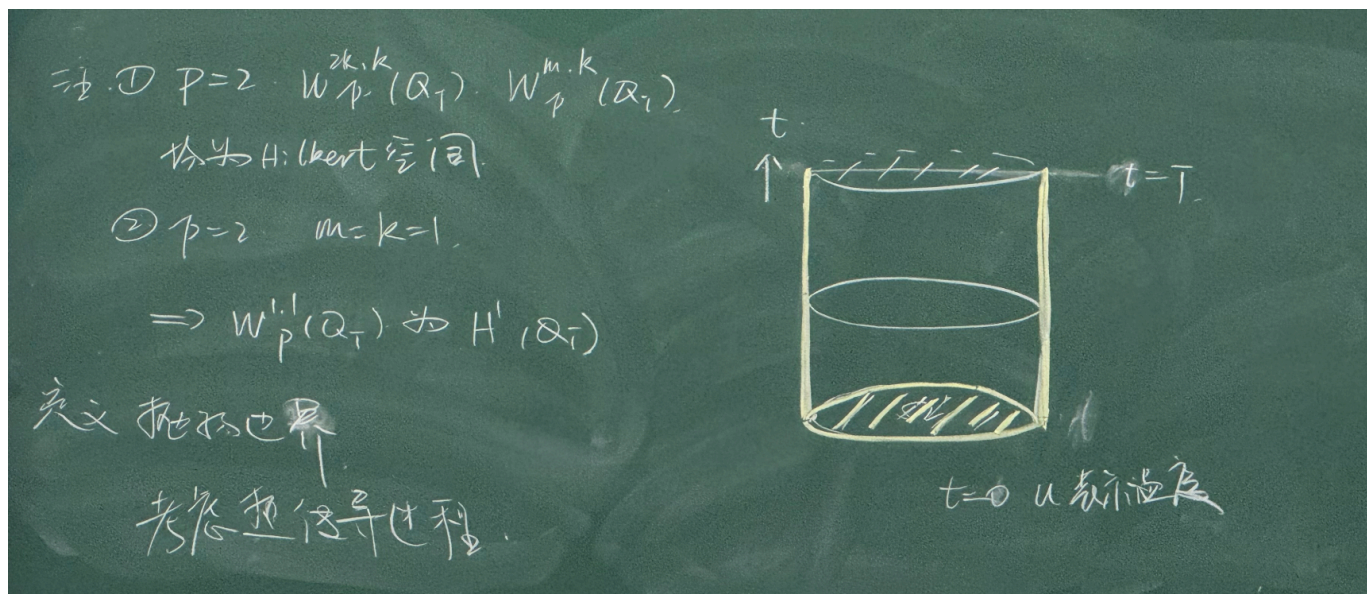
赋以范数

$$\|u\|_{W_p^{m,k}(Q_T)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(Q_T)} + \sum_{r \leq k} \|D_t^r u\|_{L^p(Q_T)}$$

后得到的线性赋范空间为 Sobolev 空间 $W_p^{m,k}(Q_T)$.

⚠ 注意:

当 $p = 2$ 时,上面引进的函数空间中都可以定义内积而成为 Hilbert 空间. 特别地,当 $p = 2, m = k = 1$ 时的空间 $W_2^{1,1}(Q_T)$ 就是前面所引进的 $H^1(Q_T)$.



(定义) Def

设 $Q_T = \Omega \times (0, T)$, 定义

- (1) $\partial_l Q_T := \partial\Omega \times (0, T)$.
- (2) $\partial_p Q_T$ 为 Q_T 的抛物边界, 为 $\partial_l Q_T \cup \{(x, t): x \in \overline{\Omega}, t = 0\}$.
- (3) $\dot{C}^\infty(\overline{Q_T})$ 表示 Q_T 的侧边界附近为 0 而在 $\overline{Q_T}$ 上无穷次可微函数构成的集合.
- (4) $\dot{C}^\infty(\overline{Q_T})$ 表示 Q_T 的抛物边界附近为 0 而在 $\overline{Q_T}$ 上无穷次可微的函数构成的集合.

(定义) Def

- (1) 用 $\dot{W}_p^{2k,k}(Q_T)$ 表示 $\dot{C}^\infty(\overline{Q_T})$ 在 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 中的闭包;
- (2) 用 $\widetilde{W}_p^{m,k}(Q_T)$ 表示 $\dot{C}^\infty(\overline{Q_T})$ 在 $W_p^{m,k}(Q_T)$ 中的闭包;
- (3) 用 $\widetilde{W}_p^{2k,k}(Q_T)$ 表示 $\dot{C}^\infty(\overline{Q_T})$ 在 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 中的闭包;
- (4) 用 $\dot{W}_p^{m,k}(Q_T)$ 表示 $\dot{C}^\infty(\overline{Q_T})$ 在 $W_p^{m,k}(Q_T)$ 中的闭包.

(定义) Def

用 $V_2(Q_T)$ 表示集合 $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ 赋以范数

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\iint_{Q_T} |Du|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

后所得到的 Banach 空间.

(定义) Def

记

$$V(Q_T) = \left\{ u \in \bar{W}_2^{1,1}(Q_T); Du_t \in L^2(Q_T, \mathbb{R}^n) \right\},$$

其中的内积定义为

$$(u, v)_{V(Q_T)} = (u, v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} + (Du_t, Dv_t)_{L^2(Q_T)}.$$

容易验证:

(命题) Prop

$V(Q_T)$ 在 $\dot{W}_2^{1,1}(Q_T)$ 中稠密.

⚠ 注意:

$W_2^{0,1}(Q_T)$ 中的 “•” 只在底边上起作用. 实际上, $W_2^{0,1}(Q_T)$ 可以看做在 Q_T 的底边 $\bar{\Omega} \times \{t = 0\}$ 附近为 0 的无穷次可微函数在 $W_2^{0,1}(Q_T)$ 中的闭包.

1.5.8 t 向异性的 Holder 空间

我们先引进抛物距离的概念. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, Q_T = \Omega \times (0, T)$. 对任意两点 $P(x, t), Q(y, s) \in Q_T$, 定义 P, Q 之间的抛物距离为

$$d(P, Q) = \left(|x - y|^2 + |t - s| \right)^{1/2}.$$

(定义) t 向异性的 Holder 空间

设 $u(x, t)$ 是定义于 Q_T 上的函数. 对于 $0 < \alpha < 1$, 引入 Hölder 半范数

$$[u]_{\alpha, \alpha/2; Q_T} = \sup_{P, Q \in Q_T, P \neq Q} \frac{|u(P) - u(Q)|}{d^\alpha(P, Q)}.$$

用 $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T)$ 表示 Q_T 上满足 $[u]_{\alpha, \alpha/2; Q_T} < +\infty$ 的函数全体, 并定义范数如下

$$|u|_{\alpha, \alpha/2; Q_T} = |u|_{0; Q_T} + [u]_{\alpha, \alpha/2; Q_T},$$

其中 $|u|_{0; Q_T}$ 表示 $u(x, t)$ 在 Q_T 上的最大模, 即

$$|u|_{0; Q_T} = \sup_{(x, t) \in Q_T} |u(x, t)|$$

进一步, 对非负整数 k , 定义函数空间

$$C^{2k+\alpha, k+\alpha/2}(\bar{Q}_T) = \left\{ u; D^\beta D_t^r u \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T), \text{ 对满足 } |\beta| + 2r \leq 2k \text{ 的任意 } \beta \text{ 和 } r \right\}$$

并定义半范数

$$[u]_{2k+\alpha, k+\alpha/2; Q_T} = \sum_{|\beta|+2r=2k} [D^\beta D_t^r u]_{\alpha, \alpha/2; Q_T},$$

$$[u]_{2k, k; Q_T} = \sum_{|\beta|+2r=2k} |D^\beta D_t^r u|_{0; Q_T}$$

和范数

$$|u|_{2k+\alpha, k+\alpha/2; Q_T} = \sum_{|\beta|+2r \leq 2k} |D^\beta D_t^r u|_{\alpha, \alpha/2; Q_T},$$

$$[u]_{2k, k; Q_T} = \sum_{|\beta|+2r \leq 2k} |D^\beta D_t^r u|_{0; Q_T}.$$

⚠ 注意:

不难证明, $C^{2k+\alpha, k+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ 为 Banach 空间. 当 $k=1$ 时, 有

$$|u|_{2,1; Q_T} = |u|_{0; Q_T} + |Du|_{0; Q_T} + |D^2u|_{0; Q_T} + |u_t|_{0; Q_T},$$

$$|u|_{2+\alpha, 1+\alpha/2; Q_T} = |u|_{\alpha, \alpha/2; Q_T} + |Du|_{\alpha, \alpha/2; Q_T} + |D^2u|_{\alpha, \alpha/2; Q_T} + |u_t|_{\alpha, \alpha/2; Q_T},$$

其中 $|D^2u|_{0; Q_T}, |D^2u|_{\alpha, \alpha/2; Q_T}$ 表示对 u 所有关于空间变量 x 的二阶导数所取的范数之和. 在不引起混淆的情况下, 有时我们省略 Hölder 半范数和范数的下标中的集合 Q_T .

1.5.9 t 向异性的 Sobolev 空间嵌入定理

(定理) (t 向异性嵌入定理)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界区域, $1 \leq p < +\infty$.

(i) 若 Ω 满足一致内锥条件, 则当 $p = (n+2)/2$ 时,

$$W_p^{2,1}(Q_T) \subset L^q(Q_T), \quad 1 \leq q < +\infty,$$

而且对任意的 $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$, 有

$$\|u\|_{L^q(Q_T)} \leq C(n, q, Q_T) \|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}, \quad 1 \leq q < +\infty;$$

当 $p < (n+2)/2$ 时, 有

$$W_p^{2,1}(Q_T) \subset L^q(Q_T), \quad 1 \leq q \leq \frac{(n+2)p}{n+2-2p},$$

而且对任意的 $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$, 有

$$\|u\|_{L^q(Q_T)} \leq C(n, p, Q_T) \|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}, \quad 1 \leq q \leq \frac{(n+2)p}{n+2-2p};$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 适当光滑, 则当 $p > (n+2)/2$ 时,

$$W_p^{2,1}(Q_T) \subset C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T), \quad 0 < \alpha \leq 2 - \frac{n+2}{p},$$

而且对任意的 $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$, 有

$$|u|_{\alpha, \alpha/2; Q_T} \leq C(n, p, Q_T) \|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}, \quad 0 < \alpha \leq 2 - \frac{n+2}{p}.$$

⚠ 注意:

上述嵌入定理可简记作

$$W_p^{2,1}(Q_T) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(Q_T), & 1 \leq q \leq \frac{(n+2)p}{n+2-2p}, \quad p < \frac{n+2}{2}, \\ L^q(Q_T), & 1 \leq q < +\infty, \quad p = \frac{n+2}{2}, \\ C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T), & 0 < \alpha \leq 2 - \frac{n+2}{p}, \quad p > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

重复应用定理的结论 k 次, 可得

(命题) Prop

$$W_p^{2k,k}(Q_T) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(Q_T), & 1 \leq q \leq \frac{(n+2)p}{n+2-2kp}, \quad kp < \frac{n+2}{2}, \\ L^q(Q_T), & 1 \leq q < +\infty, \quad kp = \frac{n+2}{2}, \\ C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T), & 0 < \alpha \leq 2 - \frac{n+2}{kp}, \quad kp > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

对空间 $V_2(Q_T)$, 也可建立嵌入定理. 为便于应用, 取区域为标准圆柱体

$$Q_\rho = B_\rho \times (-\rho^2, \rho^2), \quad B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \rho\}.$$

设 $u \in V_2(Q_\rho)$, 则

$$\left(\frac{1}{\rho^{n+2}} \iint_{Q_\rho} |u|^{2q} dx dt \right)^{1/q} \leq C(n) \rho^{-n} \left(\sup_{-\rho^2 \leq t \leq \rho^2} \int_{B_\rho} u^2 dx + \iint_{Q_\rho} |Du|^2 dx dt \right),$$

其中

$$q = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{当 } n = 1, 2; \\ 1 + \frac{2}{n}, & \text{当 } n > 2. \end{cases}$$

1.5.10 t 向异性的 Poincaré 不等式

对 t 向异性的 Sobolev 空间 $W_p^{1,1}(Q_T)$, 也可以建立相应的 Poincaré 不等式. 为便于应用, 这里我们也取区域为标准圆柱体 Q_ρ .

(定理) (t 向异性 Poincaré 不等式)

设 $1 \leq p < +\infty, \rho > 0$.

(i) 若 $u \in \dot{W}_p^{1,1}(Q_\rho)$, 则

$$\iint_{Q_\rho} |u|^p dx dt \leq C(n, p) \left(\rho^p \iint_{Q_\rho} |Du|^p dx dt + \rho^{2p} \iint_{Q_\rho} |D_t u|^p dx dt \right)$$

(ii) 若 $u \in W_p^{1,1}(Q_\rho)$, 则

$$\iint_{Q_\rho} |u - u_\rho|^p dx dt \leq C(n, p) \left(\rho^p \iint_{Q_\rho} |Du|^p dx dt + \rho^{2p} \iint_{Q_\rho} |D_t u|^p dx dt \right),$$

其中 $u_\rho = \frac{1}{|Q_\rho|} \iint_{Q_\rho} u(x, t) dx dt$.

证明:

利用标准的 Poincaré 不等式可得 $\rho = 1$ 时的结论. 对 $\rho > 0$ 的一般情形, 使用 Rescaling 技术就可得到所要证明的结论.