数学分析学习笔记

学习与思考

作者：杨毅涵

组织：南开大学数学科学学院

时间：August 14, 2024

我们从未理解数学，我们只是习惯它。—— 冯·诺依曼

目录

第 1 章 极限

命题 1.1

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ 的充要条件是存在单调下降且无下界的正数列 $\{\omega_n\}$ 使得对 $\forall n\geq 1$ 有 $|a_n|\leq\omega_n$ 成立.

命题 1.2

设 $0\leq p\leq k-1, p\in\mathbb{Z}$，求

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_{kn}^{p}+C_{kn}^{p+k}+\cdots+C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}}$$

命题 1.3

给定两个正数 a,b，且有 $0<b<a$，令 $a_0=a, b_0=b$，并按照递推公式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}^*$$

定义数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$，证明这两个数列收敛且收敛于同一个极限.

第 2 章 连续

命题 2.1

(1) 证明: 对任意正整数 n ,方程 $\mathrm{e}^x + nx - 2 = 0$ 有唯一正根;

(2) 记方程 $\mathrm{e}^x + nx - 2 = 0$ 的唯一正根为 a_n ,证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(na_n - 1\right)$.

第 3 章 导数与微分

命题 3.1

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,对任意 $x\in(a,b)$,有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=0$$

证明: 集合 $\{x\in(a,b)\mid f \text{ 在点 } x \text{ 处可导 }\}$ 在 (a,b) 中稠密.

证明 我们使用反证法，假设存在区间 (c,d) 使得对任意 $x\in(c,d)$，都有 f 在 x 处导数不存在，下面我们寻找矛盾：

首先由条件式容易看出来若单侧导数存在则导数存在，这是因为如果存在任意一个单侧导数，都容易导出另一个单侧导数存在且相等，从而可导.

从而由反证法的假设，我们知道在 (c,d) 中的任意处单侧导数都不存在，特别地我们有 $\forall x\in(c,d)$，有 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 不存在，也即存在 $\varepsilon_0>0$, $\{h_n(>0)\}\to 0^+(n\to\infty)$，使得对

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|\geq\varepsilon_0$$

为了导出矛盾，我们需要一些确定的符号关系从而方便放缩，所以我们先考虑存在 $x_0\in(c,d)$ 使得 $f(x_0)$ 为最大值的情况，在这种情况下，我们有

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)+f(x_0-h_n)-2f(x_0)}{h_n}\right|=\frac{f(x_0)-f(x_0+h_n)}{h_n}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h_n)}{h_n}\geq\frac{f(x_0)-f(x_0+h_n)}{h_n}$$

而由于在这种情况下有

$$\frac{f(x_0)-f(x_0+h_n)}{h_n}=\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right|\geq\varepsilon_0$$

从而我们有

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)+f(x_0-h_n)-2f(x_0)}{h_n}\right|\geq\varepsilon_0$$

令 $n\to+\infty$ 之后与题目条件矛盾，从而假设错误，所以导数存在. 于是我们证明了在 (c,d) 中存在最值的情况，但是对于 (c,d) 中没有最值的情况，我们好像就无从下手了.

但是回顾我们学过的知识点，发现 Lagrange 定理的证明方法可以为我们提供一条路去把这个最值构造出来：

$$g(x)=f(x)-\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$$

从而我们发现构造出来的 g 满足 $g(c)=g(d)$，又知道 g 是连续的，从而我们知道最值肯定可以在 (c,d) 中取到，又由于

$$\begin{aligned}
g(x+h)+g(x-h)-2g(x) &= f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\\
&\quad+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}((x+h-c)+(x-h-c)-2(x-c))\\
&= f(x+h)+f(x-h)-2f(x)
\end{aligned}$$

从而我们知道

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)+g(x-h)-2g(x)}{h}=0$$

由前面的讨论知道 g 在最值点 x_0 处可导，又显然 $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$ 可导，从而我们知道 f 在 x_0 处可导，从而反证的假设错误，故结论成立.

命题 3.2

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $M>0$ 是常数,对任意实数 x 和 t,有

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\le Mt^2$$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且对任意实数 x 和 t,有

$$|f'(x+t)-f'(x)|\le M|t|$$

第 4 章 导数的应用

命题 4.1

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 可微, $f(a)=f(b)=0$,则在 (a,b) 中至少存在 $f'(x)+f(x)g'(x)$ 的一个零点.

命题 4.2

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导, $f(a)=0, g(x)$ 在 $[a,b]$ 有界, λ 是非零常数,且对任意 $x\in[a,b]$,都有

$$|f(x)g(x)+\lambda f'(x)|\le |f(x)|$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恒等于 0 .

命题 4.3 (2021南开伯苓动态进出考试最后一题)

求 α 的取值范围，使得 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数.

解 一个直接的想法是考虑积分式，然后处理积分问题，如利用分部积分公式我们可以考虑

$$\int x^\alpha\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{\alpha+2}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x}-\int(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

从而这诱导我们去考虑函数 $H(x)=\begin{cases} x^{\alpha+2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，然后考虑 $H(x)$ 的导数：

当 $\alpha>-1$ 的时候，我们有 $H(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导数为 0，从而我们知道函数

$$H'(x)=\begin{cases}(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\dfrac{1}{x}+x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

存在原函数.

考虑 $g(x)=\begin{cases}(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，容易知道 $g(x)$ 连续，从而有原函数 $G(x)$.

再由

$$H'(x)=g(x)+f(x)=G'(x)+f(x)$$

知道 $f(x)=H'(x)-G'(x)$，故 $f(x)$ 有原函数 $H(x)-G(x)$.

当 $\alpha\in(-2,-1]$ 时，我们考虑函数 $T(x)=\begin{cases} x^{\alpha+3}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，我们容易知道 $T(x)$ 在 $x=0$ 处可导，再结合

$$\left(x^{\alpha+3}\sin\frac{1}{x}\right)'=(\alpha+3)x^{\alpha+2}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}$$

同上面证明过程可以知道函数 $g(x)=\begin{cases}(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数 $G(x)$，从而我们考虑

$$H(x)=\begin{cases} x^{\alpha+2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

假设 $f(x)$ 此时有原函数 $F(x)$，知道 $H(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但是当 $x>0$ 时，我们有

$$H'(x)=(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}+x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=G'(x)+F'(x)$$

于是当 $x>0$ 时，有 $H(x)=G(x)+F(x)+C_1$.

令 $\varphi(x)=g(x)+f(x)$，我们知道 $\varphi(x)$ 有原函数 $\Phi(x)$，其中我们知道 $\Phi(x)=G(x)+F(x)+C_2=H(x)+C$，其中 $x>0$，又因为 $\Phi(x)$ 与 $H(x)$ 均可导，故均连续，从而取趋于 0 的极限知道 $\Phi(0)=H(0)+C=C$.

因为 $\Phi'(0)=\varphi(0)=0$，但是我们又有

$$\Phi'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)+C-C}{x}=\lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}$$

故矛盾，从而假设错误.

对于 $\alpha\in(-3,-2]$ 的情况，同理假设 $f(x)$ 存在原函数，从而知道 $xf(x)$ 存在原函数，也就是 $\alpha\in(-2,-1]$ 时 $f(x)$ 存在原函数，从而矛盾，以此类推可以证明 $\alpha\leq-1$ 时均不存在原函数.

故答案为 $\alpha>-1$.

第 5 章 实数理论

命题 5.1

第 6 章 定积分

6.1 定积分的定义

定义 6.1 (分割)

取区间 $[a,b]$ 的一个分割变量 (T,ξ) 满足条件

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

这些分点将区间 $[a,b]$ 分成 n 个区间 $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\cdots,n$, 第 k 个区间的长度为 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ ，令

$$\Delta(T)=\max\{\Delta x_k\mid k=1,\cdots,n\}$$

并称之为分割 T 的直径.

♣

定义 6.2

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 如果存在实数 I ,使对任何 $\varepsilon>0$,都存在 $\delta>0$,对任意分割变量 (T,ξ) ,只要 $\Delta(T)<\delta$,都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon \tag{6.1}$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积并称 I 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中的 $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, x 称为积分变量,而 a 和 b 分别称为此定积分的下限和上限,表示积分变量的变化范围.

♣

定理 6.1

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

♡

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,故存在实数 I ,使对 $\varepsilon_0=1$,存在$\delta>0$,对于任意分割 $T=\{x_k\mid k=0,1,\cdots,n\}$,只要 $\Delta(T)<\delta$,无论怎样选取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\cdots,n$,都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<1 \tag{6.2}$$

取 n 足够大,使 $\dfrac{b-a}{n}<\delta$. 将区间 $[a,b]$ 均分成 n 等分并记相应的分割为 $T=\{x_i\}_{0\le i\le n}$. 对任意 $j,1\le j\le n$,取 $\xi_k=x_k=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$, $k\ne j$. 于是由(6.2)有

$$\left|\left(\sum_{k\ne j}f(x_k)+f(\xi_j)\right)\frac{b-a}{n}-I\right|<1$$

$$|f(\xi_j)|<\frac{n(|I|+1)}{b-a}+\sum_{k\ne j}\left|f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \tag{6.3}$$

由于 (6.3) 式右端为常数而左端的 ξ_j 可以在 $[x_{j-1},x_j]$ 上任取,故知 $f(x)$ 在 $[x_{j-1},x_j]$ 上有界. 再由 j 的任意性知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

注 但是, 确实存在不可积的有界函数, 从而上述命题之逆不真. 例如, 实数域上定义的狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上不可积. 事实上,对任意分割 $T=\{x_k\mid k=0,1,\cdots,n\}$, 无论小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 长度多么小,其间总有无理数也有有理数,如果在每一个这样的小区间,都取 ξ_k 为有理数时

$$\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k=1$$

如果在每一个这样的小区间,都取 ξ_k 为无理数时

$$\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k=0.$$

这两种情况的极限都存在,但不相等. 从而 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

定理 6.2 (牛顿-莱布尼茨公式)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,如果 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $F'(x)=f(x)$ 在 (a,b) 内成立,则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证明 对于任意一个分割 $T=\{x_k\mid k=0,1,\cdots,n\}$,在小区间 (x_{k-1},x_k) 中存在点 ξ_k,使得

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

由已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\Delta(T)\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{\Delta(T)\to0}\sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1}))\\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

笔记 定积分的概念是由黎曼首先引入, 我们也把定积分称为**黎曼积分**.

6.2 可积的充分必要条件和可积函数类

定义 6.3 (振幅与达布上下和)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界,分割 $T=\{x_k\}$ 把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\cdots,n$. 令

$$M_k=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\},\ m_k=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

$$\omega_k=M_k-m_k,\ \Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,\cdots,n$$

显然 $\omega_k=\sup\limits_{s,t\in[x_{k-1},x_k]}|f(s)-f(t)|$,称之为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的**振幅**.

作和式

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k,\ s(T)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$$

并分别称之为函数 $f(x)$ 的对应于分割 T 的**达布上和**与**达布下和**, 统称为**达布和**.

注 显然我们对于同一分割 T，有：

$$s(T)\le\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\le S(T)$$

定理 6.3

若 T' 是 T 的加细,则有 $s(T) \leq s(T') \leq S(T') \leq S(T)$.

证明 设分割 T 为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

不妨设分割 T' 只比分割 T 多 1 个分点 $x' \in (x_{j-1}, x_j)$. 令

$$M_{j_1} = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x']\}$$
$$M_{j_2} = \sup\{f(x) \mid x \in [x', x_j]\}$$

于是有 $M_{j_1} \leq M_j, M_{j_2} \leq M_j$,所以

$$M_{j_1}(x' - x_{j-1}) + M_{j_2}(x_j - x') \leq M_j \Delta x_j$$

由于 $S(T)$ 与 $S(T')$ 中的其余各项对应相同,故得

$$S(T') \leq S(T)$$

同理可证 $s(T') \geq s(T)$.

定理 6.4

设 T_1 和 T_2 是 $[a,b]$ 上的任意两个分割,则有 $s(T_1) \leq S(T_2)$. 换句话说, 任一下和都不大于任一上和.

证明 令 $T = T_1 \cup T_2$,于是 T 是 T_1 的加细, T 是 T_2 的加细. 由定理 6.3 知

$$s(T_1) \leq s(T) \leq S(T) \leq S(T_2)$$

定义 6.4

定理 6.4 表明,一切下和的集合 $\{s(T)\}$ 有上界,从而必有上确界,记为 I_* ; 一切上和的集合 $\{S(T)\}$ 有下界,从而必有下确界,记为 I^* .

显然有 $I_* \leq I^*$. I_* 和 I^* 分别称为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**下积分与上积分**.

定理 6.5

$\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S(T) = I^*$, $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} s(T) = I_*$.

证明 下面我们证明 $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S(T) = I^*$,另一个式子的证明是类似的.

不妨设 $f(x)$ 不是常数函数,则 $f(x)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上的振幅 Ω 大于 0 .

对于任意 $\varepsilon > 0$,由上积分是达布上和集合的下确界可知,存在 $[a,b]$ 的分割 T_1 ,使得

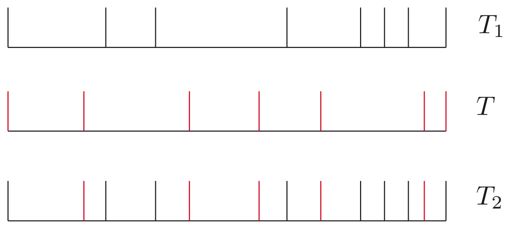
$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

设分割 T_1 在 (a,b) 内的分点一共是 h 个,令 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2h\Omega}$,对任意 $\Delta(T) < \delta$ 的分割 T ,令 $T_2 = T \cup T_1$, 则 T_2 是 T_1 的加细(图8-4),由定理 6.3 有

$$S(T_2) \leq S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

另一方面,在和式 $S(T)$ 与和式 $S(T_2)$ 中,可能有些项相同,而不同的项发生在分割 T 构成的含有分割 T_1 的分点的区间(显然这样的区间不超过 h 个),从而 $S(T) - S(T_2)$ 不超过 Ω 与这些区间的总长度的乘积, 故

$$S(T) - S(T_2) < \Omega h\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$



于是

$$S(T) < S(T_2) + \frac{\varepsilon}{2} < I^* + \varepsilon$$

因此,对任意 $\Delta(T) < \delta$ 的分割 T ,有

$$0 \leq S(T) - I^* < \varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S(T) = I^*$.

定理 6.6 (可积的第一充分必要条件)

有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是 $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = \lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k = 0$,即对任何 $\varepsilon > 0$,都存在 $\delta > 0$,使对 $[a,b]$ 的任意分割 T ,只要 $\Delta(T) < \delta$,就有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k < \varepsilon$$

♡

证明 **必要性:** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,其定积分为 I . 于是由定义,对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使对 $[a,b]$ 上的任何分割 $T = \{x_k\}_{0\leq k\leq n}$,只要 $\Delta(T) < \delta$,就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

其中的 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\,(k = 1, \cdots, n)$ 可以任意选取.

由 m_k 的定义,存在 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$,使得 $f(\xi_k) < m_k + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.

从而

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{4}$$

因此

$$I - s(T) < I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

同理可得

$$S(T) - I < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$0 \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$$

充分性: 由定理 6.5,得 $I^* = I_*$. 记 $I = I^* = I_*$. 对 $[a,b]$ 上的任何分割 $T = \{x_k\}_{0\leq k\leq n}$,有

$$s(T) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq S(T)$$

令 $\Delta(T) \to 0$,由两边夹定理

$$\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且其定积分为 I .

推论 6.1

有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $I_* = I^*$.

定理 6.7

有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是对任意 $\varepsilon > 0$,存在分割 T,使得

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

证明 只要证明充分性. 因为对任意 $\varepsilon > 0$,存在分割 T ,使得 $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$,所以按上下积分的定义有

$$0 \le I^* - I_* \le S(T) - s(T) < \varepsilon$$

再由 $\varepsilon > 0$ 的任意性,得到 $I^* = I_*$. 由推论 , $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理 6.8 (可积的第二充分必要条件)

有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是对于任何 $\eta > 0$ 和 $\sigma > 0$,都存在 $\delta > 0$,使当 $\Delta(T) < \delta$ 时,对应于振幅 $\omega_k > \eta$ 的那些小区间的长度之和满足

$$\sum_{\omega_k > \eta} \Delta x_k < \sigma$$

等价的，我们可以得到下面这个等价形式：

定理 6.9

有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是对于任何 $\eta > 0$ 和 $\sigma > 0$,都存在分割 T ,使得 T 对应于振幅 $\omega_k > \eta$ 的那些小区间的长度之和

$$\sum_{\omega_k > \eta} \Delta x_k < \sigma$$

命题 6.1

下列三类函数都是可积的:

(i) 区间 $[a,b]$ 上的连续函数;

(ii) 在 $[a,b]$ 上只有有限多个间断点的有界函数;

(iii) $[a,b]$ 上的单调函数.

笔记 我们需要注意下面两个结论(经常容易被错误使用):

(1) **可积函数的积分不一定可导;**

(2) **导函数不一定可积.**

2023 级南开数学分析2的第一次月考就考察了这个知识点，很多人直接使用牛顿莱布尼茨公式两行结束战斗，但实际上这样做是错误的，题目如下：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, $G(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,对任意 $x \in [a,b]$,有 $f(x) \le G'(x)$.

证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le G(b) - G(a)$$

正确做法如下：

对 $[a,b]$ 的任意分割 $T=\{x_k \mid k=0,1,\cdots,n\}$,由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$,使得

$$G(x_k)-G(x_{k-1})=G'(\xi_k)\Delta x_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n} G'(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}[G(x_k)-G(x_{k-1})]=G(b)-G(a)$$

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,所以有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\le G(b)-G(a)$$

当然也可以尝试利用连续函数去逼近可积函数的思想去做这道题.

定义 6.5 (若尔当零测集)

设 S 是一个数集,如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在总长度小于 ε 的有限多个开区间覆盖 S ,则称 S 是一个**若尔当零测集**.

♣

定理 6.10

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数, $f(x)$ 的间断点集是 S . 若 S 是若尔当零测集,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

♡

证明 只需证明对任意给定的 $\eta>0$ 和 $\sigma>0$,存在 $[a,b]$ 的分割 T ,使得 T 对应于振幅 $\omega_k>\eta$ 的那些小区间的长度之和 $\sum\limits_{\omega_k>\eta}\Delta x_k<\sigma$.

由若尔当零测集的定义,对上述 $\sigma>0$,存在总长度小于 σ 的有限多个开区间覆盖 S ,将这些开区间记为 (α_I,β_I) , $I=1,2,\cdots,L$.

差集 $[a,b]\setminus\left(\bigcup\limits_{I=1}^{L}(\alpha_I,\beta_I)\right)$ 是有限多个闭区间的并,将这些闭区间记为 $I_j, j=1,2,\cdots,J$. 由 $f(x)$ 在 I_j 一致连续知存在 I_j 的分割 T_j ,使得 $f(x)$ 在分割 T_j 的每个小区间上振幅小于 η .

令 $T=\bigcup\limits_{j=1}^{J}T_j\cup\{a,b\}$,则 T 是 $[a,b]$ 的一个分割,且 T 对应于振幅 $\omega_k>\eta$ 的那些小区间的长度之和

$$\sum_{\omega_k>\eta}\Delta x_k\le\sum_{l=1}^{L}(\beta_l-\alpha_l)<\sigma$$

笔记 在本课程的后续课“实变函数”中将得到关于可积性更深刻的结果: 有界函数可积的充分必要条件是其所有间断点构成勒贝格(Lebesque)零测集. 利用这个结果证明黎曼函数的可积性很方便: 黎曼函数在 $[a,b]$ 上的间断点集是 $[a,b]$ 中全体有理数组成的集合,它是个可数集,从而是勒贝格零测集.

6.3 定积分的性质

性质

(1) **[积分的线性性]** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, λ 为常数,则 $\lambda f(x)$, $f(x)\pm g(x)$ 也都在 $[a,b]$ 上可积,且有

(i) $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) **[积分域的可加性]** 设 $a<c<b$.

(i) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积,且有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积且上式成立.

定理 6.11

若非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

推论 6.2

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x) \leq g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

命题 6.2

设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,则在 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

命题 6.3

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个连续点. 由此推出 $f(x)$ 的连续点集在 $[a,b]$ 中稠密.

命题 6.4

设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 在其连续点处取值恒为 0.

命题 6.5

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且恒正. 证明 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x) < g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

命题 6.6

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上可积. 且有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

笔记 思考:若 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 具有介值性,问能否由 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积得到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积?

定理 6.12

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

笔记 应用"有界函数可积的充分必要条件是其所有间断点构成勒贝格零测集" 可以证明下面的命题. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 可积,且 $g(x)$ 恒不为 0,若 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[a,b]$ 有界,则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 一定在 $[a,b]$ 可积.

定理 6.13

设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且当 $x\in[a,b]$ 时,有 $g(x)\in[A,B]$. 证明复合函数 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

笔记 两个可积函数的复合未必可积. 例如,黎曼函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 可积,令 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积,但 $f(R(x))=D(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积. 此外,若 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且当 $x\in[a,b]$ 时,有 $g(x)\in[A,B]$,则复合函数 $f(g(x))$ 未必在 $[a,b]$ 上可积.

反例及进一步的讨论见Jitan Lu的文章 “Is the composite function integrable?” (The American Mathematical Monthly, Vol.106, No. 8, pp. 763-766, 1999)

定理 6.14 (积分第一中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

笔记 进一步讨论可知,积分第一中值定理的结论中 “存在 $\xi\in[a,b]$ ” 可以加强为 “存在 $\xi\in(a,b)$ ” .

定理 6.15 (积分第二中值定理)

前面的区域以后再来探索吧!

命题 6.7

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$,都存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,使得

(1) 对所有 $x\in[a,b]$,都有 $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$;

(2) $\displaystyle\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

命题 6.8

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,证明存在一个 $[a,b]$ 上的连续函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

定理 6.16 (威尔斯特拉斯定理)

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则对任意 $\varepsilon>0$,都存在多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

换句话说,就是存在一列多项式 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$,即对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N ,使得当 $n>N$ 时,对任意 $x\in[a,b]$, 有 $|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

命题 6.9 (黎曼引理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的在 $[0,T]$ 上可积的周期函数. 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,g(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.4 微积分基本定理

定理 6.17

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则：

(1)$G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2)(**微积分基本定理**) 若 $f(x)$ 在点 $x_0\in[a,b]$ 连续，则 $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在点 x_0 可导且 $G'(x_0)=f(x_0)$.

特别地，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的一个原函数，既有：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C,\ x\in[a,b]$$

推论 6.3

任一区间上的连续函数必有原函数.

命题 6.10 (牛顿-莱布尼茨公式)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任一原函数,则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

注 与不定积分类似, 用牛顿-莱布尼茨公式容易证明定积分也有分部积分公式:

$$\int_a^b F'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=\left[F(x)\,g(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

这里要求 $F'(x)$ 和 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积.

命题 6.11 (泰勒展开的积分型余项)

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的一个区间有 $n+1$ 阶连续导数,则对此区间内的任意 x, 有下面的泰勒公式成立:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

称为积分型余项.

6.5 换元积分法

换元积分法的思想是：

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.4}$$

我们需要探索的是 f 和 g 应该满足什么条件时上式成立.

定理 6.18

$f(x)$ 在区间 $[G(a),G(b)]$ 上连续, $x=G(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, $g(t)=G'(t)$,则换元积分法成立.

证明 因为 $f(x)$ 连续,从而有原函数 $F(x)$,且 $F(G(t))$ 在 $[a,b]$ 可导,故为 $f(G(t))\,g(t)$ 的一个原函数,故

由Netwon-Libiniz 公式:

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(G(b)) - F(G(a)) = \int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

定理 6.19

$f(x)$ 在 $[G(a), G(b)]$ 上可积, $x = G(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导,且恒有 $g(t) = G'(t) \neq 0$,则换元积分法成立. ♡

第 7 章 多元函数的连续与极限

命题 7.1

$\mathbb{R}^n$ 中：列紧 $\Longleftrightarrow$ 有界闭 $\Longleftrightarrow$ 紧.

命题 7.2

$\mathbb{R}^n$ 上的凸函数在 R^n 上连续.

证明 设 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数. 首先可以证明 $f(X)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界子集上是有界的.

事实上,对任意 $r>0$,记

$$\Omega(r)=\{X=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,||\, x_i\,|\le r, i=1,\cdots,n\}$$

$\Omega(r)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的正方体,它有 2^n 个顶点

$$P_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}=(\varepsilon_1 r,\cdots,\varepsilon_n r)$$

其中 $\varepsilon_i\in\{-1,1\}, i=1,2,\cdots,n$. 由于 $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n, \lambda\in[0,1]$ 有

$$f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\le\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y)\le\max\{f(X),f(Y)\}$$

从而, $\forall X\in\Omega(r)$ 有

$$f(X)\le\max_{\substack{\varepsilon_i\in\{-1,1\}\\ i=1,\cdots,n}}\{f(P_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})\}$$

即 $f(X)$ 在 $\Omega(r)$ 有上界. 由 r 之任意性可知 $f(X)$ 在任意有界集上都有上界.

现证 $f(X)$ 在 $\Omega(r)$ 也有下界. 若不然,则存在 $\{X_m\}\subseteq\Omega(r)$,使得 $f(X_m)\to-\infty\,(m\to+\infty)$. 由 $\Omega(r)$ 的列紧性,不妨设 $X_m\to X_0\in\Omega(r)$. 由 $f(X)$ 的凸性可得

$$f(X_0)\le\frac{1}{2}f(X_m)+\frac{1}{2}f(2X_0-X_m)$$

由于 $\{2X_0-X_m\}$ 是有界序列,从而 $\{f(2X_0-X_m)\}$ 是有上界数列. 于是令 $m\to+\infty$ 可得 $f(X_0)=-\infty$,矛盾! 综上可得 $f(X)$ 在 $\Omega(r)$ 上是有界的.

以下证 $f(X)$ 连续. 任取 $r>0$,记 $B_r=\{X\in\mathbb{R}^n \,||\, X\,|\le r\}, B_{2r}=\{X\in\mathbb{R}^n \,||\, X\,|\le 2r\}$. $\forall X,Y\in B_r$,连接 Y,X 并延长,交 ∂B_{2r} 于 Z (如图10-4),设 $X=\lambda Z+(1-\lambda)Y$,其中 $\lambda\in(0,1)$. 易知 $|X-Y|=\lambda|Z-Y|\ge\lambda r$. 由于

$$f(X)\le\lambda f(Z)+(1-\lambda)f(Y)$$

从而

$$f(X)-f(Y)\le\lambda(f(Z)-f(Y))\le 2\lambda M$$

其中

$$M=\sup_{P\in B_{2r}}|f(P)|$$

再由 $\lambda\le\dfrac{|X-Y|}{r}$ 可得

$$f(X)-f(Y)\le\frac{2M}{r}|X-Y|$$

由 X,Y 之任意性得

$$|f(X)-f(Y)|\le\frac{2M}{r}|X-Y|,\ \forall X,Y\in B_r$$

即 $f(X)$ 在 B_r 上利普希茨连续. 由 r 之任意性可知 $f(X)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界区域上都是利普希茨连续的. 具有这种性质的函数称为 $\mathbb{R}^n$ 上局部利普希茨连续函数.

笔记 以上证明把 $\mathbb{R}^n$ 换成凸区域 D 也有效,但不可换成闭凸区域.

命题 7.3

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是凸区域,函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明: $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证明 我们分两步证明这个结论:

(1) 首先由凸函数性质，我们知道对于 $\delta>0$ 以及 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$,容易验证 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$:

$$\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\leq\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\leq\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}$$

从而

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right|\leq\left|\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\right|+\left|\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\right|,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续. 一般地,可得开区间上的一元凸函数连续.

(2) 设 $(x_0,y_0)\in D$. 则有 $\delta>0$ 使得

$$E_\delta\equiv[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset D$$

注意到固定 x 或 y 时, $f(x,y)$ 作为一元函数都是凸函数,由 (1) 的结论,$f(x,y_0)$, $f(x,y_0+\delta)$, $f(x,y_0-\delta)$ 都是 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的连续函数,从而它们有界,即存在常数 $M_\delta>0$ 使得对 $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$，有

$$\begin{aligned}&|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|\\&+|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|+|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|<\delta M_\delta\end{aligned}$$

进一步,由 (1) 的结论,对于 $(x,y)\in E_\delta$,

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\\leq\ &|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\\leq\ &\left(\frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta}\right)|y-y_0|\\&+\left(\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta}\right)|x-x_0|\\\leq\ &M_\delta|y-y_0|+M_\delta|x-x_0|\end{aligned}$$

于是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 证毕.

第 8 章 重积分

注 重积分内容包括 Jordan 测度的许多性质的证明都较为繁复，且 Jordan 测度的性质并非十分良好，在后续的课程中更多使用的是 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分，故在本科阶段花费过多时间在研究 Jordan 测度上面是“不值当”的，故部分命题我们仅做了解并不做详细证明.

8.1 $\mathbb{R}^n$ 中的 Jordan 测度

首先我们考虑最简单的情况，我们来定义 n 维欧式空间中标准长方体的体积.

定义 8.1 (标准长方体的体积(测度))

首先由直观定义 $\mathbf{R}^n$ 中标准长方体

$$H=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n;a_i\le x_i\le b_i,i=1,\cdots,n\}$$

的体积 (或测度) 为 $V(H)=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

借助标准长方体的概念，我们可以来定义简单集.

定义 8.2 (简单集)

设 $Q\subseteq R^n$,如果 Q 是 R^n 中的有限个标准长方体的并集,则称 Q 为 R^n 中的简单集.

通过简单集的定义，我们容易知道存在有限个标准长方体(例如图：) H_1，H_2，$\cdots,H_m$ 使得:

$$H_i^\circ\bigcap H_j^\circ=\phi,i\neq j,\quad Q=\bigcup_{i=1}^{m}H_i$$

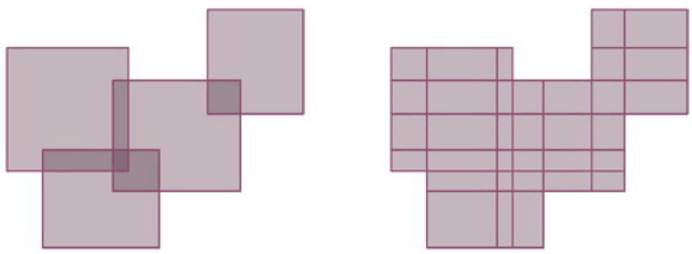


图 8.1: 简单集的一种表示方式

其中 H_i° 表示集合 H_i 的内部. 可以证明 $\sum\limits_{i=1}^{m}V(H_i)$ 与 Q 的上述表示方法无关[1]. 从而可定义 $\sum\limits_{i=1}^{m}V(H_i)$ 为 Q 的体积 (或测度). 约定空集为简单集, 其测度为 0.

定义 8.3

设 Ω 是 R^n 中的有界集,定义

$$V^-(\Omega)=\sup\{V(Q);Q为简单集且Q\subseteq\Omega\}$$

[1]先进行直观理解

$$V^{+}(\Omega)=\inf\{V(Q);Q\text{为简单集且}Q\supseteq\Omega\}$$

分别称 $V^{-}(\Omega)$ 和 $V^{+}(\Omega)$ 为 Ω 的 Jordan 内测度和外测度，显然 $V^{-}(\Omega)\leq V^{+}(\Omega)$.
若 $V^{-}(\Omega)=V^{+}(\Omega)$,则称 Ω 在 R^n 中 Jordan 可测,且称 $V^{-}(\Omega)=V^{+}(\Omega)$ 为 Ω 在 R^n 中的 Jordan 测度,记为 $V(\Omega)$.

♣

显然简单集 Jordan 可测且它的 Jordan 测度就是由直观定义的体积. 以下简称 Jordan 可测为 J 可测，Jordan 测度为 J 测度.

命题 8.1

J 可测有以下性质.

(1) 若 Ω J 可测,则 $\Omega^{\circ},\bar{\Omega}$ 都 J 可测,且

$$V(\Omega^{\circ})=V(\Omega)=V\left(\bar{\Omega}\right)$$

(2) 若 Ω_1 和 Ω_2 都 J 可测,则 $\Omega_1\cup\Omega_2,\Omega_1\cap\Omega_2$ 和 $\Omega_1\backslash\Omega_2$ 也都 J 可测,且

$$V(\Omega_1\cup\Omega_2)\leq V(\Omega_1)+V(\Omega_2)$$

其中等号成立的充要条件是 $V(\Omega_1\cap\Omega_2)=0$.

♠

证明 [性质 1 的证明] 记 $V=V(\Omega)$. 由于 $\Omega^{\circ}\subseteq\Omega$,所以由定义易知

$$V^{-}(\Omega^{\circ})\leq V^{-}(\Omega)=V(\Omega)=V,$$

$$V^{+}(\Omega^{\circ})\leq V^{+}(\Omega)=V(\Omega)=V$$

任给 $\varepsilon>0$,存在简单集 Q_1 使得 $Q_1\subseteq\Omega$,且

$$V(Q_1)>V^{-}(\Omega)-\frac{\varepsilon}{2}=V-\frac{\varepsilon}{2}$$

由简单集的定义易知对于 Q_1 存在简单集 Q_2 使得 $Q_2\subseteq Q_1^{\circ}$,且

$$V(Q_2)>V(Q_1)-\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $Q_2\subseteq Q_1^{\circ}\subseteq\Omega^{\circ}$,从而

$$V^{-}(\Omega^{\circ})\geq V(Q_2)>V(Q_1)-\frac{\varepsilon}{2}>V-\varepsilon.$$

于是有

$$V-\varepsilon<V^{-}(\Omega^{\circ})\leq V$$

由 ε 之任意性得 $V^{-}(\Omega^{\circ})=V$. 再由

$$V=V^{-}(\Omega^{\circ})\leq V^{+}(\Omega^{\circ})\leq V$$

可得

$$V^{-}(\Omega^{\circ})=V^{+}(\Omega^{\circ})=V,$$

即 Ω_J° 可测且其 J 测度为 V . 同理可证

$$V^-(\bar{\Omega}) = V^+(\bar{\Omega}) = V$$

笔记 此性质的逆不真,即 Ω° J 可测, $\bar{\Omega}$J 可测, Ω 未必 J 可测. 例如在 R^1 中记 $[0,1]$ 中的所有有理数组成的集合为 M ,则易知 $V^-(M) = 0, V^+(M) = 1$,从而 M 在 R^1 中不是 J 可测. 但 $M^\circ = \phi, \bar{M} = [0,1]$,显然均在 R^1 中 J 可测.

证明 [性质 2 的证明] 首先容易证明当 Ω_1 和 Ω_2 都是简单集时，该性质成立，且:

$$V(\Omega_1 \cup \Omega_2) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2) \tag{8.1}$$

设 Ω_1 和 Ω_2 都是 J 可测集. 任给 $\varepsilon > 0$,存在简单集 Q_1 和 Q_2 , 使得 $Q_1 \supseteq \Omega_1, Q_2 \supseteq \Omega_2$,且

$$V(Q_1) < V(\Omega_1) + \frac{\varepsilon}{2},\ V(Q_2) < V(\Omega_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subseteq Q_1 \cup Q_2$,从而由 (8.1) 得

$$\begin{aligned} V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2) &\leq V(Q_1 \cup Q_2) = V(Q_1) + V(Q_2) - V(Q_1 \cap Q_2) \\ &< V(\Omega_1) + V(\Omega_2) + \varepsilon - V(Q_1 \cap Q_2) \end{aligned}$$

再由 $Q_1 \cap Q_2 \supseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$,可知 $V(Q_1 \cap Q_2) \geq V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2)$,于是有

$$V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2) < V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \varepsilon$$

由 ε 的任意性可得

$$V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2) \tag{8.2}$$

另一方面,对于任给的 $\varepsilon > 0$,存在简单集 Q_3 和 Q_4 ,使得 $Q_3 \subseteq \Omega_1, Q_4 \subseteq \Omega_2$ 且

$$V(Q_3) > V(\Omega_1) - \frac{\varepsilon}{2},\ V(Q_4) > V(\Omega_2) - \frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $Q_3 \cup Q_4 \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$,从而由 (8.1) 得

$$\begin{aligned} V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) &\geq V(Q_3 \cup Q_4) = V(Q_3) + V(Q_4) - V(Q_3 \cap Q_4) \\ &> V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - \varepsilon - V(Q_3 \cap Q_4) \end{aligned}$$

显然 $Q_3 \cap Q_4 \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$,所以

$$V(Q_3 \cap Q_4) \leq V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

于是可得

$$V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) > V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) - \varepsilon$$

由 ε 的任意性,则

$$V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) \tag{8.3}$$

比较 (8.2) 和 (8.3),再由 $V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2)$,立即可得

$$\begin{aligned} V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) = V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2) \\ V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) = V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2) \end{aligned}$$

由此可知 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 和 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 都 J 可测,且 8.1 对任何 J 可测集 Ω_1 和 Ω_2 都成立.

余下来仅证明 $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ 的 J 可测性. 事实上,由 Ω_1 和 Ω_2 的 J 可测性可推出 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ J 可测. 任给 $\varepsilon > 0$,存在简单集 Q_1 和 Q_2 ,使得 $Q_1 \supseteq \Omega_1, Q_2 \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$,且

$$V(Q_1) < V(\Omega_1) + \frac{\varepsilon}{2},\ V(Q_2) > V(\Omega_1 \cap \Omega_2) - \frac{\varepsilon}{2}$$

显然 $Q_1 \backslash Q_2 \supseteq \Omega_1 \backslash \Omega_2$. 易知性质 (2) 对于简单集成立,所以 $Q_1 \backslash Q_2$ J 可测. 再由

$$Q_1 = (Q_1 \backslash Q_2) \cup (Q_1 \cap Q_2)$$

且 $(Q_1 \backslash Q_2) \cap (Q_1 \cap Q_2) = \phi$,从而由 (8.1) 得

$$V(Q_1) = V(Q_1 \backslash Q_2) + V(Q_1 \cap Q_2)$$

于是

$$V^+(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \le V(Q_1 \backslash Q_2) = V(Q_1) - V(Q_1 \cap Q_2)$$

由于 $Q_1 \cap Q_2 = Q_2$,则

$$V^+(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \le V(Q_1) - V(Q_2) < V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \varepsilon$$

由 ε 之任意性可得

$$V^+(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \le V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2). \tag{8.4}$$

另一方面,对任给的 $\varepsilon > 0$,存在简单集 Q_3 和 Q_4 使得 $Q_3 \subseteq \Omega_1$, $Q_4 \supseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$,且

$$V(Q_3) > V(\Omega_1) - \frac{\varepsilon}{2},\ V(Q_4) < V(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

显然 $Q_3 \backslash Q_4 \subseteq \Omega_1 \backslash \Omega_2$,则

$$\begin{aligned} V^-(\Omega_1 \backslash \Omega_2) &\ge V(Q_3 \backslash Q_4) = V(Q_3) - V(Q_3 \cap Q_4) \\ &\ge V(Q_3) - V(Q_4) > V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 之任意性可得

$$V^-(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \ge V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2) \tag{8.5}$$

比较 (8.4) 和 (8.5) 可知 $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ J 可测,且

$$V(\Omega_1 \backslash \Omega_2) = V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

笔记 由性质 (2) 可知任意有限多个 J 可测集 $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$ 其并集和交集都 J 可测,且

$$V\left(\bigcup_{i=1}^m \Omega_i\right) \le \sum_{i=1}^m V(\Omega_i)$$

其中等号成立的充要条件是

$$V(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i, j = 1, \cdots, m, i \ne j.$$

上述性质一般称为 Jordan 测度的**有限可加性**. Jordan 测度没有所谓完全可加性,即可数无穷多个 J 可测集其并集和交集都未必 J 可测.

这也是开头所提到的 Jordan 测度的性质并非十分良好原因所在，通过这两个性质可以看出，有关于 Jordan 测度的命题的证明会比较冗长，但本质上所利用的工具与思想并不复杂，故后面所涉及的一些性质我们并不作证明，感兴趣的可以参见：黄玉民，李成章老师的《数学分析》

定义 8.4 (零测集)

R^n 中的一个 J 可测集,如果它的 J 测度为 0,则称其为 R^n 中的 **Jordan 零测集**,简称为 R^n 中的 J 零集.
显然 R^n 中的有界集 A 是 J 零集 $\Leftrightarrow V^+(A)=0$,即任给 $\varepsilon>0$,存在 R^n 中的有限个标准长方体 $H_1,\cdots,H_m$,使得 $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}H_i$,且

$$\sum_{i=1}^{m}V(H_i)<\varepsilon$$

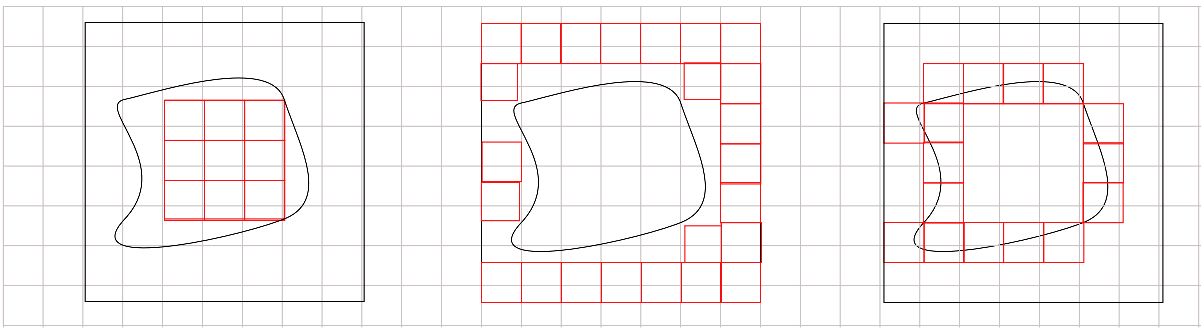
♣

注 由于不同书籍的记号不同，我们有时也将 V^+ 记作 V^*；将 $V^-=V_*$.

定义 8.5 (Jordan 测度的等价定义)

对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一个有界集合 E,我们把 E 放置于某个标准长方体 H 内,并用 n 组与坐标轴垂直的超平面(每组有有限多个平行平面)将 H 分割成若干小标准长方体,称其为对 H 的一个分割 $T=\{H_1,\cdots,H_k\}$.
例如 $n=2$ 时, 两组与坐标轴垂直的“超平面”就是两组互相垂直的直线, 而小标准长方体就是小长方形, 如下图 8.2.
这些小长方体可分为三类:
(i) 小长方体 $H_i\subseteq E^\circ$,也就是说,这类小长方体全部含在集合 E 内.
(ii) 小长方体 $H_j\cap\bar{E}=\varnothing$,也就是说,这类小长方体全部在集合 E 的外面.
(iii) 小长方体 $\dot{H}_s\cap\partial E\neq\varnothing$,也就是说,这类小长方体之并恰恰覆盖住 1 合 E 的边界.
我们将所有属于第(i)类的小长方体的 n 维体积相加起来,记这个和数为 $V_{\text{int}}(T)$ ($n=2$ 时即图8.2 中含于 E 的实线内部的面积),将所有属于第(i)类和第(iii)类的小长方体的 n 维体积相加起来,记这个和数为 $V_{\text{out}}(T)$ ($n=2$ 时即图 8.2 中包含 E 的实线内部的面积).
这两个和数 $V_{\text{int}}(T)$ 和 $V_{\text{out}}(T)$ 皆与分割 T 有关.
记 $V_*(E)=\sup\limits_T V_{\text{int}}(T)$, $V^*(E)=\inf\limits_T V_{\text{out}}(T)$. 显然, $V_*(E)\le V^*(E)$.
若 $V_*(E)=V^*(E)$,则称集合 E 有确定的 n 维体积或者说是若尔当可测的, 简称是 J 可测的,称这个值为集合 E 的 n 维体积或若尔当测度,记为 $V_J(E)$.

♣



第 (i) 类　　第 (ii) 类　　第 (iii) 类

图 8.2: 三类小长方体

例题 8.1 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集,则 $V_*(E)=0$ 的充要条件是 $E^\circ=\varnothing$.

证明 一方面,若 $E^\circ\neq\varnothing$,则存在 $B(X,r)\in E^\circ$,使得 $V_*(E)>V(B)-r^n>0$,矛盾! 另一方面,若 $E^\circ=\varnothing$,则任

意分割,均不存在标准小长方体在 E° 内部,从而 $V_{\text{int}}(T,E)\equiv 0$,进而内测度为 0.

例题 8.2 $V_*(E)=V^*(E)$ 即 E 的充要条件为 $V^*(E)+V^*(H\backslash E)=V(H)$,其中 $H\supseteq E$ 为标准长方体.

证明 注意到,对给定的任一分割 T,结合 $E^\circ\cup\partial E\cup(H\backslash E)^\circ$ 为 H 的不交并,我们有以下两个式

$$V_{\text{int}}(T,E)+V_{\text{out}}(T,H\backslash E)=V(H),V_{\text{out}}(T,E)+V_{\text{int}}(T,H\backslash E)=V(H).$$

从而对左右两式恰当地取确界, 即有:

$$\sup V_{\text{int}}(T,E)=V(H)-\inf V_{\text{out}}(T,H\backslash E),\inf V_{\text{out}}(T,E)=V(H)-\sup V_{\text{int}}(T,H\backslash E).$$

事实上也即

$$V^*(E)+V_*(H\backslash E)=V(H),V_*(E)+V^*(H\backslash E)=V(H).$$

因此由这个等式我们不难发现命题正确.

笔记 利用实变函数的知识, 我们可以构造出这样的例子:

(1) 即存在有界闭区域 J 不可测;

(2) 存在一个有界闭区域, 其边界是连续曲线, 但其没有确定的面积.

这两个反例的存在告诉我们，Jordan 测度具有一定的局限性，仍然有很多空间结构无法用 J 测度去衡量.

命题 8.2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,令

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b,y=f(x)\right\}$$

则 A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的若尔当零测集.

证明 利用可积的充分必要条件及 Jordan 零测集的定义容易证明.

命题 8.3

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $f(X)$ 在 A 连续,令

$$B=\left\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,\begin{array}{l}X=(x_1,\cdots,x_n)\in A,\\ x_{n+1}=f(X)\end{array}\right\}$$

求证: B 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的若尔当零测集.

证明 仿照上例即可.(Hint: 利用一致连续性对测度进行估计.)

命题 8.4

若 $V_*(E)=V^*(E)=V_J(E)$,则

$$\lim_{d(T)\to 0}V_{\text{int}}(T)=\lim_{d(T)\to 0}V_{\text{out}}(T)=V_J(E)$$

其中 $d(T)=\max\limits_{H_i\cap\bar{E}\neq\varnothing}d(H_i)$.

注 了解即可，证明比较繁琐. 整体思想与达布上下和类似.

命题 8.5

有界集合 E 是 J 可测的充分必要条件为 $V_J(\partial E)=0$.

命题 8.6

设平面曲线 Γ 的参数方程是 $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[a,b]$,其中 φ 与 ψ 都在 $[a,b]$ 连续,且至少有一个在 $[a,b]$ 连续可微,则平面曲线 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的若尔当零测集,即平面曲线 Γ 的面积为零.

注 后面我们遇到的大多数区域（如下一节所涉及到的所谓 x 型区域与 y 型区域）都是由有限条满足命题8.6 条件的曲线所围成的，因此由命题 8.5 它们都有确定的面积.

定义 8.6 (集合的环)

设 $\mathcal{R}$ 是集合 X 的子集族,如果 $\varnothing\in\mathcal{R}$,对任意 $A,B\in\mathcal{R}$, $A\cap B, A\cup B$, $A\backslash B$ 也属于 $\mathcal{R}$,则称 $\mathcal{R}$ 是环.

笔记 注意到

$$A\backslash A=\varnothing, A\cap B=(A\cup B)\backslash((A\backslash B)\cup(B\backslash A))$$

即知环是对于集合的并与差运算封闭的非空集合族.

笔记 由命题 8.1 的 (2) 可知 $\mathbb{R}^n$ 中所有若当可测集的全体是环.

8.2 重积分的概念与性质

定义 8.7 (有界闭区域的分割)

对 $\mathbb{R}^n$ 中 J 可测的有界闭区域 D ,称有限集 $T=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$ 为 D 的一个分割, 如果

(i) 每个 Ω_i 都是有界闭 J 可测集,

(ii) $\Omega_i^\circ\cap\Omega_j^\circ=\varnothing, i\neq j$,

(iii) $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Omega_i=D$.

定义 8.8 (重积分的定义)

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中 J 可测的有界闭区域,函数 $f(X)$ 在 D 有定义. 对 D 的一个分割 $T=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$,将 Ω_i 的 n 维体积记为 $\Delta\Omega_i$,称 $d(T)=\max\limits_{1\le i\le k}d(\Omega_i)$ 为该分割的直径(或细度),其中 $d(\Omega_i)$ 为小单元 Ω_i 的直径. 任取 $P_i\in\Omega_i$,作如下和式

$$\sum_{i=1}^{k}f(P_i)\Delta\Omega_i$$

称为 $f(X)$ 在 D 上关于该分割与取法的一个积分和.

如果存在实数 l ,使得对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对于 D 的任意分割 T ,只要 $d(T)<\delta$,无论点 P_i 在 Ω_i 上如何选取,恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{k}f(P_i)\Delta\Omega_i-I\right|<\varepsilon$$

则称 $f(X)$ 在 D **黎曼可积**,称 l 为 $f(X)$ 在 D 的 n 重积分,记为 $l=\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega$.

当 $n=2$ 或 3 时,称上述积分为二重积分或三重积分. 二重积分与三重积分常常记为

$$I=\iint_D f(X)\,\mathrm{d}\sigma$$

与

$$I=\iiint_D f(X)\,\mathrm{d}V$$

其中称 D 为积分域, f 为被积函数, $\mathrm{d}\sigma$ 与 $\mathrm{d}V$ 分别为面积微元与体积微元.

由重积分的定义可知,当 $f(X)$ 非负时, $f(X)$ 在 D 的重积分可以视为以 $f(X)$ 为密度的物体 D 的质量. 当 $f(X)\equiv 1$ 时, $f(X)$ 在 D 的 n 重积分就是 D 的 n 维体积,即

$$\int_D \mathrm{d}\Omega=V_J(D)$$

笔记 重积分的概念是固有的, 与坐标系无关, 只是在计算重积分时需要根据具体情况选择合适的坐标系进行罢了.

理论上对积分域的分割应是任意的，但在一定的坐标系下常选用与坐标曲线(或面)平行的曲线族(或曲面族)对积分域进行分割，因而面积微元与体积微元在不同的坐标系下有不同的表示形式.

如在平面直角坐标系下,为了方便常采用与坐标轴平行的直线 $x=x_i$, $y=y_j$ 对平面区域 D 作分割,我们将这种分割称为矩形分割,记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$,那么小矩形单元 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 的面积 $\Delta\sigma_{ij}=\Delta x_i\Delta y_j$.

因此,在直角坐标系下用 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 表示面积微元 $\mathrm{d}\sigma$,相应地, $f(X)=f(x,y)$ 的二重积分表示为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

类似地,用 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 表示体积微元 $\mathrm{d}V$, $f(X)=f(x,y,z)$ 的三重积分表示为

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

引理 8.1

若 D 是某个开集的闭包,则一定有 $\partial D^\circ=\partial D$.

证明 设 D_1 为开集,且 $D=\overline{D_1}$,则由于 D° 是包含于 D 内的最大开集,因此开集 $D_1\subseteq D^\circ$,进而 $D=\overline{D_1}\subseteq\overline{D^\circ}$. 而另一方面, $D^\circ\subseteq D$,且 D 为闭集,又 $\overline{D^\circ}$ 是包含 D° 的最小闭集,从而 $\overline{D^\circ}\subseteq D$.

综上两方面,我们有 $\overline{D^\circ}=D$,进而考虑以下两个不交并的分划:

$$D=D^\circ\bigcup\partial D,\ \overline{D^\circ}=D^\circ\bigcup\partial D^\circ,$$

可知即有 $\partial D^\circ=\partial D$.

命题 8.7 (可积的必要条件)

如果 $f(X)$ 在有界闭区域 D 重积分存在,则 $f(X)$ 在 D 有界.

证明 由 $f(X)$ 可积,故存在 I ,使得对任意 $\varepsilon>0$,存在 δ ,对任意分割 $T=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_N\}$,若 $d(T)<\delta$, 即有任意 $\xi_i\in\Omega_i$,有

$$\left|\sum_{i=1}^N f(\xi_i)V_J(\Omega_i)-I\right|<\varepsilon$$

从而反证法若 $f(X)$ 无界,则存在 $\{X_m\}\to X_0\in D$,使得 $\{f(X_m)\}$ 无界,而考虑 $\Omega_1=B\left(X_0,\dfrac{\delta}{2}\right)\cap D$,则我们断言 $\Omega_1\cap D^\circ\neq\varnothing$,一方面若已有 $X_0\in D^\circ$,则平凡成立,另一方面若 $X_0\in\partial D$,则由 D 为闭区域进而为一道路

连通开集的闭包,从而由引理 $X_0 \in \partial D = \partial D^{\circ}$,因此 $B\left(X_0, \frac{\delta}{2}\right) \cap D^{\circ} \neq \varnothing$,进而 Ω_1 中也一定包含内点.

进而由 $\Omega_1^{\circ} \neq \varnothing$ 可知 $V_J(\Omega_1) \neq 0$,从而对 $D \backslash \Omega_1$ 进行分割,得到 T 且 $d(T) < \delta$,但注意到任意 $X_m \in \Omega_1$,有

$$|f(X_m)| \leq \frac{\left|\sum\limits_{i=2}^{N} f(\xi_i) V_J(\Omega_i)\right| + |I| + \varepsilon}{V_J(\Omega_1)} = M$$

这里固定 $\xi_2, \cdots, \xi_N$,与其无界性矛盾! 故可知可积函数在有界闭区域上有界.

笔记 注意，这里对定义域中 D 为有界闭区域的限制是必要的，如果减弱 D 为 J 可测的有界闭集则不一定成立.

笔记 这里蕴含的一个小结论十分重要: $\Omega_1 = B\left(X_0, \frac{\delta}{2}\right) \cap D$ 一定包含 D 的内点进而 Jordan 测度不为 0 .

注 我们注意到: 黎曼重积分是针对定义在 J 可测的有界闭区域上的有界函数进行讨论的, 不可测的区域或无界函数都不属于黎曼重积分讨论的范畴. 因此, 今后在涉及黎曼重积分的有关问题时, 我们总是默认区域是 J 可测的,并总是假设函数是有界的.

与定积分类似，并非任何函数都是黎曼可积的，所以我们为了讨论这一问题，需要定义出类似于定积分的达布上，下和与上下积分的概念:

定义 8.9

D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域, $f(X)$ 在 D 有界, $T = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$ 是 D 的一个分割. 记

$$m_i = \inf_{X \in \Omega_i} f(X), M_i = \sup_{X \in \Omega_i} f(X), \omega_i = M_i - m_i$$

则定义 f 的达布上和与下和分别为

$$S(T) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta\Omega_i,\ s(T) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta\Omega_i$$

定义 f 的上、下积分为

$$I^* = \inf_T S(T), I_* = \sup_T s(T)$$

♣

定理 8.1 (Darboux 定理)

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域, $f(X)$ 在 D 有界,则

$$\lim_{d(T)\to 0} s(T) = I_*,\ \lim_{d(T)\to 0} S(T) = I^*$$

♡

定理 8.2

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域, $f(X)$ 在 D 有界,则下列条件相互等价

(i) $f(X)$ 在 D 可积;

(ii) $\lim\limits_{d(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0$;

(iii) 对任意 $\varepsilon > 0$,存在 D 的一个分割 $T = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$,使

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta\Omega_i < \varepsilon$$

(iv) $I^* = I_*$.

♡

定理 8.3

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域, $f(X)$ 在 D 有界并且在 D 的间断点集为 E. 若 $V_J(E)=0$,则 $f(X)$ 在 D 可积.

注 将来还可以进一步证明: 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域, $f(x)$ 在 D 上有界, 则 $f(x)$ 在 D 上可积的充要条件是 $f(x)$ 在 D 上的间断点集 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的勒贝格零测集.

注 上面定理的证明与一元情况类似，这里不作详细证明.

注 **实际上，据我某位学长的暴论：“等 Lebesgue 测度学了后黎曼积分就可以进历史的垃圾桶了.”** 故我们不过多在意黎曼积分的证明，而重点考虑黎曼积分的计算.

命题 8.8 (积分与测度的关系)

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, H 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个标准长方体, $\bar{E}\subseteq H^\circ$,令

$$f(X)=\begin{cases}1, & X\in E,\\ 0, & X\in H\backslash E,\end{cases}$$

则 f 的上、下积分分别等于 E 的若尔当外测度与内测度,从而 E 若尔当可测当且仅当 f 在 H 可积,且有

$$V_J(E)=\int_H f(X)\,\mathrm{d}\Omega$$

定理 8.4 (线性运算的性质)

若 $f(X)$ 和 $g(X)$ 在 D 可积,则对任意常数 a 和 b, $af(X)+bg(X)$ 也在 D 可积,且

$$\int_D [af(X)+bg(X)]\,\mathrm{d}\Omega=a\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega+b\int_D g(X)\,\mathrm{d}\Omega$$

定理 8.5 (积分域的可加性)

设 $D=D_1\cup D_2$,其中 D_1 和 D_2 均 J 可测并且无公共内点. 若 $f(X)$ 在 D 可积, 则 $f(X)$ 在 D_1 和 D_2 都可积,且

$$\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega=\int_{D_1} f(X)\,\mathrm{d}\Omega+\int_{D_2} f(X)\,\mathrm{d}\Omega$$

反之,若 $f(X)$ 在 D_1 和 D_2 都可积,则 $f(X)$ 在 D 可积,且上述等式成立.

定理 8.6

若 $f(X)$ 和 $g(X)$ 都在 D 可积,且 $f(X)\le g(X)$, $\forall X\in D$,则

$$\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega\le\int_D g(X)\,\mathrm{d}\Omega$$

定理 8.7

若 $f(X)$ 在 D 可积,则 $|f(X)|$ 在 D 可积,且

$$\left|\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega\right|\le\int_D |f(X)|\,\mathrm{d}\Omega$$

命题 8.9

若 $f(X)$ 与 $g(X)$ 在 D 可积,则 $f(X)g(X)$ 在 D 可积. 进一步如果存在 $\delta>0$ 使得 $|f(X)|\geq\delta,\forall X\in D$,则 $\dfrac{1}{f(X)}$ 也在 D 可积.

定理 8.8 (积分中值定理)

设 $f(X)$ 在 D 连续,则存在 $\xi\in D$ 使得

$$\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega=f(\xi)V_J(D)$$

定理 8.9

设 $f(X)$ 在 D 可积, $g(X)$ 在 D 有界. 若存在 $\mathbb{R}^n$ 中的 J 零测集 E,使 $f(X)=g(X)$, $\forall X\in D\backslash E$,则 $g(X)$ 在 D 可积,且

$$\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega=\int_D g(X)\,\mathrm{d}\Omega$$

笔记 由若尔当测度的性质与定理 8.9 可知有界函数在 J 可测的有界闭区域的边界上的取值对可积性以及重积分的值没有影响. 在本章中有界闭区域也称为区域.

命题 8.10

设 $f(X)$ 是 D 上的非负可积函数,则 $\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega=0$ 的充分必要条件是 f 在其连续点处的值均为零.

命题 8.11

设 $f(X)$ 是 D 上的非负连续函数,则 $\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega=0$ 当且仅当 $f(X)\equiv 0$.

命题 8.12

设 $f(X)$ 是 D 上的非负可积函数,则 $\int_D f(X)\,\mathrm{d}\Omega=0$ 的充分必要条件是存在 $\mathbb{R}^n$ 中的勒贝格零测集 E,使得 $f(X)=0,\forall X\in D\backslash E$.

8.3 二重积分的计算

设

$$H=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,c\leq y\leq d\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭矩形区域, $f(x,y)$ 为在 H 有定义的非负可积函数. 记

$$V=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in H,0\leq z\leq f(x,y)\}$$

那么 V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲顶柱体. 由二重积分的定义可知, $f(x,y)$ 在 H 的二重积分表示这个曲顶柱体的体积.

记 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$,则它表示这个曲顶柱体在 y 处横截面的面积,因此这个曲顶柱体的体积

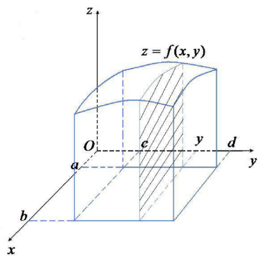


图 8.3: 曲顶柱体

$$\iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

这提示我们重积分的计算可以通过将它化为累次积分而归结为定积分的计算.

定理 8.10

设 $f(x,y)$ 在 $H=\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$ 可积,并且对任意 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上可积,则 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可积,且

$$\int_c^d \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

即

$$\iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

♡

证明 记 $I=\iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 对区间 $[c,d]$ 作任意分割

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$$

并对于这一分割关于 φ 作积分和

$$s=\sum_{j=1}^m \varphi(\eta_j)\,\Delta y_j$$

其中 $\eta_j\in[y_{j-1},y_j]$, $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$. 再对区间 $[a,b]$ 作任意分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$$

因此 H 有分割 $T=\{\sigma_{ij}\mid i=1,\cdots,k, j=1,\cdots,m\}$,其中

$$\sigma_{ij}=\{(x,y)\mid x_{i-1}\le x\le x_i,\ y_{j-1}\le y\le y_j\}$$

于是

$$s=\sum_{j=1}^m \Delta y_j \int_a^b f(x,\eta_j)\,\mathrm{d}x = \sum_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le m}} \Delta y_j \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\eta_j)\,\mathrm{d}x$$

令 M_{ij}, m_{ij} 分别为 $f(x,y)$ 在 σ_{ij} 的上、下确界, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,则

$$\sum_{i,j} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le s \le \sum_{i,j} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$

令 $d(T)\to 0$,由于 $f(x,y)$ 在 H 可积,故上式左右两端的达布下和与上和都以 I 为极限,从而积分和 s 也以 I 为极限,于是 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积且 $\int_c^d \varphi(y)\,\mathrm{d}y = I$.

注 同理,如果 $f(x,y)$ 在 H 可积,并且对任意 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[c,d]$ 上可积,则 $\psi(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

因此,如果 $f(x,y)$ 在 H 连续,则

$$\iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

这表明当 $f(x,y)$ 在 H **连续**时,上述两个累次积分可以交换次序.

笔记 当不满足可积与累次可积的条件的时候,重积分与累次积分的关系并没有一个确定的结论,会发生很多种情况,如重积分存在但累次积分不存在;两个累次积分存在且相等但重积分不存在;二重积分不存在但两个累次积分一个存在一个不存在;二重积分不存在但两个累次积分都存在且不相等.

定理 8.11

下面设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 连续, D 为 x 型区域. 设 D 可以表示为

$$D = \{(x,y) \mid a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 均在 $[a,b]$ 连续,那么

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

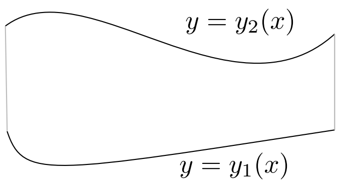


图 8.4: x 型区域

证明 令 $c < \inf\limits_{a\le x\le b} y_1(x)$, $d > \sup\limits_{a\le x\le b} y_2(x)$,

$$H = \{(x,y) \mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\in H\backslash D. \end{cases}$$

记 $E_1 = \{(x,y) \mid a\le x\le b, y = y_1(x)\}$,由于 $y_1(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,易知 E_1 是 J 零测集. 同理, $E_2 = \{(x,y) \mid a\le x\le b, y = y_2(x)\}$ 也是 J 零测集.

$f^*(x,y)$ 在 H 的间断点集为 $E_1 \cup E_2$ 的子集,从而是 J 零测集, 故 $f^*(x,y)$ 在 H 可积. 又由于 D 与 $H \backslash D$ 都 J 可测,由积分域的可加性得

$$\iint_H f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

另一方面,由于对任意 $x \in [a,b]$, $f^*(x,y)$ 做为 y 的函数在 $[c,d]$ 上可积. 于是由定理 8.10 有

$$\iint_H f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f^*(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)\,\mathrm{d}y$$

再由 $f^*(x,y)$ 的定义可知,结论成立.

同理我们有:

定理 8.12

下面设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 连续, D 为 y 型区域. 设 D 可以表示为

$$D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

其中 $x_1(y)$ 和 $x_2(y)$ 均在 $[c,d]$ 连续,类似于 x 区域的情形可以证明

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

♡

注 D 为几个 x 型区域与 y 型区域的并集,由于 x 型区域与 y 型区域都有确定的面积, 故此时可以利用积分域的可加性计算二重积分.

如果一个区域既可以表示为 x 型区域又可以表示为 y 型区域,则同一个二重积分可以化为两个积分次序不同的累次积分, 但具体采用哪个次序, 往往需要结合被积函数的特点做出选择.

下面我们介绍利用函数的对称性简化计算的方法: 在计算重积分时, 若积分域关于坐标轴或原点对称, 被积函数又在对称点的值相等或相反,可将计算化简.

命题 8.13

假设 D 关于 y 轴对称, D_1 与 D_2 是 D 左右对称的两部分. 如果 $f(x,y) = f(-x,y), \forall (x,y) \in D$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

如果 $f(x,y) = -f(-x,y), \forall (x,y) \in D$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

♠

命题 8.14

假设 D 关于原点对称, D_1 与 D_2 是 D 关于原点对称的两部分. 如果 $f(x,y) = f(-x,-y), \forall (x,y) \in D$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

如果 $f(x,y) = -f(-x,-y), \forall (x,y) \in D$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

♠

例题 8.3 设 $D=\{(x,y)\,||\,x\,|+|\,y\,|\le 1\}$,求

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解 由于

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}\;+\;y\right)\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\;\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D\;y\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

记 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\sinh(x+y)$，$g(x,y)=y\sinh(x+y)$，从而有：

$$f(x,y)=-f(-x,-y),\quad g(x,y)=g(-x,-y)$$

从而有:

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}\;+\;y\right)\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;=\;2\iint_{D_1}\;y\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $D_1=\{(x,y)|y\ge 0;|x|+y\le 1\}$，从而知：

$$\iint_{D_1}\;y\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;=\;\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\int_{-1+y}^{1-y}\sinh(x+y)\,\mathrm{d}x\;=\;\int_0^1 y\cdot(\cosh(1)\;-\;\cosh(-1+2y))\,\mathrm{d}y$$

后续进行定积分的计算即可.

命题 8.15

假设 D 关于直线 $y=x$ 对称,那么

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例题 8.4 设 $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$,求

$$\iint_D\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解 积分域图像如图所示：

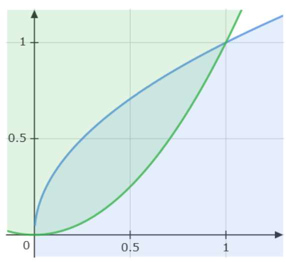


图 8.5: 积分域为所夹部分

容易发现 D 关于直线 x 对称，所以

$$\iint_D\frac{e^x}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;=\iint_D\frac{e^y}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}2\iint_D\frac{e^x}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;&=\;\iint_D\frac{e^x}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;+\;\iint_D\frac{e^y}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\;\iint_D\frac{e^x+e^y}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_J(D)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

所以我们有 $\displaystyle\iint_D\frac{e^x}{e^x+e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$.

下面我们介绍极坐标系的换元: 在极坐标系下,设 $f(X) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,我们用“ $r =$ 常数”的一族同心圆与“ $\theta =$ 常数”的一族过极点的射线对区域 D 作分割.

极坐标下区域

$$R = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$

的分割如图所示.

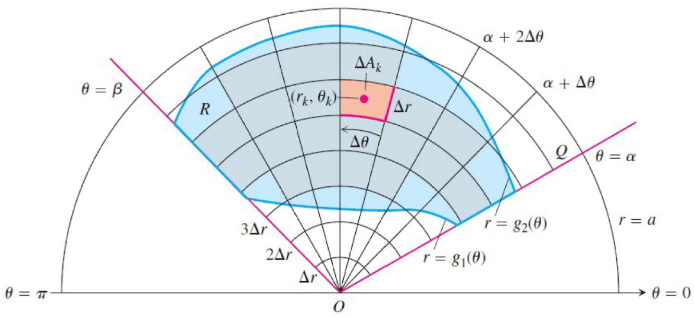


图 8.6: 极坐标的分割

在这种分割下,小单元 σ_i 的面积

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}\left[(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\theta_i - r_i^2 \Delta\theta_i\right] = \left(r_i + \frac{1}{2}\Delta r_i\right)\Delta r_i \Delta\theta_i$$

当 $\Delta r_i, \Delta\theta_i$ 充分小时,舍去高阶无穷小量, $\Delta\sigma_i \approx r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$. 通常将 $r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ 称为**极坐标系下的面积微元.** 积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_i\cos\theta_i, r_i\sin\theta_i)\, r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$$

对上式两边取极限, 就得极坐标系下二重积分的表达式

$$\iint_D f(X)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$$

我们也得到二重积分在直角坐标与极坐标之间的转换公式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$$

命题 8.16 (极点位于区域外部)

区域 D 可以表示为 θ 型区域,极点位于区域 D 之外,即

$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

就有

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r$$

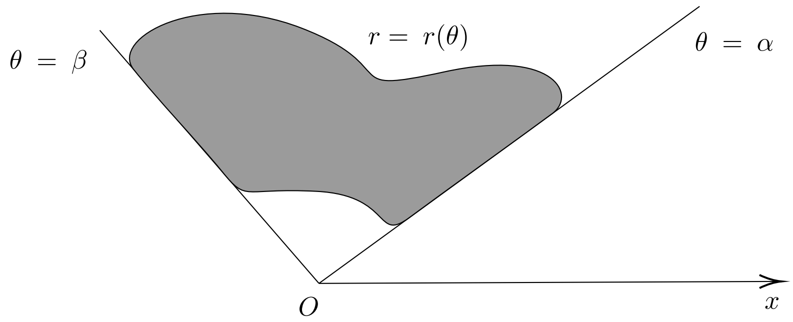


图 8.7: 极点位于区域之外

命题 8.17 (极点位于区域边界)

区域 D 可以表示为 θ 型区域,极点位于区域 D 的边界,即

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\theta)\}$$

则累次积分为

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, \mathrm{d}r$$

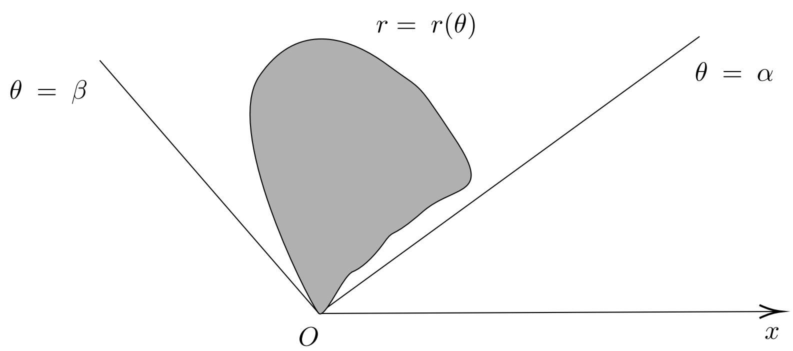


图 8.8: 极点位于区域边界

命题 8.18 (极点位于区域内部)

区域 D 可以表示为 θ 型区域,极点位于区域 D 之内,则累次积分为

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, \mathrm{d}r$$

除去 θ 型区域，还可以表示为 r 型区域.

命题 8.19 (r 型区域)

区域 D 可以表示为 r 型区域,即

$$D = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \theta_1(r) \leq \theta \leq \theta_2(r)\}$$

就有

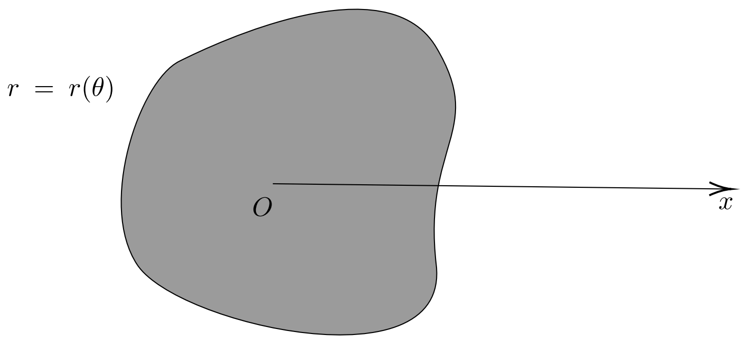


图 8.9: 极点位于区域内部

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_a^b r\,\mathrm{d}r \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

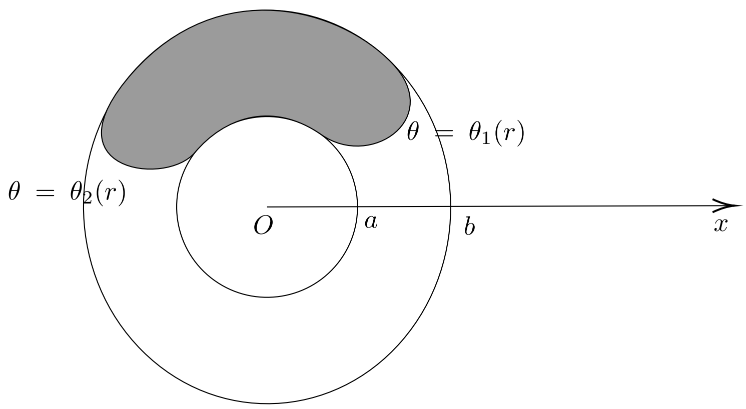


图 8.10: r 型区域

例题 8.5 计算

$$I = \iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 D 为 $x^2+y^2 \le a^2, a>0$.

解 如果用直角坐标系计算这个积分, 由于被积函数的原函数不能用初等函数表示, 因而导致不能求值. 现选用极坐标系计算. 由于

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le a\},$$

故而

$$I = \iint_D \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right).$$

笔记 利用这道题，我们还可以计算一个利用定积分很难解决的问题：

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

注意到：

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y\right) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x$$

而对任意 $a \in \mathbb{R}$,有 $D_1 \subseteq D \subseteq D_2$,其中

$$D_1 = \left\{x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\right\},\ D = [0, a]^2,\ D_2 = \left\{x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2a^2\right\}$$

则我们事实上有

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \iint_{D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \iint_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

而

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a} r \cdot \mathrm{e}^{-r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-a^2}\right)$$

$$\iint_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}a} r \cdot \mathrm{e}^{-r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-2a^2}\right)$$

从而令 $a \to \infty$,则由夹逼定理可知即证.

下面我们探讨一般的变量替换.

引理 8.2

设在 uv 平面有一块包含点 (u, v) 的区域 σ' ,并且 $\sigma' \subseteq D'$,在变换 F 下点 (u, v) 对应 xy 平面的点 (x, y) ,区域 σ' 对应 xy 平面上包含点 (x, y) 的区域 σ .

那么当区域 σ' 无限地向点 (u, v) 收缩, $d(\sigma')$ 趋于 0 时,它们的面积之比 $\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}$ 的极限正是 $\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v)\right|$,即雅可比行列式的绝对值在点 (u, v) 处的值.

♡

笔记 我们并不对这个引理进行详细证明，在这里仅给出一些观点：Jacobi 矩阵可以看作是在某点处进行变量替换后所在的空间的线性变换所对应的矩阵，也就是所谓 **Locally linear(局部线性化)** 的概念，所以我们在考虑面积比值时也就只需要计算在两个空间下同一个单位正方形的面积比值，通过高等代数的知识我们知道单位正方形在变换之后的面积就等于变换矩阵的行列式的绝对值，所以我们可以直观地认识这一引理.

命题 8.20 (二元的变量替换公式)

设 D 与 D' 分别是 xy 平面与 uv 平面上有确定面积的有界闭区域,变换

$$F: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D'$$

建立了区域 D 与区域 D' 的所有点之间的一一对应,并且

$$x(u, v), y(u, v) \in C^1(D'), J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0,\ \forall (u, v) \in D'$$

又设 $f(x, y)$ 在 D 连续,那么成立着如下换元公式

$$\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

证明 设 $T' = \{\sigma_1', \cdots, \sigma_n'\}$ 为 D' 的一个分割,在变换 F 下 σ_k' 对应 σ_k,则 $T = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ 成为 D 的一个分割. 取 $(u_k, v_k) \in \sigma_k'$,设 (u_k, v_k) 的对应点为 (x_k, y_k),则 $(x_k, y_k) \in \sigma_k$. 考虑积分和

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta\sigma_k$$

利用引理1可得

$$\lim_{d(T')\to 0}\frac{\Delta\sigma_k}{\Delta\sigma_k'} = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|$$

即有

$$\Delta\sigma_k = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|\Delta\sigma_k' + o(\Delta\sigma_k')$$

代入积分和

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|\Delta\sigma_k' + \eta$$

其中 $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k))\,o(\Delta\sigma_k')$.

令 $d(T')\to 0$,由于连续函数 $f(x(u,v),y(u,v))\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ 在 D' 可积,故右端第一项以

$$\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

为极限. 利用 $f(x(u,v),y(u,v))$ 在区域 D' 有界,区域 D' 有确定的面积,可以证明

$$\lim_{d(T')\to 0}\eta = \lim_{d(T')\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k))\,\Delta\sigma_k\frac{o(\Delta\sigma_k')}{\Delta\sigma_k} = 0$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|\Delta\sigma_k' + \eta$$

其中 $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k))\,o(\Delta\sigma_k')$. 当 $d(T')\to 0$ 时,上式右端以

$$\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

为极限.

函数 $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 一致连续,当 $d(T')\to 0$ 时,必有 $d(T)\to 0$,由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 连续,因而在 D 可积,故上式左端以 $f(x,y)$ 在 D 的二重积分为极限,于是换元公式成立.

注 在上面的换元法则中,我们把变量替换的函数组解释为 xy 平面与 uv 平面之间一一对应的点变换,在这个变换下 xy 平面上的区域 D 对应 uv 平面上的区域 D',其中 xy 与 uv 都是指直角坐标平面.

事实上, 也可以把这个变量替换的函数组看作同一平面上的坐标系变换, 比如 xy 表示平面上的直角坐标系,

uv 是平面上的曲线坐标系,从这种坐标系变换的观点出发也可以得到换元公式,此时积分区域 D 与 D' 是同一个区域, D' 仅仅是指在曲线坐标系下 D 的另一种表示方法而已,而换元公式中的 $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ 可以理解为曲线坐标系下的面积微元.

笔记 在换元法则中我们假设变换的雅可比行列式在积分域上处处非零. 事实上, 如果变换的雅可比行列式在积分域的个别点等于零, 或只在一条曲线 J 零测集上等于零而在其它点上非零,换元公式仍然成立. 如极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

雅可比行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$$

仅仅在极点处为零, 在其它点上非零, 换元公式对任何不论是否包含极点的积分域都成立.

笔记 另外如果变换 F 在区域 D 与区域 D' 中除去 J 零测集以外的点之间一一对应,换元公式也仍然成立. 如上面的极坐标变换, $\theta = 0$ 与 $\theta = 2\pi$ 时对应有界闭区域 D 中同一个点,而这些点位于 x 正半轴的一个有界区间内,从而是2维 J 零测集,除此之外的点之间一一对应,所以极坐标换元公式成立.

例题 8.6 设 $D = \left\{(x,y) \mid x^4 + y^4 \leq 1\right\}$,求

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

解 作换元:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

则积分域 D' 满足

$$D' = \left\{(r,\theta) | r^4 \leqslant \frac{1}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}$$

故积分满足

$$I = \iint_{D'} r^2 r \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\left(\frac{1}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{4}}} r^3\, \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan^4\theta} \mathrm{d}\tan\theta$$

后面计算有理函数积分即可, 最终得到:

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

命题 8.21 (广义极坐标变换的雅可比行列式)

对于满足条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的积分域可以作变量替换

$$\begin{cases} x = \mathrm{a}r\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

从而雅可比行列式为:

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

例题 8.7 求椭球体的体积.

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0.$$

作广义极坐标变换

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta, \\ y=br\sin\theta, \end{cases} \quad r\geq 0, 0\leq\theta\leq 2\pi$$

则上半椭球面 $(z\geq 0)$ 化为

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=c\sqrt{1-r^2}$$

所以椭球体的体积

$$V=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abr\ \mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc$$

命题 8.22

正交变换的雅可比行列式的绝对值为 1.

例题 8.8 化 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 为定积分,其中 a,b 是不全为 0 的实数.

解 考虑正交变换

$$\begin{cases} u=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y \\ v=-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y \end{cases}$$

则雅可比行列式 $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=1$. 其逆变换也是正交变换,所以 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=1$.

由于

$$u^2+v^2=x^2+y^2,$$

从而

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2\leq 1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}u\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}u\right)\mathrm{d}v$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f\left(\sqrt{a^2+b^2}u\right)\mathrm{d}u$$

8.4 三重积分的计算

定理 8.13

设 $H = V \times W = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^n \mid X \in V, Y \in W\}$,其中

$$V = \{X = (x_1, \cdots, x_k) | \, a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, \cdots, k\}$$

$$W = \{Y = (y_1, \cdots, y_{n-k}) | \, c_i \leq y_i \leq d_i, \ i = 1, \cdots, n-k\}$$

若 n 元函数 $f(X,Y)$ 在 H 可积,且对于任意 $X \in V$, $f(X,Y)$ 做为 Y 的函数在 W 可积,则 $\int_W f(X,Y)\,\mathrm{d}\Omega_Y = \varphi(X)$ 在 V 可积,且有

$$\int_H f(X,Y)\,\mathrm{d}\Omega = \int_V \varphi(X)\,\mathrm{d}\Omega_X = \int_V \mathrm{d}\Omega_X \int_W f(X,Y)\,\mathrm{d}\Omega_Y$$

其中 $\mathrm{d}\Omega_X$ 与 $\mathrm{d}\Omega_Y$ 分别为 V 与 W 的体积微元,可分别简记为

$$\mathrm{d}\Omega_X = \mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k, \ \mathrm{d}\Omega_Y = \mathrm{d}Y = \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_{n-k}$$

♡

类似于二重积分的情形, 函数在空间有界闭区域上的三重积分, 也需要化为累次积分进行计算. 直角坐标系下化三重积分为累次积分可以考虑两种方法, 即“先一后二”与“先二后一”的方法.

命题 8.23

当 $n=3$ 时,若 $H = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$,应用定理 8.13,有两种计算方法:

“先一后二”, 即

$$\iiint_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_p^q f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

“先二后一”, 即

$$\iiint_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_p^q \mathrm{d}z \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

♠

命题 8.24 (先一后二)

设 $f(x,y,z)$ 在 V 连续,所谓“先一后二”的方法,如果 V 可以表示为

$$V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

其中 D 是 V 在 xy 平面上的投影区域, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ 在 D 上连续,那么

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

♠

命题 8.25 (先二后一)

如果区域 V 可以表示为

$$V = \{(x,y,z) \mid a \leq z \leq b, (x,y) \in D(z)\}$$

其中 $D(z)$ 是随 z 连续变化平行于 xy 平面的有界闭区域,那么可以采用“先二后一”的方法, 即

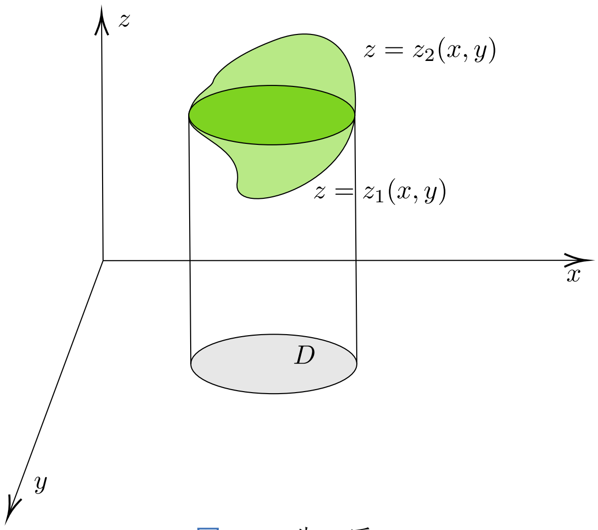


图 8.11: 先一后二

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注 假设函数 $f(x,y,z)$ 非负,那么 f 在 V 上的三重积分表示了以 f 为密度的物体 V 的质量. 设想这一物体是由分布在 D 上的无穷个细棍组成的, "先一后二" 的方法可以理解为先求出每个细棍的质量, 再将所有细棍的质量求和, 从而得到物体 V 的质量.

也可以设想物体 V 是由分布在区间 $[a,b]$ 上的无穷个薄板组成的,先求出每个薄板的质量,再将所有薄板的质量求和,从而得到物体 V 的质量,这就是 "先二后一" 的方法.

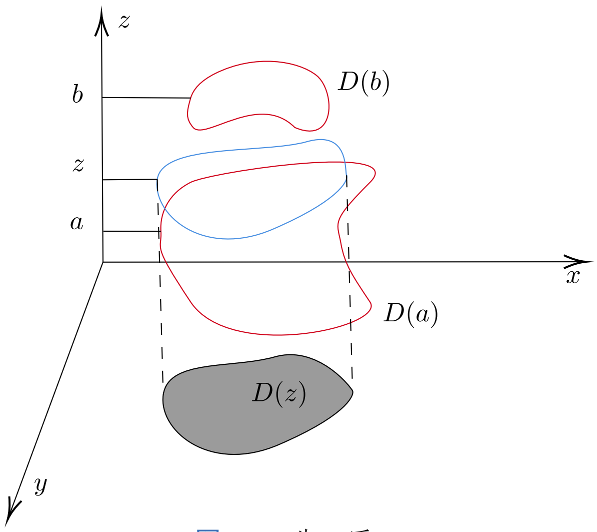


图 8.12: 先二后一

当积分区域与被积函数关于三个坐标分量对称时，可以尝试利用轮换对称性来简化题目.

例题 8.9 计算

$$I = \iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 V 为由平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标面所围成的区域.

解 由于

$$\iiint_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

所以

$$I = 3\iiint_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \iint_{D(x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 $D(x)$ 为以 $1-x$ 为直角边的等腰直角三角形. 于是

$$I = 3\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$$

定理 8.14 (三重积分的变量替换)

设 V 是有确定体积的空间闭区域, $f(x,y,z)$ 在 V 连续. 又设变换

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \quad (u,v,w) \in V'$$

建立了区域 V 与区域 V' 之间点的一一对应,并且

$$x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \in C^1(V')$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0,\ \forall (u,v,w) \in V'$$

那么成立着如下换元公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

♡

命题 8.26 (球面坐标变换)

在三重积分的计算中,当区域 V 的边界曲面方程或被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 时,常常采用如下球面坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

其中 $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (或 $-\pi \leq \theta \leq \pi$).

由于

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$$

所以三重积分在直角坐标与球面坐标之间的互换公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

这里 V' 可以理解为在球面坐标中 V 的另一种表示.

♠

命题 8.27 (柱面坐标变换)

若区域 V 的边界曲面方程或被积函数中含有 x^2+y^2 ,也可考虑如下柱面坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

其中 $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (或 $-\pi \leq \theta \leq \pi$), $z \in R$.
由于

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$$

所以三重积分在直角坐标与柱面坐标之间的互换公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

这里 V' 可以理解为在柱面坐标中 V 的另一种表示.

命题 8.28 (广义球坐标变换)

当区域位于右半空间 $x \geq 0$. 引进所谓广义球坐标

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \quad r \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq \pi, \ \ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ z = cr\cos\varphi, \end{cases}$$

则 x, y, z 关于 r, φ, θ 的雅可比行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi \geq 0$$

例题 8.10 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax$$

所围区域的体积 V ,其中 $a,b,c>0$ 为常数.

解 显然区域位于右半空间 $x \geq 0$.作广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ z = cr\cos\varphi, \end{cases}$$

在广义球坐标下曲面方程为

$$r^3 = a^2\sin\varphi\cos\theta$$

由 $r \geq 0, \sin\varphi \geq 0$ 知, $\cos\theta \geq 0$,即 $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. 于是区域的体积

$$V = \iiint_{V'} abcr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi;\mathrm{d}\theta$$

$$= abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt[3]{a^2 \sin\varphi\cos\theta}} r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{\pi a^3 bc}{3}$$

命题 8.29 (1984 Putnam A5)

设 $R = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}, w = 1-x-y-z$,将三重积分 $\iiint_R x^1y^9z^8w^4 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 表示为 $\dfrac{a!b!c!d!}{n!}$ 的形式,其中 a,b,c,d 和 n 都是正整数.

解

$$\iiint_R xy^9z^8w^4 \,dxdydz = 4\iiint_R \int_0^{1-x-y-z} xy^9z^8w^3 \,dwdxdydz = 4\iiint_Q xy^9z^8w^3 \,dwdxdydz$$

其中 $Q = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | x,y,z,w \geq 0, x+y+z+w \leq 1\}$

由狄利克雷积分(运用伽马函数，暂时不必掌握)则有

$$4\iiiint_Q x^1y^9z^8w^3 dwdxdydz = 4\cdot\frac{1!9!8!3!}{(2+10+9+4)!} = \frac{1!9!8!4!}{25!}$$

8.5 重积分的应用

定义 8.10 (同胚与微分同胚的概念)

设 U 和 V 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集,如果 $F: U \to V$ 有逆映射 $G: V \to U$, 且 F 和 G 都是 C^r 映射,则称 F 是从 U 到 V 的 C^r 同胚. 当 $r=0$ 时, F 和 G 都是 C^0 映射,即连续映射,我们简单称 F 是从 U 到 V 的同胚,当 $r \geq 1$ 时, 则称 F 是 C^r 微分同胚. 例如, $f(x) = x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的同胚但不是微分同胚.

命题 8.30 (C^1 微分同胚的条件)

由逆映射定理可以证明下面的命题: “设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射, 如果 $J_F(X)$ 在 Ω 中处处非奇异且 F 是单射, 那么 F 是从 Ω 到 $F(\Omega)$ 的一个 C^1 微分同胚” .

定理 8.15 (n 重积分换元公式 1)

设 Ω 是 R^n 中的开集, F 是从 Ω 到 $F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ 的 C^1 微分同胚,则对于 Ω 内任何 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭若尔当可测子集 $D, F(D)$ 是 $F(\Omega)$ 内 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭若尔当可测子集,且对任意 $f \in C^0(F(D))$ 有

$$\int_{F(D)} f(X)\,\mathrm{d}X = \int_D (f\circ F)(U)\,|\det J_F(U)|\,\mathrm{d}U$$

定理 8.16 (n 重积分换元公式 2)

设 Ω 是 R^n 中的开集, F 是从 Ω 到 $F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ 的 C^1 映射, D 是 Ω 内 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭若尔当可测子集, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当零测集, F 是从 $D\backslash(\partial D \cup \bar{E})$ 到 $F(D\backslash(\partial D \cup \bar{E}))$ 的 C^1 微分同胚,则 $F(D)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭若尔当可测子集,且对任意 $f \in C^0(F(D))$ 有

$$\int_{F(D)} f(X)\,\mathrm{d}X = \int_D (f\circ F)(U)\,|\det J_F(U)|\,\mathrm{d}U$$

笔记 在计算 n 重积分时,也应注意利用对称性简化计算,这里变量替换公式发挥着作用.

例题 8.11 记 $[0,1]^n = [0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$,计算 n 重积分

$$\int_{[0,1]^n}\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

例题 8.12 计算 n 重积分

$$\int_{[0,1]^n}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

解 利用对称性，我们可以知道：

$$I=n!\int_D x_n\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n$$

其中 $D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1\}$ 从而我们有：

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x_n\,\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\,\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_2}\,\mathrm{d}x_1\\
&= \int_0^1 x_n\,\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\,\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}x_2\,\mathrm{d}x_2\\
&= \int_0^1 x_n\,\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\,\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_4}\frac{1}{2}x_3^2\,\mathrm{d}x_3\\
&= \int_0^1 x_n\,\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\frac{1}{(n-2)!}x_{n-1}^{n-2}\,\mathrm{d}x_{n-1}\\
&= \int_0^1 x_n\cdot\frac{1}{(n-1)!}x_n^{n-1}\,\mathrm{d}x_n=\int_0^1\frac{1}{(n-1)!}x_n^n\,\mathrm{d}x_n\\
&= \frac{n}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

例题 8.13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=J,k\in\{1,2,\cdots,n\}$,计算 n 重积分

$$\int_{[0,1]^n}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

命题 8.31

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的球坐标

$$\begin{cases}
x_1=r\cos\theta_1,\\
x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
\cdots\\
x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{cases}$$

其中 $r\ge 0,0\le\theta_i\le\pi,i=1,\cdots,n-2,0\le\theta_{n-1}<2\pi$.

借助隐函数定理,可以计算得到雅可比行列式

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}$$

笔记 重积分的直接应用是计算 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭区域的 n 维体积. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中 J 可测的有界闭区域, 则它的体积

$$V_J(D)=\int_D \mathrm{d}\Omega$$

注 计算 n 重积分仍然可以采用累次积分或变量替换后再化累次积分的办法.

例题 8.14 设 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域

$$D=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1+\cdots+x_n\le 1,\ x_i\ge 0,\ i=1,\cdots,n\}$$

求它的体积 $V_J(D)$.

解 由于 $(x_1,\cdots,x_n)\in D$ 等价于

$$0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1-x_1,\ 0\le x_3\le 1-x_1-x_2,\cdots,0\le x_n\le 1-x_1-\cdots-x_{n-1}$$

所以由 $V_J(D)=\displaystyle\int_D \mathrm{d}\Omega$ 得

$$\begin{aligned}
V_J(D) &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{1-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{1-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}}(1-x_1-\cdots-x_{n-1})\ \mathrm{d}x_{n-1}\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{1-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-3}}\frac{1}{2}(1-x_1-\cdots-x_{n-2})^2\ \mathrm{d}x_{n-2}\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\frac{1}{(n-2)!}(1-x_1-x_2)^{n-2}\ \mathrm{d}x_2\\
&= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(1-x_1)^{n-1}\ \mathrm{d}x_1=\frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

例题 8.15 设 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的球

$$B_n(r)=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2\le r^2\right\}$$

的体积为 $V_n(r)$. 证明

$$V_n(r)=v_nr^n$$

其中 $v_n=\dfrac{2^n}{n!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

解 用归纳法证明. 事实上,当 $n=1$ 时, $V_1=2r$,结论成立. 设结论对于 $n-1$ 成立,其中 $n\ge 2$ 为正整数,则

$$\begin{aligned}
V_n(r) &= \int_{B_n(r)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x_n\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\le r^2-x_n^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\\
&= \int_{-r}^{r}v_{n-1}(r^2-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{d}x_n=\int_{-r}^{r}v_{n-1}(r^2-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{d}x_n\\
&= 2v_{n-1}\int_0^r(r^2-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{d}x_n=2v_{n-1}r^n\int_0^1(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

记

$$v_n = 2v_{n-1}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}t, n = 2, 3, \cdots$$

从而

$$V_n\left(r\right) = v_n r^n$$

而$v_{n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$，故有

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

所以

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{2^n}{n!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{2^n}{n!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} = \frac{2^n}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

结论对于 n 也成立,这就完成了归纳证明.

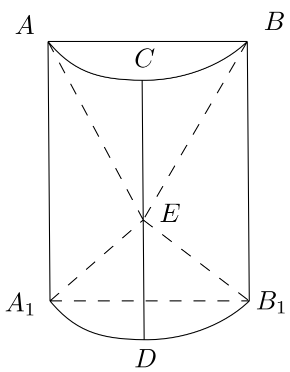
我们下面用二重积分来计算空间曲面的面积, 为此需要给出曲面面积的确切定义. 在定积分的应用章节中我们已经知道一条可求长曲线的弧长定义为其内接折线长度的上确界, 但是应当记住的是我们**不能**把曲面面积类似地定义为其内接折面面积的上确界.

19世纪末德国数学家施瓦茨(H. A. Schwarz)举出一个反例, 说明有限直圆柱面可以具有面积任意大的内接折面, 即其内接折面面积的上确界是 $+\infty$! 这个著名例子说明用内接折面面积的上确界定义曲面面积是不科学的.

笔记 下面我们来一探构造反例的思想:

已给一个直圆柱体, 用垂直于其底面的平面切下该直圆柱体的一面侧面 $P: ACBB_1DA_1$,其中 C 和 D 分别是圆弧 AB 和 A_1B_1 的中点.

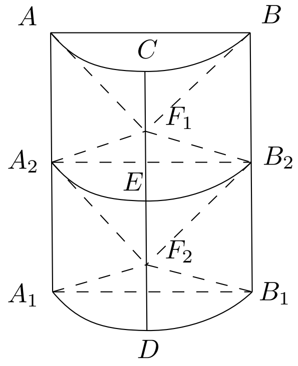
记线段 AB 的长度为 a ,母线 CD 到矩形 ABB_1A_1 所在平面的距离为 h ,设 E 是母线 CD 的中点,连接 AE, BE, A_1E, B_1E ,则 $\triangle$AEB, $\triangle BEB_1, \triangle B_1EA_1$ 与 $\triangle A_1EA$ 组成P的一个内接折面 Q_1 . 显然 Q_1 的面积 S_1 大于 $\triangle AEB$ 和 $\triangle B_1EA_1$ 面积之和,由于 $\triangle AEB$ 和 $\triangle B_1EA_1$ 的面积都大于 $\frac{1}{2}ah$,所以 $S_1 > ah$.



记 AA_1 和 BB_1 的中点分别为 A_2 和 B_2 ,CE和ED的中点分别为 F_1 和 F_2 , $\triangle AF_1B, \triangle BF_1B_2, \triangle B_2F_1A_2, \triangle B_2F_2A_2, \triangle B_2F_2B_1, \triangle B_1F_2A_1, \triangle A_1F_2A_2$ 和 $\triangle A_2F_1A$ 组成 P 的一个内接折面 Q_2 .

显然 Q_2 的面积 S_2 大于四个具有与 AB 平行边的三角形面积之和,所以 $S_2 > 2ah$.

依此类推,我们将 AA_1 和 BB_1m 等分就可以得到到 P 的一个内接折面 Q_m , 它的面积 S_m 满足 $S_m >$ mah.



任给底面半径为 R ,高为 H 的直圆柱体 V ,对于任意的正整数 m 和 l ,首先作内接于 V 的正 I 棱柱(不妨设$I \geq 3$) . 这个棱柱切下 V 较小的一片侧面记为 P ,则经简单计算易知相应之

$$a = 2R\sin\frac{\pi}{l}, h = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{l}\right) = 2R\sin^2\frac{\pi}{2l}$$

我们将 V 的母线 m 等分,利用上面的讨论可以作出 V 的内接折面,其面积满足

$$S_{m,l} > \mathrm{Imah} = 4\,\mathrm{Im}\,R^2\sin\frac{\pi}{l}\sin^2\frac{\pi}{2l}$$

取 $m = l^3$,显然

$$\lim_{l\to+\infty} S_{m,l} = +\infty$$

从以上讨论可以看出Schwarz反例的关键是对任何一片圆柱侧面 P: $ACBB_1DA_1$,通过 m 等分母线 AA_1 和 BB_1 得到由 $4m$ 个三角形组成的 P 的内接折面,其中有 $2m$ 个三角形具有与 AB 平行的边,这些三角形的每一个面积都大于 $\triangle ACB$ 的面积 $\frac{1}{2}ah$.

之所以出现这种现象的原因在于随着 m 增大,所作折面中具有与 AB 平行的边的三角形与 P 过 CE 切平面的夹角越来越大, 越来越趋于垂直于 P 过 CE 切平面的位置.

下面我们回到曲面面积的正确定义:

定义 8.11

设有一曲面 S ,它由函数 $z = z(x,y),(x,y) \in \sigma_{xy}$ 表示,其中 S 在 xy 平面的投影区域 σ_{xy} 有确定的面积, $z(x,y) \in C^1(\sigma_{xy})$. 为了求曲面 S 的面积, 将曲面的投影区域 σ_{xy} 作矩形分割 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$,把这些小区域的面积记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$,并令 $d = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(\sigma_i)$,其中 $d(\sigma_i)$ 为 σ_i 的直径.

在这一分割下相应地也将曲面 S 分割为 n 个小块 $S_1, S_2, \cdots, S_n$(S_i 以 σ_i 为投影). 在 S_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))$,过 M_i 作曲面 S 在这一点的切平面 π_i ,并在 π_i 上取出一小块 S_i^* ,使得 S_i^* 与 S_i 在 xy 平面上的投影都是 σ_i . 在 M_i 附近用 S_i^* 的面积 ΔS_i^* 近似代替 S_i 的面积,当 $d \to 0$ 时,若和式

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i^*$$

的极限存在,并且极限值不依赖分割及点 M_i 在 S_i 上的取法,那么称曲面 S 是可求面积的,并将这个极限值作为曲面 S 的面积,仍记为 S .

♣

下面我们来计算曲面的面积：设上述曲面是光滑曲面,由于曲面 S 在每一点都有切平面与法线,切平面 π_i 的法向量也是曲面 S 在 $M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))$ 处的法向量,记它与 z 轴正向的夹角为 γ_i ,则

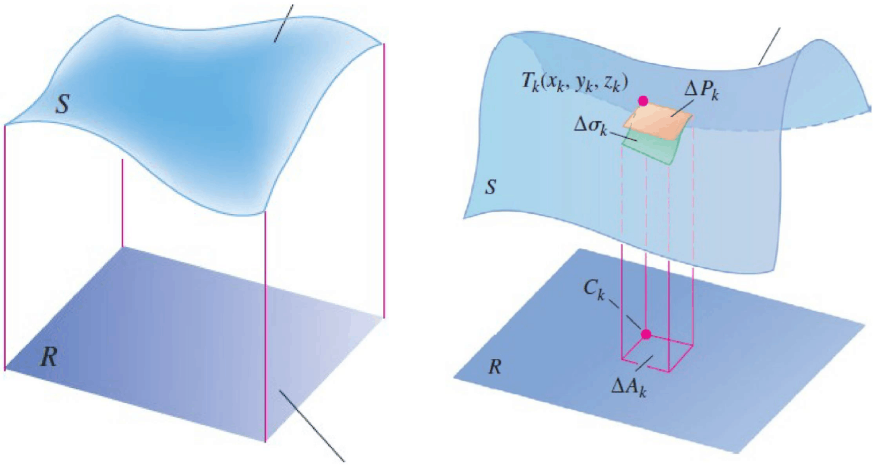


图 8.13: 曲面的分割

$$|\cos\gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2(\xi_i,\eta_i)+z_y'^2(\xi_i,\eta_i)}}.$$

由于 $\Delta S_i^* = \dfrac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}$,故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i^* = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+z_x'^2(\xi_i,\eta_i)+z_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$.
上式右端是连续函数 $\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}$ 在区域 σ_{xy} 上的积分和,于是令 $d\to 0$ 就得到

$$S=\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \text{或}\ S=\iint_{\sigma_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}$$

其中 γ 为曲面的法向量与 z 轴正向的夹角.

命题 8.32

若光滑曲面 S 由函数

$$z=z(x,y),(x,y)\in\sigma_{xy}$$

表示, $z(x,y)\in C^1(\sigma_{xy})$, 记 γ 为曲面的法向量与 z 轴正向的夹角.

$$S=\iint_{\sigma_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}=\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

命题 8.33

若光滑曲面 S 由函数

$$y=y(x,z),(x,z)\in\sigma_{xz}$$

表示, $y(x,z)\in C^1(\sigma_{xz})$. 记 β 为曲面的法向量与 y 轴正向的夹角,则有

$$S=\iint_{\sigma_{xz}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z}{|\cos\beta|}=\iint_{\sigma_{xz}}\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

命题 8.34

若光滑曲面 S 可以由函数

$$x=x(y,z),(y,z)\in\sigma_{yz}$$

表示, $x(y,z)\in C^1(\sigma_{yz})$,则

$$S=\iint_{\sigma_{yz}}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|\cos\alpha|}=\iint_{\sigma_{yz}}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

定义 8.12 (光滑简单曲面)
设曲面 S 有参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v), & (u,v)\in D\\ z=z(u,v),\end{cases}$$

其中 D 是 uv 平面上有确定面积的闭区域. 若下面三个条件成立,则称曲面 S 为光滑简单曲面.

- $x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^1(D)$;
- S 上无奇点,即雅可比矩阵 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}x_u' & x_v'\\ y_u' & y_v'\\ z_u' & z_v'\end{bmatrix}$ 的秩在 D 处处为2;
- S 上无重点,即 $(u,v)\in D$ 与 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in S$ 一一对应.

引入记号

$$\overrightarrow{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

那么第二个条件等价于 A,B,C 在 D 中处处不全为零.
由于

$$\left|\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

所以第二个条件也等价于

$$\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v\neq 0,\forall(u,v)\in D$$

下面我们来计算光滑简单曲面的面积:

设 M 是曲面 S 上任意一点, M 在 D 的对应点为 M' . 若在 M' 处 $C\neq 0$,由逆映射存在定理解出 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$,在S上存在包含M点的小曲面块S_M ,它也可以表示为 $z=z(u(x,y),v(x,y)),(x,y)\in\sigma_{xy}$. 因此小曲面块 S_M 的面积

$$\Delta S_M=\iint_{\sigma_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}$$

由于曲面 S 上每一点处的法线方向为 (A,B,C) ,故

$$|\cos\gamma|=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

设 σ 是 uv 平面上与 S_M 对应的区域,应用二重积分的换元公式,又得

$$\Delta S_M=\iint_\sigma \frac{1}{|\cos\gamma|}|C|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_\sigma \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

注意到这一公式关于 A,B,C 是对称的,故它始终成立,与 A,B,C 中哪一个不为零无关. 事实上在 M' 处 $A\neq 0$ 或 $B\neq 0$ 时,进行类似的讨论仍可得到上面的公式.

我们可以进一步证明: S 可以分为有限块如同 S_M 那样的曲面块(利用有限覆盖定理), 因而有

$$S=\iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_D \left|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{8.6}$$

记

$$\begin{aligned}
E&=\left|\vec{r}'_u\right|^2=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2,\\
G&=\left|\vec{r}'_v\right|^2=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2,\\
F&=\langle\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\rangle=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v,
\end{aligned}$$

可知 $\left|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v\right|=\sqrt{\left|\vec{r}'_u\right|^2\left|\vec{r}'_v\right|^2-\left\langle\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\right\rangle^2}=\sqrt{EG-F^2}$,于是面积公式又可写成

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{8.7}$$

显然, 由二元函数表示的曲面, 若函数的偏导数连续, 则是光滑简单曲面, 但是许多常见的曲面不是光滑简单曲面. 例如由方程

$$\begin{cases}
x=R\sin\varphi\cos\theta,\\
y=R\sin\varphi\sin\theta,\ (\varphi,\theta)\in D=[0,\pi]\times[0,2\pi]\\
z=R\cos\varphi,
\end{cases}$$

表示的半径为 R 的球面 S_R 不是光滑简单曲面,正方体的表面也不是光滑简单曲面.

一般地, 由有限片光滑简单曲面衔接成的曲面, 我们称为**逐片光滑曲面**, 并定义逐片光滑曲面的面积为其中各个光滑简单曲面的面积之和. 因此计算像正方体的表面这种逐片光滑曲面的面积时, 我们可以逐片计算再求和.

命题 8.35 (面积计算公式条件的放宽)

事实上,我们可以证明上述面积公式成立的条件中,简单曲面的条件2与条件3可以适当放宽,即如果存在 uv 平面上的 J 零测集 E 使得

$$\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v\neq 0,\text{或 }\sqrt{EG-F^2}\neq 0,\ \forall\,(u,v)\in D\backslash E,$$

且当 $(u,v)\in D\backslash E$ 时, $\vec{r}\,(u,v)$ 是单射,则面积公式 (8.6) 或 (8.7) 仍然成立.

♠

例题 8.16 计算球面面积.

证明 这一结果使我们在计算球面 S_R 的面积时,仍然可以应用上述面积公式.

对球面 S_R ,由于

$$E=x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2=R^2,$$

$$G=x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2=R^2\sin^2\varphi,$$

$$F = x'_z x'_\theta + y'_z y'_\theta + z'_z z'_\theta = 0,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin\varphi$$

容易验证假设条件都满足，所以

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta = 4\pi R^2$$

笔记 对条件2与3的放宽，还解决了某些有奇点的曲面的面积计算问题.

例如圆锥面 $S: x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 1$,显然原点是 S 的奇点，S 有参数方程

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \ (r,\theta) \in D = [0,1] \times [0, 2\pi]. \\ z = r, \end{cases}$$

由于

$$E = x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2 = 2,$$

$$G = {x'_\theta}^2 + {y'_\theta}^2 + {z'_\theta}^2 = r^2,$$

$$F = x'_r x'_\theta + y'_r y'_\theta + z'_r z'_\theta = 0,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2} r,$$

容易验证假设条件都满足,从而 S 的面积可用公式(8.7)计算，所以

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \sqrt{2} r\, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\pi$$

定理 8.17 (古鲁金第一定理)

平面曲线绕不与其相交的轴旋转所得的旋转曲面的面积等于平面曲线的弧长与其形心旋转得到的圆周的长度的乘积.

例题 8.17 设 $0 < b < a$,求 yz 平面上的圆周 $(y-a)^2 + z^2 = b^2$ 绕 z 轴旋转一周所得圆环面 S 的面积.

解 yz 平面上的圆周 $(y-a)^2 + z^2 = b^2\ (0 < b < a)$ 绕 z 轴旋转得圆环面 S 的面积为 $A = 2\pi b \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ab$.

解 利用柱坐标易知 S 的方程为

$$(r-a)^2 + z^2 = b^2$$

将 S 中 $z \ge 0$ 的部分写成参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = \sqrt{b^2 - (r-a)^2}, \end{cases} \qquad (r,\theta) \in D = [a-b, a+b] \times [0, 2\pi].$$

由于

$$x_r' = \cos\theta, y_r' = \sin\theta, z_r' = \frac{-(r-a)}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}}$$

$$x_\theta' = -r\sin\theta, y_\theta' = r\cos\theta, z_\theta' = 0,$$

所以

$$E = 1 + \frac{(r-a)^2}{b^2-(r-a)^2}, F = 0, G = r^2$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \frac{br}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}}$$

于是

$$\begin{aligned} S &= 2\iint_D \frac{br}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2b\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{a-b}^{a+b}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} \\ &= 4\pi b\int_{a-b}^{a+b}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} \end{aligned}$$

令 $r-a=bt$,则

$$S = 4\pi b\int_{-1}^{1}\frac{a+bt}{\sqrt{1-t^2}}dt = 8\pi ab\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 4\pi^2 ab$$

命题 8.36

设 A 是4阶正定对称方阵,记 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $h(X)=XAX^T$,令 $D=\{X\in\mathbb{R}^4 \mid h(X)\le 1\}$,计算重积分

$$\int_D \mathrm{e}^{h(X)}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4$$

命题 8.37

设 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 都是平面上若尔当可测的有界闭区域,用 a_{ij} 来记 $D_i\cap D_j$ 的若尔当测度, $i,j=1,2\cdots,n$. 求证: 对任意给定的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \ge 0$$

8.6 题选

命题 8.38

设函数 $f(x,t)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上二次连续可微,对任意 $(x,t)\in[0,1]\times[0,1]$,有 $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ 和 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq 1$.

(1) 证明: 对任意 $x,y,t_1,t_2\in[0,1]$,有

$$\left|\int_x^y f(u,t_1)\,\mathrm{d}u-\int_x^y f(u,t_2)\,\mathrm{d}u\right|\leq 2\,|t_1-t_2|$$

(2) 对任意 $x,t_1,t_2\in[0,1]$,有

$$|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\leq 5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$$

证明 (1) 由于二次连续可微，从而知道

$$\begin{aligned}\left|\int_x^y f(u,t_1)\,\mathrm{d}u-\int_x^y f(u,t_2)\,\mathrm{d}u\right| &= \left|\int_x^y \mathrm{d}u\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial t}(u,t)\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_x^y \mathrm{d}u\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t\int_x^y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\mathrm{d}u\right|\\ &= \left|\int_{t_2}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u,t_1)-\frac{\partial f}{\partial x}(u,t_2)\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \left|\int_{t_2}^{t_1}2\mathrm{d}t\right|=2|t_1-t_2|\end{aligned}$$

(2) 我们利用第一问的结论来处理这道题，首先设

$$F(x)=f(x,t_1)-f(x,t_2)$$

从而第一问的结论为

$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq 2|a-b|$$

由积分第一中值定理知道

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)F(\xi)$$

我们需要取适当的 a 与 b 来进行放缩，事实上，由于区间长度为 1，所以总可以找到一个 b 使得

$$|b-a|=\frac{1}{2}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}$$

所以有

$$\frac{1}{2}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}F(\xi)\leq 2|t_1-t_2|$$

也即

$$F(\xi)\leq 4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$$

令 $a = x$，从而我们有

$$\begin{aligned}
|F(x)| &= |F(x) - F(\xi) + F(\xi)| \\
&\leq |F(x) - F(\xi)| + |F(\xi)| \\
&= |(x - \xi)F'(\theta)| + |F(\xi)| \\
&\leq 2|x - \xi| + 4|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \leq 5|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

第 9 章 曲线积分与曲面积分

9.1 第一型曲线积分

定义 9.1

设 L 是以 A,B 为端点的可求长曲线,函数 $f(X)$ 在 L 有定义. 在 L 上从 $A=A_0$ 到 $B=A_n$ 依次插入分点 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$,使每个小弧段 $A_{i-1}A_i$ 都是可求长的,这称为对 L 的分割

$$T: A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$$

记 $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i,称 $d(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$ 为分割 T 的细度. 任取 $M_i\in\widetilde{A_{i-1}A_i}$,作积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

如果 $d(T)\to 0$ 时积分和的极限存在,且极限 l 不依赖于对 L 的具体分法和 M_i 的具体取法,则称 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,称 l 为 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分, 记为

$$I=\int_L f(X)\,\mathrm{d}s$$

这里称 L 为积分域, f 为被积函数, $\mathrm{d}s$ 为弧长微元. ♣

笔记 第一型曲线积分也称按弧长的积分,当曲线段 L 退化为直线段时,它上面第一型曲线积分的定义与定积分的定义是一致的, 因此第一型曲线积分可以看作是定积分的一种推广.

笔记 对于一般的可求长简单曲线 L,设其长度为 l,由于其上每一点对应唯一的弧长,所以可用弧长为参数将 L 表示为参数方程 $X=X(s), s\in[0,l]$. 由第一型曲线积分的定义知

$$\begin{aligned}\int_L f(X)\,\mathrm{d}s &= \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i\\ &= \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(X(s_i^*))\Delta s_i=\int_0^l f(X(s))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 $M_i=X(s_i^*)\in\widetilde{A_{i-1}A_i}$.

可见, $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分的存在性等价于复合函数 $f(X(s))$ 在 $[0,l]$ 上的可积性. 因此,若 $f(X)$ 在可求长的简单曲线 L 连续, 则 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在.

定理 9.1 (线性运算性质)

若 $f(X)$ 和 $g(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,则对任意常数 a 和 b, $af(X)+bg(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分也存在,并且

$$\int_L [af(X)+bg(X)]\,\mathrm{d}s=a\int_L f(X)\,\mathrm{d}s+b\int_L g(X)\,\mathrm{d}s$$

♡

定理 9.2 (积分域的可加性)

设 $L=L_1\cup L_2$,其中 L_1 和 L_2 均为可求长曲线段并且至多有有限个交点.若 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,则 $f(X)$ 沿 L_1 和 L_2 的第一型曲线积分都存在, 且

$$\int_L f(X)\,\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(X)\,\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(X)\,\mathrm{d}s$$

反之,若 $f(X)$ 沿 L_1 和 L_2 的第一型曲线积分都存在,则 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在, 且上述等式成立.

♡

命题 9.1

若 $f(X)$ 和 $g(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分都存在,且

$$f(X) \le g(X),\ \forall X \in L$$

则

$$\int_L f(X)\,\mathrm{d}s \le \int_L g(X)\,\mathrm{d}s$$

♠

命题 9.2

若 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,则 $|f(X)|$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,且

$$\left|\int_L f(X)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_L |f(X)|\,\mathrm{d}s$$

♠

定理 9.3 (积分中值定理)

若 $f(X)$ 在可求长的简单曲线段 L 上连续,则存在 $\xi \in L$ 使

$$\int_L f(X)\,\mathrm{d}s = f(\xi)\,l$$

其中 l 为 L 的长度.

♡

命题 9.3

设 $L = \widetilde{AB}$ 是 R^n 中简单可求长曲线, $f(X)$ 在 R^n 中包含 L 的一个开区域 Ω 内连续,则 $f(X)$ 在 L 上的第一型曲线积分存在,且对 L 的分割 $T: A = A_0, A_1, \cdots, A_n = B$,当 $d(T) \to 0$ 时, $f(X)$ 在 L 内接折线上的积分收敛于 $f(X)$ 在 L 上的积分,即记 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 为联结 A_{i-1} 和 A_i 的**直线段**,就有

$$\int_L f(X)\,ds = \lim_{d(T)\to 0}\sum_i \int_{\overline{A_{i-1}A_i}} f(X)\,ds$$

♠

定理 9.4

设 $\mathbb{R}^2$ 中光滑简单曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

其中 $x(t), y(t) \in C^1[a,b]$. 若 $f(x,y)$ 在 L 连续,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

♡

证明 对 $[a,b]$ 的一个分割

$$T': a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $d(T') = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$, 设

$$A_i = (x(t_i), y(t_i)),\ i = 0, 1, \cdots, n$$

那么 $T: A_0, A_1, \cdots, A_n$ 成为对 L 的分割.

记 Δs_i 为 $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ 的长度,由于 $x(t), y(t) \in C^1[a,b]$,所以由积分中值定理知道:存在 $\theta \in [t_{i-1}, t_i]$ 使得

$$\Delta s_i = \int_{ti-1}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ \mathrm{d}t = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\Delta t_i$$

显然有 $(x(\theta_i), y(\theta_i)) \in \widetilde{A_{i-1}A_i}$,因此有

$$\sum_{i=1}^n f(x(\theta_i), y(\theta_i))\Delta s_i = f(x(\theta_i), y(\theta_i))\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\Delta t_i$$

令 $d(T')\to 0$，上式右边以

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

为极限，又由于

$$d(T)=\max_{1\le i\le n}\Delta s_i\le\max_{t\in[a,b]}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}d(T')$$

所以当 $d(T')\to 0$ 时,必有 $d(T)\to 0$,由 $f(x,y)$ 在 L 连续知, $f(x,y)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,因而上式左端的积分和以 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 为极限. 于是

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

命题 9.4

若 $\mathbb{R}^2$ 中光滑曲线 L 表示为 $y=y(x),x\in[a,b]$,那么以 x 为参数可以写成参数方程, 可得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

同理,若 L 可以表示为 $x=x(y),y\in[c,d]$,那么

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_c^d f(y,x(y))\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

命题 9.5

若 $\mathbb{R}^2$ 中光滑曲线 L 在极坐标下表示为 $r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$,那么以 θ 为参数可以写成参数方程, 可得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

命题 9.6

设 $\mathbb{R}^3$ 中光滑简单曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),\ t\in[a,b], \\ z=z(t) \end{cases}$$

其中 $x(t),y(t),z(t)\in C^1[a,b]$. 若 $f(x,y,z)$ 在 L 连续,则

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

命题 9.7 (对称性的应用)

若 L 是关于 x 轴对称的可求长平面曲线, $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在, 且

$$f(x,-y)=-f(x,y),\forall(x,y)\in L$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=0$.

若 L 是关于 y 轴对称的可求长平面曲线, $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在, 且

$$f(-x,y)=-f(x,y),\forall(x,y)\in L$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=0$.

若 L 是关于原点对称的可求长平面曲线, $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在,且

$$f(-x,-y)=-f(x,y),\forall(x,y)\in L$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$.

9.2 第二型曲线积分

第二型曲线积分的想法类似于变力做功.

定义 9.2 (第二型曲线积分)

设 $L=AB$ 是从 A 到 B 的可求长有向曲线, $\overrightarrow{F}$ 为在 L 上有定义的向量值函数. 对于与L方向一致的任意分割 $T: A=A_0, A_1, \cdots, A_n=B$,记 $\Delta\overrightarrow{s_i}=\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \Delta s_i$ 为 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的长度,并且 $d(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$. 任取 $M_i\in A_{i-1}A_i$,如果

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(M_i)\cdot\Delta\overrightarrow{s_i}$$

收敛且极限与对 L 的具体分法和 M_i 的具体取法无关,则称 $\overrightarrow{F}$ 沿 L 的第二型曲线积分存在,极限 I 称为 $\overrightarrow{F}$ 沿 L 的第二型曲线积分,记为

$$I=\int_L \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{s} \text{ 或 } I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{s}$$

在直角坐标系之下，如果 L 为可求长的空间有向曲线，设

$$\overrightarrow{F}(X)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

$$A_i=(x_i,y_i,z_i)\,,M_i=(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$,$\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$,那么 $\Delta\overrightarrow{s_i}=(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$,即 $\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i$ 分别是向量 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 在三个坐标轴的投影,于是

$$\begin{aligned}\int_L \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{s} &= \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(M_i)\cdot\Delta\overrightarrow{s_i}\\ &= \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right]\end{aligned}$$

若记 $\mathrm{d}\overrightarrow{s}=(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$,将“$\cdot$”视作内积运算符号,那么 $\int_L \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{s}$ 也可记作

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

因此有

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\ =&\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right]\end{aligned}$$

由此我们可以自然地定义数量函数的第二型曲线积分. 设 L 为可求长的空间有向曲线, $f(x,y,z)$ 在 L 有定义,那么定义 $f(x,y,z)$ 的三个第二型曲线积分为

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}x=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}y=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i,$$

与变力做功的情况一样, 第二型曲线积分与曲线的方向有关.

若以 L 表示一条有向曲线,以 $-L$ 表示同一条曲线但带有相反的方向, 则

$$\int_L \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = -\int_{-L} \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$$

命题 9.8 (线性运算性质)

若 $\overrightarrow{F}_1$ 和 $\overrightarrow{F}_2$ 沿 L 的第二型曲线积分存在,则对任意常数 a 和 b, $a\overrightarrow{F}_1+b\overrightarrow{F}_2$ 沿 L 的第二型曲线积分也存在,且

$$\int_L \left[a\overrightarrow{F}_1+b\overrightarrow{F}_2\right]\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = a\int_L \overrightarrow{F}_1\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}+b\int_L \overrightarrow{F}_2\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$$

命题 9.9

设有向曲线 L 由与其方向一致的有向曲线 L_1 与 L_2 首尾相衔接而成. 若 $\overrightarrow{F}$ 沿 L 的第二型曲线积分存在,则 $\overrightarrow{F}$ 沿 L_1 与 L_2 的第二型曲线积分都存在, 且

$$\int_L \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \int_{L_1} \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}+\int_{L_2} \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$$

反之,若 $\overrightarrow{F}$ 沿 L_1 与 L_2 的第二型曲线积分都存在,则 $\overrightarrow{F}$ 沿 L 的第二型曲线积分存在, 且上述等式成立.

定理 9.5

设 $\mathbb{R}^2$ 中有向曲线 $L=\overset{\frown}{AB}$ 是光滑简单曲线,其参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in I$$

其中I是以 a,b 为端点的区间, $t=a$ 对应L的起点 A, $t=b$ 对应 L 的终点 B ,即 t 从 a 到 b 的变化与 L 的方向一致, $x(t),y(t)\in C^1(I)$. 若 $f(x,y)$ 在 L 连续,则 f 沿 L 的第二型曲线积分存在,且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)\,\mathrm{d}t$$

证明 先假设 $a<b$. 对于与 L 方向一致的任意分割 $T: A=A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n=B$,由于 L 上的点与参数 t 一一对应(对于简单闭曲线,因为端点 A,B 对应不同的参数 a,b ,可视为两点),因此不妨设

$$A_i=(x(t_i),y(t_i)),\ i=0,1,\cdots,n,$$

则 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ 对应 $[a,b]$ 的一个分割 T' . 记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}, i=1,2,\cdots,n, d(T')=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i$. 任取 $M_i\in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$,则存在唯一的 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$,使得 $M_i=(x(\tau_i),y(\tau_i))$. 记

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i=x(t_i)-x(t_{i-1})$ 为 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 在 x 轴的投影. 按照第二型曲线积分的定义,考虑极限 $\lim\limits_{d(T)\to 0}\sigma$.

由 $x(t)\in C^1[a,b]$ 知,存在 $\theta_i\in(t_{i-1},t_i)$,使得

$$\Delta x_i=x'(\theta_i)\Delta t_i$$

于是 $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$,其中

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^n f(x(\tau_i),y(\tau_i))\,x'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$\sigma_2=\sum_{i=1}^n f(x(\tau_i),y(\tau_i))\left(x'(\theta_i)-x'(\tau_i)\right)\Delta t_i$$

由于 L 是简单曲线,可以证明 $d(T)\to 0$ 时必有 $d(T')\to 0$. 由 $f(x,y)$ 在 L 连续,从而 $f(x(t),y(t))$ 在 $[a,b]$ 连续,因而当 $d(T')\to 0$ 时, σ_1 以定积分 $\int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$ 为极限. 由 $x'(t)$ 在 $[a,b]$ 连续,从而一致连续,因而任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $t',t''\in[a,b]$ 且 $|t'-t''|<\delta$ 时,

$$|x'(t')-x'(t'')|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$$

其中 $M=\max\limits_{a\le t\le b}|f(x(t),y(t))|$. 于是当 $d(T')<\delta$ 时,有

$$|\sigma_2|\le M\sum_{i=1}^{n}|x'(\theta_i)-x'(\tau_i)|\,\Delta t_i<\varepsilon$$

即 $d(T')\to 0$ 时, σ_2 以 0 为极限. 所以,令 $d(T)\to 0$ 对 σ 求极限得

$$\lim_{d(T)\to 0}\sigma=\lim_{d(T')\to 0}(\sigma_1+\sigma_2)=\int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

由定义知 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在,且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

若 $a>b$,由假设知 t 从 b 到 a 的变化与 $-L=\widetilde{BA}$ 一致,由上段证明

$$\int_{-L} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_b^a f(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x &= -\int_{-L} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_b^a f(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

同理可证

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)\,\mathrm{d}t$$

定理 9.6

设有向曲线 $L=\widetilde{AB}$ 是开区域 D 中逐段光滑的简单曲线, $\overrightarrow{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, $P,Q\in C(D)$,则第二型曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 存在,且 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得任意与 L 定向一致的分割 $T: A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$,只要 $d(T)<\delta$,就有

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y-\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$$

即

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

其中 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 为从 A_{i-1} 到 A_i 的定向线段.

证明 首先由命题 9.9 与定理 9.5 可以知道 $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 存在，记

$$I=\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

由第二型曲线积分的定义知道：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$,使得任意与 L 定向一致的分割 $T:A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$,只要 $d(T)<\delta_1$,就有

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

其中 $(\xi_i,\eta_i)\in A_{i-1}A_i$. 由于

$$\begin{aligned}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\overrightarrow{F}\left(A_{i-1}+t\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\,\mathrm{d}t\\ &= \overrightarrow{F}\left(A_{i-1}+t_i\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i},t_i\in[0,1]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}-\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\\ \le&\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)-\overrightarrow{F}\left(A_{i-1}+t_i\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\right)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right|\\ \le&\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)-\overrightarrow{F}\left(A_{i-1}+t_i\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right|\end{aligned}$$

由 $(\xi_i,\eta_i)\in\widetilde{A_{i-1}A_i},\left(A_{i-1}+t_i\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\in\overline{A_{i-1}A_i}$ 知

$$\left|(\xi_i,\eta_i)-\left(A_{i-1}+t_i\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\right|\le 2d(T)$$

由 $L\subseteq D,D$ 是开区域,L 是紧子集知,$d(L,\partial D)=d_r>0$,从而由有限覆盖定理,($\forall A\in L$,用 $r<\dfrac{1}{2}d_r$ 的圆盘盖住 L)可得到覆盖 L 的一个管状邻域 U,使 $\bar{U}\subseteq D$,且 $\exists\delta_2>0$,当 $d(T)<\delta_2$ 时,有

$$\overline{A_{i-1}A_i}\subseteq\bar{U},\forall i=1,\cdots,n$$

由 $\overrightarrow{F}$ 在 $\bar{U}$ 一致连续知,对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_3>0$, 当 $(x',y'),(x'',y'')\in\bar{U}$ 且 $|(x',y')-(x'',y'')|<\delta_3$ 时,有

$$\left|\overrightarrow{F}(x',y')-\overrightarrow{F}(x'',y'')\right|<\frac{\varepsilon}{2l}$$

其中 l 为 L 的长. 因此,当 $2d(T)<\min\{\delta_2,\delta_3\}$ 时,有

$$\left|\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)-\overrightarrow{F}\left(A_{i-1}+t_i\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2l}$$

从而

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}-\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\\ <&\ \frac{\varepsilon}{2l}\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

令 $\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\delta_2}{2},\dfrac{\delta_3}{2}\right\}$,则当 $d(T)<\delta$ 时,就有

$$\begin{aligned}&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\\ \le&\left|I-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}-\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{A_{i-1}A_i}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\\ <&\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

从而结论得证.

第一型与第二型曲线积分来源于不同的物理背景，但是他们可以相互联系起来.

定理 9.7

设有向曲线 $L = \widetilde{AB}$ 为平面光滑简单曲线，$\vec{\tau}$ 为 L 上与其方向一致的单位切向量，$\vec{\tau} = (\cos(\vec{\tau}, x), \cos(\vec{\tau}, y))$. 若 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 L 连续,则下述关系成立:

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_L P(x,y)\cos(\vec{\tau}, x)\,\mathrm{d}s$$

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\cos(\vec{\tau}, y)\,\mathrm{d}s$$

♡

证明 设 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

不妨设 t 从 a 增加到 b 的变化与 L 的方向一致,则

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}(x'(t), y'(t)),\ t \in [a,b]$$

即 $\vec{\tau}$ 的方向余弦为

$$\cos(\vec{\tau}, x) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

$$\cos(\vec{\tau}, y) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b P(x(t), y(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))\cos(\vec{\tau}, x)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_L P(x,y)\cos(\vec{\tau}, x)\,\mathrm{d}s \\ \int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b Q(x(t), y(t))\cos(\vec{\tau}, y)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_L Q(x,y)\cos(\vec{\tau}, y)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

笔记 将这个定理中的两个公式相加,并记 $\vec{F} = (P, Q)$,则得向量形式的关系式

$$\int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_L \left(\vec{F} \cdot \vec{\tau}\right)\mathrm{d}s$$

其中 $\vec{\tau}$ 是 L 上与其方向一致的单位切向量. 依据这个向量形式的关系式,可将记号 $\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)$ 自然地理解为 $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\tau}\mathrm{d}s$,于是有 $\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y) = \vec{\tau}\mathrm{d}s$. 用这一关系式表达两类曲线积分之间的联系对空间曲线的情形也是适用的. 若 $\vec{F} = (P, Q, R)$, $\vec{\tau} = (\cos(\vec{\tau}, x), \cos(\vec{\tau}, y), \cos(\vec{\tau}, z))$,将这一关系式写成分量形式即是

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_L (P\cos(\vec{\tau}, x) + Q\cos(\vec{\tau}, y) + R\cos(\vec{\tau}, z))\,\mathrm{d}s$$

9.3 第一型曲面积分

定义 9.3

设 S 是一个可求面积的曲面块,函数 $f(X)$ 在 S 有定义. 将 S 分割为 n 个可求面积的并且两两无公共内点的小曲面块 $S_1, S_2, \cdots, S_n$,称为对 S 的一个分割 T . 记 ΔS_i 为小曲面块 S_i 的面积, $d(S_i)$ 为 S_i 的直径, $d(T)=\max\limits_{1\leq i\leq n} d(S_i)$. 任取 $M_i\in S_i$,作积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta S_i$$

如果当 $d(T)\to 0$ 时,积分和收敛且极限 I 不依赖于对 S 的具体分割和 $M_i\in S_i$ 的具体选择,则称 $f(X)$ 在 S 的第一型曲面积分存在,称 I 为 $f(X)$ 在 S 的第一型曲面积分,记为

$$I=\iint_S f(X)\,\mathrm{d}S$$

♣

定理 9.8

设 $f(x,y,z)$ 是在光滑简单曲面 S 上连续的函数,曲面 S 的方程为

$$z=z(x,y),\ (x,y)\in\sigma_{xy}$$

其中 S 在 xy 平面上的投影 σ_{xy} 有确定的面积, $z(x,y)\in C^1(\sigma_{xy})$,则 $f(x,y,z)$ 在 S 的第一型曲面积分存在, 且

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{\sigma_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

♡

证明 对 σ_{xy} 作任意分割 $T':\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$,相应地构成曲面 S 的分割 $T:S_1,S_2,\cdots,S_n$,其中 S_i 在 xy 平面上的投影为 σ_i . 令 $d(T)=\max\limits_{1\leq i\leq n} d(S_i)$,按照第一型曲面积分的定义考虑极限

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i$$

其中点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为 S_i 上任意一点,即 $(\xi_i,\eta_i)\in\sigma_i, \zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$. 利用曲面面积公式与积分中值定理知道, S_i 的面积为

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= \iint_{\sigma_i}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{1+z_x'^2(\xi_i^*,\eta_i^*)+z_y'^2(\xi_i^*,\eta_i^*)}\Delta\sigma_i\end{aligned}$$

这里点 (ξ_i^*,η_i^*) 为 σ_i 中某一点. 于是

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1+z_x'^2(\xi_i,\eta_i)+z_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i+\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\,\varepsilon_i\Delta\sigma_i$$

其中 $\varepsilon_i=\sqrt{1+z_x'^2(\xi_i^*,\eta_i^*)+z_y'^2(\xi_i^*,\eta_i^*)}-\sqrt{1+z_x'^2(\xi_i,\eta_i)+z_y'^2(\xi_i,\eta_i)}$.

记 $d(T')=\max\limits_{1\leq i\leq n} d(\sigma_i)$. 显然令 $d(T)\to 0$ 时就有 $d(T')\to 0$,上式右端第一项是连续函数

$$f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$$

在 σ_{xy} 的积分和, 故 $d(T')\to 0$ 时以二重积分

$$\iint_{\sigma_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

为极限,容易证明上式右端第二项当 $d(T')\to 0$ 时极限为零,因此 $f(x,y,z)$ 在 S 的第一型曲面积分存在,且

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S &= \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i\\ &= \iint_{\sigma_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

定理 9.9

设 $f(x,y,z)$ 在光滑简单曲面 S 连续,曲面 S 的方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

那么

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E = x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2, G = x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2, F = x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'$$

♡

9.4 第二型曲线积分

曲面的定向 在讨论第二型曲线积分之前，我们有必要花大篇幅去探讨一下曲面的定向问题(建议翻看：李成章，黄玉民老师的数学分析).

设 S 是一个光滑曲面,如果 S 上存在连续单位法向量场 $\vec{v}(P)$, 则称 S 是可定向的, $\vec{v}(P)$ 称为 S 的一个方向. S 连同其一个方向称为定向曲面. 显然若 $\vec{v}(P)$ 是 S 的一个方向,则 $-\vec{v}(P)$ 也是 S 的一个方向. 容易证明若 S 是可定向、连通的光滑曲面,则 S 有且仅有两个方向.

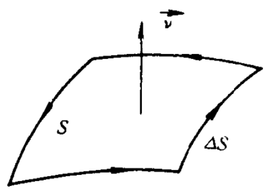
设

$$\widetilde{S}: \vec{r} = \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \ (u,v)\in D,$$

是光滑简单曲面，显然 $\widetilde{S}$ 是连通且

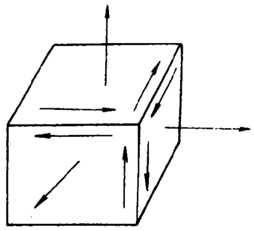
$$\vec{v}(u,v) = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}(u,v),\ (u,v)\in D$$

实际应用中经常遇到逐片光滑曲面的定向问题, 为讨论这一问题首先说明定向曲面的边界定向. 设 S 是带边的光滑定向曲面, 其边界 ∂S 为简单曲线. S 的方向诱导 ∂S 的一个方向,或者称 ∂S 的一个方向与 S 的方向一致,即与 S 方向一致的单位法向量在 ∂S 上沿这个方向前进， S邻近此向量的部分总在该向量的左侧. 两个带边的光滑定向曲面, 若有一段简单曲线是它们的公共边界, 如果它们在公共边界上诱导的方向是相反的, 则它们的定向是协调的.



设 S 是有限片光滑可定向的曲面 $S_1,\cdots,S_l$ 按规则相处原则拼接在一起的逐片光滑曲面. 所谓规则相处是指任意两片曲面至多沿一段公共边界曲线相交, 任意三片 (或更多片) 曲面至多交于一个公共边界点. 如果每一个

S_i 可选定一个方向使得任意两片相邻曲面的定向是协调的,则称 S 是可定向的. 按协调原则选择的每一个 S_i 的定向称为 S 的一定向,不难证明任何连通可定向逐片光滑曲面的定向也只有两个. 显然任何一个光滑曲面也可以视为按规则相处原则拼接的逐片光滑曲面, 容易证明对于光滑曲面上述两种可定向的定义是等价的. 今后提到的曲面如无声明总是可定向的.

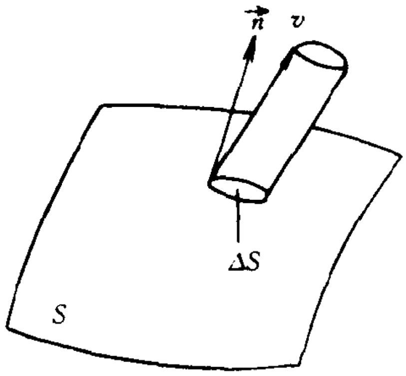


第二型曲面积分 从物理学中的计算流量或通量的问题可以引出第二类型曲面积分. 设 Ω 是 R^3 中的一个区域, Ω 内有一稳定流,即每一点的流速不依赖于时间 t . 记流速

$$\overrightarrow{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\overrightarrow{i}+Q(x,y,z)\overrightarrow{j}+R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

已给 Ω 内一光滑可定向曲面 S . 选取 S 的一侧为正侧,其相应的单位法向量记为

$$\overrightarrow{n}=\cos\alpha\overrightarrow{i}+\cos\beta\overrightarrow{j}+\cos\gamma\overrightarrow{k}$$



$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\overrightarrow{n}$ 的方向余弦. 我们的问题是求单位时间内流体穿过 S 从负侧到正侧的流量 Q .在 S 上任取一小片曲面 ΔS ,其面积也记为 ΔS . 任取 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Delta S$,ΔS 近似地视为 S 过 (ξ,η,ζ) 的切平面上的小区域, 所以单位时间内穿过 ΔS 从负侧到正侧的流量 ΔQ 近似于以 ΔS 为底面 $\overrightarrow{v}(\xi,\eta,\zeta)$ 为母线的斜柱体的体积, 于是

$$\Delta Q\approx(\overrightarrow{v}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\overrightarrow{n}(\xi,\eta,\zeta))\,\Delta S$$

利用分割, 求和, 取极限的过程易知

$$Q=\iint_S\overrightarrow{v}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\overrightarrow{n}(\xi,\eta,\zeta)\,dS$$

或者

$$Q=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

上式右端是第一类型曲面积分,但被积式线性依赖于确定 S 方向的单位法向量,从而积分与 S 的方向有关,且 S 取相反的方向, 积分就改变符号.

基于以上讨论,我们定义如下. 设 S 是逐片光滑的定向曲面, S 上确定其方向的单位法向量记为

$$\overrightarrow{n}(x,y,z)=\cos\alpha\overrightarrow{i}+\cos\beta\overrightarrow{j}+\cos\gamma\overrightarrow{k},\ (x,y,z)\in S$$

显然 $\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z)$ 在 S 上逐片连续. 设

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\overrightarrow{i}+Q(x,y,z)\overrightarrow{j}+R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

是定义在 S 上的向量值函数,定义 $\overrightarrow{F}$ 沿 S 的第二类型曲面积分为

$$\iint_S \overrightarrow{F}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{n}(x,y,z)\,dS$$

有时也记为

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}=\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS$$

用分量表示则

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

我们可以独立定义

$$\iint_S P(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z)\,dS=\lim_{d(T)\to 0}\sum_i P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i$$

为 $P(x,y,z)$ 沿定向曲面 S 关于坐标 y,z 的积分,记为

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz=\iint_S P(x,y,z)\cos\alpha dS$$

同样定义 $Q(x,y,z)$ 沿 S 关于坐标 z,x 的积分为

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx=\iint_S Q(x,y,z)\cos\beta dS$$

$R(x,y,z)$ 沿 S 关于坐标 x,y 的积分为

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy=\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS$$

于是

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

第二类型曲面积分可用第一类型曲面积分定义, 从而第一类型曲面积分的许多性质对于第二类型曲面积分也成立, 我们不在此详述. 特别值得指出的是与第一类型曲面不同, 第二类型曲面积分与曲面的方向有关,通常称 S 带有某一方向为正侧,则 S 带有相反方向为负侧,记为 $-S$,于是

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz=-\iint_{-S} P(x,y,z)\,dydz$$
$$\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx=-\iint_{-S} Q(x,y,z)\,dzdx$$
$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy=-\iint_{-S} R(x,y,z)\,dxdy.$$

运用第一类型曲面积分的计算公式立即可得第二类型曲面积分的计算公式. 设 S 是逐片光滑的定向曲面且有参数表示

$$S:\begin{cases} x=x(u,v)\,, \\ y=y(u,v)\,,\ (u,v)\in D \\ z=z(u,v)\,, \end{cases}$$

记

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

由于 S 连通,所以与 S 定向一致的单位法向量或者是 $\vec{n}$ 或者是 $-\vec{n}$,假设为 $\vec{n}$. 显然 $\vec{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$\cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_S P(x,y,z)\,dydz &= \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha dS \\ &= \iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,A(u,v)\,dudv\end{aligned}$$

同理

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx=\iint_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,B(u,v)\,dudv$$
$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy=\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,C(u,v)\,dudv$$

以上公式也可统一写为

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_D (PA+QB+RC)\,dudv$$

特别若

$$S:\ z=z(x,y),\ (x,y)\in D$$

方向为 S 的上侧,显然与 S 方向一致的单位法向量

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)$$

可得

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz=\iint_D -z_x(x,y)\,P(x,y,z(x,y))\,dxdy$$
$$\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx=\iint_D -z_y(x,y)\,Q(x,y,z(x,y))\,dxdy$$
$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy=\iint_D R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

9.5 各种积分之间的关系

格林公式

设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上的有界闭区域,其边界 ∂D 由有限条逐段光滑的简单闭曲线构成,即 $\partial D=L_0\cup L_1\cup\cdots\cup L_k$,这里 L_0 是最外围边界,其它所有边界都含在 L_0 之内,如图9.1. 我们定义 ∂D 的正向为: L_0 是逆时针方向, $L_1,L_2,\cdots,L_k$ 都是顺时针方向,即当观察者站在平面上沿 ∂D 的这一方向前行时,区域 D 总是位于其左手边.

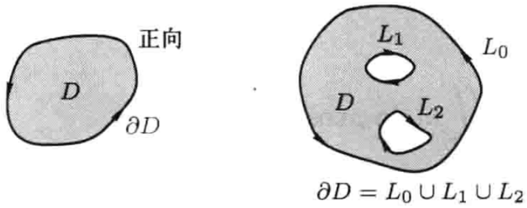


图 9.1: 区域边界正向示意图

定理 9.10 (格林公式)

设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上的有界闭区域,其边界 ∂D 是由有限条逐段光滑的简单闭曲线构成的定向曲线,方向为正向. $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y), \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ 都在 D 连续,则

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证明 (1) 首先考虑 D 是 x 型区域或者是 y 型区域的情形:

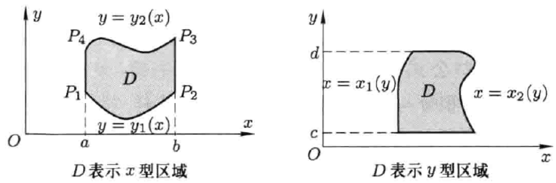


图 9.2: x 型区域、 y 型区域

若 D 是 x 型区域,则 D 可表示为

$$D = D^x = \{(x,y) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

其边界表示为 $\partial D^x = \widetilde{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \widetilde{P_3P_4} \cup \overline{P_4P_1}$. 注意到

$$\int_{\overline{P_2P_3}} P(x,y)\,\mathrm{d}x = 0, \int_{\overline{P_4P_1}} P(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\iint_{D^x} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\widetilde{P_4P_3}} P(x,y)dx - \int_{\widetilde{P_1P_2}} P(x,y)dx \\
&= -\left(\int_{\widetilde{P_3P_4}} + \int_{\widetilde{P_1P_2}} + \int_{\widetilde{P_2P_3} \cup \widetilde{P_4P_1}}\right) P(x,y)dx \\
&= -\int_{\partial D^x} P(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

类似地,若 D 是 y 型区域,即

$$D = D^y = \{(x,y) \mid c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

则

$$\iint_{D^y}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D^y}Q\left(x,y\right)\mathrm{d}y$$

(2) 设区域 D 既能表示为有限个两两无公共内点的 x 型区域的并,又能表示为有限个两两无公共内点的 y 型区域的并 (例如,见图 9.3 所示的例子), 即

$$D=\bigcup_{i=1}^{k}D_i^x=\bigcup_{i=1}^{m}D_i^y$$

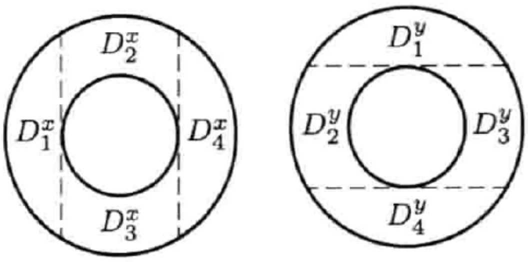


图 9.3: > _ <

对这样的区域,由 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{k}D_i^x$ 知

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}\iint_{D_i^x}\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial D_i^x}P\left(x,y\right)\mathrm{d}x$$

在上式的最后和式中,例如某 D_i^x 与 D_j^x 有一段公共边界 L_{ij} ,则沿 ∂D_i^x 与 ∂D_j^x 积分时,将沿 L_{ij} 积分两次,这两次积分方向相反,从而相抵消,因此只剩下沿 ∂D 的积分,即

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial D_i^x}P\left(x,y\right)\mathrm{d}x=\int_{\partial D}P\left(x,y\right)\mathrm{d}x$$

从而

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_{\partial D}P\left(x,y\right)\mathrm{d}x$$

同理由 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{m}D_i^y$ 知

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i^y}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial D_i^y}Q\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D}Q\,\mathrm{d}y$$

上面两式相减即知格林公式成立.

(3) 对于更一般的区域, 由于涉及很细致的分析, 我们略去细节,只列出证明思路. 第一步,需要扩张函数 P,Q 到包含区域 D 的某个开区域 Ω 上去,并满足定理的连续性条件.

第二步,在 ∂D 上插入一些分点 $A_0,A_1,\cdots,A_k\left(A_{k+1}=A_0\right)$. 由(2)知,在多边形区域 $D_n=\overline{A_0A_1\cdots A_k}\subseteq\Omega$ 上格林公式成立. 第三步,在

$$\iint_{D_n}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D_n}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

两边取极限,利用定理 9.6 可知,右端以 $\int_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 为极限,可以证明左端以 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 为极限,所以格林公式成立.

笔记 下面附上步骤3的详细过程:

现在考虑更一般的情况. 设 ∂D 是由有限条两两不相交简单、封闭的逐段光滑曲线所组成,且存在 R^2 上的包含 D 的开集 G 使得 $P\left(x,y\right),Q\left(x,y\right),\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}\in C^1\left(G\right)$. 取 R^2 上简单集合序列 $\{H_n\}$ 和 $\{F_n\}$,即每一个 H_n

和 F_n 都是有限个 R^2 上标准矩形的并,使得

$$F_n \subseteq D^\circ \subseteq D \subseteq H_n^\circ \subseteq H_n \subseteq G,\ n=1,2,\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} |H_n \backslash F_n| = 0$$

其中 $|H_n\backslash F_n|$ 表示集合 $H_n\backslash F_n$ 的面积. 取与 ∂D 方向一致的分割序列 $\{T_n\}$,使得每一个 T_n 将 ∂D 分割成有限个两两不相交的封闭折线 Γ_n 满足

$$\Gamma_n \subseteq H_n^\circ \backslash F_n$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} d(T_n) = 0$. 由定理 9.6 和两种类型曲线积分的关系易知

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} |H_n\backslash F_n| = 0$易知

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

其中 D_n 是以 Γ_n 为边界的有界闭区域. 利用已证得的结果可知

$$\int_{\Gamma_n} Pdx + Qdy = \iint_{D_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

令 $n \to \infty$,则 Green 公式对于区域 D 成立.

由两类曲线积分之间的关系知,若 $\overrightarrow{\tau}$ 是 ∂D 上与其定向一致的单位切向量,设 $\overrightarrow{\tau} = (\cos(\overrightarrow{\tau}, x), \cos(\overrightarrow{\tau}, y))$,那么格林公式也可写为

$$\int_{\partial D} (P\cos(\overrightarrow{\tau}, x) + Q\cos(\overrightarrow{\tau}, y))\,\mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

又若 $\overrightarrow{n}$ 为 ∂D 上关于区域 D 的单位外法向量,设

$$\overrightarrow{n} = (\cos(\overrightarrow{n}, x), \cos(\overrightarrow{n}, y))$$

则有

$$\cos(\overrightarrow{\tau}, x) = -\cos(\overrightarrow{n}, y), \cos(\overrightarrow{\tau}, y) = \cos(\overrightarrow{n}, x)$$

因此

$$\int_{\partial D} (P\cos(\overrightarrow{n}, x) + Q\cos(\overrightarrow{n}, y))\,\mathrm{d}s = \int_{\partial D} (-Q\cos(\overrightarrow{\tau}, x) + P\cos(\overrightarrow{\tau}, y))\,\mathrm{d}s$$

于是格林公式又可写为

$$\int_{\partial D} (P\cos(\overrightarrow{n}, x) + Q\cos(\overrightarrow{n}, y))\,\mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

笔记 格林公式使平面区域上的二重积分与其边界上的曲线积分建立了联系, 因此运用格林公式既可以将一个二重积分的计算问题转化为曲线积分的计算问题, 也可以将一个曲线积分的计算问题转化为二重积分的计算问题.

由格林公式知,在平面区域 D 上满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ 的所有光滑向量值函数 $(P(x,y), Q(x,y))$ 的曲线积分均表示 D 的面积,如令 $P = -\dfrac{1}{2}y, Q = \dfrac{1}{2}x$,则得到 D 的面积 $V_J(D)$ 用曲线积分表示为

$$V_J(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

令 $P = -y, Q = 0$,与 $P = 0, Q = x$,则得到 D 的面积

$$V_J(D) = \int_{\partial D} -y\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y$$

根据区域 D 的不同形态选择恰当的向量值函数,将面积计算问题转化为曲线积分可以为面积计算带来方便.

高斯公式

高斯公式与格林公式一样, 仍然把重积分与其边界上的积分联系起来, 只是高斯公式把空间有界区域的三重积分与其边界上的曲面积分联系起来.

定理 9.11 (高斯公式)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中有界闭区域,其边界 $\partial\Omega$ 是由有限个逐片光滑曲面构成的定向曲面,方向为关于 Ω 的外侧, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$ 在 Ω 上连续. 则

$$\iint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

♡

证明 (1) 首先考虑 Ω 是 xy 型,或 yz 型,或 xz 型区域的情形. 若 Ω 是 xy 型区域:

$$\Omega=\Omega^{xy}=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in\sigma_{xy}, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

设 $\partial\Omega^{xy}$ 的外侧由曲面 $S_1: z=z_1(x,y), (x,y)\in\sigma_{xy}$ 之下侧,曲面 $S_2: z=z_2(x,y), (x,y)\in\sigma_{xy}$ 之上侧与柱面 S_3 的外侧组成,如下图所示. 注意到 $\iint_{S_3} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$,从而

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega^{xy}}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz\\
=&\iint_{\sigma_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\\
=&\iint_{\sigma_{xy}}[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_{S_2}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{S_1}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_{\partial\Omega^{xy}}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

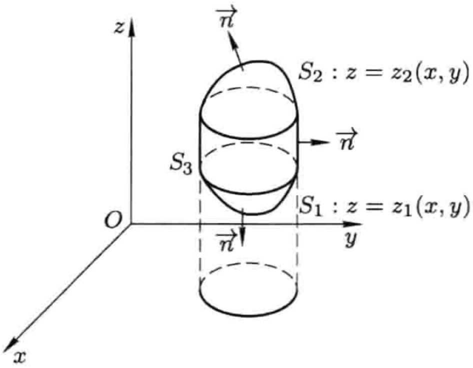


图 9.4: xy 型区域

类似地,若 Ω 为 yz 型区域,即

$$\Omega=\Omega^{yz}=\{(x,y,z)\mid (y,z)\in\sigma_{yz}, x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\}$$

则

$$\iiint_{\Omega^{yz}}\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega^{yz}}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若 Ω 为 xz 型区域,即

$$\Omega=\Omega^{xz}=\{(x,y,z)\mid (x,z)\in\sigma_{xz}, y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z)\}$$

则

$$\iiint_{\Omega^{xz}}\frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega^{xz}}Q\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(2) 设区域 Ω 可以同时表示为有限个两两无公共内点的 xy 型区域的并,yz 型区域的并与 xz 型区域的并,即

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i^{xy}=\bigcup_{i=1}^{m}\Omega_i^{yz}=\bigcup_{i=1}^{l}\Omega_i^{xz}$$

对这样的区域,由 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Omega_i^{xy}$ 知

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \sum_{i=1}^{k}\iiint_{\Omega_i^{xy}}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \sum_{i=1}^{k}\iint_{\partial\Omega_i^{xy}}R\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

上式最后的和式中,若 Ω_i^{xy} 与 Ω_j^{xy} 有一块公共边界 S_{ij} ,则 R 在 S_{ij} 将积分两次,每次积分方向相反,故相互抵消,因此只剩下沿 $\partial\Omega$ 的积分, 从而

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}R\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

类似地,由 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega_i^{yz}$ 知

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

由 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{l}\Omega_i^{xz}$ 知

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}Q\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

上面三式相加即知高斯公式成立. 对于更复杂情况, 如证明格林公式那样处理, 在此不再赘述.

笔记 利用高斯公式可将 $\mathbb{R}^3$ 中具有逐片光滑曲面边界的有界闭区域 Ω 的体积 $V_J\left(\Omega\right)$ 用曲面积分表示为

$$\begin{aligned}V_J(\Omega) &= \iint_{\partial\Omega}xdydz=\iint_{\partial\Omega}ydzdx=\iint_{\partial\Omega}zdxdy\\ &= \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 $\partial\Omega$ 取关于 Ω 的外侧. 反之,也可通过计算三重积分来求曲面积分.

斯托克斯公式

定理 9.12 (斯托克斯公式)

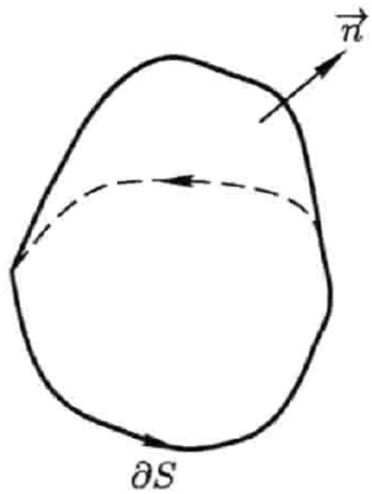
设 $\mathbb{R}^3$ 中定向曲面 S 是带边的逐片光滑曲面,其边界 ∂S 为有限条逐段光滑简单闭曲线, ∂S 的方向与 S 的方向符合右手法则,如下图所示. 若 $P\left(x,y,z\right),Q\left(x,y,z\right),R\left(x,y,z\right)$ 在 S 一阶偏导数连续, 则

$$\int_{\partial S}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

上式称为斯托克斯公式. 为了方便记忆, 斯托克斯公式可写为

$$\int_{\partial S} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$



第 10 章 数项级数

10.1 级数收敛性的概念与基本性质

定义 10.1

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一个级数，称 u_n 为级数的**通项**，令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \ n = 1, 2, \cdots$$

称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 个**部分和**，并称数列 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列.

定义 10.2

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的相应的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并把极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 称为级数的和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

如果数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**，当 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty(-\infty)$，我们也记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty(-\infty)$，并称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散到 $+\infty(-\infty)$.

定理 10.1 (级数收敛的必要条件)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其通项 u_n 收敛于 0，即有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

笔记 注意到 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ 发散，所以这只是充分条件而不能是必要条件.

定理 10.2 (Cauchy 收敛原理)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对一切 $n > N$ 以及任意正整数 p，都有

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

定理 10.3

若两个级数中只有有限多项不同，或者是一个级数比另一个级数多了有限多项，则这两个级数同时收敛或者同时发散.

笔记 由 Cauchy 收敛原理可以直接得到这个结果.

定义 10.3

我们把 $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 称为 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的一个**余级数**，它恰为原级数与部分和 S_n 的差.

推论 10.1 (定理 10.3直接推出)

级数与它的任一余级数同时收敛或者发散.

定理 10.4

设 C 为任一常数，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且有

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

笔记 由定理可以知道，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必定发散.

10.2 正项级数

定义 10.4

所有项都是非负数的级数称之为**正项级数**.

定理 10.5

正项级数收敛的充分必要条件是他的部分和数列为有界数列.

笔记 由于正项级数的部分和数列是单调数列，从而由单调收敛定理知道成立.

定理 10.6 (比较判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数且存在正整数 N，使当 $n \geq N$ 时，总有 $u_n \leq v_n$，则有下列结论:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

笔记 因为当 $n \geq 1, 0 < p < 1$ 时,有 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以由比较判别法知，当 $0 < p < 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散. 同理可证级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

笔记 容易发现对级数的每一项统一乘上一个正常数不影响其收敛性，所以上面的条件可以弱化为

$$u_n \leq Cv_n,\ C \in \mathbb{R}^+$$

定理 10.7 (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的所有项都是正数，且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

其中 $l \geq 0$ 或 $l = +\infty$，则

(1) 若 $0 < l < +\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 若 $l = 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 若 $l = +\infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证明 (1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，取 $\varepsilon_0 = \frac{l}{2}$，由 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 知，存在正整数 N，使得当 $n \geq N$ 时有

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \varepsilon_0 = \frac{l}{2}$$

也即

$$\frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3l}{2} v_n,\ n \geq N$$

从而由定理 10.6 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

(2)(3) 的证明类似，下略.

定理 10.8 (D'Alembert 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数且所有项都是正数,记 $D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$,则有

(1) 若存在 $0 < q < 1$ 及正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有 $D_n \leq q$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若存在正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有 $D_n \geq 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 10.9 (D'Alembert 判别法极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数且所有项都是正数.

(1) 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n = \bar{r} < 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} D_n = \underline{r} > 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明 取 $\varepsilon = \frac{1-\bar{r}}{2} > 0$,因为 $\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n = \bar{r}$,故有正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时,就有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = D_n < \bar{r} + \varepsilon = \frac{1+\bar{r}}{2} < 1$$

由比较判别法容易知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,即 (1) 成立. 类似可证(2) 成立.

定理 10.10 (Cauchy 判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数并记 $C_n = \sqrt[n]{u_n}$,则有

(1) 若存在 $0 < q < 1$ 及正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有 $C_n \leq q$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若存在正整数列的子列 $\{n_k\}$,使得 $C_{n_k} \geq 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 10.11 (Cauchy 判别法极限形式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数.

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = r < 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = r > 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明 若 $r<1$，则存在正整数 N，使得对 $n \geq N$，有 $\sqrt[n]{u_n} < \dfrac{r+1}{2} < 1$，从而有

$$u_n < \left(\frac{r+1}{2}\right)^n$$

从而由比较判别法及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{r+1}{2}\right)^n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

若 $r>1$，则由上极限的性质，存在 $\{\sqrt[n]{u_n}\}$ 的子列极限为 r，从而这个子列对应的 $\{u_{nk}\}$ 趋于无限大，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

笔记 实际上 Cauchy 判别法蕴含 D'Alembert 判别法，我们由推广的 Stolz 定理可以知道

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

定理 10.12 (积分判别法)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负且递减，令 $A_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$，$n = 1, 2, \cdots$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与数列 $\{A_n\}$ 同时收敛或同时发散.

证明 按已知条件和定积分性质,对任意正整数 $k \geq 2$,有

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k-1)$$

对 k 从2到 n 求和,得到

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k-1)$$

记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的部分和为 S_n ,则上式化为

$$S_n - f(1) \leq A_n \leq S_{n-1}$$

按定义知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与数列 $\{A_n\}$ 同时收敛或同时发散.

例题 10.1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}(p>0)$ 的收敛性.

解 令 $f(x)=\frac{1}{x^p}$. 当 $p=1$ 时,有

$$A_n=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln n \to +\infty \ (n\to\infty)$$

由积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p=1$ 时发散. 再由比较判别法知所论级数当 $0<p<1$ 时也发散.

当 $p>1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}A_n &= \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\\ &= -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}\Big|_1^n\\ &= -\frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\to\frac{1}{p-1}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

由积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛.

综上可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $0<p\le 1$ 时发散,当 $p>1$ 时收敛.

容易发现 $p-$级数属于 Cauchy 判别法和 D'Alembert 判别法失效的情况，我们尝试去建立一个对应 $p-$级数的判别法.

一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 要通过与 $p-$级数比较得到收敛性，当且仅当存在 $p>1$，常数 $M>0$，正整数 N，使得

$$a_n\le\frac{M}{n^p},\ \forall n\ge N$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}&\text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{收敛}\\ \Longleftarrow\ &\exists p>1, M>0, N\ge 2,\ \text{s.t.}\forall n\ge N,\ a_n\le\frac{M}{n^p}\\ \Longleftrightarrow\ &\exists p>1, M>0, N\ge 2,\ \text{s.t.}\forall n\ge N,\ p\le\frac{\ln M-\ln a_n}{\ln n}\\ \Longleftrightarrow\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{-\ln a_n}{\ln n}>1\\ \Longleftarrow\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{-\ln a_{n+1}+\ln a_n}{\ln(n+1)-\ln n}>1\\ \Longleftrightarrow\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\ n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>1\\ \Longleftrightarrow\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\ n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1\end{aligned}$$

发散的情况类似，从而我们可以得到下面这个结果：

定理 10.13 (Raabe 判别法)

设对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=l\in[-\infty,+\infty]$.

(1) 若 $l>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $l<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

笔记 对于 Raabe 判别法，我们更加关注是如何推导得到的，在处理具体问题的时候并不建议使用 Raabe 判别法. 关于 $p-$级数更简单的估计，我们可以有以下结论.

定理 10.14 (阶的估计法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数.

(1) 若存在 $p>1$,且存在正整数 N 和正常数 K ,使得 $u_n \leq \dfrac{K}{n^p}(n \geq N)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若存在 $p \leq 1$,且存在正整数 N 和正常数 K ,使得 $u_n \geq \dfrac{K}{n^p}(n \geq N)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 10.15 (阶的估计法的极限形式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数.

(1) 若存在 $p>1$,使得 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim\limits_{n \to \infty} n^p u_n = r$,其中 r 是非负实数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若存在 $p \leq 1$,使得 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim\limits_{n \to \infty} n^p u_n = r$,其中 r 是正实数或 $r=+\infty$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

对于单调递减的正项级数，我们还可以得到另一个 Cauchy 判别法：

定理 10.16 (Cauchy 判别法之二)

设非负数列 $\{a_n\}$ 单调下降，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛.

证明 由于 $\{a_n\}$ 的单调性，我们有

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k = a_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \geq a_1 + \sum_{j=1}^{n} (2^j - 2^{j-1}) a_{2^j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} 2^j a_{2^j}$$

同理有：

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k \leq \sum_{j=0}^{n-1} (2^{j+1} - 2^j) a_{2^j} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j a_{2^j}$$

从而我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 有相同的有界性，从而有相同的收敛性.

定理 10.17 (比值比较判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数且存在正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时, $u_n > 0, v_n > 0$,且有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

则

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

♡

证明 当 $n \geq N$ 时,由已知有

$$\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_{N+1}}{u_N}\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N}\frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}\cdots\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{v_n}{v_N}$$

由此可得

$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N}v_n,\ \frac{v_N}{u_N}u_n \leq v_n$$

再由比较判别法即知定理结论成立.

利用比值判别法我们还可以的得到关于 Raabe 判别法的一般形式:

定理 10.18 (Raabe 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数且所有项都是正数,记 $R_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$.

(1) 若存在 $q > 1$ 及正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有 $R_n \geq q$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若存在正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有 $R_n \leq 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

♡

证明 (1) 由已知有正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有 $R_n \geq q$,从而有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 + \frac{q}{n},\ n \geq N$$

因为 $q > 1$,故可取 $\sigma > 0$,使得 $1 + \sigma < q$,由泰勒公式有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} = 1 + \frac{1+\sigma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

故有

$$1 + \frac{q}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} = \frac{q - (1+\sigma)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是有正整数 N' ,使当 $n \geq N'$ 时,就有

$$1 + \frac{q}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} > 0$$

令 $N_1 = \max\{N, N'\}$,当 $n \geq N_1$ 时,由上面的讨论得到

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\sigma}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\sigma} = \frac{(n+1)^{-(1+\sigma)}}{n^{-(1+\sigma)}}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\sigma)}$ 收敛,故由比值比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 由已知有正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时,就有 $R_n \leq 1$,于是有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

由比值比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 10.19 (Gauss 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数且所有项都是正数,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$$

(1) 若 $\lambda > 1$ 或者 $\lambda = 1, \mu > 1$ 或者 $\lambda = \mu = 1, \nu > 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\lambda < 1$ 或者 $\lambda = 1, \mu < 1$ 或者 $\lambda = \mu = 1, \nu < 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

♡

证明 由 D'Alembert 判别法知,当 $\lambda > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而当 $\lambda < 1$ 时级数发散. 由 Raabe 判别法又知级数当 $\lambda = 1, \mu > 1$ 时收敛,而当 $\lambda = 1, \mu < 1$ 时发散.

当 $\lambda = \mu = 1, \nu > 1$ 时,取 p 使得 $1 < p < \nu$. 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛(利用积分判别法即可). 由于

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{v_{n+1}} &= \frac{(n+1)\left[\ln(n+1)\right]^p}{n(\ln n)^p} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^p \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^p \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right]^p \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)
\end{aligned}$$

与高斯判别法的条件比较可知,存在正整数 N ,使当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

由比值比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $\lambda=\mu=1,\nu<1$ 时,级数 $\sum_{n=2}^{\infty} w_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散. 在前面式子中令 $p=1$,得到

$$\frac{w_n}{w_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

与高斯判别法的条件比较可知,存在正整数 N,使当 $n\geq N$ 时有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\leq\frac{w_n}{w_{n+1}}$$

由比值比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

推论 10.2

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数且所有项都是正数,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$$

其中 λ,μ 是常数而 θ_n 是有界量,则有

(1) 若 $\lambda>1$ 或 $\lambda=1,\mu>1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\lambda<1$ 或 $\lambda=1,\mu\leq1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定义 10.5

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 是两个收敛的正项级数且它们的所有项都是正数,把它们的余级数分别记为 $\gamma_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 与 $\gamma_n'=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k'$. 如果 γ_n' 是 γ_n 的低阶无穷小,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{\gamma_n'}=0$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛更慢**.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$ 是两个发散的正项级数,把它们的部分和分别记为 V_n 与 V_n'. 如果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n'}{V_n}=0$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **发散更慢**.

命题 10.1

(1) 对于任意收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,存在一个比它收敛更慢的正项级数.

(2) 对于任意发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,存在一个比它发散更慢的正项级数.

证明 (1) 实际上,把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余级数记为 $\gamma_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k\,(n=1,2,\cdots)$,用 γ_0 来记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}\right)$$

易见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 的余级数为 $\gamma_n' = \sqrt{\gamma_n}$,于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_n'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\gamma_n} = 0$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛更慢.

(2) 实际上,设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和是 V_n ,考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n' = \sqrt{V_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{V_n} - \sqrt{V_{n-1}}\right)$$

易见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'$ 的部分和为 $V_n' = \sqrt{V_n}$,于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n'}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{V_n}} = 0$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'$ 比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散更慢.

笔记 我们看到, 在 D'Alembert 判别法、Cauchy 判别法、Raabe 判别法和 Gauss 判别法这四个判别法里, 后面的判别法强于前面的判别法. 其原因主要在于, 证明收敛时, D'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法是将所论级数同几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\ (a \neq 0, 0<q<1)$ 进行比较, Raabe 判别法是将所论级数同 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (p>1)$ 进行比较, Gauss 判别法是将所论级数同 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}\ (p>1)$ 进行比较,上述三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\ (a \neq 0, 0<q<1),\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (p>1),\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}\ (p>1)$$

后面的级数比前面的级数收敛更慢, 从而上述四个判别法越来越精细.

10.3 任意项级数

定义 10.6

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

♣

定理 10.20

若级数绝对收敛，则级数收敛.

♡

笔记 本定理可以简单地用 Cauchy 准则来证明. 有了这个定理, 要考察一个任意项级数是否收敛, 大致可以按以下三个步骤来判断: 第一步是看一般项是否趋于零，在第一步结论为肯定的情况下, 第二步是看它是否绝对收敛,

然后在第二步结论为否定的情况下,再考虑使用 Abel 判别法或 Dirichlet 判别法等其他方法.

定理 10.21 (M-判别法)

若存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和正整数 N ,使得 $|u_n| \leq v_n\ (n \geq N)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 从而收敛.

把达朗贝尔判别法或柯西判别法应用到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 上,若结果是收敛的,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 从而收敛; 若结果是发散的, 则 $|u_n|$ 不趋于零,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定义 10.7

正项和负项交错排列的级数称为**交错级数**.
按首项为正项或负项的不同,交错级数可分别写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

其中 $u_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$.

命题 10.2 (Abel 变换)

对于数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$,记 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\ (n \geq 1)$,则对于正整数 $m \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^{m} a_n b_n = A_m b_m - \sum_{n=1}^{m-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

证明 记 $A_0 = 0$,则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} a_n b_n = \sum_{n=1}^{m} (A_n - A_{n-1}) b_n &= \sum_{n=1}^{m} A_n b_n - \sum_{n=2}^{m} A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=1}^{m} A_n b_n - \sum_{n=1}^{m-1} A_n b_{n+1} = A_m b_m - \sum_{n=1}^{m-1} A_n (b_{n+1} - b_n)
\end{aligned}$$

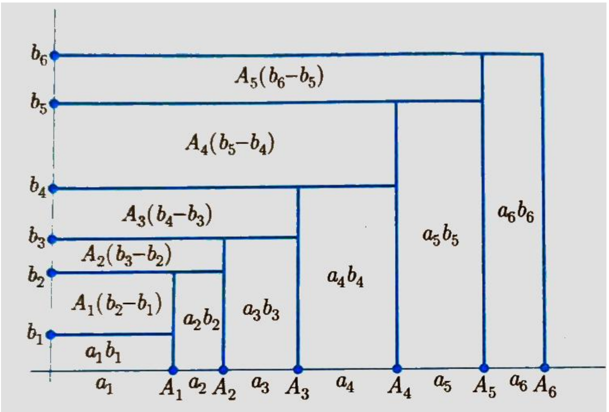


图 10.1: Abel 变换的几何含义

定理 10.22

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$，设数列 $\{b_n\}$ 单调.

(1)(**Abel 判别法**) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\{b_n\}$ 有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(2)(**Dirichlet 判别法**) 若 $\{b_n\}$ 收敛到零，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

♡

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 $\{S_n\}$. 由 Abel 变换,对于 $m > n \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = (S_m - S_n) b_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} (S_k - S_n)(b_k - b_{k+1})$$

这样,当 $\{b_n\}$ 单调时,对于 $m > n \geq N \geq 1$,有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &\leq \left(|b_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}|\right) \sup_{k,j \geq N} |S_k - S_j| \\
&\leq (|b_m| + |b_{n+1} - b_m|) \sup_{k,j \geq N} |S_k - S_j| \\
&\leq 3 \sup_{k \geq N} |b_k| \cdot \sup_{k,j \geq N} |S_k - S_j|
\end{aligned}$$

于是,由 $\{S_n\}$, $\{b_n\}$ 的有界性,无论是 $\{S_n\}$ 收敛还是 $\{b_n\}$ 收敛到 0,均可推得

$$\lim_{N \to +\infty} \sup_{m,n \geq N} \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| = 0$$

从而由 Cauchy 准则, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

我们会得到 Dirichlet 判别法的一个常用推论：

定理 10.23 (Leibniz 判别法)

设数列 $\{a_n\}$ 单减且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

♡

证明 容易证明对任何 $m > n > 0$，有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k a_k\right| \leq a_n$$

从而由 Cauchy 准则得证.

我们也可以通过 Dirichlet 判别法推导 Abel 判别法：

设 Abel 判别法的条件成立，由于 $\{b_n\}$ 单调有界, $\{b_n\}$ 有极限为 b

$$\sum_{n=1}^{m} a_n b_n = \sum_{n=1}^{m} a_n (b_n - b) + b \sum_{n=1}^{m} a_n$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则其部分和有界,由 Dirichlet 判别法，知道 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

观察由 Dirichlet 判别法推导 Abel 判别法证明过程得到启发.

考虑把 $\{b_n\}$ 的单调性替换掉,推广 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法如下.

定理 10.24

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛.

(1) (**Abel 判别法的推广**) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(2) (**Dirichlet 判别法的推广**) 若 $\{b_n\}$ 收敛到零,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

♡

证明 对于 $n \geq 1$,由 Abel 变换,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(b_{k+1} - b_k\right)$$

在定理假设条件下, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{S}_k\ (\ \mathrm{b}_{k+1} - \mathrm{b}_k\ )$绝对收敛.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\{S_n b_n\}$ 收敛.

(2) 若 $\{b_n\}$ 收敛到零,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界,则 $\{S_n b_n\}$ 收敛到 0 .

总之,总有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

10.4 组合级数与重排级数

定义 10.8

把一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项保序地分成无穷多组,并将每组的各项写在一个括号中进行求和合并,这样得到一个新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$,其中

$$v_k = u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k},\ k = 1, 2, \cdots,$$

$$0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$$

这个新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 称为原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**组合级数**.

♣

定理 10.25

收敛级数的任一组合级数都收敛，且与原级数有相同的和.

♡

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 是它的一个组合级数,其中 v_k 如定义所示. 把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 的部分和分别记为 U_n 和 V_k ,于是按定义有

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{n=1}^{n_k} u_n = U_{n_k},\ k = 1, 2, \cdots$$

由此可见,组合级数的部分和数列 $\{V_k\}$ 是原级数的部分和数列 $\{U_n\}$的一个子列 $\{U_{n_k}\}$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,故数列 $\{U_n\}$ 收敛,从而它的子列也收敛且与它有相同的极限.按定义知组合级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$

收敛且与原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的和.

笔记 发散级数的组合级数可能收敛. 例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 发散而组合级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}\right]$ 收敛. 一般来说,组合级数收敛只说明原级数的部分和数列的一个子列收敛, 从而不能保证原级数收敛.

定理 10.26

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的组合级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛,其中

$$v_k = u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

且 $u_{n_{k-1}+1}, u_{n_{k-1}+2}, \cdots, u_{n_k}$ 各项不变号,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛且与 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 有相同的和.

证明 设组合级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛. 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 的部分和分别记为 U_n 和 V_k. 若 $u_{n_k+1}, u_{n_k+2}, \cdots, u_{n_{k+1}} \geq 0$,则

$$V_k \leq U_n \leq V_{k+1}, \quad n_k \leq n \leq n_{k+1}$$

若 $u_{n_k+1}, u_{n_k+2}, \cdots, u_{n_{k+1}} \leq 0$,则

$$V_{k+1} \leq U_n \leq V_k, \quad n_k \leq n \leq n_{k+1}$$

总之,当 $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ 时, U_n 在 V_k 与 V_{k+1} 之间. 由于组合级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛,即 $\{V_k\}$ 收敛,记 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 的和为 V ,则对任意 $\varepsilon > 0$,存在正整数 K ,当 $k \geq K$ 时,有

$$V - \varepsilon < V_k < V + \varepsilon$$

于是当 $n \geq n_K$ 时,有

$$V - \varepsilon < U_n < V + \varepsilon$$

故由极限定义知 $\lim_{n\to\infty} U_n = V$,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 V . 结合定理 10.25, 完成证明.

定义 10.9

设映射 $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 是一个一一对应,令 $v_n = u_{\alpha(n)}$,我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个重排.

定义 10.10

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,令

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, & u_n \geq 0, \\ 0, & u_n < 0, \end{cases} \quad u_n^- = \begin{cases} 0, & u_n \geq 0, \\ -u_n, & u_n < 0, \end{cases}$$

显然有 $u_n^+ \geq 0, u_n^- \geq 0$. 这样一来,由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就可以得到两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$,分别称它们为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的正部和负部.

由 $|u_n| = u_n^+ + u_n^-, u_n = u_n^+ - u_n^-$ 以及 $u_n^+ = \dfrac{|u_n| + u_n}{2}, u_n^- = \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$,易得下面的结论.

定理 10.27

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛的充分必要条件是它的正部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和负部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛的必要条件是它的正部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和负部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散.

♡

定理 10.28

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,则它的任意重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也绝对收敛, 并且二者有相同的和.

♡

证明 (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛的正项级数. 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和它的重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别记为 U_n 和 V_n . 对任何 $n \in \mathbb{N}^*$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的重排,设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的最大下标是 N_n ,于是有

$$V_n \leq U_{N_n},\ n = 1, 2, \cdots$$

由此可见数列 $\{V_n\}$ 有上界 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,故正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

反之, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的重排级数,故可类似地得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

综合以上讨论即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个绝对收敛级数. 于是它的正部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和负部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任一重排时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^-$ 分别是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 的重排级数. 因而由(1)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^-$ 都收敛且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^+,\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^-$$

从而知重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} v_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

这就完成了定理的证明.

定理 10.29 (黎曼定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛,则对任何实数 α(α 也可以取 $+\infty$ 或 $-\infty$),都存在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$,使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \alpha$.

♡

证明 不妨设 α 为非负实数. 将数列 $\{u_n\}$ 的所有非负项取出来按原序排成的子列记为 $\{u_n'\}$,将 $\{u_n\}$ 的所有负项取出来按原序排成的子列记为 $\{u_n''\}$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛,故知

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n'' = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = -\infty$$

构造 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的重排级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 如下. 先取 $\{u_n'\}$ 中前 n_1 项,按原序排列,记为 $v_1,v_2,\cdots,v_{n_1}$,使得

$$v_1+v_2+\cdots+v_{n_1-1}\leq\alpha,\ v_1+v_2+\cdots+v_{n_1}>\alpha$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'=+\infty$ 知这是可以做到的. 然后取 $\{u_n''\}$ 中前 n_2-n_1 项,按原序排列,记为 $v_{n_1+1},v_{n_1+2},\cdots,v_{n_2}$,使得

$$v_1+v_2+\cdots+v_{n_2-1}\geq\alpha,\ v_1+v_2+\cdots+v_{n_2}<\alpha$$

继续这个过程,当进行 $2k$ 次之后,有

$$v_1+v_2+\cdots+v_{n_{2k}-1}\geq\alpha,\ v_1+v_2+\cdots+v_{n_{2k}}<\alpha$$

接着再取 $\{u_n'\}$ 中尚未排进的前 $n_{2k+1}-n_{2k}$ 项,按原序排列,记为 $v_{n_{2k}+1},v_{n_{2k}+2},\cdots,v_{n_{2k+1}}$,使得

$$v_1+v_2+\cdots+v_{n_{2k+1}-1}\leq\alpha,\ v_1+v_2+\cdots+v_{n_{2k+1}}>\alpha$$

然后再取 $\{u_n''\}$ 中尚未排进的前 $n_{2k+2}-n_{2k+1}$ 项,按原序排列,记为$v_{n_{2k+1}+1},v_{n_{2k+1}+2},\cdots,v_{n_{2k+2}}$,使得

$$v_1+v_2+\cdots+v_{n_{2k+2}-1}\geq\alpha,\ v_1+v_2+\cdots+v_{n_{2k+2}}<\alpha$$

由于每次交换正负项时至少排 1 项,所以一直进行下去,所有 u_n 都可以排进数列 $\{v_n\}$ 中,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的重排级数.

再来证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛于 α. 记 $n_0=0$,令

$$w_k=v_{n_{k-1}+1}+v_{n_{k-1}+2}+\cdots+v_{n_k},\ k=1,2,\cdots$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}w_k$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的组合级数,且为交错级数. 将 $\sum_{k=1}^{\infty}w_k$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和分别记为 W_k 和 V_n,由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的构造可见 $W_k=V_{n_k}$ 且 α 的值介于 W_k 与 $W_k-v_{n_k}$ 之间,故有

$$0\leq|W_k-\alpha|\leq|v_{n_k}|$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,故有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,从而又有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n'=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n''=0$,所以 $\lim\limits_{k\to\infty}v_{n_k}=0$. 由两边夹定理知 $\lim\limits_{k\to\infty}(W_k-\alpha)=0$,故级数 $\sum_{k=1}^{\infty}w_k$ 收敛且和为 α. 知 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\alpha$.

至于 $\alpha=+\infty$ 或 $\alpha=-\infty$ 的情形,将上面的证明过程稍加改动即可, 不再赘述.

10.5 无穷乘积

定义 10.11

设 $\{u_n\}$ 为实数数列,我们把无穷多个数相乘的表达式

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n=u_1u_2\cdots u_n\cdots$$

称为一个无穷乘积.

类似于级数的部分和的定义, 我们将

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}u_k,\ n=1,2,\cdots$$

称为无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分积**.

定义 10.12

如果无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分积数列 $\{P_n\}$ 收敛且极限不为 0,则称 **无穷乘积** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**,并把极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$ 称为无穷乘积的积, 记为

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

如果数列 $\{P_n\}$ 发散或收敛于 0,则称 **无穷乘积** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**. 特别地,当数列 $\{P_n\}$ 收敛于 0 时,称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散于 0 .