数学分析 1 作业评注

杨毅涵

December 17, 2024

南開大學
Nankai University

Contents

1 数学分析 1 作业评注 **1**

1.1 第 1-3 次作业评注 2

1.2 第 4-8 次作业评注 5

1.3 第 9-12 次作业评注 17

A 番外篇 **18**

A.1 数学分析 1 拯救计划 19

A.1.1 考察大家有没有认真看书 19

A.1.2 极限篇 19

A.2 连续篇 26

B 好多题目呀 **28**

Chapter 1

数学分析 1 作业评注

1.1 第 1-3 次作业评注

建议 1.1 对于雨课堂提交作业，请大家**尽量**做到以下几点，你可以选择接受这些建议或者**不接受**，但请记住，写过程首先要做到的是**让别人看懂**.

- 将题目**按照题号顺序**书写，并标明题号.
- 如果是拍照上传，请将图片**按照顺序**，并**旋转至正向**(如果拍出来是横着的请旋转成正向)上传.
- 在提交的作业纸上面**最好**不要打草稿，请让作业上只呈现最终的过程.
- 请尽量将字写得整齐清楚**易于辨认**. 作业并不要求你在很短的时间内写完，所以**不必**将字写得看起来**十分急迫**.
- 除选做题外，如果有题目不会写，请写出题号并标明，并且尝试写出一些自己关于这题的思考，视思考的内容会**酌情给分**.
- 请大家使用某些结论的时候，如果这个结论不是**过于熟知**[1]，请将结论内容叙述清楚，以便阅读过程.
- **可以**使用后面的知识点来处理问题，但请确定你是在**真的理解**后面知识点的前提下来使用，而不是机械地应用定理[2]. 同时也建议从现有知识点的角度去把问题思考出来，这对数学思维的形成是有所裨益的.

问题 1.1 设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 且 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$，证明

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \leq n\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

评注： 此即 Chebyshev 不等式，为排序不等式的推广. 排序不等式的证明方法有很多，大家可以自行查阅.

[1]举个不是很恰当的例子，如 2 是偶数这一熟知结论.

[2]例如：在使用 L'Hospital 法则来求极限的时候，请你理解 L'Hospital 法则的证明过程和原理，并且能将其与 Stolz 定理联系起来.

问题 1.2 (1) 证明 $\{\{\sqrt{n}\} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密.

(2) 证明 $\{\sin(\sqrt{n}) \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ 在 $[-1, 1]$ 中稠密.

评注： 实际上我们只需要考虑下面这个命题：

> **命题 1.1** 若实数列 $\{x_n\}$ 满足 (1) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$，(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. 则 $\{x_n - [x_n]\}$ 在区间 $[0, 1]$ 中稠密.

定理的证明留作练习，关键想法是考虑**步长**[3].

问题 1.3 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负函数，且对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，有

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \le f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

证明函数 $f(x)$ 恒为常数.

评注： 这道题的本质在于函数 $f(x)$ 的凸性，其中的非负可以改成有下界，然后再利用 $f(x)$ 的性质来构造出可以小于下界的值.

这里的 f 实际上是中点凸，而不是一般凸函数的定义. 一般来说，中点凸函数并不等同于凸函数，但是如果对中点凸函数加上连续性的条件之后，我们可以得到中点凸函数与凸函数式等价的，具体可以参考知乎文章：数学分析中的凸函数&中点凸函数[4].

问题 1.4 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，$a, \lambda \in \mathbb{R}$，$|\lambda| > 1$，证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + \lambda a_{n+1}) = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a}{1+\lambda}$.

评注： 很多同学在没有证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是收敛的情况下直接使用极限的四则运算来得出，两三行就写完了，这是不正确的. 如果想使用极限的四则运算，首先要证明运算的内容都是收敛的.

对于这道题，我们可以不妨设 $a = 0$，从而简化计算(**请思考为什么可以不妨设**).

此外还可以设 $b_n = a_n + \lambda a_{n+1}$，从而我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，然后就可以利用 b_n 反向表示 a_n，再利用 b_n 收敛于 0 这一性质来估计 a_n.

---

[3] 即 $a_{n+1} - a_n$ 的变化

[4] 这是一个超链接，如果你的阅读器不支持点击超链接的话可以直接搜索标题. 不过飞书应该是可以直接点超链接的.

问题 1.5 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1) = ab$$

评注： 我们仍然可以不妨设 $a = b = 0$，然后大幅度简化计算(请思考为什么可以不妨设).

其放缩的基本思想是分段放缩，前一部分用分母上的 n 控制，后一部分用分子上的极限来控制.

问题 1.6 函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 到 $[a,b]$ 的映射，且存在常数 $\alpha \in (0,1)$，使得对任何 $x,y \in [a,b]$，都有 $|f(x)-f(y)| \le \alpha|x-y|$，证明存在唯一的 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \xi$.

评注： 很多同学只说明了唯一性，而没有说明存在性.

这里的存在性在连续性(这里 f 满足 Lipschitz 条件)的观点下是显然的，我们可以利用介值定理来说明.

但是大家想要深刻地理解连续性还需要第六章实数理论的知识，故我们寻求一种可以用当下知识解决的方法：可以构造迭代数列来证明存在性，比如 $x_0 \in [a,b]$，$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$，然后我们来证明 $\{x_n\}$ 收敛.

问题 1.7 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，在 $x=0$ 的某邻域内有界，$a > 1, b > 1$，对任意的 $x \in (-\infty,+\infty)$，有 $f(ax) = bf(x)$，证明：$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

评注： 有些同学尝试利用海涅定理的反面，即构造一个趋于 0 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ 来说明 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. 但这是不正确的.

海涅定理的逆定理需要验证每一个趋于 0 的数列都成立，而这个一般而言在技术上与用定义证明无异，所以我们用海涅定理更多的是反证法说明不收敛.

对于这道题，我们只需要利用在邻域内有界来放缩估计利用定义证明即可.

问题 1.8 设 $a_1 \in (-1,2)$，$a_{n+1} = a_n^2 - a_n$，证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

评注： 关于这道题，我们可以画出图像来分析：

详细的内容可以在谢惠民的数学分析习题课讲义上面找到，有兴趣的同学可以去阅读，同样的方法可以处理一类的类似的题目.

1.2 第 4-8 次作业评注

问题 1.9 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数且满足

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$$

证明在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv g(x)$.

评注： 这道题有些同学默认了 f 与 g 的周期相同，这是不对的，还有些同学通过分析 T_f/T_g 是有理数还是无理数来做，这是可以的但是相对而言还是比较麻烦.

我们实际可以通过分析三个东西的极限来讨论这道题，希望同学可以体会这样取的动机，实际上我们是为了凑出 $f(x)-g(x)$，从而添加一些项再减去一些项得到答案：

$$\lim_{n\to+\infty}f(x+n(T_f+T_g))-g(x+n(T_f+T_g))=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}f(x+nT_f)-g(x+nT_f)=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}f(x+nT_g)-g(x+nT_g)=0$$

而我们注意到

$$f(x+n(T_f+T_g))-g(x+n(T_f+T_g))=f(x+nT_g)-g(x+nT_f)$$

$$f(x+nT_f)-g(x+nT_f)=f(x)-g(x+nT_f)$$
$$f(x+nT_g)-g(x+nT_g)=f(x+nT_g)-g(x)$$

从而将三个极限相加起来我们有

$$\lim_{n\to+\infty}f(x)-g(x)=0$$

从而我们得到 $f(x)=g(x)$. 希望同学可以体会，在后面的课程中类似的想法也会经常遇到，这里类似的想法并不是局限于周期性之中，而是对两个难以联系的量，在中间添加很多中间量从而一层一层联系起来.

问题 1.10 设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义且没有第二类间断点，对于任意 $(x,y)\in(a,b)$，都有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

证明 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

评注： 由于没有第二类间断点，从而每一点的单侧极限都存在，故有

$$\lim_{y\to x_0^+} f\left(\frac{x_0+y}{2}\right) \le \lim_{y\to x_0^+} \frac{1}{2}(f(x_0)+f(y))$$

即有

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0)$$

同理可以有

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$$

但是我们取 $x = 2x_0 - y$，则 $x \to x_0^+$ 时 $y \to x_0^-$，从而有

$$\lim_{x\to x_0^+} f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

即

$$2f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

从而由不等式关系我们知道

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

再由 x_0 的任意性我们得证. 这道题希望大家体会这种取某种极限来得到不同方向的不等式关系之后再利用不等式的限制得到等式的思想.

问题 1.11 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,对任意 $x \in (a,b)$,有

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = 0$$

证明: 集合 $\{x \in (a,b) \mid f$ 在点 x 处可导 $\}$ 在 (a,b) 中稠密.

评注： 我们使用反证法，假设存在区间 (c,d) 使得对任意 $x \in (c,d)$，都有 f 在 x 处导数不存在，下面我们寻找矛盾：

首先由条件式容易看出来若单侧导数存在则导数存在，这是因为如果存在任意一个单侧导数，都容易导出另一个单侧导数存在且相等，从而可导.

从而由反证法的假设，我们知道在 (c,d) 中的任意处单侧导数都不存在，特别地我们有 $\forall x\in(c,d)$，有 $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 不存在，也即存在 $\varepsilon_0>0$，$\{h_n(>0)\}\to0^+(n\to\infty)$，使得对

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|\geq\varepsilon_0$$

为了导出矛盾，我们需要一些确定的符号关系从而方便放缩，所以我们先考虑存在 $x_0\in(c,d)$ 使得 $f(x_0)$ 为最大值的情况，在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0+h_n)+f(x_0-h_n)-2f(x_0)}{h_n}\right| &= \frac{f(x_0)-f(x_0+h_n)}{h_n}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h_n)}{h_n}\\ &\geq\frac{f(x_0)-f(x_0+h_n)}{h_n}\end{aligned}$$

而由于在这种情况下有

$$\frac{f(x_0)-f(x_0+h_n)}{h_n}=\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right|\geq\varepsilon_0$$

从而我们有

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)+f(x_0-h_n)-2f(x_0)}{h_n}\right|\geq\varepsilon_0$$

令 $n\to+\infty$ 之后与题目条件矛盾，从而假设错误，所以导数存在. 于是我们证明了在 (c,d) 中存在最值的情况，但是对于 (c,d) 中没有最值的情况，我们好像就无从下手了.

但是回顾我们学过的知识点，发现 Lagrange 定理的证明方法可以为我们提供一条路去把这个最值构造出来：

$$g(x)=f(x)-\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$$

从而我们发现构造出来的 g 满足 $g(c)=g(d)$，又知道 g 是连续的，从而我们知道最值肯定可以在 (c,d) 中取到，又由于

$$\begin{aligned}&\quad g(x+h)+g(x-h)-2g(x)\\ &= f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\\ &\quad+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}((x+h-c)+(x-h-c)-2(x-c))\\ &= f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\end{aligned}$$

从而我们知道

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)+g(x-h)-2g(x)}{h}=0$$

由前面的讨论知道 g 在最值点 x_0 处可导，又显然 $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$ 可导，从而我们知道 f 在 x_0 处可导，从而反证的假设错误，故结论成立.

问题 1.12 $a>0$，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^x-1}{(a-1)x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

评注： 这道题本身并不难，但是有不少同学在做的过程中想当然了，没有注意到当 a 的范围不同的时候答案会有所区别，原因在于 $a<1$ 与 $a\geq 1$ 在 $x\to+\infty$ 的时候 a^x 的渐进行为是不一样的，这提示我们以后在遇到含参数的问题的时候需要考虑参数的取值对于结果的影响.

问题 1.13 在作业中我们讨论了函数 $f=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的可导性，那么自然就会有一个反方向的问题，即：求 α 的取值范围，使得 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数.

评注： 这也许需要一些积分学的背景去考虑，但是实际上还是导数的想法，**本题较难，略有超纲，不作要求**.

一个直接的想法是考虑积分式，然后处理积分问题，如利用分部积分公式我们可以考虑

$$\int x^\alpha\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int x^{\alpha+2}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x}-\int(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

从而这诱导我们去考虑函数 $H(x)=\begin{cases}x^{\alpha+2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，然后考虑 $H(x)$ 的导数：

当 $\alpha>-1$ 的时候，我们有 $H(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导数为 0，从而我们知道函数

$$H'(x)=\begin{cases}(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\dfrac{1}{x}+x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

存在原函数.

考虑 $g(x)=\begin{cases}(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，容易知道 $g(x)$ 连续，从而有原函数 $G(x)$.

再由

$$H'(x)=g(x)+f(x)=G'(x)+f(x)$$

知道 $f(x)=H'(x)-G'(x)$，故 $f(x)$ 有原函数 $H(x)-G(x)$.

当 $\alpha\in(-2,-1]$ 时，我们考虑函数 $T(x)=\begin{cases}x^{\alpha+3}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，我们容易知道 $T(x)$ 在 $x=0$ 处可导，再结合

$$\left(x^{\alpha+3}\sin\frac{1}{x}\right)'=(\alpha+3)x^{\alpha+2}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}$$

同上面证明过程可以知道函数 $g(x)=\begin{cases}(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数 $G(x)$，从而我们考虑

$$H(x)=\begin{cases}x^{\alpha+2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

假设 $f(x)$ 此时有原函数 $F(x)$，知道 $H(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但是当 $x>0$ 时，我们有

$$H'(x)=(\alpha+2)x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}+x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=G'(x)+F'(x)$$

于是当 $x>0$ 时，有 $H(x)=G(x)+F(x)+C_1$.

令 $\varphi(x)=g(x)+f(x)$，我们知道 $\varphi(x)$ 有原函数 $\Phi(x)$，其中我们知道 $\Phi(x)=G(x)+F(x)+C_2=H(x)+C$，其中 $x>0$，又因为 $\Phi(x)$ 与 $H(x)$ 均可导，故均连续，从而取趋于 0 的极限知道 $\Phi(0)=H(0)+C=C$.

因为 $\Phi'(0)=\varphi(0)=0$，但是我们又有

$$\Phi'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)+C-C}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}$$

故矛盾，从而假设错误.

对于 $\alpha \in (-3,-2]$ 的情况，同理假设 $f(x)$ 存在原函数，从而知道 $xf(x)$ 存在原函数，也就是 $\alpha \in (-2,-1]$ 时 $f(x)$ 存在原函数，从而矛盾，以此类推可以证明 $\alpha \leq -1$ 时均不存在原函数.

故答案为 $\alpha > -1$.

问题 1.14 已知 $f(x) = \ln(x^{2n}+1)$，证明 $f^{(2n)}(-1) = 0$.

评注： 这道题需要用到对于含复数的函数求导，其严格性需要等大家学习到复变函数之后才能证明，但是在这里我们暂且接受下来，当成一个技巧来使用，但仍有少许需要注意的地方.

不少同学直接设 $w_1, \cdots, w_{2n}$ 是 $x^{2n}+1=0$ 的根，然后写

$$(\ln(x^{2n}+1))' = \left(\sum_{k=1}^{2n} \ln(x-w_k)\right)' = \sum_{k=1}^{2n} \ln(x-w_k)' = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x-w_k}$$

然而这是不可以直接得到的，因为 $ln(z)$ 在复平面上是一个多值函数[5]，处理他的恒等式是会出现一些问题的，为了避免这个问题我们先对 $f(x)$ 求一次导数，即

$$f'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}+1}$$

这样就变成了一个单值函数，但是我们发现 $\dfrac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}+1}$ 与 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x-w_k}$ 长得不一样，而显然后者更方便计算，所以我们就尝试去证明

$$\frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x-w_k}$$

而这需要一些小小的trick，我们可以考虑

$$P(z) = z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{2n}(z-w_k)$$

从而我们由求导法则[6]会有

$$P'(z) = \sum_{i=1}^{2n} \prod_{k\neq i}(z-w_k)$$

[5]因为 $z = re^{\theta}$，可能有很多 θ 对应同一个 z.

[6]$n=2$ 是即 $((x-x_1)(x-x_2))' = (x-x_1)+(x-x_2)$

从而我们注意到

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x-w_k}=\frac{P'(z)}{P(z)}$$

但另一方面我们有 $P'(z)=(z^{2n}+1)'=2nz^{2n-1}$，所以

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x-w_k}=\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}+1}$$

从而 $f'(x)=\dfrac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-w_k}$.

上式两边求 $2n-1$ 阶导数,得 $f^{(2n)}(x)=-(2n-1)!\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-w_k)^{2n}}$,

从而

$$f^{(2n)}(-1)=-(2n-1)!\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+w_k)^{2n}}$$

又

$$1+w_k=2\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}\cdot\left[\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right]$$

故

$$\begin{aligned}(1+w_k)^{2n}&=2^{2n}\cos^{2n}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\cdot\left[\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\right]\\&=2^{2n}\cos^{2n}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\cdot\mathrm{i}(-1)^{k-1}\end{aligned}$$

于是

$$f^{(2n)}(-1)=\mathrm{i}\cdot\frac{(2n-1)!}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\cos^{2n}\frac{(2k-1)\pi}{4n}}$$

结合 $f^{(2n)}(-1)$ 是一个实数就得到 $f^{(2n)}(-1)=0$.

练习 1.1 利用上面提到的小trick，我们还可以处理一些题目：已知 $w_1,\cdots,w_n$ 是 $z^n=1$ 的 n 个复根，计算

$$\sum_{1\le i\ne j\le n}\frac{1}{(7-w_i)(7-w_j)}$$

Hint: 设 $P(z)=z^n-1$，考虑 $P''(z)$.

问题 1.15 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导， c 是(a,b)中一点，满足 c 不是 $f'(x)$ 的极值点，且存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in \mathring{B}_\delta(c)\cap(a,b)$，有 $f'(x)\neq f'(c)$. 求证: 存在 $s\in(a,c)$ 和 $t\in(c,b)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t}$.

评注： 这是一道典型的利用达布定理来处理的问题：由题设，我们知道在一个小的空心邻域内任意 $f'(x)\neq f'(c)$，从而我们知道对于任意的 $x\in(c,c+\delta)$，$f'(x)-f'(c)$ 符号不变，否则由达布定理我们知道存在 $\xi\in(c,c+\delta)$ 使得 $f'(\xi)=f'(c)$，同理在 $(c-\delta,c)$ 内符号也不变.

再由 c 不是 f' 的极值点，我们知道两侧的符号不同，我们不妨设对任意 $x\in(c-\delta,c)$，$f'(x)<f'(c)$，对任意 $x\in(c,c+\delta)$，$f'(x)>f'(c)$.

基础的信息我们已经处理好了，接下来我们尝试去寻找满足条件的 s 与 t，构造函数

$$g(s,t)=f(s)-f(t)-f'(c)(s-t),\quad s\in(c-\delta,c),t\in(c,c+\delta)$$

则我们知道条件等价于寻找满足条件的 s,t 使得 $g(s,t)=0$.

首先我们明确 $g(s,t)$ 的一些性质，看起来它是一个二元函数，但实际上在我们固定 s 或者 t 的时候，他本质上就是一个一元函数.

我们可以令 $t=t_0$，则我们知道

$$\varphi_{t_0}(s)=g(s,t_0)=f(s)-f'(c)s+f'(c)t_0-f(t_0)$$

我们可以计算得到

$$\varphi'_{t_0}(s)=f'(s)-f'(c)<0$$

从而我们知道对于任意的 $s\in(c-\delta,c)$，有 $\varphi_{t_0}(s)>\varphi_{t_0}(c)$.

同理我们知道对于任意的 $t\in(c,c+\delta)$，有 $\psi_{s_0}(t)=-f(t)+f'(c)t-f'(c)s_0+f(s_0)$，从而

$$\psi'_{s_0}(t)=-f'(t)+f'(c)<0$$

此时我们大概可以建立起一个图像去观察当 s 与 t 变化时 $g(s,t)$ 如何变化，无论是固定 s 和 t 中的哪一个，另外一个变大时 $g(s,t)$ 都会变小.

我们注意到 $g(c,c)=0$，所以由单调性我们知道以下两件事情：

(1) 对任意 $s<c$，有 $g(s,c)>0$.

(2) 对任意 $t>c$，有 $g(c,t)<0$.

从而我们知道存在 $t_1 > c$，使得 $\varphi_{t_1}(c) = g(c, t_1) < 0$，由于 $\varphi_{t_1}(s)$ 的连续性，我们知道存在 $\varepsilon > 0$，使得 $s \in (c-\varepsilon, c)$ 时 $\varphi_{t_1}(s) < 0$，特别地，我们取 $s_1 \in (c-\varepsilon, c)$，使得 $\varphi_{t_1}(s_1) < 0$，但是我们注意到 $\varphi_c(s_1) > \varphi_c(c) = g(c,c) = 0$，所以有

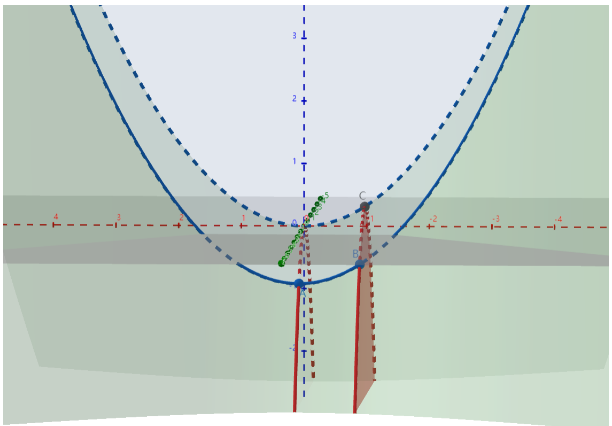
$$\varphi_c(s_1) > 0 > \varphi_{t_1}(s_1) \quad \text{即} \quad g(s_1, c) > 0 > g(s_1, t_1)$$

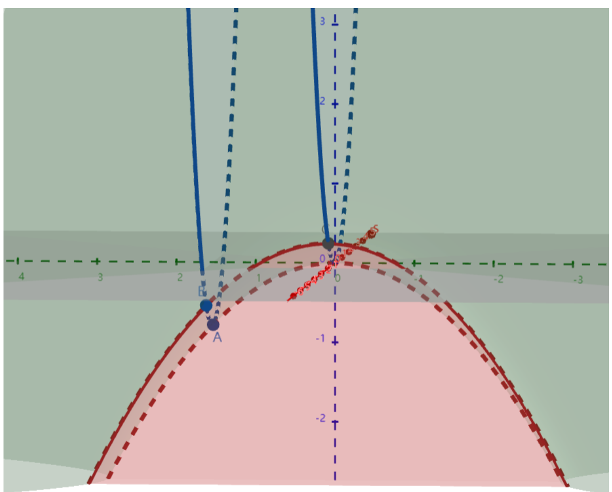
所以我们知道 $\psi_{s_1}(c) > 0 > \psi_{s_1}(t_1)$，从而由 $\psi_{s_1}(t)$ 的连续性我们知道存在 $t \in (c, t_1)$ 使得

$$g(s_1, t) = \psi_{s_1}(t) = 0$$

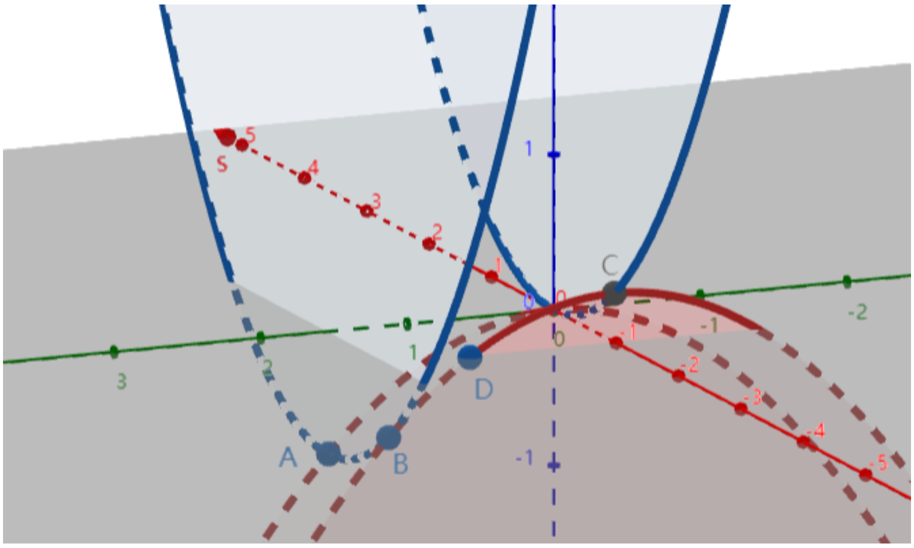
注 1.1 上面啰啰嗦嗦写了一大堆，其实是把二元函数的一些东西用一元函数写了出来，但本质上还是考察大家对于 s, t 变化时 $g(s,t)$ 如何变化的掌握，如果你有了“无论是固定 s 和 t 中的哪一个，另外一个变大时 $g(s,t)$ 都会变小”的观察，这道题就不是那么困难了.

另一个需要大家体会的点是这个东西大概长什么样子，这个函数的性态到底是如何的，我这里给出几个图像给大家参考：





其中蓝色的曲线代表 $\varphi_{t_0}(s)$，红色的曲线代表 $\psi_{s_0}(t)$，上面所描述的过程可以见下图：



其中 A 点代表 $(c, t_1, g(c, t_1) < 0)$，B 点代表 $(s_1, t_1, g(s_1, t_1) < 0)$，$C$ 点代表 $(s_1, c, g(s_1, c) > 0)$，图中的 D 点就是我们最终要寻找的 $(s_1, t, g(s_1, t) = 0)$.

请大家好好体会这个过程，建立起对函数的直观.

问题 1.16 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上可微的下凸函数，$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$，求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{2x} = 1$.

评注： 这道题**切不可直接使用洛必达法则！**请注意洛必达法则的使用方向. 这题其实是一种反向的洛必达问题，需要大家分析函数的特征来处理.

首先注意到 f 是可微的下凸函数，所以 f 的特征可以用 $f'(x)$ 是单调增函数来刻画. 除此之外我们还要考虑导数是如何产生的，回想洛必达法则的证明我们可以猜测导数产生自中值定理，再联系到导数的单调性，证明就不难想到了.

对于 $a > 1$，由 Cauchy 中值定理注意到

$$\frac{f(ax) - f(x)}{(ax)^2 - x^2} = \frac{f'(\xi_x)}{2\xi_x}$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax) - f(x)}{(ax)^2 - x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(ax)}{(ax)^2} - \frac{1}{a^2}\frac{f(x)}{x^2}}{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{1 - \frac{1}{a^2}}{1 - \frac{1}{a^2}} = 1$$

再结合单调性和 $\xi_x \in (x, ax)$，有

$$\frac{f'(x)}{2ax} \le \frac{f'(\xi_x)}{2\xi_x} \le \frac{f'(ax)}{2x}$$

从而我们知道当 x 充分大的时候，有 $\frac{f'(\xi_x)}{2\xi_x}$ 被 1 控制住，即有

$$\frac{f'(x)}{2x} \le a\frac{f'(\xi_x)}{2\xi_x} \le a(1+\varepsilon) = 1 + (a\varepsilon + (a-1))$$

反方向还有

$$\frac{f'(x)}{2x} \ge \frac{1}{a}\frac{f'(\xi_{x/a})}{2\xi_{x/a}} \ge \frac{1+\varepsilon}{a} = 1 + \frac{1+\varepsilon-a}{a}$$

而两边的余项均在 $a \to 1^+$ 的时候变为 ε，我们在此基础上补充一些细节即可完成证明.

注 1.2 了解上下极限的同学可以尝试使用上下极限来处理，要方便得多.

问题 1.17 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，在(a,b)中两次可导，$f(a) = f(b) = 0$，对任意 $x \in (a,b)$，有 $f(x) + f''(x) \ge 0$，且存在 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f(x_0) > 0$. 证明: $b - a \ge \pi$.

评注： 这道题的难点在于想清楚 π 是怎么来的，看到 π 我们很容易联想到三角函数，再注意到 $A\sin(x+\varphi) + (A\sin(x+\varphi))'' = 0$，我们有理由认识到这题必然和三角函数有所关系.

我们可以不妨设 $a = 0$(想一想为什么可以这样设)，从而有 $f(0) = 0$，我们下面要证明的就是 $b \ge \pi$.

由前面的分析，我们尝试去把 f 与 $A\sin(x)(A>0)$ 联系起来，由于 $A\sin(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上都大于0，从而如果我们能证明 $f(x) \ge A\sin(x)$，我们自然就证明了 $b \ge \pi$，但是经过尝试会发现这样子不好做，可以利用的信息太少了，所以我们可以转向反证法来处理这个问题：假设 $b < \pi$，我们会有什么？

我们大体上还是要利用三角函数来拟合 f，为了某些目的(接下来你会看到)，令 $\varepsilon > 0$ 满足 $b + 2\varepsilon < \pi$，我们需要把 f 延拓到 $[-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 之上，即 f 在 $[-\varepsilon, 0] \cup [b, b+\varepsilon]$ 上全部取 0.

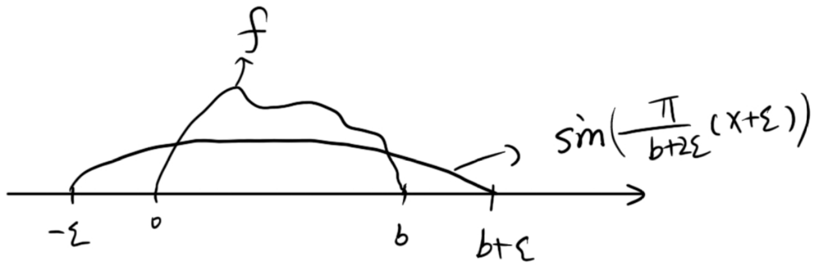
我们这次构造这样的三角函数，设 $g(x) = A\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon))$，其中 $A > 0$，我们知道 $g(-\varepsilon) = g(b+\varepsilon) = 0$，另外注意到

$$g(x) + g''(x) = A(1 - \frac{\pi^2}{(b+2\varepsilon)^2})\sin(\frac{\pi}{b+\varepsilon}(x+\varepsilon)) < 0$$

接下来我们寻求合适的 A 使得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有确定的大小关系，记集合

$$T := \{A > 0 \mid f(x) - A\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon))\text{在 } [-\varepsilon, b+\varepsilon] \text{ 有零点}\}$$

实际上就是这样子的图像：



由于函数 $\dfrac{f}{\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon))}$ 在闭区间 $[0,b]$ 上连续，从而一定存在最大值，我们记为 M，我们可以说明 $M = \max T$.

设 ξ_0 是 $f - M\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon))$ 的零点，我们可以说明 $\xi_0 \in (a,b)$，从而我们通过细致的分析可以知道一些事情(请大家自己思考这是为什么)：

$$\left(f - M\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon))\right)''\Bigg|_{x=\xi_0} < 0$$

记 $g_M(x) = M\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon))$，我们由 M 的取法知道在 $[0,b]$ 上 $f(x) \le g_M(x)$，而上面的式子告诉我们：

$$f''(\xi_0) - g_M''(\xi_0) = f''(\xi_0) + M\frac{\pi^2}{(b+2\varepsilon)^2}\sin(\frac{\pi}{b+2\varepsilon}(x+\varepsilon)) < 0$$

所以有

$$f(\xi_0) + f''(\xi_0) \le g_M(\xi_0) + g_M''(\xi_0) < 0$$

与条件矛盾，从而知道我们的假设错误，即 $b \ge \pi$.

1.3 第 9-12 次作业评注

问题 1.18 f 在 $[a,b]$ 上两次可导，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}\left(a-b\right)^2 f''(\xi)$$

Appendix A

番外篇

A.1 数学分析 1 拯救计划

A.1.1 考察大家有没有认真看书

先回顾一下曾经考过的题：

1. (2021级数分1第一次月考第2题)叙述并证明复合函数的极限法则.

2. (2022级数分1第一次月考第5题)对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$，叙述并证明柯西收敛原理.

那么类似的，可以考察大家：

(1) 对于极限 $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)=A$，叙述并证明归结原则(即海涅定理).

(2) 对于极限 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A$，叙述并证明归结原则.

(3) 对于极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，叙述并证明柯西收敛原理.

(4) 叙述并证明复合函数的连续性.

这一部分我不会在课上讲，请大家自己看书复习.

A.1.2 极限篇

♢ 用定义证明

这一部分我也不会在课上讲，请大家结合书本自行复习.

问题 A.1 用定义证明以下极限：

- (2022级数分1第一次月考) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2022}{n^2-n+1}=5.$
- (2021级数分1第一次月考) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}, 0<a<1$
- (2020级数分1第一次月考) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$

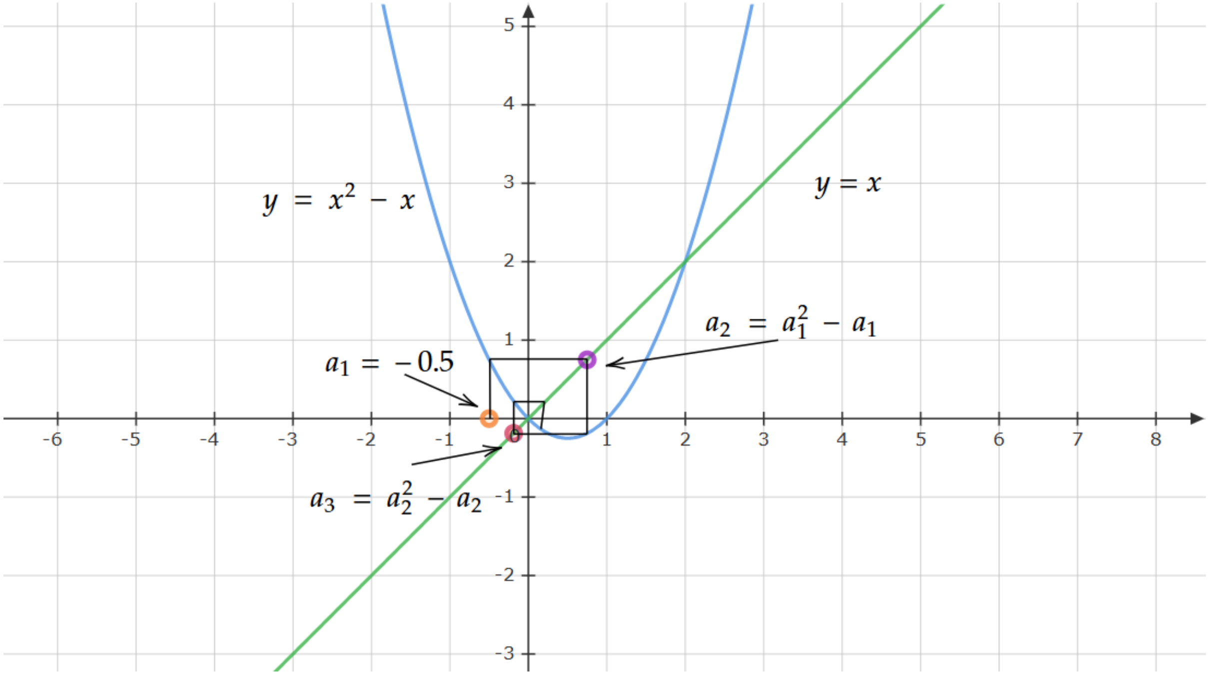
评注： 这种题目一般都是在试卷第一题，主要考察对 $\varepsilon-\delta$ 语言的理解，题目本身几乎没有难度，请学习书上书写方式，认真书写过程，用定义证明.

大家在做题的时候要注意是函数极限还是数列极限，注意极限是趋于 ∞ 还是带符号的 $+/-\infty$，请仔细阅读题目.

◇ 迭代数列的极限

问题 A.2 设 $a_1 \in (-1, 2)$，$a_{n+1} = a_n^2 - a_n$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

评注： 关于这道题，我们可以画出图像来分析：



详细的内容可以在谢惠民的数学分析习题课讲义上面找到，有兴趣的同学可以去阅读，同样的方法可以处理一类的类似的题目.

问题 A.3 设 $x_0 = 1, x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

问题 A.4 设 $a > 0, b > 0, a_1 = \dfrac{a + \frac{b}{a}}{2}$，一般的，$a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{b}{a_n}}{2}$. 证明数列$\{a_n\}$收敛并求出其极限.

问题 A.5 设 $a \in \mathbb{R}$，令 $x_1 = a$，$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n = 1, 2, \cdots$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $a \in [0, 1]$.

◇ 带有平均值性质的极限

命题 A.1 (Cauchy命题) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$$

笔记 A.1 思想是分段估计. 我们在总体上知道当 n 足够大的时候，x_n 就会足够靠近 a，从而当总体数量足够多的时候，均值自然也是靠近 a 的，这提醒我们通过分段估计的方法进行处理.

值得注意的是我们并不能得到Cauchy命题的反命题，但是加上某些限制条件之后我们就可以得到.

问题 A.6 已知数列 $\{x_n\}$ 单调，且满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$，证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

同样用相同思想估计的题目还有很多，这里选取一些：

问题 A.7 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1)=ab$$

评注： 我们仍然可以不妨设 $a=b=0$，然后大幅度简化计算(请思考为什么可以不妨设). 其放缩的基本思想是分段放缩，前一部分用分母上的 n 控制，后一部分用分子上的极限来控制.

除了分段放缩之外，我们仍然有一些基础的和式变换可以用到题目当中.

问题 A.8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

评注： 考虑令 $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$，则我们知道 $\{b_n\}$ 收敛，从而可以对 b_n 进行操作.

◇ **与Stolz定理相关的一些问题**

Stolz定理的证明我不会在课堂上去讲，大家感兴趣的可以课下自行查阅证明.

定理 A.1 (Stolz定理:使用的时候一定要注意条件!!!!!!)

- 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个数列,满足下列条件:

  (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (其中 $A\in\mathbb{R}$ 或 $A=+\infty$ 或 $A=-\infty$),

  (2) 数列 $\{y_n\}$ (在 n 充分大的时候)严格递增且趋向 $+\infty$,

  则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$.

- 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个数列,满足下列条件:

  (1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,

  (2) 数列 $\{y_n\}$ 严格递减,

  (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (其中 $A\in\mathbb{R}$ 或 $A=+\infty$ 或 $A=-\infty$),

  则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$.

施笃兹定理有一些常用的推论. 例如,

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$;

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=a$;

(3) 设 $x_n>0, n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$;

(4) 设 $x_n>0, n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

下面我们来看一些(**套路化的**)题目：

问题 A.9 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,\cdots)$.证明： $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

问题 A.10 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2)=1$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}x_n=1$.

问题 A.11 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

问题 A.12 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}, n\in\mathbb{N}^+$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1.$

下面是一些**看起来能使用Stolz定理**的题目，这提醒我们想使用Stolz定理的时候一定要验证使用条件!!!!

问题 A.13 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

评注： 这题不能直接使用 *Stolz* 定理，因为我们无法得到 $\{a_n\}$ 是一个收敛的数列. 对于 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，我们可以构造出一个反例使得 $\{a_n\}$ 发散,即取

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n\log n}, a_1=1$$

从而

$$a_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$$

为发散数列[1].

问题 A.14 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

问题 A.15 设 $\{x_n\}$ 是一个正数数列，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$，数列 $\left\{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\}$

证明，对于任意 $p>1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}=0$$

[1]这个东西的发散性需要一些级数的方法来处理，我们到时候看时间再考虑讲不讲.

◇ **函数极限**

问题 A.16 一些函数极限的计算.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\quad (m,n\in\mathbb{N}^*)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}]=0\quad(0<\alpha<1)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(x\sin\dfrac{1}{x})\ln x$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xe^{x\cos x}-\sin x}{\ln(1+x)\ln(\sin x+\cos x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\arctan x-\pi}{x-1}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+\sin^2 x)-x}{\ln(e^{2x}+\arcsin^2 x)-2x}$

问题 A.17 设 $x_0\in\mathbb{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x), & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$，证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在当且仅当 $x_0\in\mathbb{Z}$.

问题 A.18 设函数 $f(x)$ 是从 $[a,b]$ 到 $[a,b]$ 的映射，且存在常数 $\alpha\in(0,1)$，使得对任何 $x,y\in[a,b]$，都有 $|f(x)-f(y)|\le\alpha|x-y|$，证明存在唯一的 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$.

问题 A.19 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 的周期函数，证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

问题 A.20 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调且恒大于0，并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，证明对任意 $a>0$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

◇ 杂题(其实是我懒得分类了)

这一部分我应该不会在课上讲，大家感兴趣的可以自己做一做.

问题 A.21 已知 $a, b > 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$.

更一般的，对于 $a_1, a_2, \cdots, a_p > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p}\sqrt[n]{a_k}}{p}\right)^n = \sqrt[p]{\prod\limits_{k=1}^{p}a_k}$.

问题 A.22 设 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，$C_n = \sum\limits_{k=1}^{n}c_k$，满足对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，有 $a_k \le b_k \le c_k$.证明：若 A_n, C_n 收敛，证明 B_n 也收敛.

问题 A.23 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+v)}$(其中 v 为正整数).

问题 A.24 证明：当 $p > 1$ 时，数列 $\{S_n\}$ 收敛.其中 $S_n = 1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$.

问题 A.25 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义，且对于任何 $\lambda \in (0,1)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\lambda) = 0$，问是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

问题 A.26 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a_k}{2^n} = a$.

问题 A.27 设数列 $\{x_n\}$ 有上界且 $x_{n+1} \ge x_n - \dfrac{1}{n^2}, n = 1, 2, \cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

问题 A.28 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} = e$.(此处 e 的定义为 $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$)

A.2 连续篇

问题 A.29 设 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

问题 A.30 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$，求证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

注 A.1 把上面的题目进行推广，我们可以有下面这个定理，定理的证明留作练习.

定理 A.2 (函数形式的Stolz定理)

- 设常数 $T>0$,若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上满足

  (1) 对任意 $x\in[a,+\infty)$,有 $g(x+T)>g(x)$,

  (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,

  (3) $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的每个有界子区间上有界,

  (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$ (其中 $A\in\mathbb{R}$ 或 $A=+\infty$ 或 $A=-\infty$),

  则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

- 设常数 $T>0$,若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上满足

  (1) 对任意 $x\in[a,+\infty)$,有 $0<g(x+T)<g(x)$,

  (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

  (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$ (其中 $A\in\mathbb{R}$ 或 $A=+\infty$ 或 $A=-\infty$),

  则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

问题 A.31 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，求证：对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，都存在 $x_n\in[0,1-\dfrac{1}{n}]$，使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

笔记 A.2 实际上这个结论只对 $\frac{1}{n}$ 成立，不能改成 $\frac{1}{n}$ 以外的 $(0,1)$ 中的数，下面给出一种反例：设 $a \in (0,1)$ 且 $a \neq \frac{1}{n}, n = 2,3,\cdots$. 令

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - x\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

则 $f(0) = 0 = f(1)$，但不存在 $x \in [0,1]$，使得 $f(x) = f(x+a)$. 据此可以改编出一个更加有思考难度但本质相同的题：求所有的实数 $\delta \in [0,1]$，使得对所有的满足 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0) = f(1)$ 的函数 $f(x)$，存在一个 $x_0 \in [0, 1-\delta]$，使得 $f(x_0) = f(x_0+\delta)$.

问题 A.32 设 n 是一个自然数，$f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续且 $f(0) = f(n)$. 证明至少有 n 对不同的 (x,y)，使得 $x-y$ 为正整数且 $f(x) = f(y)$.

问题 A.33 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$. 若对任意实数 x 和 y，$x-y$ 是有理数当且仅当 $f(x)-f(y)$ 是有理数，证明：对任意实数 x，都有 $f(x) = x$.

问题 A.34 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$，它在有理数点上的取值为无理数，在无理数点上的取值为有理数？

问题 A.35 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且有界，$c > 0$. 证明存在数列 $\{x_n\}$ 趋于 $+\infty$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n+c) - f(x_n)] = 0$.

问题 A.36 设 $f(x)$ 在区间 I 上的间断点都是可去间断点，令 $g(x) = \lim\limits_{t\to x} f(t)$, $x \in I$. 证明 $g(x)$ 在区间 I 上连续.

问题 A.37 求证：存在 $[0,+\infty)$ 上不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$，使得对于任意 $x \geq 0$，都有 $f(4x) = f(2x) + f(x)$.

请注意，上面的题目没有对难度排序！

请注意，仍有一些知识点我没有覆盖到，比如间断点的一些问题，请仔细看书，不要疏漏某些知识点！

Appendix B

好多题目呀

问题 B.1 判断 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[\sqrt{n}]}}$ 的收敛性.

解: 由于 $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，我们只需要考虑

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[\sqrt{n}]}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]+1}}{n+\sqrt{n}\cdot(-1)^{[\sqrt{n}]}}\triangleq S$$

我们有

$$S=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^{n+k+1}}{n+\sqrt{n}\cdot(-1)^k}$$

记 S_N 为前 N 项和，我们有

$$|S_N|=\left|\sum_{4\le k^2\le N}\sum_{n=k^2}^{\min\{(k+1)^2-1,N\}}\frac{(-1)^{n+k+1}}{n+\sqrt{n}\cdot(-1)^k}\right|\le\sum_{4\le k^2\le N}\left|\sum_{n=k^2}^{\min\{(k+1)^2-1,N\}}\frac{(-1)^{n+k+1}}{n+\sqrt{n}\cdot(-1)^k}\right|$$

而当 k 是定值的时候，$\displaystyle\frac{(-1)^{n+k+1}}{n+\sqrt{n}\cdot(-1)^k}$ 形成了一个绝对值递减的交错数列，从而我们知道

$$\left|\sum_{n=k^2}^{\min\{(k+1)^2-1,N\}}\frac{(-1)^{n+k+1}}{n+\sqrt{n}\cdot(-1)^k}\right|\le\left|\frac{1}{k^2-k}\right|$$

所以我们有

$$|S_N|\le\sum_{4\le k^2\le N}\frac{1}{k^2-k}$$

通过相似的办法，我们可以有对于充分大的 $N_1 < N_2$，有

$$\begin{aligned}
|S_{N_2} - S_{N_1}| &= \left|\sum_{k^2 \le N_2} \sum_{n=\max\{k^2, N_1+1\}}^{\min\{(k+1)^2-1, N_2\}} \frac{(-1)^{n+k+1}}{n + \sqrt{n} \cdot (-1)^k}\right| \\
&\le \sum_{\frac{N_1}{2} \le k^2 \le N_2} \frac{1}{k^2 - k} \to 0 (N_1 \to +\infty)
\end{aligned}$$

$\square$