广义积分学习笔记

杨毅涵

October 21, 2024

南開大學
Nankai University

Contents

Chapter 1

一元情形的广义积分

1.1 无限区间上的广义积分

笔记 1.1 定积分中的一些基本内容都可以搬过来：

- 满足线性运算.
- 满足积分域的加减.
- 可以使用分部积分公式.
- 可以使用微积分基本公式.

收敛的广义积分计算与定积分没有什么区别.

定理 1.1 (Cauchy 收敛原理) 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon > 0$，都存在 $M > a$，使得当 $A > A' > M$ 时，有

$$\left| \int_A^{A\prime} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

对于非负函数的广义积分的收敛性，讨论是类似于正项级数的，基本思想仍旧是比较判别法. 但相比于正项级数繁多的判别法(如达朗贝尔判别法，Rabbe 判别法，Gauss 判别法等)，积分的比较判别法基本上是基于比较 $f(x)$ 与

$$\frac{1}{x^{p_1}(\ln x)^{p_2}(\ln\ln x)^{p_3}\cdots} \quad \text{或} \quad e^{g(x)}$$

进行判断. 更进一步的，我们只需要对于 x 充分大的情况进行判断即可.

定理 1.2 对于任何 $A > a$，函数 $f(x), g(x)$ 都在 $[a, A]$ 上可积，且存在 $b \geq a$，使得 $g(x) \geq f(x) \geq 0 (\forall x > b)$，那么有

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

注 1.1 同理我们可以有相关 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ 的相关判别法，结论类似正项级数的比值比较判别法.

将 $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$ 作为比较函数，我们可以得到：

定理 1.3 (Cauchy 判别法)
(1) 若存在 $p > 1$ 和 $C > 0$，使得存在 $b \geq a$，使得对任意的 $x \geq b$，有 $0 \leq f(x) \leq \dfrac{C}{x^p}$，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
(2) 若存在 $0 < p \leq 1$ 和 $C > 0$，有 $0 \leq \dfrac{C}{x^p} \leq f(x)$，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 1.2 我们一般常常使用阶的估计法来处理相关问题.

当我们处理变号积分的时候，就相当于处理变号级数问题，但是相较于变号级数，我们并没有积分的 Abel 变换与积分的 Abel 不等式，所以我们需要寻求另外一种办法去处理形如

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

的积分的估计问题.

考虑级数中建立的 Abel 不等式：a_n 单调，$|sum_{i=1}^k b_i|$ 有界，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq (|a_n| + |a_n - a_1|)M$$

所以我们类比于级数的方法，假设 $f(x)$ 是单调函数，在处理一般情况之前，我们先处理一些函数非常好的情况：

Special Case： f 单调且 $f \in C^1([a,+\infty))$，g 在 $[a,+\infty)$ 广义可积，令

$$G(x) = \int_c^x g(t)\mathrm{d}t$$

则有[1]

$$\int_c^d f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)G(x)|_c^d - \int_c^d f'(x)G(x)\mathrm{d}x$$

我们知道 $G(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时收敛，从而对任意的 $\varepsilon > 0, \forall M > 0, \forall A, B > M$，有

$$\left|\int_B^A g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

在这里取 $c = B$，有 $G(x) = \displaystyle\int_B^x g(x)\mathrm{d}x$，有 $B < t < A$ 的时候有 $|G(t)| \leq \varepsilon$，从而有

$$\begin{aligned}\left|\int_B^A f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|f(x)G(x)|_A^B - \int_A^B f'(x)G(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \varepsilon\left(|f(c)| + |f(d)|\right) + \varepsilon\int_A^B |f'(x)|\mathrm{d}x \leq 2\varepsilon\left(|f(c)| + |f(d)|\right)\end{aligned}$$

从而由 Cauchy 收敛原理我们知道 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在.

但是对于一般的可积函数 $f(x), g(x)$，我们无法应用上面的办法，只能寻找其他的路子，这个时候 Riemann-Stieljes 积分[2]为我们找到了这条路，用黎曼积分的语言来描述，即**积分第二中值定理**.

下面我们简单介绍积分第二中值定理[3].

在介绍积分第二中值定理之前，我们先证明一个引理：

---

[1]注意这里并没有说 $G(x)$ 可微，即 G 不一定可导，所以不能直接按分部积分公式理解，我们在证明这个式子的时候需要用连续函数去逼近 g，从而证明这个式子. 下面给出一些关键之处：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h \in C([a,b]), \text{s.t.}, \int_a^b |h(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

我们再令 $H(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$，然后估计三个部分的差距证明趋于 0 即可.

[2]黎曼-斯蒂尔杰斯积分，详细内容可以参见菲赫金哥尔茨的微积分学教程.

[3]有关于积分第二中值定理的内容摘抄自菲赫金哥尔茨的微积分学教程.

引理 1.1 对于区间 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$,$g(x)$ 以及分割 $T=\{x_i\}$，有：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta T\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 由于：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又设 $|g(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 M，$f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅记为 ω_i，从而有：

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\mathrm{d}x\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i)||g(x)|\mathrm{d}x\le M\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

故有：$\lim\limits_{\Delta T\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\mathrm{d}x=0$，也即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta T\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x$$

□

定理 1.4 (积分第二中值定理 1) 非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 引入函数 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，令 $\sigma=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\mathrm{d}x$，则有：

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)[G(x_{i+1})-G(x_i)]$$

由 Abel 变换，我们有：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n-1}G(x_i)[f(x_{i-1})-f(x_i)]+f(a)G(a)+G(b)f(x_{n-1})$$

由于 $G(a)=0$，而 $f(x_{i-1})-f(x_i)$ 与 $f(x_{n-1})$ 由条件均非负，从而设 $G(x)$ 在区间上的最大值最小值分别为 M,m，有：

$$mf(a)=\sum_{i=1}^{n-1}m(f(x_{i-1})-f(x_i))+mf(x_{n-1})\le\sigma$$

$$\le\sum_{i=1}^{n-1}M(f(x_{i-1})-f(x_i))+Mf(x_{n-1})=Mf(a)$$

从而有

$$mf(a)\le\sigma\le Mf(a)$$

而由于 $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\Delta T\to0}\sigma$，有 $mf(a)\le I\le Mf(a)$，从而存在实数 $\mu\in[m,M]$ 使得 $I=\mu f(a)$

由于 $G(x)$ 的连续性，最终得到存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $G(\xi)=\mu$，也即：

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$$

□

同理我们可以得到下面的定理[4]：

定理 1.5 (积分第二中值定理 2) 非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

而当我们只保留单调性但不要求 $f(x)$ 的非负性，我们就会得到下面这个结果，也即积分第二中值定理.

[4]上面的两个公式常被称作 **O.Bonnet** 公式.

定理 1.6 (积分第二中值定理) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 不妨设 $f(x)$ 是单调递减的，从而有 $f(x)-f(b)\geq 0$ ，从而对 $f(x)-f(b)$ 使用 O.Bonnet 公式 1，有：

$$\int_a^b [f(x)-f(b)]g(x)\mathrm{d}x = [f(a)-f(b)]\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$$

从而得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x + f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x - f(b)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$$

也即：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

从而积分第二定理得证. □

下面我们可以给出积分第二中值定理的一个更一般的形式，由于改变有限个点的函数值不影响可积性与积分的值，从而我们可以用满足条件的两个数 A,B：

$$A\geq f(a+0) \text{ 与 } B\leq f(b-0)\text{ , } f(x) \text{ 单调递减;}$$
$$A\leq f(a+0) \text{ 与 } B\geq f(b-0)\text{ , } f(x) \text{ 单调递增.}$$

代替 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的值，这样 $f(x)$ 的单调性也不会发生改变，从而我们可以得到这样的结果：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + B\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

这里的 ξ 依旧是区间 $[a,b]$ 中的某个数，具体值依赖于 A, B 的选取.

现在我们可以回到有关于广义积分的收敛性判别，下面我们建立一个不等式：对于单调函数 f，有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x + [f(a)-f(b)]\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq [|f(b)+|f(a)-f(b)|]\sup_{y\in[a,b]}\left|\int_a^y g(x)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

此即 Abel 不等式，应用 Abel 不等式，我们可以类似级数建立 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法，有

定理 1.7

Abel 判别法： 若广义积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

Dirichlet 判别法： 若 f 单调趋于 0，且存在 $M>0$，对 $\forall y \geq a$，有 $\left|\int_a^y g(t)\mathrm{d}t\right| \leq M$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明： 利用 Abel 不等式立刻得到. □

笔记 1.2 *我们指出，可以不通过积分第二中值定理得到积分形式的 Abel 不等式，而可以通过离散化利用级数的 Abel 不等式来逼近证明积分形式.*

例 1.1 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的广义积分收敛性，其中 $p>0$.

证明： 我们可以进行换元 $t=x+x^2$ 然后利用隐函数来讨论，但有一个写起来更加简便的方法是

$$\int_a^b \frac{\sin(x+x^2)}{x^p} = \frac{(1+2x)\sin(x+x^2)}{x^p(1+2x)}\mathrm{d}x$$

令 $f(x)=\frac{1}{x^p(1+2x)}$，$g(x)=(1+2x)\sin(x+x^2)$，则我们知道 f 单调趋于 0，且

$$\left|\int_a^y g(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\sin(x+x^2)\big|_a^y\right| \leq 2$$

由 Dirichlet 判别法知道广义积分收敛. □

1.2 有界区间上无界函数的广义积分

我们先介绍奇点的含义：

定义 1.1 如果对于点 $x_0\in[a,b]$ 的任何空心邻域 $B_\delta^\circ(x_0)$，$f(x)$ 都在 $B_\delta^\circ(x_0)\cap[a,b]$ 中无界，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的一个**奇点**.

奇点在我们研究有界区间上无界函数的广义积分时是很重要的，下面这个定理正揭示了这一点.

定理 1.8 设对任何 $\delta \in (0, b-a)$，函数 $f(x)$ 都在 $[a, b-\delta]$ 上可积，但是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积，则 b 是 $f(x)$ 的一个奇点.

证明: 用反证法，若 b 不是 $f(x)$ 的奇点，则存在 $\delta_0 \in (0, b-a)$，使得 $f(x)$ 在 $(b-\delta_0, b)$ 上有界. 又有 $f(x)$ 在 $[a, b-\delta_0]$ 上可积知道 f 在 $[a, b-\delta_0]$ 上有界，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

设 $|f(x)| \leq M$，对任何 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4M}, \dfrac{b-a}{2}\right\}$，按已知 $f(x)$ 在 $[a, b-\delta]$ 上可积，于是我们知道存在 $[a, b-\delta]$ 的一个分割有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $[a, b]$ 的分割 $T = T' \cup \{b\}$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_n \Delta x_n \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

于是可积，矛盾. □

笔记 1.3 *有界区间上无界函数的广义积分的运算性质也几乎与定积分相同.*

有界区间上无界函数的广义积分可以通过换元转化为无界区间广义积分：

$$\varphi(x)\colon [a, b] \to [1, +\infty], \quad x \mapsto \frac{b-a}{b-x}$$

则 $\displaystyle\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\delta \to 0$ 的收敛性，可以变成

$$\int_1^{\varphi(b-\delta)} f(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)\mathrm{d}t, \delta \to 0$$

的收敛性，从而转化为无界区间上的收敛性

$$\lim_{s\to\infty} \int_1^{s} f(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)\mathrm{d}t$$

注 1.3 同理有比较判别法与柯西收敛原理，不再赘述.

定理 1.9 (Cauchy 判别法) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上非负，且对任意 $\delta\in(0,b-a)$，$f(x)$ 都在 $[a,b-\delta]$ 上可积，b 是 $f(x)$ 的唯一奇点，那么

(1) 若存在 $0<p<1$ 和 $C>0$，使得在 $[a,b)$ 上有 $0\le f(x)\le \dfrac{C}{(b-x)^p}$，则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若存在 $p\ge 1$ 和 $C>0$，使得在 $[a,b)$ 上有 $f(x)\ge \dfrac{C}{(b-x)^p}$，则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

同样我们会有 Abel 和 Dirichlet 判别法：

定理 1.10 **Abel 判别法：** 设 b 是 $f(x)$ 的唯一奇点，广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，函数 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界，则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

Dirichlet 判别法： 设 b 是 $f(x)$ 的唯一奇点，函数 $F(c)=\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b)$ 上有界，函数 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\displaystyle\lim_{x\to b^-}g(x)=0$，则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定义 1.2 特殊类型广义积分：f 定义于 $[a,b]$，f 在 $[a,b]$ 上唯一奇点为 $c\in(a,b)$，称 f 在 $[a,b]$ 广义可积，如果对于 $\forall\delta>0$，有

(1) 对于任意 $\forall\delta>0$，f 在 $[a,c-\delta]$ 与 $[c+\delta,b]$ 上 Riemann 可积.

(2) $\displaystyle\lim_{\delta_1\to 0,\delta_2\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在[a].

则称为广义可积，记极限为 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

[a]注意到这里要求以 δ_1,δ_2 两种不同的方式任意逼近 0，当 $\delta_1=\delta_2$ 时，对称性可能会导致一些额外的东西，下面我们介绍的Cauchy主值积分就是如此.

定义 1.3 (Cauchy 主值积分) f 定义于 $[a,b]$，$c\in(a,b)$ 为 f 的唯一奇点，称 f 在 $[a,b]$ 上 Cauchy 主值意义下广义可积，如果

(1) $\forall\delta>0, f\in R[a,c-\delta]\cap R[c+\delta,b]$.

(2) $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

记极限为 P.V. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，有时也记为 P.V.C $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$[a].

[a]P.V :Principle value,C:Cauchy

注 1.4 类似定义：

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$$

例 1.2 f 为 $\mathbb{R}$ 上的 *Lipschitz* 连续函数，$\exists R>0$，使得 $\overline{\{x\colon f(x)\neq 0\}}\subseteq[-R,R]$，定义

$$Sf=\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}}-\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

变形：$t\in\mathbb{R}$，有

$$(Sf)(t)=\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{t-x}\mathrm{d}x$$

这被称为 *Hilbert* 变换，S 有时成为 *Cauchy* 分布(广义函数).

请证明：P.V. $\int_{\mathbb{R}}-\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在.

证明： 注意到当 $|x|>R$ 的时候有 $f(x)=0$，所以有

$$\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{P.V.}\int_{-R}^{R}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{P.V.}\int_{0}^{R}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x$$

要证明存在性，只需要证明对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $\forall\delta_1,\delta_2<\delta$，有

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x\right|\leq\int_{\delta_1}^{\delta_2}\left|\frac{f(x)-f(-x)}{x}\right|\mathrm{d}x\leq\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{L|2x|}{|x|}\mathrm{d}x=2L|\delta_1-\delta_2|<2L\delta$$

从而我们知道存在. □

定理 1.11 (Froullani 积分) f 定义在 $[0,+\infty)$，f 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，记为 $f(+\infty)$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^M\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^M\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^M\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{a\varepsilon}^{aM}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{b\varepsilon}^{bM}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= f(\xi_1)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-f(\xi_2)\int_{aM}^{bM}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= [f(\xi_1)-f(\xi_2)]\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0, M\to+\infty$ 即得证. □

推论 1.1 $f\in C[0,+\infty)$，$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Chapter 2

广义重积分

广义重积分的定义的情况很复杂，我们略去定义，详细内容可以参考李成章，黄玉民老师的数学分析.

其大致分为:

- 无界区间上广义积分.
- 有界区域上孤立奇点广义积分.

定理 2.1 (威尔斯特拉斯判别法) f 定义于 Ω，p 为 Ω 中唯一奇点，若 $\exists F(x)$ 使得 $|f(x)| \le F(x)$，且 $\displaystyle\int_\Omega F(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 f 在 Ω 上广义 Riemann 可积.

注 2.1 这是某一种控制收敛型定理.

定理 2.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \ge 2)$ 有界，$p \in \Omega$ 为 f 的唯一奇点，则 f 与 $|f|$ 的广义可积性相同.

例 2.1 A 正定，α 为 $\mathbb{R}^n$ 中向量，计算

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}X^TAX + \alpha^TX)\mathrm{d}X$$

其中 $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解: **Case 1:**$\alpha = 0, A = id$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\frac{1}{2}X^TAX)\mathrm{d}X &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\mathrm{d}X \\ &= \prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)\mathrm{d}x_i = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

Case 2:$\alpha = 0$

令 $Y = A^{\frac{1}{2}}X$，有 $\mathrm{d}Y = \det A^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}X$，从而我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\frac{1}{2}X^TAX)\mathrm{d}X &= \frac{1}{\det A^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{1}{2}Y^TY\right)\mathrm{d}Y \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\det A^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

□

Chapter 3

练习

例 3.1 $f\geq$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_{\mathbb{R}} x^2f(x)\mathrm{d}x=1$，则对于 $\forall\alpha\leq 0$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{1+\alpha^2}$$

证明: 我们有

$$g(c)=\int_{\mathbb{R}}(x-c)^2f(x)\mathrm{d}x=1+c^2$$

当 $c\geq 0$ 的时候，有

$$\int_{\mathbb{R}}(x-c)^2f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{-\infty}^{\alpha}(x-c)^2f(x)\mathrm{d}x\geq(c-\alpha)^2\int_{-\infty}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$$

也即

$$\int_{-\infty}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1+c^2}{(c-\alpha)^2}\leq\inf_{c\geq 0}\frac{1+c^2}{(c-\alpha)^2}=\frac{1}{1+\alpha^2}$$

□

例 3.2 判断 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 考虑 $a_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^p}{1+x^q\sin^2 x}\mathrm{d}x$，则

$$a_k\leq(k+1)^p\pi^p\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{1}{1+(k\pi)^q\sin^2 x}\mathrm{d}x=(k+1)^p\pi^p\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+[(k+1)\pi]^2\sin^2 x}$$

类似地有

$$a_k\geq k^p\pi^p\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+[(k+1)\pi]^q\sin^2 x}$$

所以我们需要考虑

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+A\sin^2 x},\quad A\to+\infty$$

的渐进行为.

实际上我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+A\sin^2 x}=\frac{\pi}{\sqrt{1+A}}\sim A^{-\frac{1}{2}}$$

所以 $a_k\sim k^{p-\frac{q}{2}}$. □

例 3.3 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^p|\sin x|^q}\mathrm{d}x,\quad p,q>0.$

解: 关键估计

$$\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+A(\sin x)^q}\mathrm{d}x$$

利用 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$，我们只需要估计

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+Ax^q}$$

利用换元我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+Ax^q}=A^{-\frac{1}{q}}\int_0^{\frac{\pi}{2}A^{\frac{1}{q}}}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q}$$

故当 $q>1$ 的时候，我们有

$$A^{-\frac{1}{q}}\sim\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+Ax^q}$$

当 $q=1$ 时，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+Ax^q}\sim\frac{\ln A}{A}$$

当 $0<q<1$ 时，我们有

□

例 3.4 $f\in C^1[\varepsilon,+\infty)$，$\exists\varepsilon\in(0,1)$，则

$$\sum_{y<n\leq x}a_nf(n)=A(t)f(t)|_y^x-\int_y^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

其中 $A(t)=\sum_{n\leq t}a_t$.