实数理论

1　基本认识

1.1　互推关系

Dedekind 连续性公理 $\Longleftrightarrow$ 确界原理(公理) $\Longleftrightarrow$ 单调收敛定理 $\Longleftrightarrow$ 闭区间套定理(+ 阿基米德原理) $\Longleftrightarrow$ 有限覆盖定理 $\Longleftrightarrow$ 致密性定理 $\Longleftrightarrow$ 柯西收敛原理 $\Longleftrightarrow$ 聚点原理

1.2　Dedekind 连续性公理

Dedekind 分割: A, B 是 R 的两个子集，满足 $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ 且对任何 $a \in A, b \in B$ 都有 $a < b$，则称 (A, B) 为 $\mathbb{R}$ 的一个分割.

Dedekind 连续性公理

对于 $\mathbb{R}$ 的任何分割，都存在唯一的 $x^* \in \mathbb{R}$，使对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，都有 $a \leq x^* \leq b$.

1.3　确界原理

确界:

(1) 如果数集 S 的上界集中有最小元，则称之为 S 的上确界，记为 $\sup S$;

(2) 如果数集 S 的下界集中有最大元，则称之为 S 的下确界，记为 $\inf S$.

注[1]：sup 是 supremum 的缩写，inf 是 infimum 的缩写.

注[2]：上确界的另一种翻译是 least upper bound，下确界的另一种翻译是 greatest lower bound. 这种翻译实际上蕴含了它们实际上是最小上界和最大下界.

定理：β 是数集 S 的上确界的充分必要条件是：

(1) 对任意 $x \in S$，都有 $x \leq \beta$;

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \beta - \varepsilon$.

命题：β 是数集 S 的上确界的充分必要条件是：

(1) 对任意 $x \in S$，都有 $x \leq \beta$;

(2) 存在数列 $\{x_n\} \subseteq S$，使得 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \beta$.

确界原理(公理)

有上界的非空数集必有上确界.

注[1]: 这里选择确界原理当做公理，但实际上也可以选择其他理论作为公理.

注[2]: 某种约定有 $\sup\emptyset = -\infty, \inf\emptyset = +\infty$.

在确界原理的基础上我们容易得出：有下界的非空数集必有下确界.

一个小命题：$\sup\{|x-y| \mid x, y \in S\} = \sup S - \inf S$.

1.4 单调收敛定理

单调收敛定理

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid x \in \mathbb{N}^*\}$;

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid x \in \mathbb{N}^*\}$.

1.5 区间套定理

区间套定理

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间，满足：

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

则存在唯一的实数 ξ，使得 ξ 是区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 的唯一公共点.

注[1]: 若把区间套定理中的闭区间改成一列开区间或者无界区间，定理将不再成立.

注[2]: 区间套定理在直观上也是自明的，它和确界原理是可以相互证明的(但区间套定理需要加上阿基米德原理才能得到确界原理). 事实上，历史上曾经把它作为”几何学”的公理，用来刻画直线的完备性.

下面介绍阿基米德原理：

阿基米德原理

若 a 与 b 都是正实数，则必存在 $n \in \mathbb{N}^*$，使得 $na > b$.

由阿基米德原理可知，既没有最大的正有理数，也没有最小的正有理数.

阿基米德原理由确界原理的证明如下：

证明：假设阿基米德原理不成立，则存在 $a > 0, b > 0$，使对任何正整数 n，有 $na \le b$. 令 $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}^*\}$，则 A 非空有上界，从而有上确界，记 $\alpha = \sup A$.

因为 $a > 0$，所以 $\alpha - a < \alpha$. 由于 $\alpha - a$ 不是 A 的上界，故存在正整数 m，使得 $\alpha - a < ma$，于是 $\alpha < (m+1)a$，这与 α 是 A 的上界矛盾.故得证.

1.6 致密性定理

定理：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，并且极限也是 a.

定理：若 $\{x_n\}$ 是一个无界数列，则存在子列 $x_{n_k} \to \infty$.

定理：设 $\{x_n\}$ 是一个数列，A 是一个实数. 则一下两个条件等价：

(1) 存在 $\{x_n\}$ 的一个子列收敛到 A;

(2) A 的任何邻域都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项.

极限点：若存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$，则称 x 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点.

我们知道收敛的数列一定是有界的，但是有界的数列是否存在收敛的子列呢，下面的定理给出了肯定的回答：

致密性定理

任一有界数列必有收敛子列.

注: 致密性定理又被称为 Bolzano-Weierstrass 定理.

聚点: 设点集 $S \subseteq \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, 如果 α 的任何空心邻域中都含有点集 S 中的点，则称 α 为集合 S 的聚点.

注: S 中所有聚点的集合称为 S 的导集，记作 S'.

设点集 $S \subseteq \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$，以下命题是彼此等价的:

(1) α 为集 S 的聚点.

(2) α 的任何空心邻域内都有点集 S 中无穷多个点.

(3) 存在 $\{x_n\} \subseteq S$，使得 $x_n \neq \alpha, n = 1, 2, \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

(4) 存在 $\{x_n\} \subseteq S$，使得对任何两个不同的正整数 i, j，有 $x_i \neq x_j$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

聚点定则

有界无穷点集必有聚点.

1.7 柯西收敛原理

柯西收敛原理

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件为：对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $m, n > N$ 时，就有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

1.8 有限覆盖定理

区间集的并集: 设 J 是一个区间集，即 J 中的每一个元素 I 都是一个区间，那么把 J 中所有区间合并成一个集合，记为 $\bigcup J$ 或者 $\bigcup\{I|I \in J\}$.即满足

$$x \in \bigcup J \iff \exists I \in J,\ s.t.\ x \in I.$$

覆盖: 设 S 是一个数集，J 是一个区间集，如果 $S \subseteq \bigcup J$，我们就称区间集 J 是数集 S 的一个覆盖，或者说 J 覆盖 S.

进一步，如果 J 是一个开区间集，即 J 中的区间都是开区间，我们称 J 是数集 S 的一个 开覆盖.

子覆盖: 设 J 是 S 的一个覆盖，如果 J 的一个子集 J_1 仍然是 S 的一个覆盖，称 J_1 是 J 的子覆盖.
进一步，如果 J_1 是一个有穷集合，则称 J_1 是 J 的 有限子覆盖.

有限覆盖定理

闭区间的任意开覆盖都存在有限子覆盖.

注: 若把有限子覆盖的条件放宽，把闭区间改为任意一个数集，我们可以得到下面的结论：

任何一个数集的任意开覆盖都存在至多可数的子覆盖.

2 基于确界原理的实数系定理互推

2.1 互推顺序

我们选择的互推顺序如下：

$$\begin{tikzcd}
\textit{Dedekind}\text{ 连续性公理} \arrow[d, leftrightarrow] & & & \text{柯西收敛原理} \arrow[dl] & & \\
\text{确界原理} \arrow[dr] & & \text{闭区间套定理} \arrow[ll, "\text{阿基米德原理}"'] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{致密性原理} \arrow[ul] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{聚点原理} \\
& \text{单调收敛定理} \arrow[ur] & & \text{有限覆盖定理} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

2.2 Dedekind 连续性公理 $\Longleftrightarrow$ 确界原理

2.2.1 Dedekin 连续性公理 $\Rightarrow$ 确界原理

设非空数集 S 有上界 M，B 为 S 的上界集，于是 $B \neq \emptyset$. 再令 $A = \mathbb{R} \backslash B$，于是 $A \neq \emptyset$ 且 (A, B) 为 $\mathbb{R}$ 的一个分割.

从而由 Dedekind 连续性公理知有唯一的 x^*，使对任何 $a \in A, b \in B$ 都有

$$a \leq x^* \leq b$$

若 x^* 不是 S 的上界，那么存在 $x_0 \in S$ 使得 $x_0 > x^*$. 于是有

$$x^* < \frac{x^* + x_0}{2} < x_0$$

从而由定义知道 $\dfrac{x^* + x_0}{2}$ 不是 S 的上界，所以 $\dfrac{x^* + x_0}{2} \in A$.从而由分割知道 $\dfrac{x^* + x_0}{2} \leq x^*$ 与 $x^* < x_0$ 矛盾，从而 x^* 为 A 的上界，即 $x^* \in B$.

又有对于 S 的任何上界 $\beta \in B$，有 $x^* < \beta$，从而知 x^* 为 S 的上确界.

2.2.2 确界原理 $\Rightarrow$ Dedekind 连续性公理

设 (A,B) 为 $\mathbb{R}$ 的任一分割，由确界原理知 A 有上确界 x^*. 由定义知对任意 $a\in A$，都有 $a\le x^*$. 又由上确界的最小上界性与 B 中元素都是 A 的上界，从而知道对任意 $b\in B$，都有 $x^*\le b$.

若还有 $x_0\in\mathbb{R},x_0\ne x^*$，使得对于任何 $a\in A,b\in B$ 都有 $a\le x_0\le b$. 不妨设 $x_0>x^*$，于是

$$x^*<\frac{x^*+x^0}{2}<x_0$$

从而 $\dfrac{x^*+x_0}{2}$ 既不在 A 中也不在 B 中，与 (A,B) 为 $\mathbb{R}$ 矛盾，从而证明了唯一性.

2.3 确界原理 $\Rightarrow$ 单调收敛定理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界原理

2.3.1 确界原理 $\Rightarrow$ 单调收敛定理

只证明单调递增有上界的情况:

设数列 $\{x_n\}$ 递增且有上界，则集合 $\{x_n|x\in\mathbb{N}^*\}$ 有上界，因而有上确界. 记 $\beta=\sup\{x_n|n\in\mathbb{N}^*\}$，于是知对于任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，有 $x_n\le\beta$. 并且对任意 $\varepsilon>0$，都存在 N，使得 $x_N>\beta-\varepsilon$. 由于 $\{x_n\}$ 递增，从而当 $n>N$ 时，有

$$\beta-\varepsilon<x_N<x_n\le\beta$$

从而 $|x_n-\beta|<\varepsilon$. 由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$.

2.3.2 单调收敛定理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理

设 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一列闭区间，满足 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n],n=1,2,3,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

从而知道 $\{a_n\}$ 单调递增有上界 b_1，$\{b_n\}$ 单调递增有下界 a_1，故 $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛. 且由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

从而有对于任意的 n，满足 $a_n\le\xi\le b_n$. 故 ξ 为这一区间列的公共点.

若还存在 $\xi^*\ne\xi$ 为区间列的公共点，不妨设 $\xi^*>\xi$，从而由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 知，存在 $b_n<\xi^*$ 从而导致矛盾，从而唯一性得证.

2.3.3 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 单调收敛定理

设 S 是有上界的非空集合，不妨设 S 没有最大元.

任取一个 $a_1\in S$，又设 b_1 为 S 的一个上界，把闭区间 $[a_1,b_1]$ 等分成两个区间 $[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1]$. 若 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 是 S 的一个上界，则记 $[a_2,b_2]=[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}]$，否则记 $[a_2,b_2]=[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1]$. 无论是哪种情况，都满足 b_2 是 S 的上界而 a_2 不是. 以此类推得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 使得每一个 b_n 都是 S 的上界而 a_n 不是.

且这一列闭区间满足:

(1) $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由阿基米德公理，都存在正整数 n 使得 $n\varepsilon>b_1-a_1$，从而 $b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\le\dfrac{b_1-a_1}{n}<\varepsilon$，故区间长度收敛于 0.

则由区间套定理知道存在唯一的 ξ 是区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 的公共点.

下面先证明 ξ 是 S 的一个上界，由于对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $b_n < \xi + \varepsilon$，从而 $\xi + \varepsilon$ 为 S 的一个上界，从而对于任意的 $x \in S$，有 $x \leq \xi + \varepsilon$，从而由 ε 的任意性知 $x \leq \xi$，从而 ξ 为 S 的一个上界.

再证 $\xi - \varepsilon$ 不是上界，事实上对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 n，使得 $b_n - a_n < \varepsilon$，从而 $a_n > b_n - \varepsilon \geq \xi - \varepsilon$. 由于 a_n 不是 S 的上界，故存在 $x_0 > a_n > \xi - \varepsilon$，从而$\xi - \varepsilon$ 不是 S 的上界.

综上所述 $\xi = \sup S$.

2.4 闭区间套定理 ⇒ 致密性原理 ⇒ 柯西收敛原理 ⇒ 闭区间套定理

2.4.1 闭区间套定理 ⇒ 致密性原理

设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，即有实数 a, b 使得 $a \leq x_n \leq b$. 把 $[a, b]$ 等分成两个区间 $[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$. 知道这两个区间中至少有一个含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，任取一个记为 $[a_1, b_1]$.

以此类推，得到区间列 $\{[a_n, b_n]\}$，满足:

(1) $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;

(2) $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$.

从而由区间套定理，存在唯一的 $\xi \in [a, b]$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} = \xi$.

下面在 $\{x_n\}$ 中选出一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 ξ.

在 $[a_1, b_1]$ 中任取 $\{x_n\}$ 中的一项，记为 x_{n_1}. 由 $[a_2, b_2]$ 中存在 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，因此可以找到 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$.

以此类推，可以找到一列正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，使得 $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$.

令 $k \to \infty$ 即得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

2.4.2 致密性原理 ⇒ 柯西收敛原理

只证明充分性:

首先证明 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，条件知道对于 $\varepsilon = 1$，存在 $N_0 \in \mathbb{N}^*$，使得当 $m, n > N_0$ 时，有

$$|x_n - x_m| < 1$$

特别地，取 $m = N_0 + 1$，有 $|x_n - x_{N_0+1} < 1$，从而有

$$|x_n| < |x_{N_0+1}| + 1, \forall n > N_0$$

从而 $\{x_n\}$ 有界. 由致密性原理，$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在正整数 K，满足当 $k > K$ 时，有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

又对上面的 ε，存在正整数 N，满足当 $m, n > N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

记 $k_0=\max\{K+1,N+1\}$，则对 $n>N$ 时，有 $n_{k_0}\geq k_0>N$，从而有

$$|x_n-a|\leq|x_n-x_{n_{k_0}}|+|x_{n_{k_0}}-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2.4.3 柯西收敛原理 ⇒ 闭区间套定理

设闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足:

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

于是，对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|b_n-a_n|<\varepsilon$，此时对于任意的 $m>n>N$，有 $a_n\leq a_m\leq b_m\leq b_n$，此时有

$$|a_n-a_m|\leq|b_n-a_n|<\varepsilon,\ \ |b_n-b_m|\leq|b_n-a_n|<\varepsilon$$

由柯西收敛原理知道 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都收敛. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，故存在实数 ξ 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi\in[a_k,b_k],(k=1,2,3,\cdots)$$

2.5 闭区间套定理 ⇒ 有限覆盖定理 ⇒ 致密性原理

2.5.1 闭区间套定理 ⇒ 有限覆盖定理

设 $S=[a,b]$，开区间集 J 覆盖 S. 假设 $[a,b]$ 不能被 J 中有限个区间覆盖，我们把 $[a,b]$ 分为两个区间 $[a,\dfrac{a+b}{2}],[\dfrac{a+b}{2},b]$，其中至少有一个不能被 J 中有限个区间覆盖，记为 $[a_1,b_1]$.以此类推分下去得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，其中每一个 $[a_n,b_n]$ 都不能被 J 中有限个开区间覆盖，并且满足

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

由闭区间套定理知道存在 ξ 使得:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi\in[a_k,b_k],(k=1,2,3,\cdots)$$

又由于 J 覆盖 $[a,b]$，故在 J 中必然有一个开区间 (α,β) 使得 $\xi\in(\alpha,\beta)$.

从而存在 N，对 $n>N$ 有

$$\alpha<a_n<b_n<\beta$$

即 $[a_n,b_n]\subseteq(\alpha,\beta)$，从而 $[a_n,b_n]$ 可以被 J 中一个区间覆盖，矛盾. 故得证.

2.5.2 有限覆盖定理 ⇒ 致密性原理

设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，即有实数 a,b 使 $a\leq x\leq b(n\in\mathbb{N}^*$

假设对于任意 $\xi\in[a,b]$，都有 $\varepsilon_\xi>0$，使在领域 $(\xi-\varepsilon_\xi,\xi+\varepsilon_\xi)$ 中只含有 $\{x_n\}$ 的有限项，于是我们得到一个开区间集

$$J=\{(\xi-\varepsilon_\xi,\xi+\varepsilon_\xi)|\xi\in[a,b]\}$$

显然 J 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，从而存在一个有限子覆盖

$$J_1=\{(\xi_1-\varepsilon_{\xi_1},\xi_1+\varepsilon_{\xi_1}),\cdots,(\xi_m-\varepsilon_{\xi_m},\xi_m+\varepsilon_{\xi_m})\}$$

从而由 ε_ξ 的选取知道，对于 $i=1,2,\cdots,m$ ，在开区间 $(\xi_i-\varepsilon_{\xi_i},\xi_i+\varepsilon_{\xi_i})$ 中只含有有限个 $\{x_n\}$ 中的项，从而存在正整数 N_i，满足对任意 $n>N_i$，有 $x_n\notin(\xi_i-\varepsilon_{\xi_i},\xi_i+\varepsilon_{\xi_i})$.

从而取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$，当 $n>N$ 时，有

$$x_n\notin\bigcup_{i=1}^{m}(\xi_i-\varepsilon_{\xi_i},\xi_i+\varepsilon_{\xi_i})=J_1\supseteq[a,b]$$

从而与 $x_n\in[a,b]$ 矛盾. 故得证.