多项式相关

Def 1 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{P}[x]$，且 $g(x) \neq 0$. 若 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余数为 0，则称 $g(x)$ 能整除 $f(x)$，称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**，记作 $g(x)|f(x)$，也即存在 $q(x) \in \mathbf{P}[x]$，使得 $f(x) = q(x)g(x)$.

关于多项式的同余有许多性质与整数相同，且证明也不算困难，这里不再罗列.

Def 2 设 $\mathbf{P}$ 是一个数域，$h(x), f(x), g(x) \in \mathbf{P}[x]$.如果 $h(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，也是 $g(x)$ 的因式，则称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**公因式**.

Def 3 若 $d(x), f(x), g(x) \in \mathbf{P}[x]$，且 $d(x) \neq 0$. 如果 $d(x)$ 满足下面两个条件:

(1) $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$;

(2) 若 $h(x)|f(x), h(x)|g(x)$，则 $h(x)|d(x)$,

则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的**最大公因式**.

容易发现对于任意一个 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$，乘上一个非零常数之后仍旧为最大公因式，它们之中有唯一一个首项系数为 1（这样的多项式称为**首一多项式**）的最大公因式，记为 $(f(x), g(x))$.

Def 4 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{P}[x]$. 如果有 $(f(x), g(x)) = 1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**.

Thm 1 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是存在 $u(x), v(x) \in \mathbf{P}[x]$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

Def 5 数域$\mathbf{P}$上多项式 $p(x)(\deg p(x) \geq 1)$ 如果不能表示为 $\mathbf{P}[x]$ 中两个次数小于 $\deg p(x)$ 的多项式的乘积，则称 $p(x)$ 为 $\mathbf{P}[x]$ 中的**不可约多项式**. 反之，称为**可约多项式**.

例如 $x^2 - 2$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的不可约多项式，但作为 $\mathbf{R}[x]$ 或者 $\mathbf{C}[x]$ 中的多项式却是可约的.

不可约多项式具有以下性质:

1. $p(x) \in \mathbf{P}[x]$, $\deg p(x) = 1$，则 $p(x)$ 不可约;

2. $p(x), f(x) \in \mathbf{P}[x]$，且 $p(x)$ 不可约.则 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $(p(x), f(x)) = c^{-1}p(x)$($c$ 为 $p(x)$的首项系数).后一种情况成立当且仅当 $p(x)|f(x)$.

Thm 2(因式分解及唯一性定理) 设 $\mathbf{P}$ 是一个数域，又 $f(x) \in \mathbf{P}[x], \deg f(x) > 0$. 则 $f(x)$ 可以分解为 $\mathbf{P}[x]$ 中不可约多项式的乘积，

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),\ p_i(x)\ is\ irreducible.$$

如果 $f(x)$ 还有另一种分解

$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),\ q_j(x)\ is\ irreducible.$$

则有 $s = t$ 且经过适当的排列后，有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), c_i \in \mathbf{P}, c_i \neq 0.$$

$f(x) = cp_1(x)^{r_1}p_2(x)^{r_2}\cdots p_s(x)^{r_s}$，$p_i(x)$ 为首一多项式，这种分解称为 $f(x)$ 的**标准分解**.

Thm 3 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{P}[x]$，且不为 0，$p_i(x)$ 为首一不可约多项式，又

$$f(x) = ap_1(x)^{r_1}p_2(x)^{r_2}\cdots p_s(x)^{r_s},\ r_i \geq 0,$$
$$g(x) = bp_1(x)^{t_1}p_2(x)^{t_2}\cdots p_s(x)^{t_s},\ t_i \geq 0.$$

分别为 $f(x), g(x)$ 的标准分解，则

$$(f(x), g(x)) = \prod_{i=1}^{s} p_i(x)^{\min\{r_i, t_i\}}.$$

Def 6 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathbf{P}[x]$. 称多项式 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}$ 为 $f(x)$ 的**导数(微商)**，记为 $f'(x)$ 或者 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

有关导数的重要性质：

1. $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

2. 若 $p(x)$ 不可约，则 $(p(x),p'(x))=1$.

Def 7 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 k **重因式**，如果 $p(x)^k|f(x)$ 且 $p(x)^{k+1}\nmid f(x)$.

当 $k=1$ 时，我们说 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的**单因式**；$k\geq 2$ 时，我们说 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的**重因式**.

Thm 4 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 $k(\geq 1)$ 重因式，则 $p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

Corollary 4.1 记 $f^{(1)}(x)=f'(x)$, $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$，称 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 k **阶导数**. 如果 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f^{(1)}(x),f^{(2)}(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

Corollary 4.2 不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式当且仅当 $p(x)|(f(x),f'(x))$.

Corollary 4.3 $f(x)$ 无重因式当且仅当 $(f(x),f'(x))=1$.

Thm 5 $\mathbf{P}[x]$ 中多项式的标准分解为 $f(x)=cp_1(x)^{r_1}p_2(x)^{r_2}\cdots p_s(x)^{r_s}(r_i\geq 1)$，则有

$$(f(x),f'(x))=p_1(x)^{r_1-1}p_2(x)^{r_2-1}\cdots p_s(x)^{r_s-1};$$
$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

Def 8 如果 $f(x)$ 在 a 处的值为 0，称 a 为 $f(x)$ 的**零点**. 我们也可以将 a 叫做多项式方程 $f(x)=0$ 的**解**或**根**, 我们也直接称 a 为多项式 $f(x)$ 的**根**. 如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geq 0)$ 重因式，则称 a 为 $f(x)$ 的 k **重根**. $k=0$，a 不是根；$k=1$，a 叫做**单根**；$k>1$，a 叫做**重根**.

Thm 6 $P[x]$ 中 n 次多项式至多 n 个根.(其中 k 重根算 k 个根)

Thm 7(代数学基本定理) 设 $f(x)\in\mathbf{C}[x]$，且 $\deg f(x)\geq 1$，则 $f(x)$ 在 C 中有根.

该定理的一个等价表述为：n 次复系数多项式在 $\mathbf{C}$ 中恰有 n 个根.

Corollary 7.1(实系数多项式因式分解定理) 设 $f(x)\in\mathbf{R}[x]$，且 $\deg f(x)\geq 1$，则 $f(x)$ 的标准分解为：

$$f(x)=a(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中 a 为首项系数，$p_i^2-4q_i<0,1\leq i\leq r$.

Def 9 设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，$f(x)$ 的各项系数的最大公约数称为 $f(x)$ 的**容度**，记为 $c(f)$. 如果 $c(f)=1$，则称 $f(x)$ 为**本原多项式**.

Thm 8(Gauss 引理) 本原多项式的积是本原的.

Corollary 8.1 设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，且 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 上可约，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 上可分解.

Thm 9(Eisenstein 判别法) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbf{Z}[x]$，若存在素数 p 使得

$$p\nmid a_n;\ p\mid a_i,\ 0\leq i\leq n-1;\ p^2\nmid a_0.$$

则 $f(x)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约多项式.