多元积分的满纸荒唐言

杨毅涵

October 6, 2024

0.1 Green 公式

定理 0.1 (Green 公式) D 为 $\mathbb{R}^2$ 上有界的区域，∂D 为有限段光滑曲线，$f,g\in C^1(\overline{D})$，则

$$\int_{\partial D} f\ \mathrm{d}x+g\ \mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

定理 0.2 (Green 公式等价形式) $F=(f,g)\in C^1(\overline{D})$，则

$$\int_{\partial D}(F\cdot\vec{n})\ \mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $\vec{n}$ 为单位外法向量，即

$$\vec{n}=(\cos(\vec{n},x),\cos(\vec{n},y))$$

注 0.1 这是由于对于 $\vec{\tau}$ 为 ∂D 方向定位的单位切向量，有

$$\cos(\vec{\tau},x)=-\cos(\vec{n},y),\quad \cos(\vec{\tau},y)=\cos(\vec{n},x)$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}(F\cdot\vec{n})\ \mathrm{d}s &= \int_{\partial D}(f\cos(\vec{n},x)+g\cos(\vec{n},y))\ \mathrm{d}s\\ &= \int_{\partial D}(-g\cos(\vec{\tau},x)+f\cos(\vec{\tau},y))\ \mathrm{d}s\\ &= \int_{\partial D}-g\,\mathrm{d}x+f\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

我们令 $\mathrm{div}F=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}$ 为 F 的散度，则有

$$\int_{\partial D}F\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}s=\iint_D\mathrm{div}F\ \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\nabla\cdot F\ \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

我们令一阶微分形式 $\omega\in\Omega^1(D)$ 为

$$\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

则有

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

我们有

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$$

我们写成

$$\int_{\partial D} \omega = \langle \omega, \partial D \rangle, \quad \int_D \mathrm{d}\omega = \langle \mathrm{d}\omega, D \rangle$$

看作是内积，则有

$$\langle \omega, \partial D \rangle = \langle \partial^* \omega, D \rangle = \langle \mathrm{d}\omega, D \rangle, \quad \langle \mathrm{d}\omega, D \rangle = \langle \omega, \mathrm{d}^* D \rangle = \langle \omega, \partial D \rangle$$

所以我们有以下对偶

$$\partial = \mathrm{d}^*, \quad \partial^* = \mathrm{d}$$

0.2 场论介绍

令梯度 $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$，再考虑哈密尔顿算子 ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

则

$$\operatorname{grad} u = \nabla u$$

看作是 ∇ 与 u 的数乘，关于 ∇ 我们有如下性质

- $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$
- $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
- $\nabla(\frac{u}{v}) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$

散度定义为，对于 $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$，

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

有如下性质

- $\nabla\cdot\left(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}\right)=\nabla\cdot\overrightarrow{F}+\nabla\cdot\overrightarrow{G}$
- u 是实函数，则 $\nabla\cdot(u\overrightarrow{F})=u\nabla\cdot\overrightarrow{F}+\nabla u\cdot\overrightarrow{F}$

旋度[1]定义为

$$\mathrm{curl}F=\nabla\times\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

旋度有性质

- $\nabla\times(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F})=\nabla\times\overrightarrow{F}+\nabla\times\overrightarrow{G}$
- $\nabla\times(u\overrightarrow{F})=u\nabla\times\overrightarrow{F}+\nabla u\times\overrightarrow{F}$
- $\nabla\cdot\left(\nabla\times\overrightarrow{F}\right)=0$
- $\nabla\times\nabla u=\mathbf{0}$

定义 Laplace 算子为

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\nabla\cdot\nabla u$$

0.3 Gauss 公式

定理 0.3 (Gauss 公式) 反正是一个性质很好的 P,Q,R，有

$$\iint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

也可以写成

$$\iint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\ \mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\overrightarrow{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

注 0.2 利用散度可以将 *Gauss* 公式写成

$$\iint_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ \mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\overrightarrow{F}\ \mathrm{d}\Omega=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\overrightarrow{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

[1]也有地方记为 rot，但 curl 更为现代化(暴论)

令 ω 为二阶微分形式

$$\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

则有

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

则 Gauss 公式也可以写成

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

0.4 Stokes 公式

定理 0.4 (Stokes 公式) *总之 S 是很好的带边光滑曲面，P,Q,R 是很好的函数，则*

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注 0.3 我们可以借散度，把 *Stokes* 公式写成

$$\int_{\partial S}\left(\vec{F}\cdot\vec{\tau}\right)\,\mathrm{d}s = \iint_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

令 ω 为一阶微分形式

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

则有

$$\mathrm{d}\omega = (R_y-Q_z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - (R_x-P_z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

所以 Stokes 可以写成

$$\int_{\partial S}\omega = \int_S \mathrm{d}\omega$$

0.5 Green,Gauss,Stokes 的大一统：Stokes

定理 0.5 (Stokes!!!!) 设 ω 是某个微分形式，则

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega$$

定理 0.6 (旋度定理) 令 $\mathrm{d}\vec{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$，$\vec{n}\,\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，

$$\int_{\partial s}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\iint_S\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

定理 0.7 (散度定理)

$$\iint_{\partial D}F\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_D(\nabla\cdot F)\,\mathrm{d}V$$

0.6 胡言乱语

ω 为区域 D 上的 1-形式，其中 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 或者 $\mathbb{R}^3$，有

$$\{\text{恰当形式}\}\subseteq\{\text{闭形式}\}$$

记 1-阶闭形式构成的空间为 $\mathscr{Z}^1_{dR}(D)$[2].
记 1-阶恰当形式构成的空间为 $\mathscr{B}^1_{dR}(D)$[3].
商空间记为 $\mathscr{H}^1_{dR}(D)=\mathscr{Z}^1_{dR}(D)/\mathscr{B}^1_{dR}(D)$，为 1 阶 dRham 上同调群.
若 $\eta_1,\eta_2\in\mathscr{Z}^1_{dR}(D)$，则 $\eta_1\simeq\eta_2$ 的充分必要条件为

$$\eta_1-\eta_2\in\mathscr{B}^1_{dR}(D)\iff\exists u,\ \text{s.t.},\ \mathrm{d}u=\eta_1-\eta_2$$

[2] $\mathrm{d}\omega=0$，零点 Zero，所以用 Z.
[3] Boundary，其中 dR 表示 dRham

0.7 一些应用

定理 0.8 u,v 很好的函数

$$\iint_D v\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D (\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D}(v\nabla u\cdot\overrightarrow{n})\,\mathrm{d}s$$

注 0.4 可以看做是分部积分的推广.

实际上就是证明

$$\iint_D (v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D}(v\nabla u\cdot\overrightarrow{n})\,\mathrm{d}s$$

利用 *Green* 公式我们有

$$RHS = \iint_D \nabla\cdot(v\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再结合

$$\nabla\cdot(u\overrightarrow{F}) = u\nabla\cdot\overrightarrow{F}+\nabla u\cdot\overrightarrow{F}$$

得证.

推论 0.1 $u\in C^2(D)$，$u|_{\partial D}=0$，则在上面定理中取 $u=v$，有

$$\iint_D u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D \nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

推论 0.2 $\Delta u=0$，$u|_{\partial D}=0$，D 是一个有界的很好的区域，则

$$u\equiv 0$$

注 0.5 这是因为

$$\iint_D \nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

从而 $\nabla u\equiv 0$，则有

$$u\equiv 0$$

例 0.1 还可以得到对于 $u,v\in C^2(D)$，有

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}} - v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}\right)\,\mathrm{d}s$$

0.8 积分与路径无关

定理 0.9 $\omega \in \mathscr{L}^1_{dR}(D)$，则以下命题是等价的：

- ω 是恰当形式.
- 对区域中任意两点 A,B 及连接 A,B 的光滑路径 γ_{AB}，$\displaystyle\int_{\gamma_{AB}} \omega$ 仅与 A,B 有关.
- 对区域中任意两点 A,B 及连接 A,B 的分段光滑路径 γ_{AB}，$\displaystyle\int_{\gamma_{AB}} \omega$ 仅与 A,B 有关.
- 对区域中任意两点 A,B 及连接 A,B 的路径 γ_{AB}(有限段折线)，$\displaystyle\int_{\gamma_{AB}} \omega$ 仅与 A,B 有关.
- 对于任意闭路(光滑，分段光滑，有限段折线)$\gamma \subseteq D$，有 $\displaystyle\int_{\gamma} \omega = 0$.