Weierstrass 乘积与 Mittag-Leffler 定理

Muke慕可

(南开大学 数学科学学院)

Abstract

本文简要介绍了Weierstrass乘积和Mittag-Leffler定理的基础理论，并探讨了它们在复分析中的应用。通过这些工具，我们重新审视并简化了一些传统上较为复杂的问题，如傅里叶分析和含参变量积分等. 利用复变函数的方法，我们能够以更高的视角提供简洁的证明和处理方式。具体而言，文章详细讨论了整函数的阶数、无穷乘积的收敛性以及亚纯函数的主要部分构造，并展示了如何用这些理论来解决经典问题，例如Gamma函数的性质、三角函数的因子分解、余元公式以及一些无穷级数和无穷乘积的计算。此外，还介绍了Blaschke定理及其应用，并最终证明了整函数环上的有限生成理想是主理想的结论。

1 预备知识

定理 1.1. *已知 f 是无零点的整函数，则存在整函数 h 满足 $f = e^{h(z)}$.*

证明: 我们只需要良定义出 $\log f(z)$ 即可.

由于 f 在 $\mathbb{C}$ 上无零点，所以我们知道 $\dfrac{f'}{f}$ 是整函数，选取 $z_0 \in \mathbb{C}$，我们知道存在 w_0 使得 $e^{w_0} = f(z_0)$，从而我们令

$$L_f(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

注意到

$$L_f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

再注意到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{-L_f(z)} f(z) &= e^{-L_f(z)} \left(-L_f'(z)\right) f(z) + e^{-L_f(z)} f'(z) \\ &= e^{-L_f(z)} \left(-\frac{f'(z)}{f(z)} f(z) + f'(z)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

故我们知道 $e^{-L_f(z)} f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上是常数，特别地有

$$e^{-L_f(z_0)} f(z_0) = e^{-w_0} f(z_0) = 1$$

故我们知道 $e^{L_f(z)} = f(z)$，定义 $\log f(z) = L_f(z)$ 即可. □

推论 1.2. 如果 f 与 g 都是整函数，且拥有相同的零点和对应的阶数，则我们知道存在整函数 h 使得 $f(z)=g(z)e^{h(z)}$. 对应地，如果 h 是整函数，则 $g(z)e^{h(z)}$ 与 g 拥有相同的零点和对应阶数.

定义 1.3. 定义**收敛因子*(convergence factor)*** $E_n(z)$ 为

$$E_n(z)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n-1}\right)$$

于是有

$$\log E_n(z)=\log(1-z)+z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n-1}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{-z^k}{k}$$

评注 1.4. 定义收敛因子是为了让形如 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$ 的无穷乘积收敛.

定义 1.5. 对于给定的数列 $\{z_n\}$ 满足

$$0<|z_1|\leq|z_2|\leq\cdots\leq|z_n|\leq\cdots$$

并假设 $|z_n|\to+\infty(n\to+\infty)$，我们可以选取整数列 $\{k_n\}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}$$

对于任何的 $R\in\mathbb{R}^+$ 收敛，我们记 $P_n(z)=\sum_{i=1}^{k_n-1}\frac{z^i}{i}$，并且记

$$E_n(z,z_n)=\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z/z_n)}$$

定义 1.6. 一个整函数 f 是**阶*(order)***小于等于 ρ 的，如果对于给定的 $\varepsilon>0$，存在依赖于 ε 的常数 C，使得 $\|f\|_R\leq C^{R^{\rho+\varepsilon}}$ 对于充分大的 R 成立. 一个函数是 ρ 阶的，当且仅当 ρ 是满足上面不等式的正实数集合的下确界. *(注：$\|f\|_R$ 表示在半径为 R 的圆周上的最大模)*

定义 1.7. 一个整函数 f 是**阶严格*(strict order)***小于等于 ρ 的，如果 $\|f\|_R\leq C^{R^\rho}$ 对于充分大的 R 成立. 一个函数是严格 ρ 阶的当且仅当 ρ 是满足上面不等式的正实数集合的下确界.

例 1.8. 函数 e^z 就是严格 1 阶的，因为 $|e^z|=e^x\leq e^{|z|}$.

定义 1.9. 设 $\{\gamma_n\}$ 是一列可求长的简单闭曲线，$l_n=\int_{\gamma_n}|\mathrm{d}z|$ 是 γ_n 的长度，$d_n=d(0,\gamma_n)=\inf_{z\in\gamma_n}|z|$ 是 γ_n 与原点 O 之间的距离. 若满足

(i) γ_n 总是位于 γ_{n+1} 的内部，原点 O 位于 γ_1 的内部.

(ii) $\lim_{n\to+\infty}d_n\to+\infty$.

(iii) $\left\{\frac{l_n}{d_n}\right\}$ 有界.

则称 $\{\gamma_n\}$ 是**正则曲线列**.

2 Weierstrass 乘积

引理 2.1. 若 $|z| \leq \dfrac{1}{2}$，则有 $|\log E_n(z)| \leq 2|z|^n$.

证明: 取对数展开直接放缩即可. □

定理 2.2 (Weierstrass 乘积)**.** 所用符号均在上面定义过. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}$ 对任何的正实数 R 都收敛，则无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{+\infty} E_n(z,z_n) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z/z_n)}$$

在任意圆盘 $|z| \leq R$ 上一致收敛且绝对收敛，并且定义了一个仅以 z_n 为零点的整函数.

证明: 固定 R，让 N 满足 $|z_N| \leq 2R < |Z_{N+1}|$，则对于任意的 $|z| \leq R$ 和 $n > N$，我们有 $|z/z_n| \leq 1/2$，故由引理 2.1 有

$$|\log E_n(z,z_n)| \leq 2\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}$$

因此我们知道级数 $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\log E_n(z,z_n)$ 在 $|z| \leq R$ 绝对收敛且一致收敛，这告诉我们无穷乘积的绝对收敛且一致收敛.

我们记 $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_n(z,z_n)$，我们容易知道所有 z_n 都是 $f(z)$ 的零点，且零点的阶数为相同的 z_n 的个数. 我们下面证明不存在其他零点.

我们固定 $R > 0$，由一致收敛，对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N_0 使得对于任意的 $N \geq N_0$ 和 $|z| \leq R$，有

$$\left|\log\prod_{n=N_0}^{N} E_n(z,z_n)\right| = \left|\sum_{n=N_0}^{N}\log E_(z,z_n)\right| < \varepsilon$$

所以我们知道 $\prod_{n=N_0}^{N} E_n(z,z_n)$ 趋于 1，而有

$$f(z) = \prod_{n=1}^{N_0-1} E_n(z,z_n)\cdot\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=N_0}^{N} E_n(z,z_n)$$

我们知道等式右边的前一部分只以 $z_1,\cdots,z_{N_0-1}$ 为零点，而第二部分只在 1 的周围，故没有零点，从而我们知道结论得证. □

接下来我们讨论一些更精细的问题，设 $\rho > 0$，令 k 是满足 $k > \rho$ 的最小整数，$\{z_n\}$ 是模长递增的非零复数列，并且满足 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}}$ 对每一个 $\varepsilon > 0$ 都收敛.

定义 $P(z) = P_k(z) = \sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{z^i}{i}$. 我们称

$$E^{(k)}(z,\{z_n\}) = E(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P(z/z_n)} = \prod_{n=1}^{+\infty}E_k(z,z_n)$$

为 $\{z_n\}$ 与 ρ 决定的**标准乘积(canonical product)**.

定理 2.3. 上面的标准乘积定义了一个阶小于等于 ρ 的整函数.

证明: 令 $\varepsilon > 0$，且 $\rho+\varepsilon < k$，令 $\lambda = \rho+\varepsilon$，令 $E_k(z) = (1-z)e^{P(z)}$.

当 $|z| \le \dfrac{1}{2}$ 时，由引理 2.1 知道

$$|\log E_k(z)| \le 2|z|^k \le 2|z|^\lambda$$

从而我们知道 $|E_k(z)| \le e^{2|z|^\lambda} = (e^2)^{|z|^\lambda}$，于是我们取 $C_1 = e^2$ 即可.

对于 $\dfrac{1}{2} \le |z| \le 1$，我们注意到

$$|P(z)| \le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|z|^i}{i!} \le 2^{k+2}|z|^k$$

从而我们知道

$$|E_k(z)| = \left|(1-z)e^{P(z)}\right| \le 2e^{2^{k+2}|z|^k} \le \left(2^{2^k} e^{2^{k+2}}\right)^{|z|^k} \le \left(2^{2^k} e^{2^{k+2}}\right)^{|z|^\lambda}$$

故取 $C_2 = 2^{2^k} e^{2^{k+2}}$ 即可.

当 $|z| \ge 1$ 时，注意到

$$|1-z| \le 2|z| \le 10^{|z|^{k-1}} \le 10^{|z|^\lambda}, \quad \left|e^{P(z)}\right| \le e^{k|z|^{k-1}} \le \left(e^k\right)^{|z|^\lambda}$$

从而我们取 $C_3 = 10e^k$ 即可.

综上，我们取 $C = \max\{C_1, C_2, C_3\}$，容易知道下面不等式成立

$$\left|E^{(k)}\left(z, \{z_n\}\right)\right| \le \prod_{n=1}^{+\infty} C^{|z/z_n|^\lambda} = C^{|z|^\lambda \Sigma 1/|z_n|^\lambda}$$

而由定理 2.2 我们知道结论得证! □

定理 2.4. 记 f 是阶严格小于等于 ρ 的整函数，记 $v_f(R)$ 表示 f 在半径为 R 的圆盘中的零点数量，则我们有 $v_f(R) = O(R^\rho)$.

证明: 我们知道 $\|f\|_R \le C^{R^\rho}$，如果必要的话，我们对 f 除掉一个 z 的幂次，以保证 $f(0) \ne 0$，我们设

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)} z_1 \cdots z_n$$

其中 $z_1, \cdots, z_n$ 是在半径为 R 的开圆盘内的零点数量，我们知道 g 是整函数且 $|g(0)| = |f(0)|$，我们对 g 在半径为 $3R$ 的圆盘上使用最大模原理，我们有

$$|f(0)| = |g(0)| \le \|g\|_{3R} \le \frac{\|f\|_{3R}}{|z-z_1|\cdots|z-z_n|}|z_1\cdots z_n| \le \frac{\|f\|_{3R}}{(2R)^n} R^n = \frac{\|f\|_{3R}}{2^n} \le \frac{C^{3^\rho R^\rho}}{2^n}$$

从而我们知道

$$\frac{v_f(R)}{R^\rho} = \frac{n}{R^\rho} \le 3^\rho \log_2^C + \frac{\log|f(0)|}{R^\rho}$$

从而结论得证. □

定理 2.5. f 的阶严格小于等于 ρ，令 $\{z_n\}$ 是 f 的非零的零点集合，按照重数重复，并且按照模递增的顺序排列，则对于任何的 $\delta>0$，有 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^{\rho+\delta}}$ 收敛.

证明: 我们先估计部分和：

$$
\begin{aligned}
\sum_{|z_n|\le R}\frac{1}{|z_n|^{\rho+\delta}} &= O\left(\sum_{r=1}^{R}\frac{v(r+1)-v(r)}{r^{\rho+\delta}}\right)\\
&= O\left(\frac{V(R+1)}{R^{\rho+\delta}}+\sum_{r=2}^{R}v(r)\left(-\frac{1}{r^{\rho+\delta}}+\frac{1}{(r-1)^{\rho+\delta}}\right)\right)\\
&= O\left(\frac{V(R)}{R^{\rho+\delta}}+\sum_{r=1}^{R}\frac{v(r)}{r^{\rho+\delta+1}}\right)
\end{aligned}
$$

由于 $v(r)/r^{\rho}$ 是有界的，我们知道部分和有界，从而原级数收敛. □

利用上面的定理，我们可以证明下面的定理，但由于篇幅原因，这里证明省略，详见 Serge Lang 的 Complex Analysis 第 385-386 页.

定理 2.6 (Minimum Modulus Theorem)**.** f 是阶小于等于 ρ 的整函数，$\{z_n\}$ 是 f 的零点集合，计算重数. 令 $s>\rho$，令 U 是以 z_n 为圆心，以 $\frac{1}{|z_n|^s}$ 为半径的闭圆盘的补集，其中 $|z_n|>1$. 则存在 $r_0(\varepsilon,f)$ 使得对于任何 $z\in U$，$|z|=r>r_0(\varepsilon,f)$，我们有

$$|f(z)|>e^{-r^{\rho+\varepsilon}},\quad \text{i.e.}\quad \log|f(z)|>-r^{\rho+\varepsilon}$$

在拥有了最小模原理之后，我们可以迎来 Weierstrass 乘积最重要的应用，即完全刻画有限阶的整函数. 但是在这之前，还需要一个结论，我们不加证明地介绍下面的引理.

引理 2.7 (Borel-Caratheodory)**.** f 在以原点为中心，半径为 R 的全纯闭圆盘上解析，则我们有对任意 $r<R$，下面的不等式成立

$$\|f\|_r\le\frac{2r}{R-r}\sup_R\Re(f)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|$$

定理 2.8 (Hadamard)**.** 令 f 是 ρ 阶整函数，$\{z_n\}$ 是其所有非零零点，k 是大于 ρ 的最小整数，令 $P=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{z^n}{n}$，则

$$f(z)=e^{h(z)}z^m\prod\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P(z/z_n)}$$

其中 m 是 0 的阶数，h 是一个次数小于等于 ρ 的多项式.

证明: 由于级数 $\sum\frac{1}{|z_n|^s}$ 收敛，其中 $s>\rho$，所以对于每一个充分大的 r，存在 R 使得 $r\le R\le 2r$ 使得对于每一个 n，半径为 R 的圆与以 z_n 为圆心以 $1/|z_n|^s$ 为半径的圆盘不相交.

由最小模原理，我们在半径为 R 的圆上得到了标准乘积 $E(z)$ 的一个下界，这告诉我们 $\frac{f(z)}{E(z)z^m}$ 的阶小于等于 ρ(因为 f 为 ρ 阶).

由于 $\dfrac{f(z)}{E(z)z^m}$ 是无零点的整函数，从而存在 $h(z)$ 使得 $e^{h(z)} = \dfrac{f(z)}{E(z)z^m}$，再由于是小于等于 ρ 阶的，即 $\|\Re(h(z))\|_R \le R^{\rho+\varepsilon}$，且 $\rho+\varepsilon<k$，其中 k 是大于 ρ 的任意整数，我们有

$$|h^{(k)}(z_0)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}z\right| \le C\cdot\frac{\|f\|_R}{R^k}$$

由 Borel 引理，我们知道 $\|f\|_R$ 可以被实部控制，而实部又被 $R^{\rho+\varepsilon}$ 控制，所以我们知道当 $R\to+\infty$ 时，有 $h^{(k)}(z_0)=0$，故 h 是次数小与等于 ρ 的多项式. □

3 Mittag-Leffler 定理

设 z_0 是 f 的一个极点，f 在 z_0 处的 Laurent 展开为

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

我们称

$$\mathrm{Pr}(f,z_0) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0} = P\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

为 f 在 z_0 的**主要部分(principal part)**.

定理 3.1 (Mittag-Leffler)**.** *令 $\{z_n\}$ 是一列互异的复数列且 $|z_n|\to+\infty$，令 $\{P_n\}$ 是一列无常数项的多项式，则存在一个只以 z_n 为极点，$P_n(\dfrac{1}{z-z_n})$ 为主要部分的亚纯函数 f，我们可以把 f 写成*

$$f(z) = \sum_n\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]+\varphi(z)$$

其中 Q_n 是一些多项式，φ 是整函数. 且这个级数在不包含极点的任何一个紧子集上一致收敛且绝对收敛.

证明: 我们可以通过平移整个函数使得没有 $z_n=0$，故不失一般性，我们假设所有的 $z_n\neq 0$.

我们将 $P_n\left(\dfrac{1}{z-z_n}\right)$ 在原点幂级数展开，即将

$$\frac{1}{(z-z_n)^k} = \frac{(-1)^k}{z_n^k\left(1-\dfrac{z}{z_n}\right)^k} = \frac{1}{z_n^k}\sum b_j\left(\frac{z}{z_n}\right)^j$$

其中 b_j 是由和 k 相关的二项式系数决定的. 特别地，我们知道 $\dfrac{1}{(1-T)^k}$ 展开的收敛半径是 1，从而我们可以估计：

$$\lim_{j\to+\infty}|b_j|^{1/j}=1,\quad \text{i.e.}\quad |b_j| = o\left((1+\varepsilon)^j\right),\quad j\to+\infty$$

令 $\deg Q_n \le d_n-1$ 使得 Q_n 是 $P_n(1/(z-z_n))$ 幂级数展开的前 d_n 项，则存在常数 B_n 使得

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right| \le B_n\sum_{j=d_n}^{+\infty}(1+\varepsilon)^j\left|\frac{z}{z_n}\right|^j$$

因此如果有 $|z/z_n|\leq 1/2$，我们可以选取适当的 d_n 使得

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right|\leq\frac{1}{2^n}$$

从而我们知道对于给定的半径 R，且有 $R\leq|z_N|$，我们可以把和级数写成

$$\sum_{n=1}^{N}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]$$

第一部分是有限和，第二部分在 $|z|\leq R/2$ 中一致收敛且绝对收敛，故定理得证. □

4 特殊域上面的 Mittag-Leffler 定理与 Weierstrass 乘积

定理 4.1 (特殊域上的 Mittag-Leffler 定理)**.** 设 $\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列，f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，若

(i) f 的全部互不相同的极点 $\{a_n\}$ 都是 f 的 1 阶极点，记 $c_n=Res(f,a_n)$.

(ii) 原点 O 不是 f 的极点.

(iii) f 在 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\gamma_n$ 上有界.

则

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$$

且右端的式子在 $\mathbb{C}\backslash\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛.

证明: 对每个 γ_n，令 D_n 是由 γ_n 所围成的单连通域. 设 $z\in(B(0,R)\backslash\{0\})\backslash\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$，取 m，使得 $B(0,R)\subset D_m$. 考虑积分

$$I_m=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_m}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$

显然 $g(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi(\xi-z)}$ 在 D_m 中的全部极点为 $0,z,a_n\in D_m$，且在这些极点的留数为

$$-\frac{f(0)}{z},\quad\frac{f(z)}{z},\quad\frac{c_n}{a_n(a_n-z)}$$

由留数定理我们知道

$$I_m=-\frac{f(0)}{z}+\frac{f(z)}{z}+\sum_{a_n\in D_m}\frac{c_n}{a_n(a_n-z)}$$

可以写成

$$f(z)=f(0)+\sum_{a_n\in D_m}c_n\left(\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{a_n}\right)+zI_m,\quad z\in B(0,R)\backslash a_n\colon n\in\mathbb{N}$$

注意到

$$|zI_m| \leq R\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_m}\frac{|f(\xi)|}{|\xi|\,||\xi|-|z||}|\mathrm{d}\xi| \leq \frac{R}{2\pi}\frac{Ml_m}{d_m(d_m-R)} \to 0(m\to+\infty)$$

其中 $M=\sup\limits_{\xi\in\cup\gamma_n}|f(\xi)|<+\infty$，故知

$$f(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$$

在 $\mathbb{C}\backslash\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛于 $f(z)$. □

定理 4.2 (特殊域上的 Weierstrass 乘积)**.** 设 $\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列，f 是整函数. 若

(i) f 的全部互不相同的零点集为 $\{a_n\}$，在每个 a_n 处的零点阶数为 k_n.

(ii) $f(0)\neq 0$.

(iii) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ 上有界.

则

$$f(z)=f(0)\mathrm{e}^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\mathrm{e}^{\frac{k_n}{a_n}z}$$

其中右端在 $\mathbb{C}\backslash\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛.

证明: 对 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 应用定理 4.1，并注意到

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a_n\right)=k_n$$

便知

$$\frac{f'(0)}{f(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{z-a_n}+\frac{k_n}{a_n}\right)$$

在 $\mathbb{C}\backslash\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛于 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. 于是

$$\log\frac{f(z)}{f(0)}=\int_0^z\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta=\frac{f'(0)}{f(0)}z+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z\left(\frac{k_n}{\zeta-a_n}+\frac{k_n}{a_n}\right)\mathrm{d}\zeta$$

其中，积分是沿 $\mathbb{C}\backslash\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 中连接 O 和 z 的任意可求长曲线进行的，这个积分是良定义的，并且上式右端在 $\mathbb{C}\backslash\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛. 因此

$$f(z)=f(0)\mathrm{e}^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\int_0^z\left(\frac{k_n}{\zeta-a_n}+\frac{k_n}{a_n}\right)\mathrm{d}\zeta}=f(0)\mathrm{e}^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\mathrm{e}^{\frac{k_n}{a_n}z}$$

□

最后，我们介绍 Blaschke 定理.

定理 4.3 (Blaschke 定理)**.** 设 $\{a_n\}$ 是 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 中互不相同的点列，$\{k_n\}$ 是一列自然数. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n\,(R-|a_n|)<\infty$$

则

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{R\left(a_j-z\right)}{R^2-\bar{a}_jz}\right)^{k_j}\left(\frac{\left|a_j\right|}{a_j}\right)^{k_j}\right\}$$

必在 $B(0,R)$ 上内闭一致收敛于一个全纯映射 $f:B(0,R)\to B(0,1)$，使得 f 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集，且 f 在每个 a_n 处的零点阶数恰为 k_n .

证明: 由所给条件知 $\{a_n\}$ 在 $B(0,R)$ 中无极限点，因而 $B(0,R)\setminus\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是开域，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n\left(R^2-|a_n|^2\right)}{(R^2-\bar{a}_nz)\,(z-a_n)}$$

在 $B(0,R)\setminus\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛于 $g\in H\left(B(0,R)\setminus\{a_n:n\in\mathbb{N}\}\right)$. 显然，$g$ 是 $B(0,R)$ 上的亚纯函数，恰以 $\{a_n\}$ 为其极点集，且在每个 a_n 处的留数为 k_n . 令

$$\begin{aligned}F(z) &= \int_0^z g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z\frac{k_n\left(R^2-|a_n|^2\right)}{(R^2-\bar{a}_n\zeta)\,(\zeta-a_n)}\mathrm{d}\zeta\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}k_n\int_0^z\left(\frac{1}{\zeta-a_n}+\frac{\bar{a}_n}{R^2-\bar{a}_n\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

其中，积分是沿 $B(0,R)\setminus\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 中连接 O 和 z 的可求长曲线进行的，并且上式右端在 $B(0,R)\setminus\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 上内闭一致收敛. 显然，$F(z)$ 是 $B(0,R)\setminus\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ 上的多值全纯函数，但在同一点处的任意两个函数值之差为 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍，故

$$h(z)=\mathrm{e}^{F(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{k_n\int_0^z\left(\frac{1}{\zeta-a_n}+\frac{a_n}{R^2-\bar{a}_n\zeta}\right)\mathrm{d}\zeta}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R\,(a_n-z)}{R^2-\bar{a}_nz}\right)^{k_n}\left(\frac{R}{a_n}\right)^{k_n}$$

是 $B(0,R)$ 上的全纯函数，h 恰以 $\{a_n\}$ 为其零点集，且在每个 a_n 处的零点阶数恰为 k_n. 再注意到 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|}{R}\right)^{k_n}$ 是一个正数,便知原式在 $B(0,R)$ 上内闭一致收敛于 $h(z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|}{R}\right)^{k_n}$. 最后,由于对任意 $z\in B(0,R)$, $\left|\frac{R\,(a_n-z)}{R^2-\bar{a}_nz}\right|<1$，若令

$$f(z)=h(z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|}{R}\right)^{k_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R\,(a_n-z)}{R^2-\bar{a}_nz}\right)^{k_n}\left(\frac{|a_n|}{a_n}\right)^{k_n}$$

则

$$f(B(0,R))\subset B(0,1)$$

□

5 应用

我们来看一些经典命题的处理.

命题 5.1. $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ 是整函数.

证明: 我们考虑无穷乘积的形式：

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n}$$

而由于 $\sum\left(\dfrac{R}{n}\right)^2$ 对任何正实数 R 都收敛，我们知道 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\dfrac{s}{n})e^{-s/n}$ 正是 Weierstrass 乘积，故内闭一致收敛，从而 $1/\Gamma(z)$ 内闭一致收敛，从而是整函数. □

我们尝试利用特殊域上的定理去很简单地得到一些经典的恒等式.

命题 5.2. 用 *Laurent* 级数的主要部分表示 $\cot z - \dfrac{1}{z}$.

证明: $f(z) = \cot z - \dfrac{1}{z}$ 的全部极点 $\pm n\pi\,(n\in\mathbb{N})$ 都是 1 阶的，且 $\operatorname{Res}(f,\pm n\pi)=1$，$f(0)=0$.

令 γ_n 为以 O 为中心,以 $(2n-1)\pi$ 为边长,并且平行于坐标轴的正方形折线,则 $\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列. 注意到

$$\begin{aligned}\left|\cot\left(\pm\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+\mathrm{i}y\right)\right| &= \left|\frac{\mathrm{e}^{\pm(2n-1)\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2y}+1}{\mathrm{e}^{\pm(2n-1)\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2y}-1}\right| \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2|y|}-1}{\mathrm{e}^{2|y|}+1}\le 1 \\ \left|\cot\left(x\pm\mathrm{i}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right| &= \left|\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\mathrm{e}^{\pm(2n-1)\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\mathrm{e}^{\pm(2n-1)\pi}}\right| \\ &\le \frac{\mathrm{e}^{(2n-1)\pi}+1}{\mathrm{e}^{(2n-1)\pi}-1}\le\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\end{aligned}$$

因而 $\cot z-\dfrac{1}{z}$ 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ 上有界. 故由定理 4.1 得

$$\cot z-\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)+\left(\frac{1}{z+n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

□

命题 5.3. 求 $\sin z$ 的因子分解.

证明: 整函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的全部零点 $\pm n\pi\,(n\in\mathbb{N})$ 都是 1 阶的，且 $f(0)=1$. 设 $\{\gamma_n\}$ 是上面给出的正则曲线列，则

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\cot z-\frac{1}{z}$$

在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ 上有界. 故由定理 4.2 得

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n\pi}}\right]\left[\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n\pi}}\right]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

或者

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

□

有了这个结论之后我们就可以轻松得到余元公式.

命题 5.4. 对 $\Re(s)>0$，我们有 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

证明: 我们由 Gamma 函数的乘积形式，知道

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}=\frac{1}{\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s)}=s\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi s)}{\pi}$$

从而命题得证. □

进一步，我们可以计算一些从前难以得到的乘积.

例 5.5. 计算 $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

证明: 我们注意到

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{i}{n}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{i^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi i)}{\pi i}=\frac{\sinh\pi}{\pi}$$

□

但是按照相同的方法我们发现不好做 $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^k}\right)$ 这样的结果，所以我们需要对方法进行一般性的推广.

命题 5.6. 当 $a_1+a_2+\cdots+a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$ 时，我们有

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_k)}=\frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_k)}$$

证明: 由于 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，我们注意到

$$\frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a)}=\frac{b}{a}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}=e^{\gamma(a-b)}\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n+a}{n+b}e^{(b-a)/n}\right]$$

从而累乘即得结论. □

例 5.7. 计算 $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$.

证明: 我们注意到

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n-\omega)(n-\omega^2)}{n^3}=\frac{\Gamma^3(1)}{\Gamma(2)\Gamma(1+\omega)\Gamma(1+\omega^2)}=\frac{\sin(\pi(1+\omega))}{\pi}=\frac{\cosh(\sqrt{3}\pi/2)}{\pi}$$

□

除了无穷乘积之外，我们还可以处理一些级数问题.

定理 5.8. 设 f 是有理函数，∞ 是 f 的至少 2 阶零点，并且 f 的全部互不相同的极点 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 都不是整数，则

(i) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot(\pi z),a_k).$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)/\sin(\pi z),a_k).$

证明: 我们只证明第一个，第二个的证明是类似的.

考虑函数 $g(z)=f(z)\cot(\pi z)$，则 $g(z)$ 的所有极点为所有整数和 $a_1,\cdots,a_m$.

令 γ_n 为以 O 为中心,以 $(2n-1)$ 为边长,并且平行于坐标轴的正方形折线,则 $\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列，记 D_n 为 γ_n 的内部. 我们知道 $\cot\pi z$ 在 $|\gamma_n|$ 上有界，记为 M.

从而我们考虑在 γ_n 上顶边的围道积分.

$$\left|\int_{-(n-1/2)}^{n-1/2}f(n-1/2+iy)\cot(\pi z)\mathrm{d}y\right|\le 2nM|f(n+i\xi)|\to 0(n\to+\infty)$$

其他三边同理，故我们知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}f(z)\cot\pi z\mathrm{d}z=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}f(k)+\sum_{a_k\in D_n}\mathrm{Res}(f(z)\cot(\pi z),a_k)$$

令 $n\to+\infty$ 即得结论. □

例 5.9. 计算 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^2}.$

证明: 令 $f(z)=\dfrac{1}{(z+a)^2}$ 为满足定理 5.8 的有理函数，从而我们知道 f 的极点为 $-a$，故

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)=-\pi\mathrm{Res}(f(z)\cot(\pi z),-a)=-\pi\cot'(-\pi a)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

□

例 5.10. 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$，其中 $k\in\mathbb{N}^*$.

证明: 考虑 $f(z)=\dfrac{1}{z^{2k}}$，我们只需要把 0 从左边移去即得.

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}=-\pi\mathrm{Res}(f(z)\cot(\pi z),0)$$

要计算上面的式子，我们只需要求 $\cot(\pi z)$ 的 Laurent 展开，设 B_n 为伯努利数，我们熟知 $\cot z=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2k}(-1)^kB_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}$，从而我们知道

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{-\pi}{2}\frac{2^{2k}(-1)^kB_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k-1}$$

□

我们下面逐步了解一些命题，最终将达到一个很漂亮的结论.

命题 5.11. *给定整函数 f,g，其中 f 与 g 没有公共零点，则存在整函数 A,B 使得 $Af+Bg=1$.*

证明: 由 Mittag-Leffler 定理，我们知道存在亚纯函数 M 使得它的极点只在 g 的零点 z_n 处，并且主要部分 $\mathrm{Pr}(M,z_n)$ 与 $\mathrm{Pr}(1/fg,z_n)$ 相同(注意 f,g 无相同零点)，从而我们知道 $M-\dfrac{1}{fg}$ 在 z_n 点全纯.

故我们令 $A=Mg$，$B=-f(M-\dfrac{1}{fg})$，我们就得到了

$$Af+Bg=Mfg-Mfg+1=1$$

□

命题 5.12. *令 f,g 是整函数，则*

(a) 存在整函数 h 和整函数 f,g，使得 $f=hf_1$，$g=hg_1$，并且 f_1,g_1 没有公共零点.

(b) 存在整函数 A,B 使得 $Af+Bg=h$.

证明:

(a) 设 f 与 g 的公共零点为 $\{z_n\}$，且 f 与 g 在公共零点处的阶分别为 α_n,β_n，我们记 $d_n=\min\{\alpha_n,\beta_n\}$. 由 Weierstrass 乘积我们知道可以构造出整函数 h 使得只在 $\{z_n\}$ 处有零点且阶为 d_n，下面我们证明这样的 h 满足条件.

由 $f_1=f/h$，由于 h 的零点均为 f 的零点，且阶更小，我们知道 f_1 是整函数，同理 g_1 是整函数. 又因为若 a 是 f_1 和 g_1 的公共零点，则说明 $f/h,g/h$ 都在 a 处为 0，则 h 在 a 处的阶 $d_a\le\min\{\alpha_a,\beta_a\}-1$，与 d_a 取法矛盾，故 f_1,g_1 无相同零点.

(b) 由命题 5.11 知道存在整函数 A,B 使得 $Af_1+Bg_1=1$，从而 $Af+Bg=h(Af_1+Bg_1)=h$.

□

接下来来证明我们的最终目的：

命题 5.13. 整函数环上的有限生成理想都是主理想.

证明: 由命题 5.12 可知，整函数环上可以求最大公约数，故我们考虑生成元组为 $\{f_1,\cdots,f_n\}$，设 h 是命题 5.12 中的“最大公约数”，我们知道 $(f_1,f_2)=(h)$，再结合

$$(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(f_1,f_2)+(f_3,\cdots,f_n)=(h)+(f_3,\cdots,f_n)=(h,f_3,\cdots,f_n)$$

从而我们对生成元数量归纳即可得到结论. □

References

[1] 复变函数/史济怀，刘太顺编著. ——合肥: 中国科学技术大学出版社,1998.12,IBSN: 978-7-312-00999-0

[2] Complex Analysis(GTM 103), Serge Lang, Springer

[3] Weierstrass定理——解决一类常见的无穷乘积(https://zhuanlan.zhihu.com/p/124237201)

[4] 傅里叶级数、伯努利数、留数定理求解无穷级数的收敛值——巴塞尔问题的推广https://zhuanlan.zhihu.com/p/680125102