复分析学习笔记

杨毅涵

December 15, 2024

Nankai University

Contents

Chapter 1

微分与积分

1.1 $C-R$ 方程

定理 1.1 (Cauchy-Riemann 方程)
$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为开区域 D 上的函数，$z_0=x_0+iy_0$，则 f 在 z_0 处可导的充分必要条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

注 1.1 我们有

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

定义 1.1 将 $f(z)=f(x,y)$ 看做是 z 与 $\bar{z}$ 的函数，定义复微商：

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

定理 1.2 u,v 在 D 上可微，则 $f=u+iv$ 解析的充分必要条件为 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0.$

注 1.2 我们实际上还有 $f'=\dfrac{\partial f}{\partial z}=2\dfrac{\partial u}{\partial z}.$

1.2 多值函数

阅读《复分析：可视化方法》中 2.6 节内容，写的非常详尽.

1.3 复积分

定理 1.3 设 $w(t)=u(t)+iv(t)$，满足 u,v 有原函数 U,V，则 $w(t)$ 有原函数 $W(t)=U(t)+iV(t)$，则

$$\int_a^b w(t)\,\mathrm{d}t = W(t)|_a^b$$

定义 1.2 设 Γ: $z(t)=x(t)+iy(t), a\le t\le b$ 是一条路径，$f(z(t))$ 在路径上可积，则沿 Γ 的曲线积分定义为

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\left(\int_\Gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y\right)$$

例 1.1 对任何复数 a 及正数 $r>0$，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}(z-a)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n\ne -1 \\ 1, & n=-1 \end{cases}, \quad n \text{ 是整数}$$

1.4 Cauchy 积分定理

定理 1.4 Γ 是正向简单闭路径，内部为 D，$\overline{D}=D\cup\Gamma$，若 $f\in H(\overline{D})$，则

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

笔记 1.1 由于我们并没有 u_x,u_y,v_x,v_y 的连续性的假设，所以我们无法直接利用 *Green* 定理来说明这件事情.

详细的证明(参考的是 *Goursat* 的证明)在技术上写起来比较复杂，但大致思想是：

- 证明在 D 中任何一个三角形边界上的积分为 0(使用闭集套定理，结合导数诱导的不等式放缩证明).

- 证明 D 上简单闭折线上的积分为 0(利用三角形分割闭折线即可).

- 证明简单闭曲线可以被闭折线逼近.

定理 1.5 函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 为 D 内任一闭曲线(不必是简单的)，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

证明: 把 C 拆分为有限个简单闭曲线即可. □

推论 1.1 由 *Cauchy* 积分定理我们可以有以下推论：D 是单连通区域，$f \in H(D)$，则

- 对于 D 中任何闭路径 Γ，有 $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

- 对于 D 中任何从 z_1 到 z_2 的两条路径 Γ_1 与 Γ_2，有

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$

定理 1.6 (多连通域的 Cauchy 积分定理) 多连通域中，有

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\mathrm{d}z$$

1.5 原函数，积分与路径无关

定义 1.3 F, f 定义在开区域 D 中，若有

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D$$

则称 F 为 f 在 D 上的一个原函数.

定理 1.7 f 在 D 上连续且有原函数 F，则对任何从 z_1 到 z_2 的任何路径 Γ 有

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$$

证明: 不妨设 Γ: $z(t) = x(t) + iy(t), a \le t \le b$ 是光滑曲线，于是

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t = F(z_2) - F(z_1)$$

□

定理 1.8 若 $f(x)$ 在开域 D 中连续且其积分与路径无关，则 f 有原函数.

证明: 直接构造

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)\,\mathrm{d}w$$

从而有

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(w)\mathrm{d}w$$

取 z 到 $z + \Delta z$ 的路径为直线[1]，从而有

$$\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(w)\mathrm{d}w = \frac{1}{\Delta z}\int_0^1 f(z+t\Delta z)\cdot\Delta z\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z+t\Delta z)\mathrm{d}t$$

由连续性我们知道 $F'(z) = f(z)$. □

[1]取足够小的标准邻域，可以做到直线连通，即凸集

1.6 Cauchy 型积分，Cauchy 积分公式，导数公式

定理 1.9 设 Γ 是一条路径，f 在 Γ 上连续，则 *Cauchy* 型积分

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}$$

作为 z 的函数在 $\mathbb{C}-\Gamma$ 上解析，并且 g 在 $\mathbb{C}-\Gamma$ 上无穷次可导，其导数公式为

$$g^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z)^{n+1}},\quad z\in\mathbb{C}-\Gamma$$

证明： 取定 $z\in\mathbb{C}-\Gamma$，并且令 $\rho=\inf\{|z-w|: w\in\Gamma\}>0$，取 $\Delta z\neq 0$ 且 $|\Delta z|<\frac{\rho}{2}$，有

$$\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z-\Delta z)(w-z)}$$

令差函数

$$\lambda(\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z-\Delta z)(w-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z)^2}$$

计算得

$$\lambda(\Delta z)=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z-\Delta z)(w-z)^2}$$

由于 $f(z)$ 在 Γ 上有界，从而不妨设 $|f(w)|\leq M$，于是

$$|\lambda(\Delta z)|\leq\frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{M}{\frac{\rho}{2}\cdot\rho^2}\cdot|\Gamma|\to 0(\Delta z\to 0)$$

从而我们可以归纳得证. □

定理 1.10 (Cauchy积分公式与导数公式) 设正向简单闭路径 Γ 的内部为 D，$f\in H(\overline{D})$，则对任何 $z\in D$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}$$

此外 f 在 D 上无穷次可导，并且对任何的 $n\geq 0$，$z\in D$ 有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z)^{n+1}}$$

证明： 任意取定 $z\in D$，再取 $\varepsilon>0$，使得 $\Gamma_\varepsilon=\{w\colon |w-z|=\varepsilon\}$ 及其内部包含在 D 中，由多连通域的 Cauchy 积分定理我们知道

$$\int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}=i\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{it})\mathrm{d}t$$

上述对充分小的 ε 都成立，从而利用 f 的连续性，我们取极限有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}$$

□

注 1.3 对复周线仍然成立，证明利用多连通域的 *Cauchy* 积分定理即可.

推论 1.2 (平均值性质) 设 D 是开域，$f\in H(D)$，则对任何 $z\in D$ 及 $\varepsilon>0$，只要 $\{w\colon |w-z|\leq\varepsilon\}\subset D$，就有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{it})\mathrm{d}t$$

定理 1.11 (Morera 定理) 若 $f(z)$ 在开域 D 中连续，并且对 D 中任一闭路径 Γ 有 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0$，则 $f\in H(D)$.

证明： 由积分与路径无关我们知道 f 是一个解析函数的导数，而我们知道解析函数是无穷次可导的，从而 f 解析. □

定理 1.12 (Cauchy 不等式) 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，a 为 D 内一点，以 a 为圆心 R 为半径作圆，只要圆周及圆内部都在 D 中，则

$$|f^{(n)}(a)|\leq\frac{n!M(R)}{R^n},\quad M(R)=\sup_{|z-a|=R}|f(z)|$$

1.7 最大模原理

引理 1.1 设 D 是开域，$f \in H(D)$. 若 $|f(z)|$ 在 D 中是常数，则 $f(z)$ 是常数.

证明: 若 $|f(z)| \equiv 0$，显然 $f(z) \equiv 0$，下设 $|f(z)| \equiv c(\neq 0)$，于是

$$u^2(x,y) + v^2(x,y) = c^2 \neq 0$$

对两边求偏导有

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0$$

但是由 $C-R$ 方程知道

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

从而我们知道

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ vu_x - uv_x = 0 \end{cases}$$

解得 $u_x = v_x = 0$，从而 f 是常数. □

定理 1.13 (最大模原理) 设 D 是开域，$f \in H(D)$，若 $|f(z)|$ 在 D 内某点达到最大，则 f 是常数.

证明: 不妨设 $|f(z)|$ 在 D 内达到最大值 $M > 0$. 设

$$D_1 = \{z \in D \colon |f(z)| < M\}, \quad D_2 = \{z \in D \colon |f(z)| = M\}$$

若能证明 D_2 是开集，则由于 D_1 与 D_2 是不相交的开集，且并集为 D，则知道 $D_1 = \varnothing$，从而由引理知道是常数.

假设 D_2 不是开集，则有 $c \in D_2$，使 D_2 不是 c 的邻域. 但是 $c \in D$ 而且 D 是开集，从而有 $r > 0$ 使得 $\overline{V}(c,r) \subset D$，此时 $\overline{V}(c,r)$ 中必定有 D_1 中的点，不妨设

$$\Gamma \colon z = c + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

位于 D 中，并且有 $0 < t_0 < 2\pi$ 使得 $z_0 = c + re^{it_0} \in D_1$.

由于 $|f(z_0)| < M$，所以由连续性，有 $\delta, \eta > 0$，使得

$$|f(c+re^{it})| \leq M - \eta, \quad 0 < t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta < 2\pi$$

从而由平均值性质我们有

$$\begin{aligned} M &= |f(c)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(c+re^{it})\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0-\delta}|f(c+re^{it})|\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|f(c+re^{it})|\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0+\delta}^{2\pi}|f(c+re^{it})|\mathrm{d}t \\ &< \frac{M}{2\pi}(t_0-\delta) + \frac{M-\eta}{2\pi}\cdot 2\delta + \frac{M}{2\pi}(2\pi - t_0 - \delta) = M \end{aligned}$$

矛盾，故 D_2 是开集，从而证毕. □

推论 1.3 设 D 是开域，$f \in H(D)$，则当 f 非常数时，$|f(z)|$ 在 D 上不可能达到最大.

推论 1.4 设 D 是有界开域，$f \in H(D)$，f 在 $\overline{D}$ 上连续，非常数，则 $|f(z)|$ 的最大值能且只能在 ∂D 上达到.

定理 1.14 (最小模原理) 设 D 是有界开域，$f \in H(D)$，f 在 $\overline{D}$ 上连续，非常数，且没有零点，则 $|f(z)|$ 的最小值能且只能在 ∂D 上达到.

命题 1.1 设 f 在开域 D 解析且非常数，若 $|f(z)|$ 在 D 中达到最小值 m，则 $m = 0$.

证明: 反证，若 $m > 0$，考虑函数 $\dfrac{1}{f(x)}$，使用最大模原理即可. □

例 1.2 $f = u + iv$ 在开域 D 中解析且非常数，则 u 不能在 D 中达到最大值.

证明: 考虑 e^f 在 D 中解析且非常数，从而

$$|e^f| = |e^u \cdot e^{iv}| = e^u$$

在 D 中不能达到最大值，从而 u 不能达到. □

1.8 Schwarz 定理，Liouville 定理，代数基本定理

引理 1.2 (Schwarz) 设 Γ 是正向简单闭路径，D 是其内部，$z_0 \in D$，$f \in H(\overline{D}-\{z_0\})$. 若 f 在 z_0 连续，则 f 在 z_0 解析，从而 $f \in H(\overline{D})$.

证明: 在 D 中取 $z \neq z_0$，并且在 D 中取两个分别以 z_0 和 z 为中心，以 $r>0$ 为半径的闭圆.

由多连通域的 Cauchy 定理，我们有

$$\int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z} = \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z} + \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}$$

但由 Cauchy 公式，我们有

$$\int_{|w-z|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z} = 2\pi i f(z)$$

此外，由连续性我们知道

$$\lim_{r\to 0}\int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z} = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{z_0+re^{it}-z}\cdot ire^{it}\mathrm{d}t = 0$$

这样我们知道对于 $z \neq z_0$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}$$

但上式右边是Cauchy型积分，在 D 中解析，因此由 f 在 z_0 的连续性知道 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w-z}$ 对一切 $z \in D$ 成立，故 f 在 z_0 解析. □

定理 1.15 (Schwarz) 设 f 在 $|z|<1$ 中解析，$|f(z)| \leq 1$，$f(0)=0$，则
(1) $|f(z)| \leq |z|$ 而且 $|f'(0)| \leq 1$;
(2) 若有 $0<z_0<1$ 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$ 或 $|f'(0)|=1$，则有实数 α 使得 $f(z)=e^{i\alpha}z$.

证明: 令

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & 0<|z|<1 \\ f'(0), & z=0 \end{cases}$$

则 $g(z)$ 在 $0<|z|<1$ 上解析，在 $z=0$ 连续，由 Schwarz 引理我们知道在 $|z|<1$ 时解析. 现任意固定 $z,|z|<1$，任取 r 使得 $|z|<r<1$，由最大模原理，我们有

$$|g(z)| \leq \sup\{|g(w)| \colon |w|=r\} = \sup\left\{\left|\frac{f(w)}{w}\right| : |w|=r\right\} \leq \frac{1}{r}$$

在上述不等式中令 $r\to 1$，我们知道

$$|g(z)| \leq 1$$

从而我们知道 $|f(z)|\leq |z|$ 且 $|f'(0)|=|g(0)|\leq 1$.

若有 $0<|z_0|<1$ 使得 $|f(z_0)|=|z_0|$ 或者 $|f'(0)|=1$，这说明 $|g(z)|$ 在内部取到最大模，说明 $g(z)$ 是常数，从而 $g(z)=e^{i\alpha}$. □

定理 1.16 (Liouville) 有界整函数必是常数.

证明: 设 f 是有界整函数，$|f(z)|\leq M$，任意固定 $z\in\mathbb{C}$，则对任何 $R>0$，由导数公式

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=R}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z)^2}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^2}\cdot 2\pi R = \frac{M}{R}$$

但当 $R\to\infty$ 时，$\dfrac{M}{R}\to 0$，从而 $f'(z)=0$，由 z 的任意性得证. □

定理 1.17 (代数基本定理) $n(n\geq 1)$ 阶多项式至少有一个零点.

证明: 设 $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k$，$a_n\neq 0$，$n\geq 1$. 假设 $P(z)$ 无零点，于是 $Q(z)=\dfrac{1}{P(z)}$ 是一个整函数，由

$$\begin{aligned}|P(z)| &\geq |a_n z^n| - [|a_0| + |a_1 z| + \cdots + |a_{n-1}z_{n-1}|] \\ &= |z|^n\left\{|a_n| - \left[\left|\frac{a_0}{z^n}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|\right]\right\}\end{aligned}$$

从而存在 $R>0$，对于 $|z|>R$，有 $|P(z)|\geq R^n\dfrac{|a_n|}{2}$，从而 $|P(z)|$ 有最小值，从而 $Q(z)$ 是有界整函数，从而 $Q(z)$ 为常数，因此 $P(z)$ 为常数，这是矛盾的. □

1.9 解析函数与调和函数

记 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子.

定义 1.4 如果二元实变函数 $H(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$\Delta H = 0$$

则称 $H(x,y)$ 为区域 D 内的**调和函数**.

定义 1.5 在区域 D 内满足 *Cauchy-Riemann* 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

的两个调和函数 u, v 中，v 被称为 u 在区域 D 内的**共轭调和函数**.

定理 1.18 $f = u + iv \in H(D)$，则在区域 D 内 $v(x,y)$ 为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

证明: 注意到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

所以有

$$\Delta u = 0$$

同理有

$$\Delta v = 0$$

□

定理 1.19 设 $u(x,y)$ 是在单连通区域 D 内的调和函数，则存在函数 v 使得 $f = u + iv$ 是 D 内的解析函数.

证明: 由于我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

即 $-\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

从而我们知道 $-\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$ 是全微分，令

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\ \mathrm{d}v(x,y)$$

则

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C$$

从而我们知道 u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程，从而 f 解析. □

笔记 1.2 任一个二元调和函数的任意阶偏导数也是调和函数.

定理 1.20 (调和函数的平均值性质) 若 $u(z)$ 是 $D=\{z\colon |z-a|<R\}$ 中的实调和函数，则对任何 $0<r<R$，我们有

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

定理 1.21 (调和函数最大值最小值原理) 单连通开域 D 中的非常数实调和函数 $u=u(z)$ 不能在 D 中达到最大值与最小值.

证明： 假设 $u(z)$ 在 D 中达到最大值 M，把 D 分解成下面两个不相交的集合：

$$D_1=\{z\in D\colon u(z)<M\}\,,\quad D_2=\{z\in D\colon u(z)=M\}$$

利用调和函数的平均值性质定理我们知道 D_2 是开集，而由于连续性我们知道 D_1 是开集，从而我们知道两个不交开集的并是开集，所以我们知道 $D_1=\varnothing, D_2=D$，从而 u 是常数，矛盾. □

Chapter 2

级数

2.1 基础概念

定义 2.1 ★

- 称 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上**收敛**于 $f(z)$，若对每一个 $z \in D$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$，此时我们记成 $f_n(z) \to f(z)(z \in D)$.
- 称 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上**一致收敛**于 $f(z)$，若对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对一切 $n > N$ 以及任意 $z \in D$，有 $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$，此时我们记为 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.
- 若 D 是开域，$\{f_n(z)\}$ 在 D 的任何一个紧子集上一致收敛于 $f(z)$，则称 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上**紧一致收敛**于 $f(z)$

定理 2.1 设 D 是开域，$\{f_k(z)\}$ 在 D 上紧一致收敛于 $f(z)$，则

- 若对 $\forall k$, $f_k(z)$ 在 D 上连续，则 $f(z)$ 也在 D 上连续.
- 若对 $\forall k$，$f_k(z)$ 在 D 上解析，则 $f(z)$ 也在 D 上解析，此外对任何 $n \geq 1$，有 $\{f_k^{(n)}(z)\}$ 在 D 上紧一致收敛于 $f^{(n)}(z)$.

证明: 只证第二条，任取 $z \in D$ 以及 $V(z, \varepsilon) \subset D$，在任取 $V(z, \varepsilon)$ 中的闭路径，

我们知道 $\{f_k(z)\}$ 在 Γ 上一致收敛 $f(z)$，从而易知

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Gamma f_k(z)\mathrm{d}z=\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$$

但 $\{f_k(z)\}$ 在 D 上解析，从而由 Cauchy 定理，对一切 $k\geq 1$ 有 $\displaystyle\int_\Gamma f_k(z)\mathrm{d}z=0$，因此同样有 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0$.

所以由 Γ 的任意性以及 Morera 定理知道 $f(z)$ 在 $V(z,\varepsilon)$ 中解析，再由 $z\in D$ 的任意性我们知道 $f(z)$ 在 D 上解析，下面证明 $f_k^{(n)}(z)$ 紧一致收敛到 $f^{(n)}(z)$，由于对于任何的 $\overline{V(a,R+\varepsilon)}\subseteq D$，$\forall z\in V(a,R+\varepsilon)$，有

$$f_k^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-a|=R+\varepsilon}\frac{f_k(w)\mathrm{d}w}{(w-z)^{n+1}},\quad f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-a|=R+\varepsilon}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z)^{n+1}}$$

由于 Γ: $|w-a|=R+\varepsilon$ 是紧集，所以 $f_k(w)$ 在 Γ 上一致收敛于 $f(z)$，从而我们可以得到 $f_k^{(n)}(z)$ 在 $\overline{V}(a,R)$ 上一致收敛于 $f^{(n)}(z)$. □

2.2 幂级数

定理 2.2 幂级数 $P(z)=\sum_{j=0}^{+\infty}c_jz^j$ 如果在 $z=a$ 处收敛，则它在圆盘 $|z|<|a|$ 内处处收敛.

证明: 我们只需要证明在圆盘内绝对收敛即可，由于 $P(a)$ 收敛，所以存在 M 对所有 n 满足

$$|c_na^n|<M$$

如果 $|z|<|a|$，则令 $\rho=\dfrac{|z|}{|a|}<1$，所以有 $|c_nz^n|<M\rho^n$，从而

$$|P_n(z)-P_m(z)|\leq M(\rho^{m+1}+\cdots+\rho^n)=\frac{M}{1-\rho}(\rho^{m+1}-\rho^{n+1})$$

对于充分大的 m,n 可以任意小，从而证毕. □

注 2.1 更进一步地分析，如果 $P(z)$ 不是在平面上处处收敛，则必然会在某一点 d 处发散，现在假设 $P(z)$ 在某个离原点比 d 更远的地方收敛，由上面的定理我

们知道在 d 处收敛，这产生了矛盾，从而我们知道离原点比 d 更远的点全部发散，从而我们会有下面的结论.

推论 2.1 若 $P(z)$ 在 $z=d$ 处发散，则它在圆 $|z|=|d|$ 外各点都发散.

如此重复下去，我们最终会得到一个确定的圆周，在圆周内都收敛，在圆周外都发散，此时圆的半径我们称之为**收敛半径**.

要注意，圆周上的点的收敛性与发散性我们是不知道的.

定理 2.3 设 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$ 是幂级数. 令

$$r=\lim_{m\to+\infty}|c_m|^{\frac{1}{m}},\ R=\begin{cases}\dfrac{1}{r}, & 0<r<\infty,\\ 0, & r=\infty,\\ \infty, & r=0,\end{cases}$$

则

1. 对任何 $z\in V(a,R)$,级数绝对收敛,从而级数本身收敛;
2. 对任何 $z\notin \bar{V}(a,R)$,级数不收敛 (即发散);
3. 级数在 $V(a,R)$ 中紧一致收敛;
4. 级数的和函数 $S(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$ 在 $V(a,R)$ 中解析;
5. 级数在 $V(a,R)$ 中可逐项求导,即当 $z\in V(a,R)$ 时

$$S^{(n)}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[c_m(z-a)^m\right]^{(n)}$$

2.3 Taylor 展开，解析函数的零点，唯一性定理

定理 2.4 设 $z_0 \in \mathbb{C}, 0 < R \leq +\infty, f \in H(V(z_0, R))$. 则对任何 $z \in V(z_0, R)$ 有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

上式称为 $f(z)$ 在 z_0 点的 *Taylor* 展开或幂级数展开. 因此,若函数 f 在点 z_0 解析,则在 z_0 的一个邻域中可以展开成 *Taylor* 级数.

证明: 先设 $z_0 = 0$. 任意固定 $z \in V(0, R)$. 再取 $r > 0$ 使 $|z| < r < R$. 此时由 Cauchy 积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(w)\,dw}{w - z}$$

由于 $|w| = r > |z|, \left|\frac{z}{w}\right| < 1$ 因此

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{w^{k+1}}z^k$$

上述级数在圆周 $|w| = r$ 上是一致收敛的,因此 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(w)}{w^{k+1}}z^k$ 在 $|w| = r$ 上一致收敛于 $\frac{f(w)}{w - z}$. 于是由导数公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w)\,dw}{w - z} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w)\,dw}{w^{k+1}}\right]z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

对于一般的 z_0 平移即可. □

推论 2.2 为使 f 在 z_0 解析,充要条件是在 z_0 附近 f 可以表示为一个幂级数.

定理 2.5 若函数 f 在点 z_0 附近可以表示为一个幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

则该幂级数必是 f 在点 z_0 的 *Taylor* 级数,即 $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

证明: 此时在 $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ 两边关于 z 求 n 次导数,则知

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}$$

故 $f^{(n)}(z_0) = c_n \cdot n!$. □

定义 2.2 如果 f 在 z_0 解析, 在 z_0 附近 f 的泰勒展开形如

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad m \geq 1, c_m \neq 0$$

我们称 z_0 为 f 的 m 阶零点.

定理 2.6 设函数 f 在点 z_0 解析,则为使 z_0 是 f 的 m 阶零点,充要条件是 f 在 z_0 附近有形状 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$,其中 $g(z)$ 在 z_0 解析, $g(z_0) \neq 0$.

证明: 设 z_0 是 f 的 m 阶零点,于是 $f(z) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$,其中 $c_m \neq 0$.

这样在 z_0 附近有 $f(z) = (z-z_0)^m \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k(z-z_0)^{k-m} = (z-z_0)^m g(z)$,其中 $g(z) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k(z-z_0)^{k-m}$ 在 z_0 解析,而且 $g(z_0) = c_m \neq 0$.

反之设 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$,其中 m 是正整数, $g(z)$ 在 z_0 解析, $g(z_0) \neq 0$.

于是在 z_0 附近 $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$,其中 $b_0 = g(z_0) \neq 0$. 因此

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{k+m} = b_0(z-z_0)^m + b_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

从而 z_0 是 f 的 m 阶零点. □

注 2.2 若 z_0 是 f 的 m 阶零点, $m \geq 1$,则在 z_0 附近除 z_0 外, f 没有其他零点,即 f 的任何一个有限阶零点都是孤立的. 反之,若 z_0 是 f的零点集的聚点,即零点 z_0 不是孤立的,则 f 在 z_0 的 *Taylor* 展开式中的所有系数全为 0,从而 f 在 z_0 的一个邻域中恒为 0 . 这个结论导致下面的定理.

定理 2.7 (解析函数的唯一性定理) 设 f 在开域 D 中解析. 若 f 的零点集有一个属于 D 的聚点,则 f 在开域 D 中恒为 0 .

证明: 设 $D_1 = \{z \in D : z \text{ 是 } f \text{ 的零点的聚点 }\}$, $D_2 = D - D_1$.

由上面注得知 D_1 是开集. 其次, D_2 中的点或者是 f 的孤立的零点, 或者不是 f 的零点, 从而 D_2 也是开集.

这样连通开集 D 是这两个不相交的开集 D_1 和 D_2 的并，故 D_1 和 D_2 中必有一个是空集.

由于 $D_1 \neq \varnothing$,故 $D_2 = \varnothing$. 于是 $D_1 = D$,即 D 中所有点都是 f 的零点. □

推论 2.3 若 $f \in H(D)$,非常数,则对任何 $a \in \mathbb{C}$,集合 $E_a = \{z \in D : f(z) = a\}$ 中的点都是 E_a 的孤立点,它们称为 f 的 a 点.

推论 2.4 设 f 和 g 都在 D 中解析, $E \subset D$, E 在 D 中有聚点. 若 f 和 g 在 E 中相等,则 f 和 g 在 D 中相等.

2.4 Laurent 级数

定义 2.3 形如 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ 的函数项级数称为 ***Laurent* 级数**，其中 z_0 和 $\{c_k\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ 都是复数.

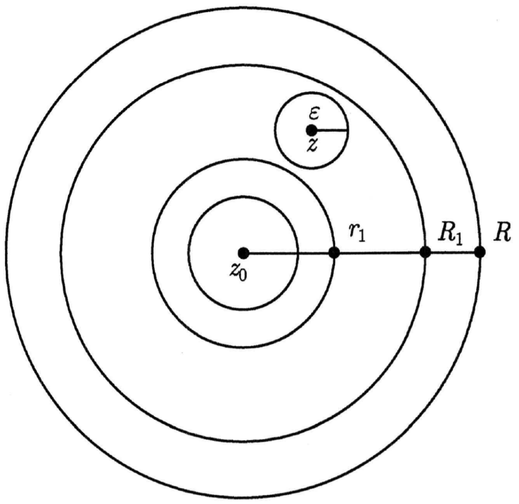
注 2.3 幂级数一定有收敛点,但 *Laurent* 级数不一定有收敛点,例如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^n$.

引理 2.1 设 $0 \leq r < R, A = \{z : 0 \leq r < |z-z_0| < R\}$ 是圆环. 若 $\sum\limits^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ 在 A 上收敛,则它在 A 上绝对而且紧一致收敛.

定理 2.8 设 $0 \le r < R, A = \{z : 0 \le r < |z - z_0| < R\}, f \in H(A)$,则
(i) 积分
$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$
仅与整数 k 有关,而与 $\rho \in (r, R)$ 无关;
(ii) 对任何 $z \in A$, $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

证明: 固定整数 k . 任取 $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. 由多连通域的 Cauchy 定理,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$
为证 (ii), 固定 $z \in A$,并取 $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$.

再取充分小的 $\varepsilon > 0$ 使 $\bar{V}(z, \varepsilon) \subset \{w : r_1 < |w - z_0| < R_1\}$,由多连通域的 Cauchy 定理,
$$\int_{|w-z_0|=R_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} = \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} + \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)\,dw}{w-z}$$



但由 Cauchy 公式知 $\displaystyle\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)\,dw}{w-z} = 2\pi i f(z)$,从而
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z}$$

现在当 $|w-z_0| = R_1\,(>|z-z_0|)$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(w-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k\end{aligned}$$

上面最后一个级数关于圆周 $|w-z_0| = R_1$ 上的 w 一致收敛. 于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1}\frac{f(w)\,dw}{w-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\cdot(z-z_0)^k$$

另一方面,当 $|w-z_0| = r_1\,(<|z-z_0|)$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{-1}{w-z} &= \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(w-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k\end{aligned}$$

上面最后一个级数关于圆周 $|w-z_0| = r_1$ 上的 w 一致收敛. 于是

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_1}\frac{f(w)\,dw}{w-z} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\cdot(z-z_0)^k$$

从而我们知道证毕. □

注 2.4 *Laurent 展开可以逐项求导.*

Appendix A

复变函数结课作业

问题： 学完这门课最大的收获是什么？最大的感想是什么？

回答： 学完复变函数最大的收获是学到了一种和实函数大相径庭的观点，教会我更多地从几何化的观点去看问题。最大的感想是我们有时候视角不能仅仅局限于实数中，当遇到一个看起来和复数毫无关系的问题时，我们从恰当的角度引入复数可能让问题迎刃而解.

问题： 这门课给你印象最深刻的内容是什么？你最喜欢的内容是什么？

回答： 给我印象最深刻的定理无异是 Cauchy 积分定理，他在一定程度上揭示了解析函数的优良性质，复变函数的很多内容都是基于 Cauchy 积分定理的.

我喜欢的内容有很多，让我印象最深刻的是看《复分析：可视化方法》时里面用图像一点一点向我揭示为何“收敛半径”称之为半径，为何我们要说收敛圆盘. 我在这里第一次理解了一个幂级数在某点处展开原来收敛内域是呈现一个完美的圆形，并进一步了解到收敛半径就是到最近的奇点或支点的距离.

然后就是可视化方法上面还提到解析函数将无穷小圆映射为无穷小圆，这也是非常数的全纯函数是开映射的底层逻辑.

另外一个印象深刻的东西就是 Rouche 定理，他以一种奇妙的方式将零点问题大大简化，并且告诉我们只需要考虑边界上的事情就可以，这让我十分惊讶.

还有一个我十分喜欢的事实是整函数环的所有有限生成理想都是主理想，这件事情告诉我们原来整函数环上也有一种求“最大公约数”的结构在内.