傅里叶级数

杨毅涵

January 2, 2025

南開大學
Nankai University

Contents

Chapter 1

傅里叶分析

1.1 引入

定义 1.1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,如果

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上**正交**. 如果一列函数 $\{f_n(x)\}$ 中的任意两个函数都正交, 则称这一列函数是一个**正交函数系**.

我们把三角级数中出现的一列函数

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

称为三角函数系.

定义 1.2 三角函数系是 $[-\pi,\pi]$ 上的一个正交函数系.

证明: 首先

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ \mathrm{d}x = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\ \mathrm{d}x = 0,\ n = 1, 2, \cdots$$

这表明常数函数 1 与所有 $\cos nx, \sin nx$ 都正交. 其次,由积化和差公式,对任意正整数 m,n 成立

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] \mathrm{d}x = 0$$

进而,当 $m \neq n$ 时成立

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos\left(m+n\right)x + \cos\left(m-n\right)x\right] \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos\left(m+n\right)x - \cos\left(m-n\right)x\right] \mathrm{d}x = 0$$

这就表明了三角函数系在 $[-\pi,\pi]$ 上是一个正交函数系. □

我们约定一些记号：

$$X = \left\{ f \,\middle|\, \begin{array}{c} f \text{ 定义与 } [-\pi,\pi]\text{，满足 } \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x < +\infty \\ f \text{ 在 } [-\pi,\pi] \text{ 上可积且绝对可积(Riemann可积 + 广义积分)} \end{array} \right\}$$

$$X_n = \mathrm{Span}\left\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\right\}, \quad \dim_{\mathbb{R}} X_n = 2n+1$$

我们要研究的是 X_n 关于 X 的逼近问题，我们需要在 X 上定义一个内积结构，即 $\forall (f,g) \in X \times X$，有

$$(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \mathrm{d}x$$

逼近问题：$\forall f \in X$，考虑 $\inf\limits_{g \in X_n} ||f-g||$. 我们令

$$h := h(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n) = ||f - \alpha_0 - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)||^2$$

故

$$h = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - \alpha_0 - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right)^2 \mathrm{d}x$$

Observation: h 为 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上的凸函数，且严格凸，从而我们知道存在最小值.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_0^2} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\mathrm{d}x = 4\pi, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \beta_i \partial \beta_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_i^2} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos^2 ix \mathrm{d}x = 2\pi, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \beta_i^2} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2 ix \mathrm{d}x = 2\pi, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而我们知道 Hesse 矩阵满足

$$H = \mathrm{diag}(4\pi, 2\pi, \cdots, 2\pi)$$

从而 Hesse 矩阵正定，从而 h 在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上有唯一的极小值点，从而有唯一的最小值点，即当梯度向量为 0 的时候，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \alpha_m} &= \int_{-\pi}^{\pi} -(\cos mx)\left(f-\alpha_0-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f\cos mx\mathrm{d}x+\alpha_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

从而我们计算得出

$$\alpha_m=\frac{\int_{-\pi}^{\pi} f\cos mx\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x}$$

类似地

$$\beta_m=\frac{\int_{-\pi}^{\pi} f\sin mx\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\mathrm{d}x}$$

所以我们计算得出

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\mathrm{d}x,\quad \alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\quad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x,\quad k\geq 1$$

定义 1.3 我们称上面计算出的 $a_n:=\alpha_n$，$b_m:=\beta_m$ 为**Fourier系数**.

我们定义

$$S_nf(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

我们利用 $S_nf(x)$ 逼近 $f(x)$，计算有

$$||S_nf-f||^2=\int_{-\pi}^{\pi} f^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}(S_nf)^2\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}(S_nf)f\mathrm{d}x$$

我们知道

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(S_nf)^2\mathrm{d}x &= \frac{a_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x+b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\right) \\ &= \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(S_nf)f\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \\ &+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right) \\ &= \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)\end{aligned}$$

所以我们知道

$$||S_nf-f||^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)$$

从而我们得到了

定理 1.1 (Parseval 不等式) $\forall f\in X$，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x\geq\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

注 1.1 $\forall f\in X_n$，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

注 1.2 对于 $f\in X$，在 $n\to+\infty$ 时等号仍然成立.(我们将在后面证明这件事情)

注 1.3 $\forall f\in X$，我们有 $||S_nf||\leq||f||$.

我们注意到

$$\begin{aligned}S_nf(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\right]f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

定义 1.4 我们定义 **Dirichlet 核** 为

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2\sin \frac{x}{2}}, & x \neq 0 \\ \dfrac{2n+1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

我们有

$$D_n(x) = D_n(x+2\pi), \quad D_n(x) = D_n(-x), \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

但是我们需要注意 $D_n(x)$ 的符号不定.

笔记 1.1 我们在某种程度上可以修正 *Dirichlet* 核，我们定义

$$D_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{2n+1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

我们可以有一个估计

$$\left| \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x - 2(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{48} + o(x^3))}{2\sin \frac{x}{2} x} \right| \leq L_\delta x$$

其中 $L_\delta > 0$，$x \in [-\delta, \delta]$，δ 充分小.

定义 1.5 我们定义 **Fejer 核**:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_n(x) = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2, \quad x \neq 0$$

$x = 0$ 的时候取极限，从而我们知道

- $F_n(x) = F_n(x+2\pi), \quad F_n(x) = F_n(-x)$
- $F_n(x) \leq \min\left\{\frac{n}{2}, \frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\right\}$

- $\forall\delta>0$，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}F_n(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2n\delta^2}\cdot 2\pi=O(\frac{1}{n\delta^2})\to 0(n\to+\infty)$$

我们下面利用 Fejer 核处理一些问题：

定理 1.2 (稠密性定理) $\forall f\in\{g\colon g\in C[-\pi,\pi],g(-\pi)=g(\pi)\}$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$，$h_n\in X_n$，使得 $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|f-h_n|<\varepsilon$.

证明： 我们取

$$h_n(x)=\frac{S_0f+S_1f+\cdots+S_{n-1}f}{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

结合

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\mathrm{d}x=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x}{n}=1$$

从而我们知道

$$\begin{aligned}|f(x)-h_n(x)| &= \left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \frac{2\sup|f|}{\pi}\int_{|x-y|\geq\delta}F_n(x-y)\mathrm{d}y \\ &\quad+\frac{\sup\limits_{|u-v|\leq\delta}|f(u)-f(v)|}{\pi}\int_{|x-y|\leq\delta}F_n(x-y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

最后式子的两部分分别记作 A,B，我们可以估计：B 在 $\delta\to 0$ 的时候趋于 0，而

$$A=O(\frac{1}{n\delta^2})\to 0(n\to+\infty)$$

所以我们可以知道 n 充分大时总能小于 ε. □

定理 1.3 对于 $\forall f \in X$，$\exists f_n \in X_n$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} ||f - f_n|| = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

证明: **Step 1:** 假设 f 黎曼可积，我们不妨设 $f(-\pi) = f(\pi)$，又因为 f 黎曼可积，所以存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$.

我们知道对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在连续函数 g 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

我们不妨要求

$$g(-\pi) = g(\pi) = f(-\pi) = f(\pi)$$

从而我们由稠密性定理知道存在 $h_n \in X_n$，使得

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - h(x)| \le \varepsilon_n \to 0(n \to +\infty)$$

从而我们有估计

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f - h_n|^2 \mathrm{d}x &\le 2\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi} |g - h_n|^2 \mathrm{d}x \\
&\le 4M\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|\mathrm{d}x + 4\pi\varepsilon_n \\
&\le 4M\varepsilon + 4\pi\varepsilon_n \to 0
\end{aligned}$$

从而第一种情况得证.

Step 2: $f \in X$，则我们不妨设 f 在 $x = -\pi$ 处有唯一奇点，则对任意的 $\delta > 0$，有 $f \in R[-\pi + \delta, \pi]$，所以我们知道

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\pi+\delta}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \lim_{\delta\to 0} \int_{-\pi+\delta}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

我们取 δ_0 充分小，定义

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\pi + \delta_0] \\ f(x), & x \in [-\pi + \delta_0, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

从而我们知道 $\widetilde{f} \in R[-\pi,\pi]$，故根据 Step 1 我们知道对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $h_n \in X_n$，对于 $M_\delta = \sup\limits_{x\in[-\pi+\delta,\pi]} |\widetilde{f}|$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widetilde{f}(x) - h_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x \leq CM_\delta(\varepsilon + \varepsilon_n)$$

故我们知道

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f - h_n|^2 \mathrm{d}x &\leq 2\int_{-\pi}^{\pi} |f - \widetilde{f}|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{f} - h_n|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq 2\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f^2 \mathrm{d}x + 2CM_\delta(\varepsilon + \varepsilon_n)\end{aligned}$$

令 δ 充分小控制第一项，n 充分大控制第二项即可. □

定理 1.4 (Plancherel 定理) f 可积，绝对可积，平方可积，则我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

证明: 这里等价于证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n f - f|| = 0$，而我们知道

$$||S_n f - f|| \leq ||S_n g - g|| + ||S_n f - S_n g|| + ||f - g||$$

由于前面的注，我们知道 $||S_n f - S_n g|| = ||S_n(f - g)|| \leq ||f - g||$，从而我们知道

$$||S_n f - f|| \leq ||S_n g - g|| + 2||f - g||$$

定理 1.3 告诉我们，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $m \in \mathbb{N}$，$g \in X_m$，使得 $||f - g|| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，又对于 $\forall n > m$，我们有 $S_n g = g$，从而我们知道当 $n > m$ 时，有

$$||S_n f - f|| < 0 + \varepsilon = \varepsilon$$

从而由定义我们知道证明完毕. □

1.2 傅里叶级数的收敛性

在这一部分一个基本的问题是判断 $S_n f(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$ 的逐点收敛性.

我们注意到

$$S_nf(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

又注意到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x=1\implies\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)\mathrm{d}t=1$$

我们先建立一个引理：

引理 1.1 (Riemann-Lebesgue 引理) f 在 $[a,b]$ 可积 or 广义可积 + 绝对可积，则知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$$

证明: 通过阶梯函数逼近证明即可. □

固定 x_0，我们记 $S_nf(x_0)$ 可能的极限值为 S，定义

$$\varphi_{x_0}(y)=f(x_0+y)+f(x_0-y)-2S$$

我们注意到

$$\begin{aligned}
S_nf(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(t-x_0)}{2}}{2\sin\dfrac{t-x_0}{2}}f(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}y}{2\sin\dfrac{y}{2}}f(x_0+y)\mathrm{d}y \quad (y=t-x_0)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}y}{2\sin\dfrac{y}{2}}f(x_0+y)\mathrm{d}y \quad (2\pi\text{ 周期延拓})\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}y}{2\sin\dfrac{y}{2}}\left(f(x_0+y)+f(x_0-y)\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

所以我们知道

$$
\begin{aligned}
& S_nf(x_0) \to S(n \to +\infty) \\
\Longleftrightarrow \quad & \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} D_n(y)\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y = 0 \quad (*)
\end{aligned}
$$

但是由 Riemann-Lebesgue 引理我们知道

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{\pi} D_n(y)\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{\pi} \sin(\frac{2n+1}{2}y)\frac{\varphi_{x_0}(y)}{2\sin\frac{y}{2}}\mathrm{d}y = 0
$$

所以我们还知道

$$
(*) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\delta} D_n(y)\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y = 0 \quad (**)
$$

此外，我们还注意到

$$
\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - 2(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{48} + o(x^3))}{2\sin\frac{x}{2}x}\right| \le L_\delta x \to 0
$$

所以我们发现由 Riemann-Lebesgue 引理有

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} \left(D_n(y) - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}y}{y}\right)\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y \\
= \quad & \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}} - \frac{1}{y}\right)\varphi_{x_0}(y)\sin\frac{2n+1}{2}y\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}
$$

所以我们知道

$$
(**) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\delta} D_n^*(y)\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y = 0 \quad (***)
$$

上面的讨论导致了下面的定理.

定理 1.5 (Riemann 局部化定理) $S_nf(x_0)$ 收敛到 S 的充分必要条件是，

存在 $0<\delta\leq\pi$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \frac{\sin\frac{2n+1}{2}y}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y=0$$

即收敛性仅由 f 在 x_0 任意小邻域内的值决定.

笔记 1.2 更进一步，我们分析

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y-\sin ny\right)\frac{\varphi_{x_0}(y)}{y}\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\frac{\cos\frac{1}{2}y-1}{y}\varphi_{x_0}(y)\sin ny\mathrm{d}y+\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\frac{\sin\frac{1}{2}y}{y}\varphi_{x_0}(y)\cos ny\mathrm{d}y=0$$

也即局部化定理可以进一步优化为：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y=0$$

定理 1.6 (Lipschitz 定理) f 可积，绝对可积，周期 2π，在 x_0 点存在左右极限，若满足单侧 Holder 条件，即存在 $\alpha_1,\alpha_2>0$，$c_1,c_2>0$，使得

$$|f(x_0+u)-f(x_0^+)|\leq c_1u^{\alpha_1},\quad u>0,\quad \text{充分小}$$

$$|f(x_0-u)-f(x_0^-)|\leq c_2u^{\alpha_2},\quad u>0,\quad \text{充分小}$$

则有

$$\lim_{n\to+\infty}S_nf(x)=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

证明: 我们注意到

$$|\varphi_{x_0}(y)|\leq C(y^{\alpha_1}+y^{\alpha_2}),\quad 0<y<\delta$$

我们知道

$$\lim_{\delta\to0}\left|\int_0^\delta\frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y\right|\leq C\lim_{\delta\to0}\int_0^\delta\frac{y^{\alpha_1}+y^{\alpha_2}}{y}\mathrm{d}y=0$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_0 > 0$，使得

$$\left|\int_0^{\delta_0} \frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又由 Riemann-Lebesgue 引理，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y = 0$$

所以存在 $N > 0$，对任意 $n > N$，有

$$\left|\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

所以我们有 $n > N$ 时，

$$\left|\int_0^{\delta} \frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta} \frac{\sin ny}{y}\varphi_{x_0}(y)\mathrm{d}y = 0$$

由局部化定理我们知道成立. □

定理 1.7 (Dini 定理) f 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且绝对可积，若存在充分小 $\delta > 0$ 使得 $\dfrac{\varphi_{x_0}(u)}{u}$ 在 $[0,\delta]$ 可积且绝对可积，则我们知道 $S_n f(x) \to S$.

证明: 由黎曼引理和局部化定理自然成立. □

笔记 1.3 *g 定义在 X 上，g 在 X 上连续，称 g 在 $x_0 \in X$ 上满足局部 Dini 条件，如果 $\exists\delta_0 > 0$，使得 $\displaystyle\int_0^{\delta_0} \frac{w_{x_0}(\delta)}{\delta}\delta < +\infty$，其中 $w_{x_0}(\delta) := \sup\limits_{|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta} |g(x)-g(y)|$.*

注 1.4 *Holder 连续性可以推出 Dini 条件.*

注 1.5 *Lipschitz 定理用 Dini 定理就直接秒了.*

推论 1.1 f 在 x_0 处可微，则我们知道 $S_n f(x_0) \to f(x_0)$.

证明: 局部满足 Lipschitz 条件. □

定理 1.8 (Dirichlet-Jordan 判别法) f 在 x_0 的某一邻域内单调，则

$$\lim_{n\to+\infty} S_n f(x) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

证明: 令 $S = \dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$，我们分析下面的式子

$$\int_0^\delta \frac{\sin nu}{u}\left(f(x_0+u)-f(x_0^+)\right)\mathrm{d}u + \int_0^\delta \frac{\sin nu}{u}\left(f(x_0-u)-f(x_0^-)\right)\mathrm{d}u$$

记其中第一部分为 A_δ，第二部分为 B_δ，使用积分第二中值定理，我们有

$$\begin{aligned} A_\delta &= \left(f(x_0+0)-f(x_0^+)\right)\int_0^\xi \frac{\sin nu}{u}\mathrm{d}u + \left(f(x_0+\delta)-f(x_0^+)\right)\int_\xi^\delta \frac{\sin nu}{u}\mathrm{d}u \\ &= \left(f(x_0+\delta)-f(x_0^+)\right)\int_\xi^\delta \frac{\sin nu}{u}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

我们注意到

$$\int_\xi^\delta \frac{\sin nu}{u}\mathrm{d}u = \int_{n\xi}^{n\delta} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

记 $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\varphi$ 连续且在无穷处有极限，所以我们知道存在 $M>0$，使得对于任意 $x>0$，有

$$|\varphi(x)| \le M$$

所以我们知道

$$|A_\delta| \le 2M\left|f(x_0+\delta)-f(x_0^+)\right|$$

同理我们有

$$|B_\delta| \le 2M\left|f(x_0-\delta)-f(x_0^-)\right|$$

由于单调性，故我们知道当 δ 充分小的时候 A_δ, B_δ 均趋于 0，故我们知道对于固定的 δ_0，存在充分小的 $\delta<\delta_0$，使得

$$A_{\delta_0}+B_{\delta_0} = A_\delta + B_\delta + \int_\delta^{\delta_0}\frac{\sin nu}{u}\varphi_{x_0}(u)\mathrm{d}u$$

使得 A_δ, B_δ 充分小，且当 n 充分大时由 Riemann-Lebesgue 引理我们知道 $\displaystyle\int_\delta^{\delta_0}\frac{\sin nu}{u}\varphi_{x_0}(u)\mathrm{d}u$ 也充分小，从而由局部化定理我们知道成立. □

定义 1.6 称 f 满足有界变差条件，如果对任何不相交的区间 $I_1, \cdots, I_k \subseteq [a,b]$，存在 $M>0$，对于 $\forall x_k, y_k \in I_k$，满足

$$\sum_{i=1}^{k} |f(y_k) - f(x_k)| \leq M$$

记[a] $f \in BV[a,b]$.

[a]BV 指 Bounded variation

注 1.6 ★

(1) f 单调，有 $f \in BV[a,b]$.

(2) f, g 单调，有 $f \pm g \in BV[a,b]$.

(3) $f \in BV[a,b]$ 等价于存在单调递增函数 g_1, g_2 使得 $f = g_1 - g_2$.

上面第三个论述可以从下面的等式中寻找灵感：

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} (|a_k| - a_k)$$

我们不加证明地给出下面的定理：

定理 1.9 Dirichlet-Jordan 定理对有界变差函数成立.

1.3 傅里叶级数的逐项求导与逐项积分

我们先建立两个引理以方便处理后面的问题.

引理 1.2 (一般情况的牛顿莱布尼茨公式) $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，除有限个点外处处可导，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则以下牛顿莱布尼茨公式成立.

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

证明： 仅需考虑广义积分情况再逼近即可. □

引理 1.3 (一般情况的分部积分公式) f, g 在 $[a,b]$ 上可积，且绝对可积，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\int_a^x F(t)g(t)\mathrm{d}t=F(t)G(t)|_a^x-\int_a^x G(t)f(t)\mathrm{d}t$$

证明: **Step 1:** 处理 f, g 连续的情况，这个是以前的结论.
Step 2: f, g 黎曼可积，利用连续函数逼近，逐项比较偏差即可.
Step 3: f, g 有唯一奇点，利用黎曼可积函数逼近即可. □

我们下面建立傅里叶级数的逐项微分定理.

定理 1.10 (逐项微分定理) f 为 2π周期，可积且绝对可积，f 的形式傅里叶级数为

$$f \quad \sim \quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点外处处可导，且 f' 可积+绝对可积，则我们有

$$f' \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$$

并且进一步有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

证明: 见书. □

下面建立逐项积分定理，这个定理十分强大，因为这个定理甚至不需要要求傅里叶级数收敛.

定理 1.11 (逐项积分定理(弱版本)) $f\in X$(平方可积)，为 2π 周期，则有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^x a_n\cos nt\mathrm{d}t+\int_0^x b_n\sin nt\mathrm{d}t\right)$$

证明: 我们注意到等价于去证明

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{k\to+\infty}\int_0^x S_k f(t)\mathrm{d}t$$

不妨设 $x\in[-\pi,\pi]$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 (f(t)-S_kf(t))\,\mathrm{d}t\right|^2 &\le \int_0^x (f(t)-S_kf(t))^2\,\mathrm{d}t\int_0^x 1\mathrm{d}t\\ &\le x\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-S_kf(t))^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow{Plancherel} 0(k\to+\infty)\end{aligned}$$

□

定理 1.12 (逐项积分定理) f 可积且绝对可积，为 2π 周期，则

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^x a_n\cos nt\mathrm{d}t + \int_0^x b_n \sin nt\mathrm{d}t\right)$$

证明: 定义 $G(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\mathrm{d}t$，由 a_0 定义知

$$G(x)-G(x+2\pi) = -\int_x^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t + a_0\pi = 0$$

我们知道 G 为 2π 周期，我们设 G 的形式傅里叶级数为

$$G(x)\quad\sim\quad\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$$

我们计算 A_n，有

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\cos nx\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}G(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\frac{a_0}{2})\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right)\\ &= -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{b_n}{n}\end{aligned}$$

同理我们有

$$B_n = \frac{a_n}{n}$$

我们还有 $G(0)=0$，再由于

$$G(x)=\int_0^x\left|f(t)-\frac{a_0}{2}\right|\mathrm{d}t-\int_0^x\left|f(t)-\frac{a_0}{2}\right|-\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\mathrm{d}t$$

所以 $G(x)$ 可以拆为两个单调递增函数的差，故是有界变差函数，从而满足 Dirichlet-Jordan 判别法，我们知道

$$G(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right)$$

由 $G(0)=0$，我们知道

$$\frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$$

代入即证明. □

笔记 1.4 我们注意到如果 f 可积且绝对可积，我们有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}<+\infty$$

例 1.1 如 $g(x)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$，虽然 g 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛，但是由于

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}=+\infty$$

所以 $g(x)$ 不是任何一个可积且绝对可积函数的傅里叶级数.

1.4 一些拾遗

我们约定等价关系 $\sim$ 满足 $-\pi\sim\pi$，则我们知道

$$[-\pi,\pi]/\sim=\{z\colon |z|=1\}=S^1$$

f 定义于 $[-\pi,\pi]$ 为 2π 周期函数，对于任何的 n，我们定义傅里叶系数

$$\hat{f}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

定理 1.13 (Fejer 定理) f 是 2π 周期的可积绝对可积的函数，并且在 x_0 处有左右极限，则 f 的傅里叶级数在 Cesaro 和意义下收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$，特别当在 x_0 连续时，收敛于 $f(x_0)$.

命题 1.1 f 是 2π 周期的可积绝对可积的函数，x_0 是连续点或者第一类间断点，如果 f 的 Fourier 级数在 x_0 收敛，则一定收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$.

证明: 由 Fejer 定理，若 Fourier 级数收敛于 A，则 Cesaro 和收敛于 A，从而得证. □

命题 1.2 如果 f 是 2π 周期的连续函数，则 Fourier 级数的 Cesaro 和是一致收敛于 f 的.

傅里叶级数的内积形式：

定理 1.14 f,g 均在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积，a_n,b_n 是 f 的傅里叶系数，c_n,d_n 是 g 的傅里叶系数，则我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_nc_n+b_nd_n)$$

证明: 考虑极化恒等式：$fg=\left(\frac{f+g}{2}\right)^2-\left(\frac{f-g}{2}\right)^2$，然后对右边两部分单独使用 Parseval 等式即可. □