

你也能发明谱序列

学习谱序列时偶然发现 Timothy Y. Chow 的文章: *You could have invented spectral sequences*. 见猎心喜, 忍不住想记录一下, 既然如此, 那不如直接翻译(+注释, 部分注释选用了 Gemini 的解释) 一遍.

本文的原文直接搜索英文题目就可以直接在网上下载到. 翻译难免丧失一些原本语言中的小幽默与小巧思, 原文也是不得不品的一环.

1. Introduction

谱序列这一课题素以对初学者艰深难懂而闻名。就连 G. W. Whitehead (引自 John McCleary [4]) 也曾指出: “源于 Lyndon 和 Koszul 代数工作的谱序列机制, 在许多拓扑学家看来似乎既复杂又晦涩。”

这是为什么? David Eisenbud [1] 给出了一个解释: “谱序列的主题是基础的, 但是其囊括众多对象的双复形记号让人望而生畏。” 我也曾听其他人抱怨过那层出不穷的上标与下标。

我认为谱序列之所以难学, 是因为教学中总是不解释人们是如何构想出这个定义的。例如 John McCleary 的教材 [4] 中写道: “然而, 使用者必须先学会操作这些小工具, 而无需纠结其令人生畏的起源问题。” 如果不理解谱序列从何而来, 人们自然会觉得它们神秘莫测。反之, 如果能看清它们的来龙去脉, 那些符号记号便不该成为绊脚石。

常言道 “**愚者敢闯天使却步之地**”, 所以我的目标就是让读者们感受到其实**你也能发明谱序列** (当然需要在一个美丽的日子里)。我假设读者熟悉同调群, 除此之外几乎不需要其他预备知识。这里所讲的一切对行家来说都是常识, 但我希望能将这些思想传达给更广泛的受众, 而不再仅仅局限于那少数几个有幸能在 “正确的时间” 遇到 “正确的专家” 并进行 “正确的对话” 的幸运儿。

如果即使读者对谱序列的历史以及它们在历史上究竟是如何被发明的感兴趣, 建议阅读文献 [3], 那里给出了权威性的详尽叙述。

2. Simplifying Assumptions

文中所有的一切都在域上进行讨论，所有的链群都是有限维的，并且所有的**滤过(filtrations)**（下文会解释）都只有有限多个层级。在现实的数学问题中可能并没有这些假设，但在这个简化的背景下，我们会更容易掌握其核心思想。

3. Graded Complex

那些“自然出现”的链复形，除了边缘映射之外，往往还带有额外的结构。某些特定类型的额外结构尤为常见，因此寻找一套系统性的方法来利用这些特征是有意义的。这样一来在计算同调群时，就不必重复造轮子了。

这是一个简单的例子：假设我们有一个链复形

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{d+1} \xrightarrow{\partial} C_d \xrightarrow{\partial} C_{d-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

这个复形是**分次**的，即每一个 C_d 都可以分解为直和

$$C_d = \bigoplus_{p=1}^n C_{d,p}$$

并且边缘映射与分次结构是相容的，即

$$\partial C_{d,p} \subseteq C_{d-1,p}, \forall p, d$$

于是这个分次允许我们把对同调群的计算分解为许多小任务：只需要独立地计算每一个分次的同调然后再取直和就可以得到原本的同调。

译者注：这里是因为

$$H(C) = \frac{(\ker \partial_A) \oplus (\ker \partial_B)}{(\operatorname{im} \partial_A) \oplus (\operatorname{im} \partial_B)} \cong \frac{\ker \partial_A}{\operatorname{im} \partial_A} \oplus \frac{\ker \partial_B}{\operatorname{im} \partial_B}$$

不幸的是在实践中我们总是会遇到不能分次的复形. 替代方案是考虑**滤过复形(filtered complex)**，即每一个 C_d 都配备了一个子模的升链

$$0 = C_{d,0} \subseteq C_{d,1} \subseteq C_{d,2} \subseteq \cdots \subseteq C_{d,n} = C_d$$

并且边缘映射与滤过是相容的，即

$$\partial C_{d,p} \subseteq C_{d-1,p}, \forall p, d$$

指标 p 称为**滤过阶(filtration degree)**，尽管在此处只有当 $0 \leq p \leq n$ 时它才有意义，但我们有时允许指标“越界”，并默认在此情况下，所涉及的对象均为零。比如 $C_{d,-1} = 0$ 。

尽管滤过复形和分次复形并不是那么的相像，但我们还是会思考：是否存在一个与分次复形分而治之的想法类似的行之有效的策略？例如是否存在一种自然的方式将滤过复形的同调群分解为直和？答案是肯定的，但这背后的情况却惊人地复杂。我们马上会看到，对这一问题的分析直接引出了谱序列的概念。

让我们尝试把问题“归化”到已经解决的分次复形的情况。为了做到这个，我们需要把每一个 C_d 表示为一个直和。很显然 C_d 并不是 $C_{d,p}$ 的直和，事实上 $C_{d,n}$ 已经就是 C_d 。但是由于 C_d 是一个有限维线性空间(回忆我们开头所作的假设)，我们可以通过商去一个子空间 U 再直和上它得到一个与 C_d 同构的空间

$$C_d \simeq (C_d/U) \oplus U$$

特别地，我们可以取 $U = C_{d,n-1}$ 。于是我们可以对 $U = C_{d,n-1}$ 继续进行这个操作直到停止。严格地说，我们定义

$$E_{d,p}^0 := C_{d,p}/C_{d,p-1}, \forall d, p$$

(**警告**：谱序列存在多种不同的索引约定；大多数作者写作 $E_{p,q}^0$ ，其中 $q = d - p$ 被称为“互补阶”(complementary degree)。而我在此处使用的索引约定，是我认为在教学上最为清晰的一种。)

于是我们有

$$C_d \simeq \bigoplus_{p=1}^n E_{d,p}^0$$

边缘算子在这个分解下很自然地诱导了映射

$$\partial^0: \bigoplus_{p=1}^n E_{d,p}^0 \rightarrow \bigoplus_{p=1}^n E_{d-1,p}^0$$

使得

$$\partial^0 E_{d,p}^0 \subseteq E_{d-1,p}^0, \forall d, p$$

原因在于 $C_{d,p}/C_{d,p-1}$ 中的两个不同代表元送到 $C_{d-1,p}$ 中相差的东西落在 $C_{d-1,p-1}$ 中, 于是自然有良定义.

因此我们得到了一个分裂成 n 块的分次复形:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d+1,n}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d,n}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d-1,n}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & \cdots \\ \cdots & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d+1,n-1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d,n-1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d-1,n-1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d+1,1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d,1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d-1,1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & \cdots \end{array}$$

现在我们定义 $E_{d,p}^1$ 为第 p 条复形的同调:

$$E_{d,p}^1 := H_d(E_{\bullet,p}^0)$$

$$E_{d,p}^1 \stackrel{\text{def}}{=} H_d(E_{d,p}^0) = \frac{\ker \partial^0 : E_{d,p}^0 \rightarrow E_{d-1,p}^0}{\text{im } \partial^0 : E_{d+1,p}^0 \rightarrow E_{d,p}^0}$$

(对于那些熟悉相对同调的读者, 注意到 $E_{d,p}^1$ 就是 $H_d(C_p, C_{p-1})$)

我们天真地希望 $\bigoplus_{p=1}^n E_{d,p}^1$ 就是我们原始复形的同调。但不幸的是这并不成立。尽管我们原始

滤过复形 (C_d, ∂) 的**关联分次复形(associated graded complex)**

$$\left(\bigoplus_p E_{d,p}^0, \partial^0 \right)$$

中的每一项与原始的复形中的每一项都是同构的, 但这并不保证两个复形作为链复形是同构的. 所以尽管 $\bigoplus_{p=1}^n E_{d,p}^1$ 确实给出了关联分次复形的同调, 但它一般意义上并不能给出原始复形的同调。

4. Analyzing the Discrepancy

这无疑令人失望的，但是不要放弃，关联分次复形与原始复形的联系是如此紧密，这意味着尽管其同调并不是我们确切想要的，但应当还是给出了一个合理的估计。

译者注：一种理解方式是谱序列就是把同调进行某种“泰勒展开”。

让我们仔细地研究其中的差异来看看是否能够修复这个误差。为了让事情变得更加简单，我们考虑 $n = 2$ 的情况，于是

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d+1,n}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d,n}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d-1,n}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & \dots \\
 \dots & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d+1,n-1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d,n-1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d-1,n-1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d+1,1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d,1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & E_{d-1,1}^0 & \xrightarrow{\partial^0} & \dots
 \end{array}$$

就只有两行，我们称 $p = 1$ 为楼下， $p = 2$ 为楼上。

我们实际上要求的同调群 H_d 是 Z_d/B_d ，其中 Z_d 是 C_d 中的 cycles 而 B_d 是 C_d 中的 boundaries. 由于 C_d 是滤过的，则存在一个在 Z_d 与 B_d 上自然的滤过：

$$0 = Z_{d,0} \subseteq Z_{d,1} \subseteq Z_{d,2} = Z_d$$

与

$$0 = B_{d,0} \subseteq B_{d,1} \subseteq B_{d,2} = B_d$$

译者注：这里是诱导滤过，就是令

$$Z_{d,p} = Z_d \cap C_{d,p}$$

与

$$B_{d,p} = B_d \cap C_{d,p}$$

我们总是在寻找一个自然的方式去把 H_d 分解为一个直和。我们先前看到了 C_d 并不是 $C_{d,1}$ 与 $C_{d,2}$ 的直和，所以 Z_d/B_d 也没有道理是 $Z_{d,1}/B_{d,1}$ 与 $Z_{d,2}/B_{d,2}$ 的直和。但是我们可以使用在 C_d 中的类似的操作来商掉一个东西再直和上它得到直和分解：

$$\begin{aligned}\frac{Z_d}{B_d} &\simeq \frac{Z_d + C_{d,1}}{B_d + C_{d,1}} \oplus \frac{Z_d \cap C_{d,1}}{B_d \cap C_{d,1}} \\ &= \frac{Z_{d,2} + C_{d,1}}{B_{d,2} + C_{d,1}} \oplus \frac{Z_{d,1}}{B_{d,1}}\end{aligned}$$

译者注：这里是因为如果 $W \subseteq V$ 是向量空间，且 U 是某个子空间(这里是 $C_{d,1}$)，则：

$$\frac{V}{W} \simeq \frac{V+U}{W+U} \oplus \frac{V \cap U}{W \cap U}$$

这通过考虑

$$f: V \cap U \rightarrow \frac{V}{W}$$

可以得到正合列

$$0 \longrightarrow \frac{V \cap U}{W \cap U} \longrightarrow \frac{V}{W} \longrightarrow \frac{V+U}{W+U} \longrightarrow 0$$

利用线性空间的分裂性质就得到.

现在，我们希望有

$$(A) \quad E_{d,1}^1 \stackrel{?}{\simeq} \frac{Z_{d,1}}{B_{d,1}}$$

与

$$(B) \quad E_{d,2}^1 \stackrel{?}{\simeq} \frac{Z_{d,2} + C_{d,1}}{B_{d,2} + C_{d,1}}$$

甚至希望方程 (A) 和 (B) 中的分子和分母，恰好就是前文定义 $E_{d,p}^1$ 时所用的那些闭链和边缘。因为如果真是这样，表达式

$$\bigoplus_{p=1}^n E_{d,p}^1$$

就能够直接给出 H_d 的直和分解了。然而不幸的是，在一般情况下，(A) 和 (B) 都不成立。我们需要对这个想法进行修正。

我们首先来看**楼下** $E_{d,1}^1$ 处。 $E_{d,1}^1$ 处的闭链就是 $E_{d,1}^0$ 的闭链，其边缘是映射

$$\partial^0: E_{d+1,1}^0 \rightarrow E_{d,1}^0$$

的像 I 。 $E_{d,1}^0$ 中的闭链空间是 $Z_{d,1}$ ，同时也是 (A) 式中的分子。但是像 I 并不是 $B_{d,1}$ ，因为 $B_{d,1}$ 是 B_d 落在 $C_{d,1}$ 中的那些像，它可能包含 I ，也可能包含更多的东西。

特别地， ∂ 可能会从 C_{d+1} 的楼上带着一些信息进入 C_d 的楼下，但是 I 仅仅包含楼下到楼下的东西，因此 $Z_{d,1}/B_{d,1}$ 是 $E_{d,1}^1$ 的一个商。

译者注：这里的商是指满射

$$\frac{Z_{d,1}}{I} \rightarrow \frac{Z_{d,1}}{B_{d,1}}$$

诱导的商空间。

现在我们看看楼上的 $E_{d,2}^1$ 处，在这种情况下(译者注：放在 $C_{d,2}/C_{d,1}$ 中看，所以要加上 $C_{d,1}$)边缘是 $B_{d,2} + C_{d,1}$ ，为 (B) 式的分母，但是闭链是下面映射的 kernel K ：

$$\partial^0: E_{d,2}^0 \rightarrow E_{d-1,2}^0$$

由定义，实际上是映射

$$\partial^0: \frac{C_{d,2}}{C_{d,1}} \rightarrow \frac{C_{d-1,2}}{C_{d-1,1}}$$

因此我们看到了闭链不仅包含了那些送到 0 的元素，还包含了送到楼下 $C_{d-1,1}$ 的那些元素。然而 $Z_{d,2} + C_{d,1}$ 中元素的像都是 $C_{d,1}$ 所产生的边缘。

译者注：如果 $x \in Z_{d,2} + C_{d,1}$ ，那么 x 可以写成：

$$x = z + c$$

其中 z 是真闭链 ($\partial z = 0$)， c 是楼下的某个元素 ($c \in C_{d,1}$)。现在看看 x 的边缘 ∂x 是什么：

$$\partial x = \partial(z + c) = \partial z + \partial c = \partial c$$

于是

$$\frac{Z_{d,2} + C_{d,2}}{B_{d,2} + C_{d,1}}$$

是 $E_{d,2}^1$ 的一个子空间，子空间里的元素满足其边缘为 $C_{d,1}$ 的边缘。

译者注：这里子空间是因为 E^1 的分子(K)要求： $\partial x \in$ 楼下整个空间，而 $Z_{d,2} + C_{d,1}$ 要求： $\partial x \in$ 楼下的边缘空间。而“楼下的边缘空间”只是“楼下整个空间”的一个子集。

直观地说，问题在于关联分次复形只能看见局限在同一层楼内的活动；该楼层之上和之下的所有内容都被“切除”了。但在原始复形中，边缘算子 ∂ 可能会把元素带到更下一层甚至下好几层(注意：它不能把元素带到更上一层，因为 ∂ 与滤过相容)，因此我们必须对这种层级间的活动进行修正。

译者注： E^0 的视角就像是把每一层楼完全封死。你在第 5 层打扫卫生，只能看见第 5 层的垃圾。如果有一个垃圾从第 5 层掉到了第 4 层，在 E^0 的视角里，你只知道它从第 5 层“消失”了(变成了 0)，但你根本不关心它去了哪里。而垃圾不会自己从第 5 层飞到第 6 层去。这保证了我们的谱序列是有方向的，只要一直往下修正，最终能停下来。这段话告诉我们， E^1 只是一个近视眼，只看得到本层。而真实的 ∂ 是跨层的。谱序列就是一副不断调节焦距的眼镜，让我们逐渐看清层与层之间的互动。

5. The Emergence of Spectral Sequences

使得谱序列这套机器得以运转的一个美妙事实是：上述对同调群 $E_{d,p}^1$ 的两个修正，都可以被看作是“**同调群的同调群**”！

注意 ∂ 诱导了一个自然映射

$$\partial^1: E_{d+1,2}^1 \rightarrow E_{d,1}^1$$

因为 $E_{d+1,2}^1$ 中任何元素的边缘都是一个位于 $C_{d,1}$ 中的闭链，因此它定义了 $E_{d,1}^1$ 中的一个元素。

$n = 2$ 情况下有两个关键的断言：

断言 1：如果我们取 $E_{d,1}^1$ 并模掉 ∂^1 的像，那么我们就得到了 $Z_{d,1}/B_{d,1}$ 。要看出这一

点，只需验证 ∂^1 的像给出了所有位于 $C_{d,1}$ 中的边缘（注：指从楼上掉下来的边缘）。

断言 2: ∂^1 的核是 $E_{d+1,2}^1$ 的一个子空间，它同构于：

$$\frac{Z_{d+1,2} + C_{d+1,1}}{B_{d+1,2} + C_{d+1,1}}$$

看出这一点只需要检查 kernel 中元素的边缘恰好为 $C_{d+1,1}$ 中某个元素的边缘。

译者注：

- **修正楼下**
- **问题回顾：**我们在楼下计算 E^1 时，分母太小了。我们只除掉了“楼下产生的垃圾”，忘了除掉“楼上扔下来的垃圾”。
- **∂^1 的像 (Image)：** ∂^1 的输入是楼上所有可能的元素。 ∂^1 的输出就是楼上扔下来的所有垃圾。
- **操作：**取楼下的 E^1 ，然后**模掉** ∂^1 的像。

$$\text{Coker}(\partial^1) = \frac{E_{d,1}^1}{\text{im } \partial^1}$$

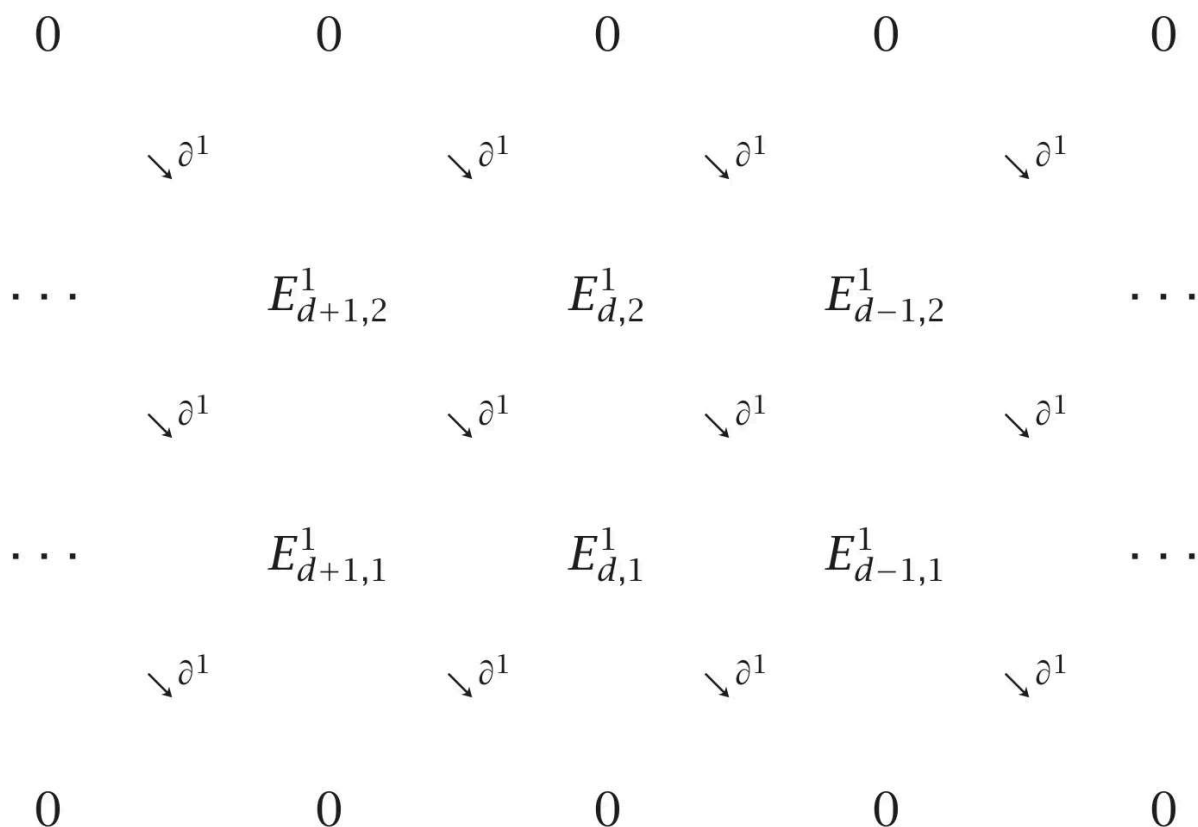
这正好把那些多余的“从天而降的边缘”给除掉了，从而完成修正。

- **修正楼上**
- **问题回顾：**我们在楼上计算 E^1 时，分子太大了。我们把那些“只是跑到了楼下”的元素误判成了“闭链”。
- **∂^1 的核 (Kernel)：** $\partial^1([x])$ 等于 0 意味着 ∂x 在楼下的同调群里是 0。这意味着 ∂x 是楼下的一个边缘。
- **操作：**取 ∂^1 的核。

$$\ker(\partial^1) \subseteq E_{d+1,2}^1$$

这正好筛选出了那些“虽然掉到了楼下，但掉得不彻底（掉进楼下的边缘里了）”或者是“真的消失了”的元素。从而完成修正。

我们可以可视化地来观察这两个断言：



上图是一组链复形；只不过这些链复形不像之前 E^0 那样是水平延伸的，而是以 45° 角向下倾斜，并且每个复形只有两项非零。（提醒：我们的索引惯例与大多数作者不同，因此相对于上图，其他作者的图表看起来会是“歪斜”的。）

如果我们现在将 $E_{d,p}^2$ 定义为同调，即：

$$E_{d,p}^2 \stackrel{\text{def}}{=} H_d(E_{d,p}^1) = \frac{\ker \partial^1 : E_{d,p}^1 \rightarrow E_{d-1,p-1}^1}{\text{im } \partial^1 : E_{d+1,p+1}^1 \rightarrow E_{d,p}^1}$$

那么前文“断言 1”和“断言 2”的含义就是： $E_{d,1}^2 \oplus E_{d,2}^2$ (终于！)就是我们原始滤过复形的正确同调。

译者注：

对于楼上 ($p = 2$)：Im = 0 (没有更高的楼层扔东西下来)。Ker = $\ker \partial^1$ 结果：
 $E_{d,2}^2 \cong \ker \partial^1$ 。这就是断言 2 里的子空间。

对于楼下 ($p = 1$)：Ker = $E_{d,1}^1$ (所有东西都被 ∂^1 映到 0，因为 $p = 0$ 是空的)。Im = $\text{im } \partial^1$ (从楼上扔下来的垃圾)。结果： $E_{d,1}^2 \cong E_{d,1}^1 / \text{im } \partial^1$ 。这就是断言 1 里的商空间。

对于 $n = 2$ 的情况，故事到此结束。序列 E^0, E^1, E^2 就是当 $n = 2$ 时我们这个过滤复形的谱序列。我们可以把 E^1 看作是对所需同调群的“一阶近似”，把 E^2 看作是“二阶近似”——而在 $n = 2$ 的情况下，这不仅仅是一个近似，而是最终的正确答案。

如果 $n > 2$ 会怎样呢？之前的定义 E^0, E^1, E^2 依然有意义，但现在 E^2 通常不会给出真正的同调群了。因为 E^2 只考虑了 E^0 中**相邻**层级之间的交互，但边缘算子 ∂ 可能会把元素带到下两层甚至更多层。因此，我们需要考虑后续的项 $E^3, E^4, \dots, E^n$ 。

例如，为了定义 E^3 ，我们可以验证 ∂ 诱导了一个自然映射——我们要称之为 ∂^2 ——从 $E_{d+1,p+2}^2$ 到 $E_{d,p}^2$ ，这对所有的 d 和 p 都成立。我们会得到一个类似于前面关于 E^1 的图，只不过是用了 (E^2, ∂^2) 代替了 (E^1, ∂^1) ，并且每个箭头是向下跨越**两层**而不是一层。那么 $E_{d,p}^3$ 就是在 $E_{d,p}^2$ 处的 $(\ker \partial^2)/(\text{im } \partial^2)$ 。

一般来说， E^r 的图像会有标记为 ∂^r 的箭头，这些箭头从 $E_{d+1,p+r}^r$ 下落 r 层指向 $E_{d,p}^r$ ，而 E^{r+1} 被定义为 (E^r, ∂^r) 的同调。

对于一般化的 n ，验证 $H_d \cong \bigoplus_p E_{d,p}^n$ 是对我们已见过的思想的概念上直接的推广，但这过程比较繁琐，所以我们略去细节。

译者注：这就是 Timothy Chow 这篇文章的核心逻辑：

1. 我们想算总同调。
2. 如果不分层，太难算。
3. 我们强行分层算 (E^0, E^1) ，发现有误差。
4. 误差是因为边缘算子 ∂ 会乱跑（跨层）。
5. 我们用 E^2 修正跨 1 层的误差。
6. 我们用 E^3 修正跨 2 层的误差。
7.
8. 直到修正完跨 n 层的误差，我们终于得到了没有任何误差的完美答案。

6. What Good Is All This?

在分析学中，每一位数学家都明白拥有一个收敛于所求量的级数逼近是多么有价值。尤其当这样的逼近级数仅以前几项就能捕捉到大部分信息时，它就显得尤为珍贵。

类似的价值也体现在谱序列中。一个常见的现象是当 r 还很小的时候，大量的 $E_{d,p}^r$ 项或边缘映射 ∂^r 就变成了零。这导致谱序列迅速稳定或**坍塌 (collapse)**，从而使得同调群的计算变得相对容易。我们将通过介绍 Phil Hanlon [2] 论文中定理 2 的证明来阐明这一点。这远非谱序列的“主流”应用，但它有一个巨大的优势，那就是只需要极少的背景知识就能跟上思路。那些懂足够多拓扑学的读者，可能会希望直接跳去看那些可以在任何教科书中找到的标准例子。

令 Q 为一个满足**秩条件(ranked)**的有限偏序集，即每一个极大的全序子集都拥有相同数量的元素，因此每一个元素都可以被赋予一个秩（即用来指示它在包含它的任意极大全序子集中的位置的一个自然数），并且 Q 配备了一个反序对合映射 $x \mapsto x^*$ 。

译者注：对合指

$$x^{**} = x$$

反序指对任意 $x < y$ ，有

$$x^* > y^*$$

令

$$\gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$$

为 Q 的一个全序子集，其中

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_t$$

如果对于所有的 i 和 j ，都有 $\alpha_i \neq \alpha_j^*$ ，我们称 γ 是**各向同性 (isotropic)** 的。

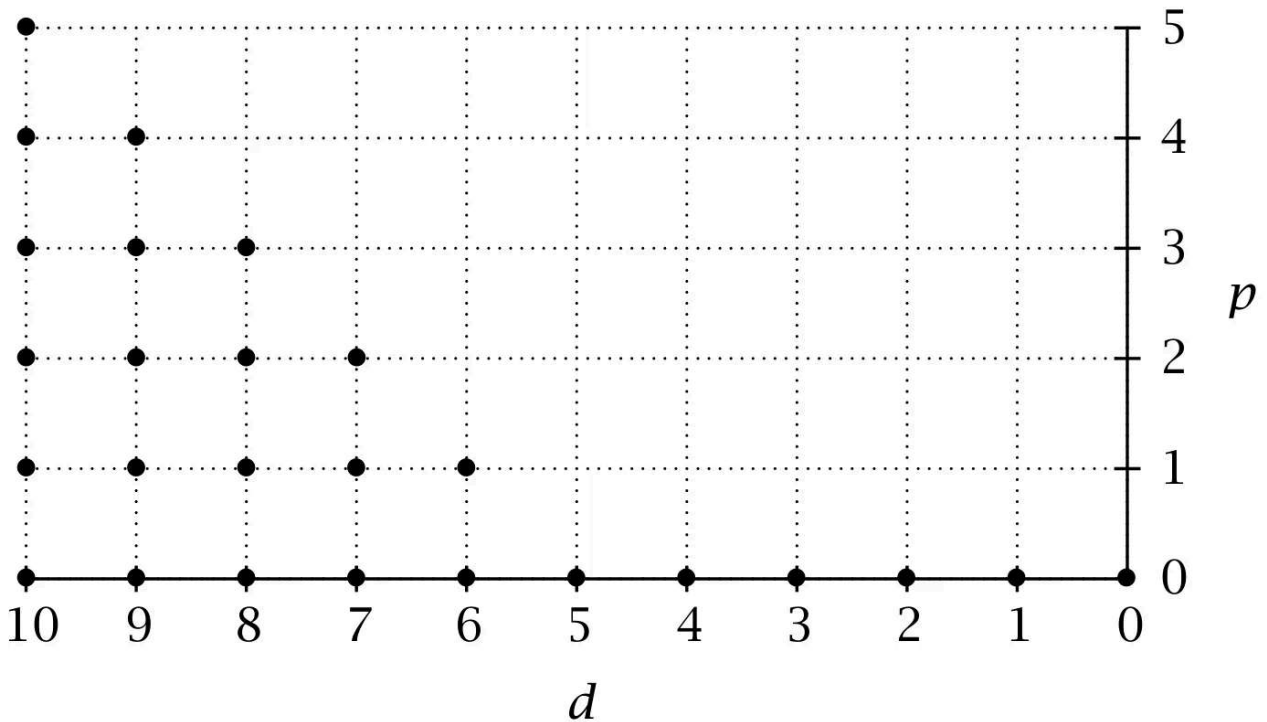
现在向 Q 中添加一个最小元 $\hat{0}$ 和一个最大元 $\hat{1}$ ，并考虑新得到的偏序集中所有全序子集构成的集合。这些全序子集构成了一个抽象单纯复形 Δ ，我们可以考虑它的单纯同调群 H_d 。我们也可以将注意力仅限制在那些各向同性的全序子集上；这些子集构成了一个子复形 Δ^0 ，它拥有自己的同调群 H_d^0 。

Hanlon 的定理 2 指出：如果 Q 是 Cohen-Macaulay 的，且其极大全序子集包含 m 个元素，那么当 $0 \leq d < m/2$ 时， $H_d^0 = 0$ 。这里我们不需要关心 **Cohen-Macaulay** 的具体

定义；只需知道 Cohen-Macaulay 偏序集满足某种特定的同调性质（在 Hanlon 的论文中有给出）就足够了。特别是当知道 Q 是 Cohen-Macaulay 的，就得到了关于 H_d 的信息。

为了从我们已知的 H_d 的信息中推导出关于 H_d^0 的结论，我们寻求建立 H_d 和 H_d^0 之间的关系。给定上述的链 γ ，Hanlon 的核心思路是定义 $\rho(\gamma)$ 的秩为 α_i ，其中 i 是满足“存在 $j > i$ 使得 $\alpha_i^* = \alpha_j$ ”这一条件的最大下标。那么 $\rho(\gamma) = 0$ 当且仅当 γ 是各向同性的；但更重要的是，应用边缘算子显然只能降低 ρ 值，因此 ρ 在 Δ 上诱导了一个滤过。具体来说，我们通过限制在那些满足 $\rho(\gamma) \leq p$ 的 γ 上来获得滤过的第 p 层。因此我们获得了一个谱序列。这就给出了 $H_d^0 = E_{d,0}^1$ 与谱序列的极限 H_d 之间的关系。

Hanlon 证明的核心在于分析 E^1 。他证明了除非 (d, p) 落在特定的位置，那么 $E_{d,p}^1 = 0$ 。例如，当 $m = 10$ 时，除了下图中用点标记的位置外， $E_{d,p}^1 = 0$ 。



如果你想象一下 45° 的边缘映射，你会发现对于 $d \geq 5 = m/2$ 的情况，可能会发生一些潜在的复杂事情；但是对于 $m/2 > d$ ，所有的 p 都有 $E_{d,p}^2$ 同构于 $E_{d,p}^1$ 。

事实上，当 $m/2 > d$ 时，对于所有的 $r \geq 1$ ，都有

$$E_{d,p}^r \cong E_{d,p}^1$$

随着 r 的增加，边缘映射倾斜得越来越厉害，但这没有影响。因此，仅仅通过计算 E^1 ，我们就已经计算出了特定 d 值的完整同调群。特别是，对于 $m/2 > d$ ，有

$$H_d^0 \cong H_d$$

事实证明，Cohen-Macaulay 条件很容易推导出对于 $m/2 > d$ 有 $H_d = 0$ ，这便完成了证明。

译者注：这篇文章用这个例子完美演示了谱序列的“黑盒”用法：

1. **输入**：一个几何对象 Δ 。
2. **操作**：找一个过滤 ρ ，制造谱序列。
3. **计算**：算一下 E^1 （发现有很多 0）。
4. **结果**：因为有很多 0，微分失效（坍塌），直接得出结论：局部的 H_d^0 等于整体的 H_d 。

7. A Glimpse Beyond

当我们抛弃那些简化性的假设时，许多复杂的情况就会随之浮出水面。例如在任意交换环上，方程

$$C_d \simeq \bigoplus_{p=1}^n E_{d,p}^0$$

不一定成立；并非所有的短正合序列都能分裂，因此可能会存在**扩张问题(extension issues)**。

当我们放宽有限性条件时，可能需要考虑 r 为任意大数值时的 E^r ，而且谱序列可能**不会收敛**。即使它确实收敛，也可能不会收敛到我们想要的那个同调群。

因此在许多应用中，日子并不像上面讨论的那样轻松；尽管如此，我们简化的设定仍然可以被视为“理想”情况，而更现实的情况只是对它的**微扰**。

我们应该提醒读者，谱序列是非常自然的工具，它们不仅产生于滤过复形，还产生于双复形、正合偶 (exact couples) 等。我们无法在这里探索所有这些分支，但希望我们的教程能帮助你更自信地应对教科书中的内容。

8. Why the Adjective “Spectral” ?

人们经常问起的一个问题是，“**谱(spectral)**”这个术语究竟从何而来？这个形容词是由 Leray 引入的，但他似乎从未公开发表过关于为何选择此词的解释。John McCleary（在私人

通信中)和其他人推测, 鉴于 Leray 是一位分析学家, 他可能认为谱序列每一项中的数据所扮演的角色, 类似于算子的特征值——它们是被逐一揭示出来的。如果有读者掌握更确切的信息, 我很乐意洗耳恭听。

译者注: Ravi Vakil 在他的谱序列讲义中有一段幽默的话: *Spectral sequences are a powerful book-keeping tool for proving things involving complicated commutative diagrams. They were introduced by Leray in the 1940's at the same time as he introduced sheaves. They have a reputation for being abstruse and difficult. It has been suggested that the name 'spectral' was given because, like spectres, spectral sequences are terrifying, evil, and dangerous. I have heard no one disagree with this interpretation, which is perhaps not surprising since I just made it up.*

大意: 谱序列是一种强大的工具, 用于证明涉及复杂交换图表的命题。它们是由 Leray 在 20 世纪 40 年代与“层”的概念同时引入的。它们素以深奥难懂而著称。有人认为之所以将其命名为“谱”(spectral, 有一层意思为“鬼怪的”), 是因为就像幽灵(spectres)一样, 谱序列也是恐怖、邪恶且危险的。我还从未听到有人反驳过通过这种解释, 这也难怪, 因为这纯粹是我刚才瞎编的。

译者又注: Leray 是谱序列(以及层论)的发明者。他在二战期间作为战俘被关押在奥地利的 Oflag XVII-A 战俘营。在那里, 为了隐瞒自己在偏微分方程方面的知识(属于应用数学, 可能被迫为纳粹服务), 他宣称自己只研究“毫无用处”的拓扑学。正是这段时间, 他构筑了谱序列的雏形。

9. Acknowledgments

这篇论文的前身是 1997 年春季我在担任数学科学研究所(Mathematical Sciences Research Institute, 简称 MSRI) general member 期间所做的一次讲座的配套讲义, 该期间的工作得到了国家科学基金会博士后奖学金的部分资助。

非常感谢 Art Duval, 他极其细致地审阅了这些笔记, 为改进文章的论述提供了详尽的建议, 并反复鼓励我将其整理成正式的文稿发表。

感谢 John McCleary 向我指出参考文献 [3] 和 [5]; 后者是另一篇面向初学者的关于谱序列的论述文章。

最后, 我要感谢 Phil Hanlon, 是他最初帮助我理解了谱序列。如果本文所阐述的方法有任何可取之处, 他的功劳至少与我不相上下。

10. References

1. **David Eisenbud**, *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1995.
2. **Phil Hanlon**, A note on the homology of signed posets, *J. Algebraic Combin.* **5** (1996), 245–250.
3. **John McCleary**, A history of spectral sequences: Origins to 1953, in *History of Topology*, edited by Ioan M. James, North Holland, 1999, 631–663.
4. **John McCleary**, *A User's Guide to Spectral Sequences*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2001.
5. **Barry Mitchell**, Spectral sequences for the layman, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 599–605.