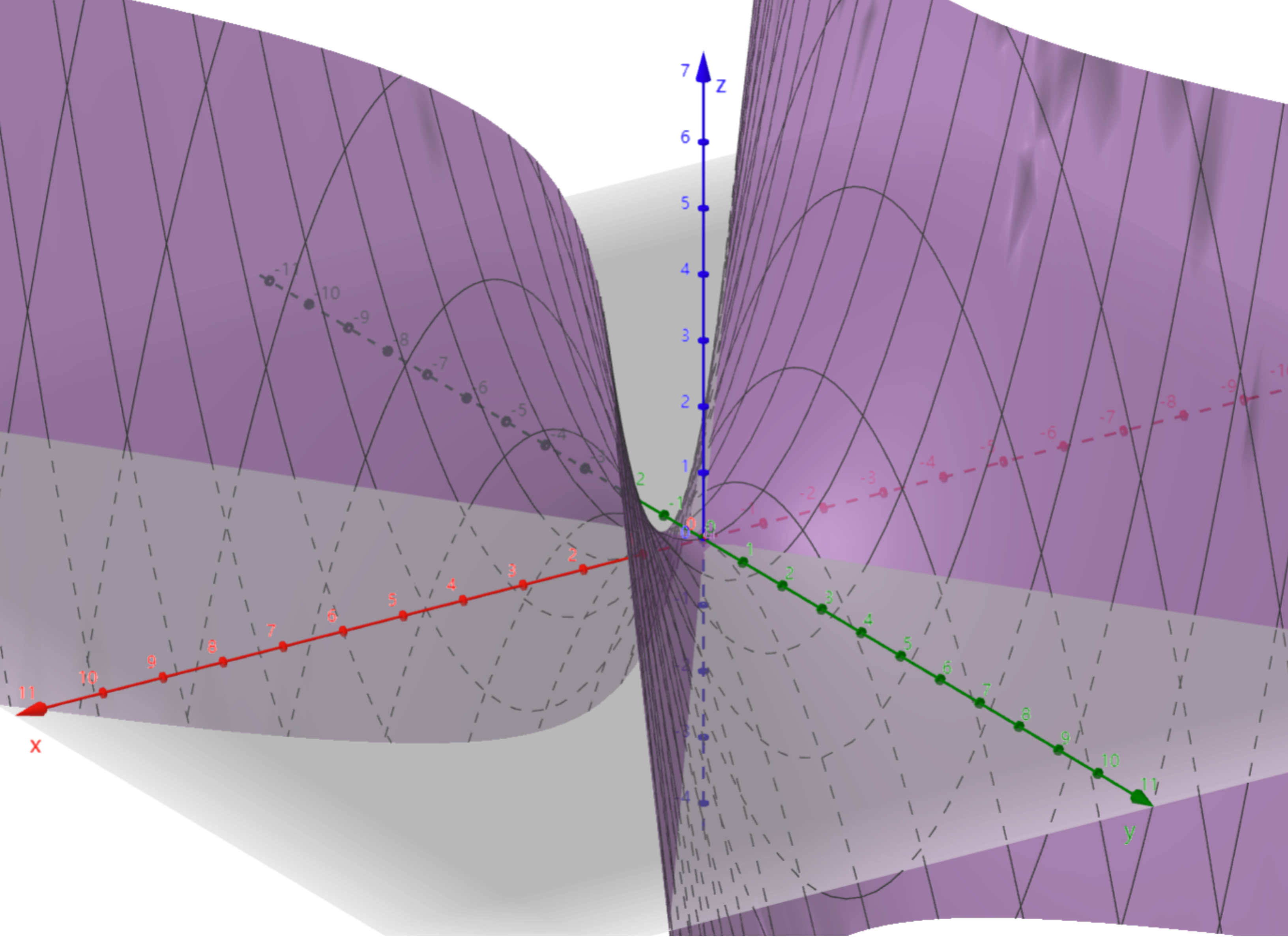

二次曲面

作者：杨毅涵

时间：2024 年 6 月 15 日

Contents

Chapter 1

球面与旋转面

1.1 球面的普通方程

Definition 1.1.1. 球心为 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$，半径为 R 的**球面**的方程为：

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

对于一般的没有交叉项的三元二次方程：

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \tag{1.1}$$

可以经过配方写成：

$$(x + b_1)^2 + (y + b_2)^2 + (z + b_3)^2 + c - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 0 \tag{1.2}$$

令 $R = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - c$，若 $R > 0$，则表示一个球面；若 $R = 0$，则表示一个点；若 $R < 0$，则没有轨迹(或者说是一个虚球面).

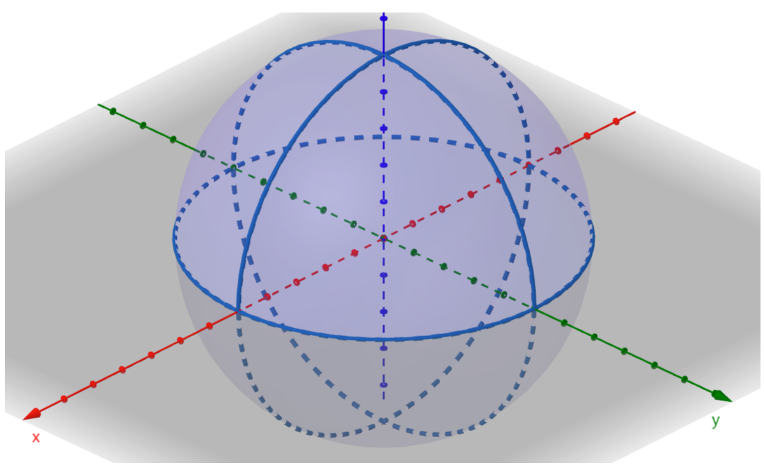

Figure 1.1: 球面

1.2 球面的参数方程，点的球面坐标

如果球心在原点，半径为 R，在球面之上任取一点 $M(x,y,z)^T$，从 M 作 Oxy 平面的垂线，垂足为 N，连接 OM,ON，设 x 轴的正半轴到 $\overrightarrow{ON}$ 的角度为 φ，$\overrightarrow{ON}$ 到 $\overrightarrow{OM}$ 的角度为 θ(M 在 Oxy 平面上方时为正，反之为负)，如图1.1：

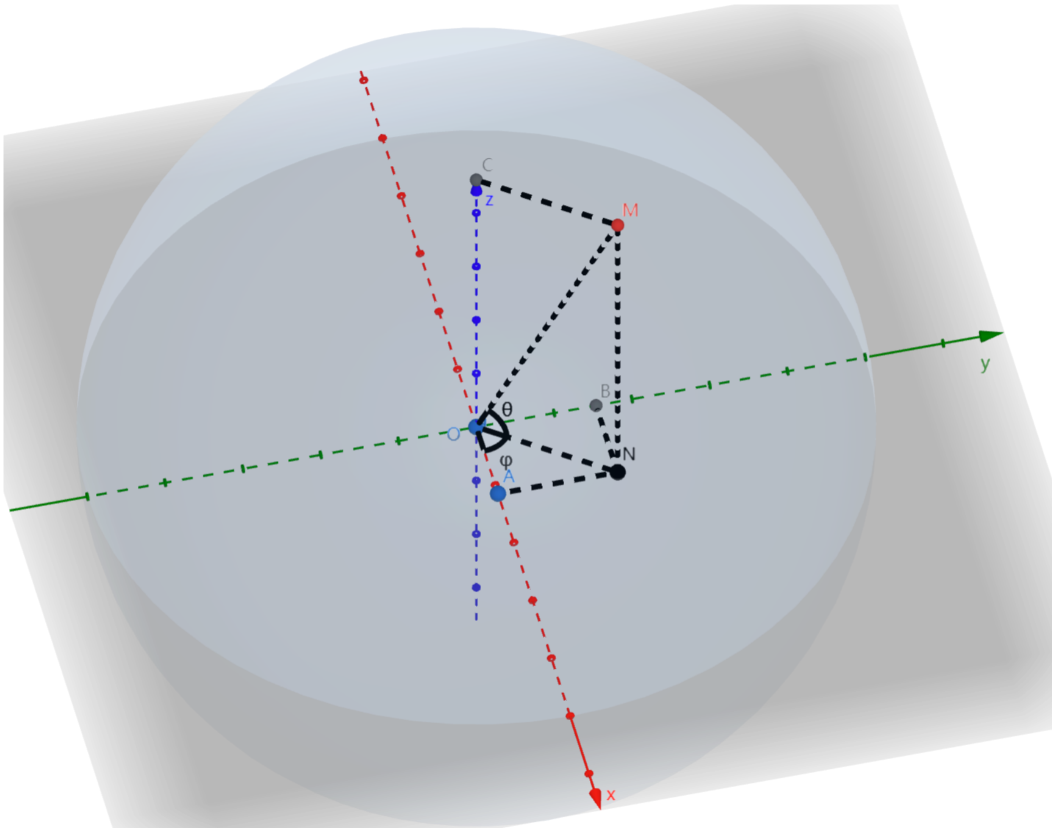

Figure 1.2: 球面的参数方程

Definition 1.2.1. 球心在原点，半径为 R 的球的参数方程为：

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$,$-\pi < \varphi < \pi$.

它有两个参数 θ，φ，其中 θ 称为 **纬度**，φ 称为**经度**. 球面上的每一个点(除去与 z 轴的交点)对应唯一一个实数对 (θ,φ)，其中 $(\theta,\varphi)^T$ 称为球面上点的**曲纹坐标**.

因为空间中任何一点 $M(x,y,z)^T$ 必在某一个以原点为球心的球面上，所以除 z 轴外，几何空间中的点 M 由有序三元实数组 (R,θ,φ) 唯一确定.

Definition 1.2.2. (R,θ,φ) 称为 $M(x,y,z)^T$ 的**球面坐标**(**或空间极坐标**)，其中

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi, & R \geq 0 \\ y = R\cos\theta\sin\varphi, & -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ z = R\sin\theta, & -\pi < \varphi < \pi \end{cases}$$

1.3 曲面和曲线的普通方程，参数方程

Definition 1.3.1. 一般来说，曲面的普通方程是一个三元方程 $F(x,y,z)=0$，

Definition 1.3.2. 曲面的参数方程是含有两个参数的方程：

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad a \le u \le b，c \le v \le d. \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 $(u,v)^T$ 称为曲面上点的**曲纹坐标**.

空间中的曲线可以看做是两个曲面的交线，从而曲线的普通方程是两个曲线方程的联立.

Definition 1.3.3. 空间中曲线的普通方程是：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Definition 1.3.4. 曲线的参数方程是含有一个参数的方程:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad a \le t \le b \\ z = z(t) \end{cases}$$

其中,对于 $t\,(a \le t \le b)$ 的每一个值,由方程确定的点 $(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在此曲线上; 而此曲线上任一点的坐标都可由 t 的某个值通过方程表示.

Example 1.3.1. 例如,球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 Oxy 平面相交所得的圆的普通方程为:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

而这个圆的参数方程是

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi, \quad -\pi < \varphi \le \pi \\ z = 0 \end{cases}$$

1.4 旋转面

Definition 1.4.1. 一条曲线 Γ 绕一条直线 l 旋转所得的曲面称为**旋转面**,其中 l 称为**轴**, Γ 称为**母线**.

如图所示,母线 Γ 上每个点 M_0 绕 l 旋转得到一个圆,称为纬圆. 纬圆与轴垂直. 过 l 的半平面与旋转面的交线称为经线(或子午线). 经线可以作为母线(如蓝线), 但母线不一定是经线(如红线).

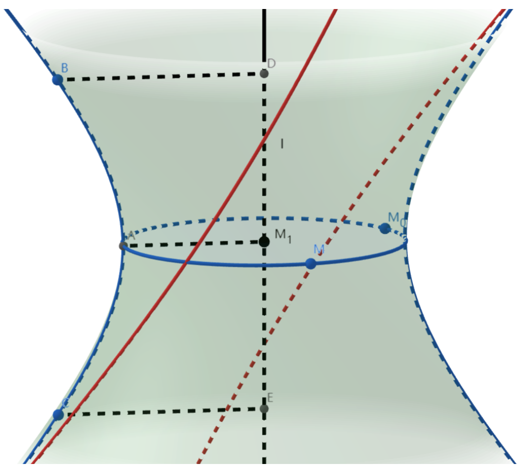

Figure 1.3: 旋转面

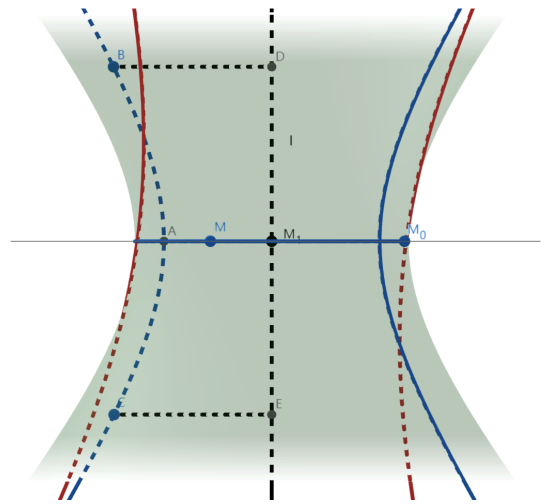

Figure 1.4: 旋转面的侧截面

已知轴 l 经过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$,方向向量为 $\mathbf{v}(l,m,n)^{\mathrm{T}}$,母线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

我们来求旋转面的方程:点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在旋转面上的充分必要条件是 M 在经过母线 Γ 上某一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}$ 的纬圆上 (如图 3.2),即有母线 Γ 上的一点 M_0 ,使得 M 和 M_0 到轴 l 的距离相等 (或到轴上一点 M_1 的距离相等),并且 $\overrightarrow{M_0M}\perp l$. 因此有:

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \left|\overrightarrow{MM_1}\times\mathbf{v}\right|=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\mathbf{v}\right| \\ l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0 \end{cases}$$

从这个方程组中消去参数 x_0,y_0,z_0 ,就得到 x,y,z 的方程,它就是所求旋转面的方程.

现在设旋转面的轴为 z 轴,母线 Γ 在 Oyz 平面上,其方程为

$$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases}$$

则点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在旋转面上的充分必要条件是:

$$\begin{cases} f\left(y_0, z_0\right)=0 \\ x_0=0 \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ 1 \cdot\left(z-z_0\right)=0 \end{cases}$$

消去参数 x_0, y_0, z_0 ,得

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0.$$

上式就是所求旋转面的方程. 由此看出,为了得到由 Oyz 平面上的曲线 Γ 绕 z 轴旋转所得旋转面的方程,只要将母线 Γ 在 Oyz 平面上的方程中 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,z 不动. 坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转所得旋转面的方程都有类似的规律.

Example 1.4.1. 母线:

$$\Gamma:\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases} \quad p>0$$

绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为

$$x^2+y^2=2pz.$$

这个曲面称为**旋转抛物面**.

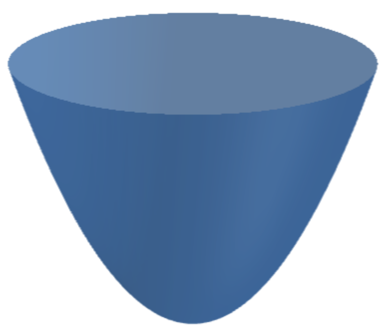

Figure 1.5: 旋转抛物面

Example 1.4.2. 母线:

$$\Gamma:\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得旋转面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

这个曲面称为**旋转双叶双曲面**.

Γ 绕 y 轴旋转所得旋转面的方程为

$$\frac{x^2 + z^2}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

这个曲面称为**旋转单叶双曲面**.

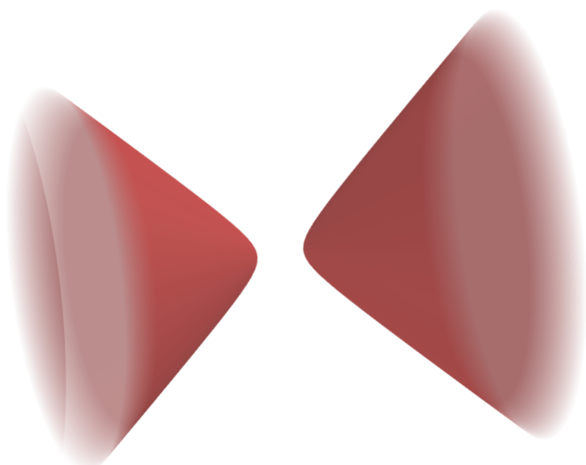

Figure 1.6: 旋转双叶双曲线

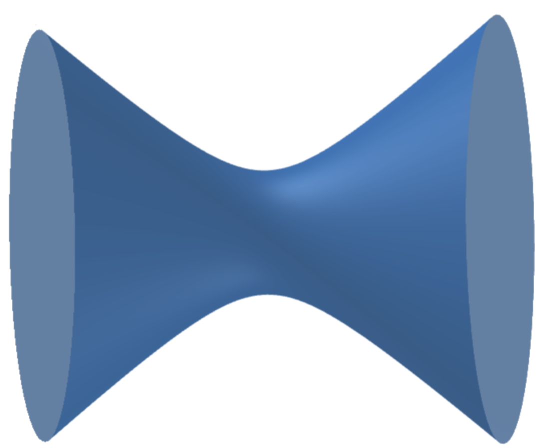

Figure 1.7: 旋转单叶双曲线

Example 1.4.3. 圆

$$\left\{\begin{array}{l}(x-a)^2+z^2=r^2 \\ y=0\end{array}\right. \quad 0<r<a$$

绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=r^2$$

即

$$\left(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\right)^2=4a^2\left(x^2+y^2\right)$$

这个曲面称为**环面**.

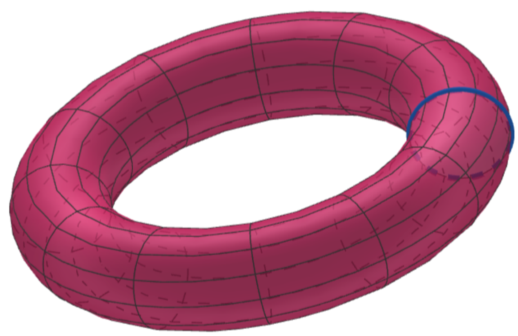

Figure 1.8: 环面

Example 1.4.4. 设 l_1 和 l_2 是两条异面直线,它们不垂直,求 l_2 绕 l_1 旋转所得旋转面的方程.

证明: 设 l_1 和 l_2 的距离为 a . 以 l_1 为 z 轴, l_1 和 l_2 的公垂线为 x 轴.

且让 l_2 与 x 轴的交点坐标为 $(a,0,0)^{\mathrm{T}}$,建立一个右手直角坐标系. 设 l_2 的方向向量为 $\mathbf{v}(l,m,n)^{\mathrm{T}}$.

因为 l_2 与 x 轴垂直,所以 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1=0$,得 $l=0$. 因为 l_2 与 l_1 异面,所以 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{e}_3$ 不共线.

于是 $m\neq 0$. 因此可设 $\mathbf{v}$ 的坐标为 $(0,1,b)^{\mathrm{T}}$. 因为 l_1 与 l_2 不垂直,所以 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3\neq 0$. 于是 $b\neq 0$.

因此 l_2 的参数方程为:

$$\left\{\begin{array}{l}x=a, \\ y=t,\ -\infty<t<+\infty. \\ z=bt,\end{array}\right.$$

点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在旋转面上的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ y_0 = t, \\ z_0 = bt, \\ x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2, \\ 1 \cdot (z - z_0) = 0. \end{cases}$$

消去参数 x_0, y_0, z_0, t ,得

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{z^2}{b^2}$$

即

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2b^2} = 1.$$

这是一个旋转单叶双曲面. □

Chapter 2

柱面和锥面

2.1 直纹面

Definition 2.1.1. 设 S 为一曲面，若对 S 上任意一点 P，存在直线 l 使得 $P \subset l \subset S$. 则称 S 为**直纹面**，称 l 为**直母线**，简称**母线**.

Example 2.1.1. 如椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 不是直纹面，因为它是有界的，容不下直线.

Example 2.1.2. 椭球抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z(a,b>0)$ 也不是直纹面，因为它位于 Oxy 平面的上方，如果它上面有直线，则此直线一定平行于 Oxy 平面，但它与 $z=h$ 平面的截线是椭圆，容不下直线.

Example 2.1.3. 类似的，双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ 也不是直纹面.

2.2 柱面方程的建立

Definition 2.2.1. 一条直线 l 沿着一条空间曲线 C 平行移动时所形成的曲面称为柱面,其中 l 称为母线, C 称为准线.

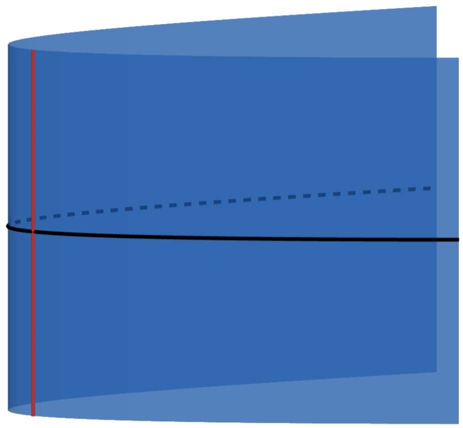

Figure 2.1: 柱面

按定义, 平面也是柱面.

对于一个柱面, 它的准线和母线都不唯一, 但母线方向唯一(除去平面外). 与每一条母线都相交的曲线均可作为准线.

设一个柱面的母线方向为 $\mathbf{v}(l,m,n)^{\mathrm{T}}$,准线 C 的方程为

$$\begin{cases} F\left(x,y,z\right)=0, \\ G\left(x,y,z\right)=0. \end{cases}$$

我们来求这个柱面的方程.

点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在此柱面上的充分必要条件是 M 在某一条母线上,即有准线 C 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}$,使得 M 在经过 M_0 ,且方向向量为 $\mathbf{v}$ 的直线上 (如图 2.2).

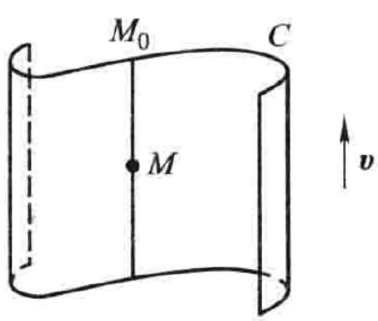

Figure 2.2: 柱面(这种图我在GGB画不出来(哭泣))

因此有

$$\begin{cases} F\left(x_0, y_0, z_0\right)=0, \\ G\left(x_0, y_0, z_0\right)=0, \\ x=x_0+lu, \\ y=y_0+mu, \\ z=z_0+nu. \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 ,得

$$\begin{cases} F\left(x-lu, y-mu, z-nu\right)=0, \\ G\left(x-lu, y-mu, z-nu\right)=0. \end{cases}$$

再消去参数 u ,得到 x, y, z 的一个方程,它就是所求柱面的方程如果给的是准线 C 的参数方程

$$\begin{cases} x=f\left(t\right), \\ y=g\left(t\right),\ a\leq t\leq b, \\ z=h\left(t\right), \end{cases}$$

则同理可得柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x=f\left(t\right)+lu, \\ y=g\left(t\right)+mu,\ a\leq t\leq b \\ z=h\left(t\right)+nu, \end{cases}$$

2.3 圆柱面，点的柱面坐标

Definition 2.3.1. 圆柱面有一条对称轴 l ,圆柱面上每一个点到轴 l 的距离都相等,这个距离称为圆柱面的半径.

如果知道圆柱面的半径为 r ,母线方向为 $\mathbf{v}(l,m,n)^{\mathrm{T}}$,及圆柱面的对称轴 l_0 经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}$,则点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在此圆柱面上的充分必要条件是 M 到轴 l_0 的距离等于 r ,即

$$\frac{\left|\overrightarrow{MM_0}\times\mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|}=r$$

几何空间中任意一点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 必在以$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为半径, z 轴为对称轴的圆柱面上.

Definition 2.3.2. 圆柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi \\ z=u \end{cases}$$

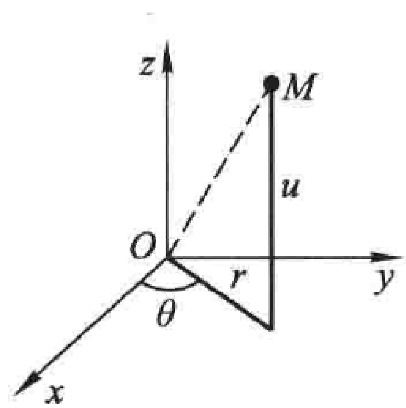

Figure 2.3: 柱面参数方程(后面准备都偷懒了)

因此,圆柱面上的点 M 被数对 (θ,u) 所确定,从而几何空间中任一点 M 被有序三元实数组 (r,θ,u) 所确定.

Definition 2.3.3. $(r,\theta,u)^{\mathrm{T}}$ 称为点 M 的柱面坐标. 点 M 的柱面坐标与它的直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\ r\ge 0, \\ y=r\sin\theta,\ 0\le\theta<2\pi, \\ z=u,\ -\infty<u<+\infty. \end{cases}$$

2.4 柱面方程的特点

Theorem 2.4.1. 若一个柱面的母线平行于 z 轴 (x 轴或 y 轴),则它的方程中不含 $z\,(x或y)$; 反之,一个三元方程如果不含 $z\,(x或y)$, 则它一定表示一个母线平行于 z 轴 (x 轴或 y 轴) 的柱面.

证明: 设一个柱面的母线平行于 z 轴,则这个柱面的每条母线必与 Oxy 平面相交,从而这个柱面与 Oxy 平面的交线 C 可以作为准线. 设 C 的方程是:

$$\begin{cases} f\,(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

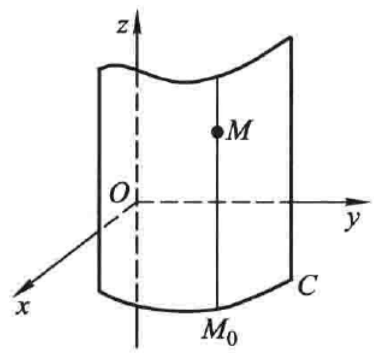

Figure 2.4: 定理

点 M 在此柱面上的充分必要条件是,存在准线 C 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}$, 使得 M 在经过 M_0 且方向向量为 $\mathbf{v}(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 的直线上 (如图 2.4). 因此有

$$\begin{cases} f\,(x_0,y_0)=0, \\ z_0=0, \\ x=x_0, \\ y=y_0, \\ z=z_0+u. \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 ,得

$$\begin{cases} f\,(x,y)=0, \\ z=u. \end{cases}$$

由于参数 u 可以取任意实数值,于是得到这个柱面的方程为

$$f\,(x,y)=0.$$

反之,任给一个不含 z 的三元方程 $g\,(x,y)=0$,我们考虑以曲线

$$C': \begin{cases} g(x,y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

为准线, z 轴方向为母线方向的柱面. 由上述讨论知,这个柱面的方程为 $g(x,y)=0$. 因此,方程 $g(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面.

母线平行于 x 轴和 y 轴的情形可类似讨论. □

Example 2.4.1. 方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,它与 Oxy 平面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

这条交线是椭圆，这个柱面被称作为**椭圆柱面**.

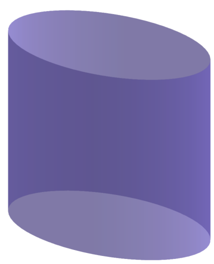

Figure 2.5: 椭圆柱面

Example 2.4.2. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0,$$

$$x^2+2py=0\,(p>0)$$

分别表示母线平行于 z 轴的**双曲柱面、抛物柱面**.

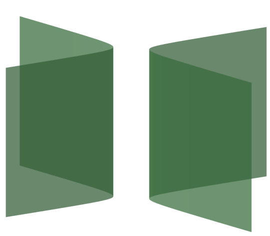

Figure 2.6: 双曲柱面

Figure 2.7: 抛物柱面

2.5 锥面方程的建立

Definition 2.5.1. 在空间中,由曲线 C 上的点与不在 C 上的一个定点 M_0 的连线组成的曲面称为**锥面**,其中 M_0 称为**顶点**, C 称为**准线**, C 上的点与 M_0 的连线称为**母线**.

一个锥面的准线不唯一, 锥面上与每一条母线都相交的曲线均可作为准线.

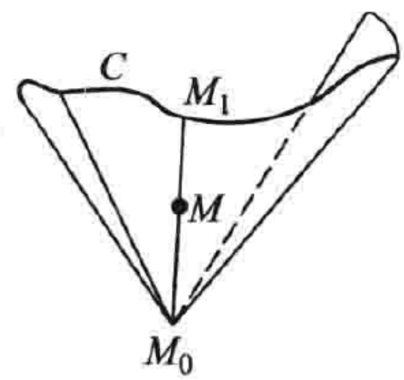

Figure 2.8: 锥面

设一个锥面的顶点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}$，准线 C 的方程为

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{array}\right.$$

点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}\,(M\neq M_0)$ 在此锥面上的充分必要条件是 M 在一条母线上,即准线上存在一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$,使得 M_1 在直线 M_0M 上 (如图 2.8). 因此有

$$\left\{\begin{array}{l} F(x_1,y_1,z_1)=0, \\ G(x_1,y_1,z_1)=0, \\ x_1=x_0+(x-x_0)\,u, \\ y_1=y_0+(y-y_0)\,u, \\ z_1=z_0+(z-z_0)\,u. \end{array}\right.$$

消去 x_1,y_1,z_1 ,得

$$\left\{\begin{array}{l} F(x_0+(x-x_0)\,u,y_0+(y-y_0)\,u,z_0+(z-z_0)\,u)=0, \\ G(x_0+(x-x_0)\,u,y_0+(y-y_0)\,u,z_0+(z-z_0)\,u)=0. \end{array}\right.$$

再消去 u ,得到 x,y,z 的一个方程,它就是所求锥面 (除去顶点) 的方程.

Remark 2.5.1. 我们常把坐标系的原点取为锥顶, 此时, 如果准线在平行于坐标平面的一张平面上, 譬如为

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=h. \end{cases}$$

则用上述方法可得到方程

$$f\left(\frac{hx}{z},\frac{hy}{z}\right)=0$$

它是去掉锥顶的锥面方程.

2.6 圆锥面

Definition 2.6.1. 圆锥面,它有一根对称轴 l ,它的每一条母线与轴 l 所成的角都相等,这个角称为圆锥面的**半顶角**. 与轴 l 垂直的平面截圆锥面所得交线为圆.

如果已知准线圆方程和顶点 M_0 的坐标,则用 2.4 小节所述方法可求得圆锥面的方程. 如果已知顶点的坐标和轴 l 的方向向量 $\mathbf{v}$ 以及半顶角 α ,则点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在圆锥面上的充分必要条件是

$$\left\langle \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{v} \right\rangle = \alpha \text{ 或 } \pi - \alpha.$$

因此有

$$\left|\cos\left\langle \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{v} \right\rangle\right| = \cos\alpha.$$

据此可以求得圆锥面的曲线方程.

Example 2.6.1. 求以三根坐标轴为母线的圆锥面的方程.

证明: 显然,这个圆锥面的顶点为原点 O . 设轴 l 的一个方向向量为 $\mathbf{v}$. 因为三根坐标轴为母线,所以得

$$\left|\cos\left\langle \mathbf{e}_1, v\right\rangle\right| = \left|\cos\left\langle \mathbf{e}_2, v\right\rangle\right| = \left|\cos\left\langle \mathbf{e}_3, v\right\rangle\right|.$$

因此,轴 l 的一个方向向量 $\mathbf{v}$ 的坐标为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 或 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 或 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 或 $(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$. 考虑 $\mathbf{v}$ 的坐标为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,其余三种情形可类似讨论.

因为点 $M(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在这个圆锥面上的充分必要条件是

$$\left|\cos\langle\overrightarrow{OM}, \mathbf{v}\rangle\right| = \left|\cos\left\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}\right\rangle\right|,$$

即

$$\frac{\left|\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{v}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\mathbf{v}\right|} = \frac{\left|\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{v}\right|}{\left|\mathbf{v}\right|},$$

于是得

$$xy + yz + xz = 0.$$

这就是所求的一个圆锥面的方程. □

2.7 锥面方程的特点

Definition 2.7.1. $F(x,y,z)$ 称为 x,y,z 的 n 次齐次函数 (n 是整数), 如果

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z)$$

对于定义域中的一切 x,y,z 以及任意非零实数 t 都成立. 此时,方程 $F(x,y,z)=0$ 称为 x,y,z 的 n **次齐次方程**.

Theorem 2.7.1. x,y,z 的齐次方程表示的曲面 (添上原点) 一定是以原点为顶点的锥面.

证明: 设 $F(x,y,z)=0$ 是 n 次齐次方程,它表示的曲面添上原点后记作 S . 在 S 上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}, M_0$ 不是原点.

于是直线 OM_0 上任一点 $M_1\neq O$ 的坐标 $(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$ 适合

$$\begin{cases} x_1=x_0t, \\ y_1=y_0t,\ t\neq 0, \\ z_1=z_0t, \end{cases}$$

从而有

$$F(x_1,y_1,z_1)=F(x_0t,y_0t,z_0t)=t^nF(x_0,y_0,z_0)=0.$$

因此 M_1 在 S 上. 于是整条直线 OM_0 都在 S 上,所以 S 是由经过原点的一些直线组成的，这说明S 是锥面. □

Figure 2.9: $xy+yz+zx=0$ 所表示的锥面

Theorem 2.7.2. 在以锥面的顶点为原点的直角坐标系中, 锥面可以用 x,y,z 的齐次方程表示.

证明: 设 $F(x,y,z)=0$ 为锥面 S 的任一方程.

显然 S 的每一条母线必与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相交,即 S 必有球面准线,它可表示为

$$(\mathrm{C})\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

若 $F(x,y,z)=0$ 是关于 x,y,z 的齐次方程,则定理得证,若不然,则设 $P(x,y,z)$ 是 S 上任一点,但 $P\neq 0,OP$ 直线与 (C) 的交点为 $(x_0,y_0\cdot z_0)$,则有

$$F(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$$

而直线 OP 的方程是

$$\begin{cases} x=tx_0 \\ y=ty_0 \\ z=tz_0 \end{cases},\ (t\in\mathbb{R})$$

由以上五式消去 x_0,y_0,z_0 及 t ,可得 P 点坐标满足

$$F\left(\frac{x}{A},\frac{y}{A},\frac{z}{A}\right)=0$$

或

$$F\left(-\frac{x}{A},-\frac{y}{A},-\frac{z}{A}\right)=0$$

这里 $A=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，于是 S 的方程又可表示为

$$G(x,y,z)=0$$

其中

$$G(x,y,z)=\begin{cases} F\left(\frac{x}{A},\frac{y}{A},\frac{z}{A}\right)\cdot F\left(-\frac{x}{A},-\frac{y}{A},-\frac{z}{A}\right), & x^2+y^2+z^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2+z^2=0 \end{cases}$$

注意到 $\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}=|t|\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，我们发现，当 $x^2+y^2+z^2\neq 0$ 时：

$$\begin{aligned} G(tx,ty,tz) &= F\left(\frac{tx}{|t|A},\frac{ty}{|t|A},\frac{tz}{|t|A}\right)\cdot F\left(-\frac{tx}{|t|A},-\frac{ty}{|t|A},-\frac{tz}{|t|A}\right) \\ &= F\left(\frac{x}{A},\frac{y}{A},\frac{z}{A}\right)\cdot F\left(-\frac{x}{A},-\frac{y}{A},-\frac{z}{A}\right) \\ &= G(x,y,z) \end{aligned}$$

当 $x=y=z=0$ 时，显然有 $G(tx,ty,tz)=G(x,y,z)$，故知 $G(x,y,z)$ 为零次齐次方程. $\square$

Chapter 3

二次曲面

3.1 椭球面

Definition 3.1.1. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0$$

表示的曲面称为**椭球面**.

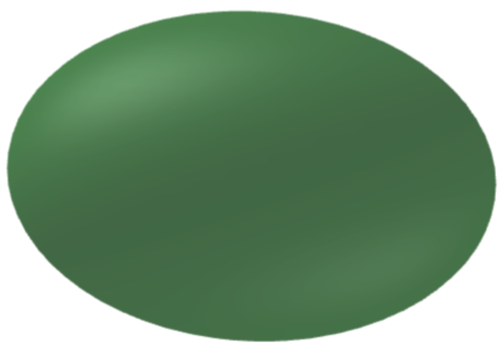

Figure 3.1: 椭球面

Proposition 3.1.1. 椭球面具有以下性质：

(1) 对称性：

(a) 因为方程中用 $-x$ 代 x ,方程不变,于是若点 $P(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在椭球面上,则点 P 关于 Oyz 平面的对称点 $(-x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 也在此椭球面上,所以此椭球面关于 Oyz 平面对称. 同理,由于方程中用 $-y$ 代 y ($-z$代z) 方程不变,所以此椭球面关于 Ozx 平面 (Oxy平面) 对称.

(b) 因为方程中同时用 $-x$ 代 x ,用 $-y$ 代 y ,方程不变,所以图形关于 z 轴对称. 由类似的理由知,图形关于 y 轴, x 轴也对称.

(c) 因为方程中同时用 $-x$ 代 $x,-y$ 代 $y,-z$ 代 z ,方程不变, 所以图形关于原点对称.

总而言之, 三个坐标面都是椭球面的对称平面, 三根坐标轴都是它的对称轴, 原点是它的对称中心.

(2) 范围:

由方程立即看出

$$|x| \leq a,\ |y| \leq b,\ |z| \leq c.$$

(3) 形状:

(a) 与 Oxy 平面的交线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

这是在 Oxy 平面上的一个椭圆. 同理可知,曲面与 Oyz 平面 (Oxz 平面) 的交线也是椭圆. 如图 3.2 所示.

(b) 用平行于 Oxy 平面的平面 $z=h$ 截曲面得到的交线 (称为截口)为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

当 $|h| < c$ 时,截口是椭圆; 当 $|h| = c$ 时,截口是一个点; 当 $|h| > c$ 时,无轨迹.

(4) 等高线:

把平行于 Oxy 平面的截口投影到 Oxy 平面上得到的投影线称为**等高线**.如图 3.3 所示.

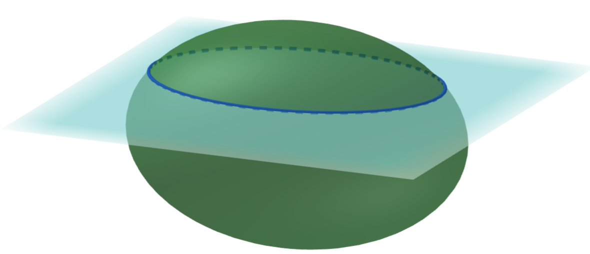

Figure 3.2: 椭球面

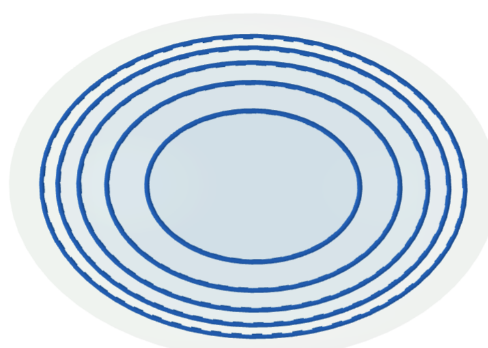

Figure 3.3: 等高线

3.2 单叶双曲面

Definition 3.2.1. 方程表示的曲线被称为**单叶双曲面**.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

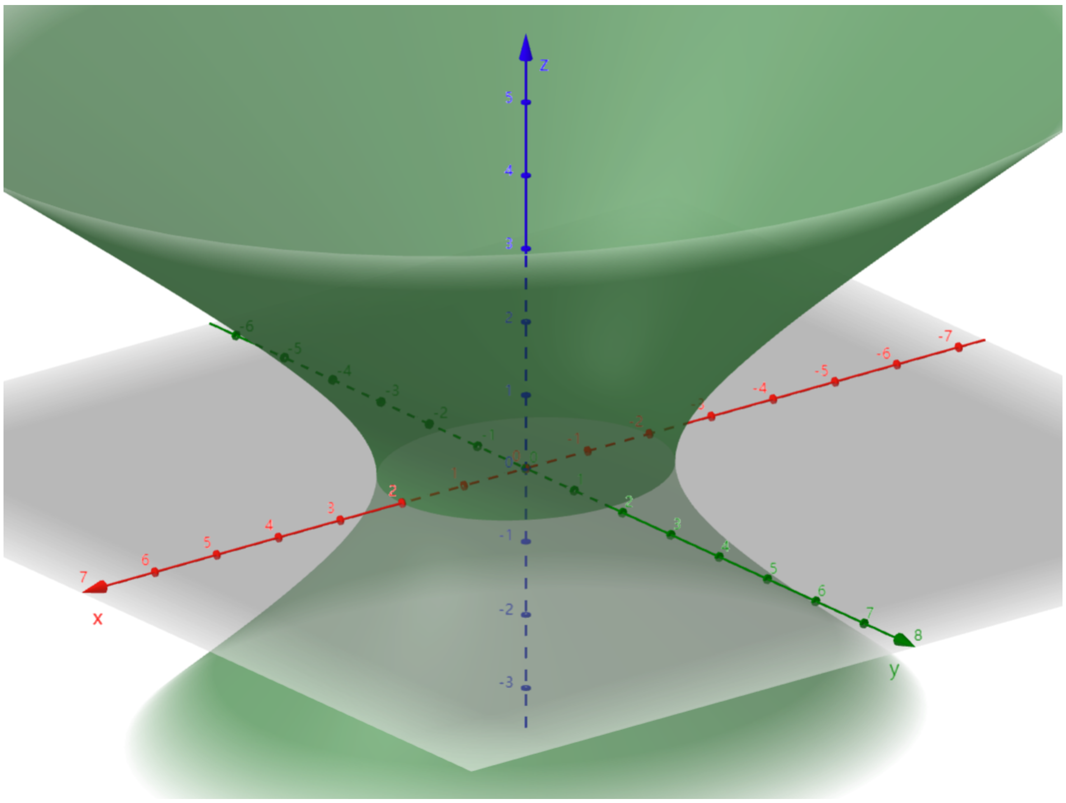

Figure 3.4: 单叶双曲面

Proposition 3.2.1. 单叶双曲面具有下述性质：

(1) 对称性：三个坐标面都是此图形的对称平面，三根坐标轴都是它的对称轴，原点是它的对称中心.

(2) 范围：由方程得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\geq 1$$

所以此曲面的点都在柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的外部或者柱面上.

(3) 形状：

(a) 与 Oxy 平面的交线为：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

这是一个椭圆，称为此曲面的**腰椭圆**.

(b) 与 Oxz 平面的交线为：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

为双曲线，与 Oyz 平面交线同理.

(c) 此曲面平行于 Oxy 平面的截口为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

长短轴分别为：

$$b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

(4) 锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

称为单叶双曲面的**渐近锥面**. 用平面 $z=h$ 截此锥面，截口为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

这个椭圆的长、短半轴分别为

$$a''=a\frac{|h|}{c},\quad b''=b\frac{|h|}{c}.$$

因为

$$a'-a''=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}-a\frac{|h|}{c}=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}+\frac{|h|}{c}},$$

所以 $\lim\limits_{|h|\to\infty}(a'-a'')=0$. 同理, $\lim\limits_{|h|\to\infty}(b'-b'')=0$. 这说明,当 $|h|$ 无限增大时, 单叶双曲面的截口椭圆与它的渐近锥面的截口椭圆无限接近, 即单叶双曲面与它的渐近锥面无限地任意接近.

Theorem 3.2.1. 单叶双曲线可以由旋转单叶双曲线(见 Example 1.4.4)通过仿射变换而得到，由于旋转单叶双曲面是直纹面，仿射变换把直线映射为直线，且不改变直线的共面性与平行关系，所以单叶双曲面是直纹面.

设单叶双曲面 S 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

改写为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

则对于任意一对不全为零的实数 s,t ,直线

$$l_{s:t}:\begin{cases} s\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ t\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=s\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases},l'_{s:t}:\begin{cases} s\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=t\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ t\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=s\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

都在单叶双曲面 S 上.于是,得到 S 上的两族直母线

$$I=\{l_{s:t}\mid s,t \text{ 不全为零 }\},I'=\{l'_{s:t}\mid s,t \text{ 不全为零 }\}.$$

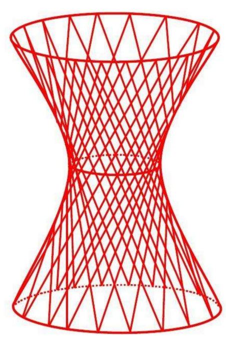

Figure 3.5: 两族直母线

Theorem 3.2.2. *单叶双曲面的两族直母线有以下命题成立:

(1) 对 S 上任一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,每族直母线中各有一条经过 M_0 .

(2) S 上的所有直母线都在 I 或 I' 中.

(3) 同族的任何三条直母线都不会平行于同一平面, 同族的两条不同直母线一定异面.

(4) 异族的直母线一定共面.

(5) I 和 I' 无公共直母线.

证明:

(1) 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在单叶双曲面 S 上,则 $1+\frac{y_0}{b}$ 和 $1-\frac{y_0}{b}$ 不全为零.

如果 $1+\frac{y_0}{b}\neq 0$,令

$$s_1=1+\frac{y_0}{b},\quad t_1=\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$$

则 M_0 在 $l_{s_1:t_1}$ 上. 令

$$s_2=\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c},\quad t_2=1+\frac{y_0}{b}$$

则 M_0 在 $l'_{s_2:t_2}$ 上.

如果 $1-\frac{y_0}{b}\neq 0$,令

$$s_3=\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c},t_3=1-\frac{y_0}{b}$$

则 M_0 在 $l_{s_3:t_3}$ 上. 令

$$s_4=1-\frac{y_0}{b},t_4=\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}$$

则 M_0 在 $l'_{s_4:t_4}$ 上.

(2) 由于仿射变换不改变共线关系，不妨设曲面方程为：$x^2+y^2-z^2=1$.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在单叶双曲面上，我们考虑经过 M 的直线 l 在曲面上，其中 l 的方向向量为：$v=(l,m,n)$.

我们有 $M(x_0+kl,y_0+km,z_0+kn)\in S$，也就是：

$$(x_0+kl)^2+(y_0+km)^2-(z_0+kn)^2=1$$

$$x_0^2+y_0^2-z_0^2+2k(x_0l+y_0m-z_0n)+k^2(l^2+m^2-n^2)=0$$

上式对于任意的 $k\in\mathbb{R}$ 成立，也就是

$$2k(x_0l+y_0m-z_0n)=k^2(l^2+m^2-n^2)$$

对任意 $k\in\mathbb{R}$ 成立，则容易得到：

$$\begin{cases}x_0l+y_0m-z_0n=0\\ l^2+m^2-n^2=0\end{cases}$$

观察到这是一个齐次方程，所以我们不妨设 $l^2+m^2+n^2=2$，从而解得：

$$\begin{cases}l^2+m^2=1\\ n^2=1\\ x_0l+y_0m=z_0n\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，我们可以解得(代入消元法用求根公式解二次方程)：

$$m=\frac{y_0z_0\pm x_0}{x_0^2+y_0^2},\quad l=\frac{x_0z_0\mp y_0}{x_0^2+y_0^2},\quad n=1$$

取一个解

$$\begin{cases} m_0 = \dfrac{y_0 z_0 + x_0}{x_0^2 + y_0^2} \\ l_0 = \dfrac{x_0 z_0 - y_0}{x_0^2 + y_0^2} \\ n_0 = 1 \end{cases}$$

我们设

$$\begin{cases} s = l_0 - n_0 \\ t = -m_0 \end{cases}$$

则对于$\begin{cases} x = x_0 + kl_0 \\ y = y_0 + km_0 \\ z = z_0 + kn_0 \end{cases}$，我们不难验证：

$$\begin{cases} s(x+z) = t(1+y) \\ t(x-z) = s(1-y) \end{cases}$$

从而对于这一组解 (l_0, m_0, n_0) 满足 $l \in I$，对于其他所有可能的方向向量对导出的直线 l'，同理可以验证出 l' 不在 I 中就在 I' 中.

(3) 第一部分: 任取 I 中三条不同的直母线

$$l_{s_1:t_1}, l_{s_2:t_2}, l_{s_3:t_3},$$

容易算出它们的方向向量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{s_1:t_1} = \left(a\left(t_1^2 - s_1^2\right), bs_1t_1, c\left(s_1^2 + t_1^2\right)\right) \\ \mathbf{u}_{s_2:t_2} = \left(a\left(t_2^2 - s_2^2\right), bs_2t_2, c\left(s_2^2 + t_2^2\right)\right) \\ \mathbf{u}_{s_3:t_3} = \left(a\left(t_3^2 - s_3^2\right), bs_3t_3, c\left(s_3^2 + t_3^2\right)\right) \end{cases}$$

因为

$$\det\left(\mathbf{u}_{s_1:t_1}, \mathbf{u}_{s_2:t_2}, \mathbf{u}_{s_3:t_3}\right) = \begin{vmatrix} a\left(t_1^2 - s_1^2\right) & bs_1t_1 & c\left(s_1^2 + t_1^2\right) \\ a\left(t_2^2 - s_2^2\right) & bs_2t_2 & c\left(s_2^2 + t_2^2\right) \\ a\left(t_3^2 - s_3^2\right) & bs_3t_3 & c\left(s_3^2 + t_3^2\right) \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} t_1^2 - s_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 + t_1^2 \\ t_2^2 - s_2^2 & s_2t_2 & s_2^2 + t_2^2 \\ t_3^2 - s_3^2 & s_3t_3 & s_3^2 + t_3^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 2t_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 + t_1^2 \\ 2t_2^2 & s_2t_2 & s_2^2 + t_2^2 \\ 2t_3^2 & s_3t_3 & s_3^2 + t_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abct_1^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 \\ t_2^2 & s_2t_2 & s_2^2 \\ t_3^2 & s_3t_3 & s_3^2 \end{vmatrix} = 2abct_1^2t_2^2t_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{s_1}{t_1} & \left(\dfrac{s_1}{t_1}\right)^2 \\ 1 & \dfrac{s_2}{t_2} & \left(\dfrac{s_2}{t_2}\right)^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

因此 $l_{s_1:t_1}, l_{s_2:t_2}, l_{s_3:t_3}$ 不会平行于同一个平面. 类似可证 I' 中三条不同的直母线也不会平行于同一个平面.

第二部分: 任取 I 中两条不同的直母线

$$l_{s_1:t_1}, l_{s_2:t_2}$$

它们的方向向量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{s_1:t_1} = \left(a\left(t_1^2 - s_1^2\right), bs_1t_1, c\left(s_1^2 + t_1^2\right)\right) \\ \mathbf{u}_{s_2:t_2} = \left(a\left(t_2^2 - s_2^2\right), bs_2t_2, c\left(s_2^2 + t_2^2\right)\right) \end{cases}$$

分别取 $l_{s_1:t_1}, l_{s_2:t_2}$ 上的点

$$M_1\left(a\frac{t_1^2 + s_1^2}{2s_1t_1}, 0, c\frac{t_1^2 - s_1^2}{2s_1t_1}\right), \quad M_2\left(a\frac{t_2^2 + s_2^2}{2s_2t_2}, 0, c\frac{t_2^2 - s_2^2}{2s_2t_2}\right)$$

因为

$$\det\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{u}_{s1:t_1}, \mathbf{u}_{s_2:t_2}\right) = \begin{vmatrix} a\left(\frac{t_2^2 + s_2^2}{2s_2t_2} - \frac{t_1^2 + s_1^2}{2s_1t_1}\right) & 0 & c\left(\frac{t_2^2 - s_2^2}{2s_2t_2} - \frac{t_1^2 - s_1^2}{2s_1t_1}\right) \\ a\left(t_1^2 - s_1^2\right) & bs_1t_1 & c\left(s_1^2 + t_1^2\right) \\ a\left(t_2^2 - s_2^2\right) & bs_2t_2 & c\left(s_2^2 + t_2^2\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{2}\begin{vmatrix} \frac{t_2^2 + s_2^2}{s_2t_2} - \frac{t_1^2 + s_1^2}{s_1t_1} & 0 & \frac{t_2^2 - s_2^2}{s_2t_2} - \frac{t_1^2 - s_1^2}{s_1t_1} \\ t_1^2 - s_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 + t_1^2 \\ t_2^2 - s_2^2 & s_2t_2 & s_2^2 + t_2^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} \frac{t_2^2}{s_2t_2} - \frac{t_1^2}{s_1t_1} & 0 & \frac{t_2^2 - s_2^2}{s_2t_2} - \frac{t_1^2 - s_1^2}{s_1t_1} \\ t_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 + t_1^2 \\ t_2^2 & s_2t_2 & s_2^2 + t_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} \frac{t_2}{s_2} - \frac{t_1}{s_1} & 0 & \frac{s_1}{t_1} - \frac{s_2}{t_2} \\ t_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 \\ t_2^2 & s_2t_2 & s_2^2 \end{vmatrix} = -2abc(s_1t_2 - s_2t_1)^2 \neq 0$$

因此 $l_{s_1:t_1}, l_{s_2:t_2}$ 异面.

(4) 任取 I 中的直母线 $l_{s_1:t_1}$ 和 I' 中的直母线 $l'_{s_2:t_2}$, 它们的方向向量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{s_1:t_1} = \left(a\left(t_1^2 - s_1^2\right), bs_1t_1, c\left(s_1^2 + t_1^2\right)\right) \\ \mathbf{u}_{s_2:t_2} = \left(a\left(t_2^2 - s_2^2\right), -bs_2t_2, c\left(s_2^2 + t_2^2\right)\right) \end{cases}$$

分别取 $l_{s_1:t_1}$ 上的点 M_1 和 $l'_{s_2:t_2}$ 上的点 M_2',

$$M_1\left(a\frac{t_1^2 + s_1^2}{2s_1t_1}, 0, c\frac{t_1^2 - s_1^2}{2s_1t_1}\right), \quad M_2'\left(a\frac{t_2^2 + s_2^2}{2s_2t_2}, 0, c\frac{t_2^2 - s_2^2}{2s_2t_2}\right)$$

因为

$$\det\left(\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2'}, \mathbf{u}_{s_1:t_1}, \mathbf{u}'_{s_2:t_2}\right) = \begin{vmatrix} a\left(\dfrac{t_2^2+s_2^2}{2s_2t_2} - \dfrac{t_1^2+s_1^2}{2s_1t_1}\right) & 0 & c\left(\dfrac{t_2^2-s_2^2}{2s_2t_2} - \dfrac{t_1^2-s_1^2}{2s_1t_1}\right) \\ a\left(t_1^2-s_1^2\right) & bs_1t_1 & c\left(s_1^2+t_1^2\right) \\ a\left(t_2^2-s_2^2\right) & -bs_2t_2 & c\left(s_2^2+t_2^2\right) \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} \dfrac{t_2}{s_2} - \frac{t_1}{s_1} & 0 & \dfrac{s_1}{t_1} - \dfrac{s_2}{t_2} \\ t_1^2 & s_1t_1 & s_1^2 \\ t_2^2 & -s_2t_2 & s_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

因此 $l_{s_1:t_1}, l'_{s_2:t_2}$ 共面.

(5) 由 (3) 和 (4) 反证可知.若 I 与 I' 有公共直母线 l，则考虑 I 的另一条直母线 l'，这两条直线既同族又异族，从而既共面又异面，故矛盾.

□

Remark 3.2.1. 概括起来：单叶双曲面恰有两族直母线

$$l_{s:t}: \begin{cases} s\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right) = t\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ t\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right) = s\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}, \quad l'_{s:t}: \begin{cases} s\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right) = t\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ t\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right) = s\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

其中 s, t 不全为零.

方向向量可分别取为:

$$\mathbf{u}_{s:t} = \left(a\left(t^2-s^2\right), bst, c\left(s^2+t^2\right)\right)$$

$$\mathbf{u}'_{s:t} = \left(a\left(t^2-s^2\right), -bst, c\left(s^2+t^2\right)\right)$$

具有如下性质特征：

(1) 同族的任何三条不同的直母线都不平行于同一张平面.

(2) 同族的两条不同直母线一定异面.

(3) 异族的直母线一定共面.

单叶双曲面是直纹曲面. 上面有两族母直线族，各族内母线彼此不相交, 而与另一族母线相交, 正是这种性质在技术中得到了应用. 例如, 用直立木杆造水塔, 如果把这些杆垂直地放置, 那就只能得到一个很不牢固的建筑物, 它会因为非常小的负荷而损坏. 如果立杆时, 使它们构成一个单叶双曲面(就是两组母线族), 并使它们的交点处连接在一起, 就会得到一个非常轻巧而又非常坚固的建筑物. 许多化工厂或热电厂的冷却塔就是利用了这个原理.

3.3 双叶双曲面

Definition 3.3.1. 方程表示的曲线被称为**双叶双曲面**.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad a,b,c>0$$

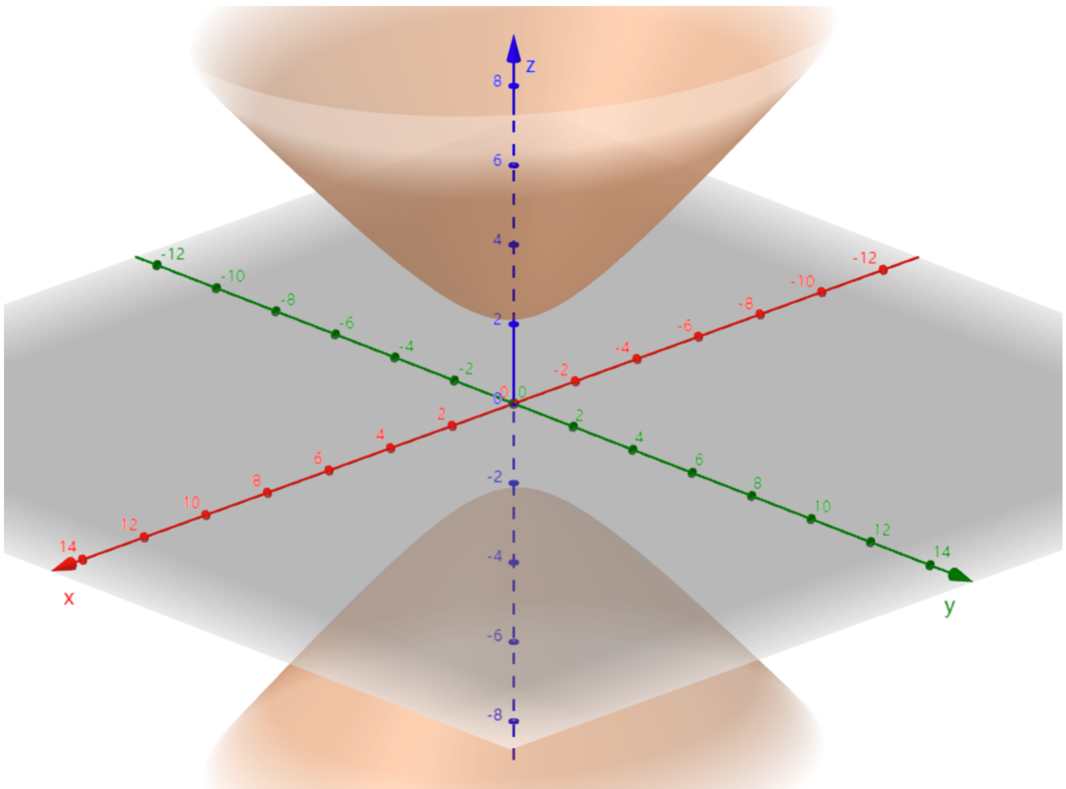

Figure 3.6: 双叶双曲面

Proposition 3.3.1. 双叶双曲面具有下述性质：

(1) 对称性：三个坐标面都是此图形的对称平面，三根坐标轴都是它的对称轴，原点是它的对称中心.

(2) 范围：由方程得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2}$$

所以

$$|z|\geq c$$

(3) 形状：

(a) 与 Oxy 无交点.

(b) 与 Oxz，Oyz 平面的交线为：

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

它们都是双曲线.

(c) 用平面 $z = h\,(|h| \geq c)$ 去截此曲面得到的截口为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h \end{cases}$$

这是一个椭圆或一个点，长短轴为：

$$b' = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad a' = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

(4) 锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

称为双叶双曲面的**渐近锥面**. 用平面 $z = h$ 截此锥面，截口为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

这个椭圆的长、短半轴分别为

$$a'' = a\frac{|h|}{c}, \quad b'' = b\frac{|h|}{c}.$$

因为

$$a' - a'' = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} - a\frac{|h|}{c} = \frac{-a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} + \frac{|h|}{c}},$$

所以 $\lim\limits_{|h| \to \infty} (a' - a'') = 0$. 同理, $\lim\limits_{|h| \to \infty} (b' - b'') = 0$. 这说明,当 $|h|$ 无限增大时, 双叶双曲面的截口椭圆与它的渐近锥面的截口椭圆无限接近, 即双叶双曲面与它的渐近锥面无限地任意接近.

3.4 椭圆抛物面和双曲抛物面

Definition 3.4.1. 方程

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$$

表示的曲面称为**椭圆抛物面**.

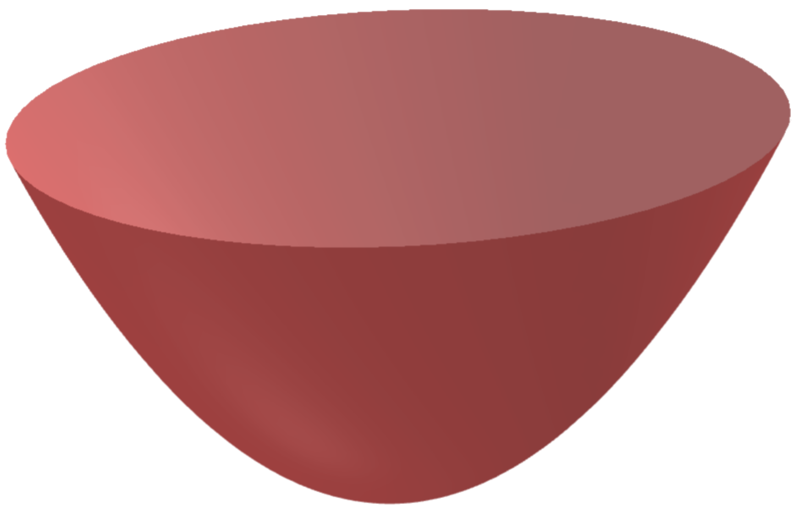

Figure 3.7: 椭球抛物面

Proposition 3.4.1. 椭球抛物面具有以下性质：

(1) 对称性：

Ozx 平面, Oyz 平面是它的对称平面; z 轴是它的对称轴.

(2) 范围：

由方程得 $z \geq 0$.

(3) 形状：

(a) 它与 Ozx 平面, Oyz 平面的交线分别为

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=2qz, \\ x=0, \end{cases}$$

它们都是抛物线.

(b) 用平面 $z=h\,(h\geq 0)$ 去截此曲面得到的截口为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

它是一个椭圆或一个点.

Definition 3.4.2. 方程

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0$$

表示的曲面称为**双曲抛物面**(或**马鞍面**).

Figure 3.8: 双曲抛物面

Proposition 3.4.2. 双曲抛物面具有以下性质：

(1) 对称性：

Ozx 平面和 Oyz 平面都是双曲抛物面的对称平面, z 轴是它的对称轴.

(2) 形状：

(a) 双曲抛物面与 Oxy 平面的交线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

这是一对相交直线 (经过原点)，如图 3.9 所示.

(b) 双曲抛物面与 Ozx 平面, Oyz 平面的交线分别为

$$\left\{\begin{array}{l} x^2=2pz, \\ y=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y^2=-2qz, \\ x=0. \end{array}\right.$$

它们都是抛物线.

(c) 用平面 $z=h\,(h\neq 0)$ 去截此曲面,得到的截口为

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2h, \\ z=h. \end{array}\right.$$

这是双曲线,当 $h>0$ 时,实轴平行于 x 轴; 当 $h<0$ 时,实轴平行于 y 轴 (如图 3.10).

(d) 当平行移动抛物线 $\left\{\begin{array}{l} y^2=-2qz, \\ x=0, \end{array}\right.$ 使它的顶点沿抛物线 $\left\{\begin{array}{l} x^2=2pz, \\ y=0 \end{array}\right.$ 移动时,便得到马鞍面. 这是因为,点 $M\ (x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 在此轨迹上的充分必要条件是, M 在以抛物线

$$\left\{\begin{array}{l} x^2=2pz \\ y=0 \end{array}\right.$$

上的一个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}$ 为顶点且轴平行于 z 轴,形状、开口与

$$\left\{\begin{array}{l} y^2=-2qz \\ x=0 \end{array}\right.$$

一样的抛物线上, 即有

$$\left\{\begin{array}{l} x_0^2=2pz_0, \\ y_0=0, \\ y^2=-2q\left(z-z_0\right), \\ x=x_0. \end{array}\right.$$

消去 x_0,y_0,z_0 ,得到

$$y^2=-2q\left(z-\frac{x^2}{2p}\right)$$

即

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

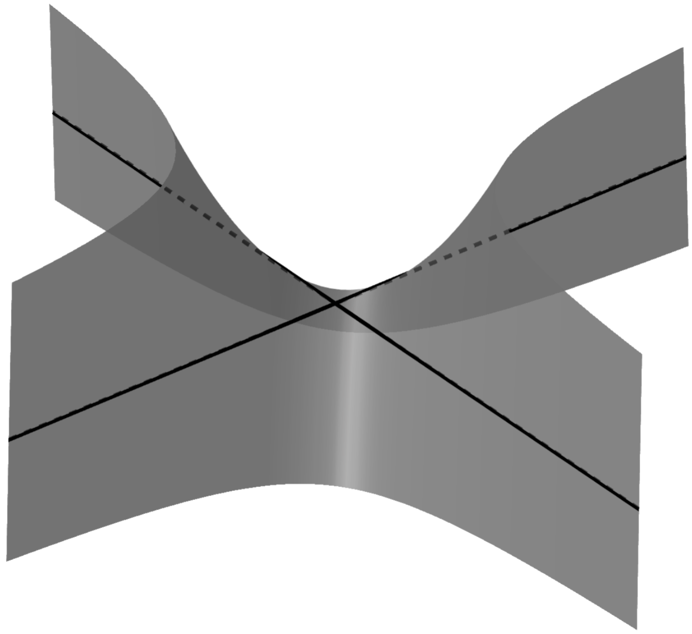

Figure 3.9: 与 Oxy 平面交线

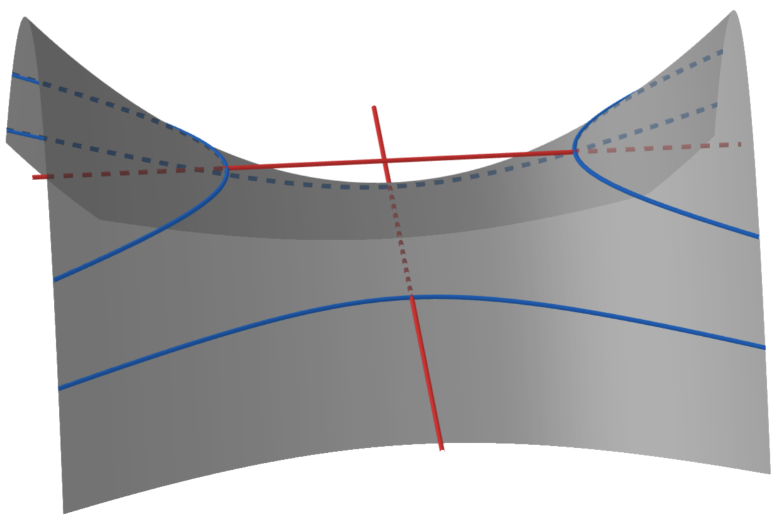

Figure 3.10: 实轴

Proposition 3.4.3. 双曲抛物面的直纹性：

1. 双曲抛物面是直纹面，经过每点有两条直母线;
2. 双曲抛物面有两族直母线：

$$\ell_v : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = v \\ v\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2z \end{cases} , \quad \ell'_v : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = v \\ v\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2z \end{cases}$$

$$I = \{\ell_v \mid v \in \mathbb{R}\}, \quad I' = \{\ell'_v \mid v \in \mathbb{R}\}.$$

   对于曲面上的点，每族直母线恰有一条经过该点.

3. 同族直母线都平行于同一张平面, 同族的两条不同直母线一定异面.
4. 异族直母线一定相交.
5. I 与 I' 无公共直母线.
6. S 上直母线都在I 与 I' 中.

证明: 仿照单叶双曲线直纹性的证明即可. □

3.5 二次曲面的种类

到目前为止，我们学过的二次曲面有以下 17 种：

一、椭球面

(1) 椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

(2) 虚椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

(3) 点:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

二、双曲面

(4) 单叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(5) 双叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

三、抛物面

(6) 椭圆抛物面:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z;$$

(7) 双曲抛物面:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

四、二次锥面

(8) 二次锥面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

五、二次柱面

(9) 椭圆柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

(10) 虚椭圆柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1;$$

(11) 直线:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;$$

(12) 双曲柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

(13) 一对相交平面:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;$$

(14) 抛物柱面:

$$x^2=2py;$$

(15) 一对平行平面:

$$x^2=a^2;$$

(16) 一对虚平行平面:

$$x^2=-a^2;$$

(17) 一对重合平面:

$$x^2=0.$$

Theorem 3.5.1. 证明二次曲面只有这 17 种.

证明: 对于 3 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$,能找到正交矩阵 $\mathbf{T}$ 使得 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\}$ 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\mathbf{A}$ 的全部特征值,从而通过直角坐标变换,可以把二次曲面的方程化成标准方程, 辨认出这是什么样的二次曲面. 现在我们利用这个方法探索二次曲面有且只有多少种.

任取一个二次曲面 S ,设它在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0 \tag{3.1}$$

其中 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}$ 不全为 0 . 方程 (3.1) 的二次项部分为

$$f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

把 (3.2) 式右端的 3 阶矩阵记作 $\mathbf{A}$,它是 3 阶对称矩阵. 于是可找到 3 阶正交矩阵 $\mathbf{T}$ 使得 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\mathbf{A}$ 的全部特征值.

作直角坐标变换:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\mathbf{T}\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

则 S 在新的直角坐标系 $Ox^*y^*z^*$ 中的方程为

$$a_{11}^* x^{*2} + a_{22}^* y^{*2} + a_{33}^* z^{*2} + 2a_1^* x^* + 2a_2^* y^* + 2a_3^* z^* + a_0^* = 0 \tag{3.4}$$

其中 $a_{11}^* = \lambda_1, a_{22}^* = \lambda_2, a_{33}^* = \lambda_3, a_0^* = a_0$.

针对方程 (3.1) 的二次项部分 (3.2), 我们考虑 3 元实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X},$$

其中 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)'$.

情形 1. $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为 3

把 S 的方程 (3.4) 先配方,然后作移轴,可以使 S 在第三个直角坐标系 $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ 中的方程为

$$a_{11}^* \widetilde{x}^2 + a_{22}^* \widetilde{y}^2 + a_{33}^* \widetilde{z}_3^2 = \widetilde{a_0} \tag{3.5}$$

情形 1.1 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数为 3

此时对应于 $\widetilde{a_0} > 0, \widetilde{a_0} < 0, \widetilde{a_0} = 0$ 三种情形, 方程 (3.5) 分别成为:

[1] $\dfrac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{b^2} + \dfrac{\widetilde{z}^2}{c^2} = 1, (a > 0, b > 0, c > 0)$

[2] $\dfrac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{b^2} + \dfrac{\widetilde{z}^2}{c^2} = -1, (a > 0, b > 0, c > 0)$

[3] $\dfrac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{b^2} + \dfrac{\widetilde{z}^2}{c^2} = 0, (a > 0, b > 0, c > 0)$

它们表示的图形分别称为椭球面, 虚椭球面(无轨迹), 点 (重合的 8 个点), 统称为椭球面型.

情形 1.2 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 1

此时不妨设 $a_{11}^* > 0, a_{22}^* > 0, a_{33}^* < 0$ (否则,可以作转轴,使得在新的直角坐标系中, S 的方程的 $\bar{x}^2, \bar{y}^2$ 的系数大于 0). 对应于 $\widetilde{a_0} > 0, \widetilde{a_0} < 0, \widetilde{a_0} = 0$ 三种情形, S 的方程分别成为

[4] $\dfrac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{b^2} - \dfrac{\widetilde{z}^2}{c^2} = 1, (a > 0, b > 0, c > 0)$

[5] $\dfrac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{b^2} - \dfrac{\widetilde{z}^2}{c^2} = -1, (a > 0, b > 0, c > 0)$

[6] $\dfrac{\widetilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\widetilde{y}^2}{b^2} - \dfrac{\widetilde{z}^2}{c^2} = 0, (a > 0, b > 0, c > 0)$

它们表示的图形分别称为单叶双曲面, 双叶双曲面, 二次锥面. 前两种统称为双曲面型.

情形 1.3 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2

此时可在方程 (3.5) 两边乘 -1, 转化为情形 1.2.

情形 1.4 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数为 0，负惯性指数为 3

此时可在方程 (3.5) 两边乘 -1 ,转化为情形 1.1.

情形2. $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 2

情形 2.1 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 2

此时不妨设 $a_{11}^*>0, a_{22}^*>0$. 把 S 的方程 (3.4) 经过配方,移轴,在新的直角坐标系 $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}z^*$ 中, S 的方程成为

$$a_{11}^*\widetilde{x}^2+a_{22}^*\widetilde{y}^2+2a_3^*z^*+\widetilde{a}_0=0 \tag{3.6}$$

情形 2.1.1 $a_3^*\neq 0$

此时经过移轴,在新的直角坐标系 $O_1\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ 中, S 的方程成为

$$a_{11}^*\widetilde{x}^2+a_{22}^*\widetilde{y}^2+2a_3^*\widetilde{z}=0 \tag{3.7}$$

若 $a_3^*<0$,则方程 (3.7) 可以写成

[7] $\frac{\widetilde{x}^2}{p}+\frac{\widetilde{y}^2}{q}=2\widetilde{z},(p>0,q>0)$

它表示的图形称为椭圆抛物面.

若 $a_3^*>0$,则作关于 $\widetilde{x}O_1\widetilde{y}$ 面的反射,可以转化为上述 $a_3^*<0$ 的情形.

情形 2.1.2 $a_3^*=0$

此时对应于 $\widetilde{a}_0<0,\widetilde{a}_0>0,\widetilde{a}_0=0$,三种情形, S 的方程 (3.6) 分别成为

[8] $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}+\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$

[9] $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}+\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=-1,(a>0,b>0)$

[10] $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}+\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=0,(a>0,b>0)$

它们表示的图形分别称为椭圆柱面, 虚椭圆柱面(无轨迹), 直线(4 条重合的直线).

情形 2.2 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 1

此时 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的负惯性指数为 1，不妨设 $a_{11}^*>0, a_{22}^*<0$. 类似于情形 2.1，经过配方，移轴，S 的方程可分别成为

[11] $\frac{\widetilde{x}^2}{p}-\frac{\widetilde{y}^2}{q}=2\widetilde{z},(p>0,q>0)$

[12] $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}-\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$

[13] $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}-\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=0,(a>0,b>0)$

[11]表示的图形称为双曲抛物面(或马鞍面); [12] 表示的图形称为双曲柱面; [13] 表示的图形是一对相交平面. (注: 方程 $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}-\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=-1$ 的情形,经过绕 $\widetilde{z}$ 轴旋转 $\frac{\pi}{2}$,可转化为 $\frac{\widetilde{x}^2}{a^2}-\frac{\widetilde{y}^2}{b^2}=1$ 的情形.)

情形 2.3 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 0

此时 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的负惯性指数为 2 . 把方程 (3.6) 两边乘 -1 可转化为情形 2.1.

情形 3. $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为 1

此时不妨设 $a_{11}^* \neq 0$,经过配方,移轴,在新的直角坐标系 $\widetilde{O}\widetilde{x}y^*z^*$ 中, S 的方程可以成为

$$a_{11}^*\widetilde{x}^2 + 2a_2^*y^* + 2a_3^*z^* + \widetilde{a}_0 = 0 \tag{3.8}$$

情形 3.1 a_2^*, a_3^* 不全为 0

不妨设 $a_2^* \neq 0$,此时 S 与 $y^*\widetilde{O}z^*$ 面的交线 l 为

$$\begin{cases} 2a_2^*y^* + 2a_3^*z^* + \widetilde{a}_0 = 0 \\ \widetilde{x} = 0 \end{cases}$$

绕 $\widetilde{x}$ 轴旋转,使得 y^* 轴旋转到 $\widetilde{y}$ 轴,其中 $\widetilde{y}$ 轴与直线 l 垂直,此时 z^* 轴旋转到 $\widetilde{z}$ 轴, l 的方程成为

$$\begin{cases} \widetilde{y} - b = 0 \\ \widetilde{x} = 0 \end{cases}$$

于是在直角坐标系 $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ 中, S 的方程成为

$$a_{11}^*\widetilde{x}^2 + k(\widetilde{y} - b) = 0, \quad (k \neq 0) \tag{3.9}$$

再作移轴, S 的方程可成为

[14] $\widetilde{x}^2 = 2p\bar{y}, (p \neq 0)$

它表示的图形称为抛物柱面.

情形 3.2 $a_2^* = a_3^* = 0$

此时对应于 $\widetilde{a}_0$ 与 a_{11}^* 异号、同号,以及 $\widetilde{a}_0 = 0$ 三种情形, S 的方程 (3.8) 可分别写成:

[15] $\widetilde{x}^2 = a^2, (a > 0)$

[16] $\widetilde{x}^2 = -a^2, (a > 0)$

[17] $\widetilde{x}^2 = 0$

它们分别表示一对平行平面, 一对虚平行平面(无轨迹),一对重合平面.

综上所述, 二次曲面有且只有上述 17 种, 其中 [1], [2], [3] 统称为椭球面型; [4], [5] 统称为双曲面型; [7], [11] 统称为抛物面型; [6] 是二次锥面; [8], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17] 统称为二次柱面型.

□

Chapter 4

典型例题大杂烩

Exercise 4.0.1. 适当选取右手直角坐标系, 求下列轨迹的方程:

(1) 到两定点距离之比等于常数的点的轨迹;

(2) 到两定点距离之和等于常数的点的轨迹;

(3) 到定平面和定点等距离的点的轨迹.

Solution.

(1) 不妨设 $A=(-1,0,0)$，$B=(1,0,0)$，设定点 $P(x,y,z)$ 满足 $|PA|=k|PB|$，则有：

$$(x+1)^2+y^2+z^2=k^2(x-1)^2+k^2y^2+k^2z^2$$

所以当 $k=0$ 时，轨迹为一个点；当 $k=1$ 时，轨迹为一个平面；当 $k\neq 0,1$ 时，轨迹为一个圆(阿波罗尼斯圆？的空间形式).

(2) 沿用上一问中的点，设两距离之和为定值 $2a$，则有：

$$(x-1)^2+(x+1)^2+2y^2+2z^2=4a^2$$

(3) 设定平面为 Oxy 平面，定点为 $A(0,0,1)$，则有：

$$x^2+y^2+(z-1)^2=z^2$$

□

Exercise 4.0.2. 过 x 轴和 y 轴分别作动平面,交角 α 是常数,求交线的轨迹方程, 并且证明它是一个锥面.

Solution. 在交线上取一点 $M(x,y,z)$，由 M 点和 x 轴决定的平面 π_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1=\mathbf{e}_1\times\overrightarrow{OM}$，同理有 $\mathbf{n}_2=\mathbf{e}_2\times\overrightarrow{OM}$. 由于夹角 α 为常数，从而有：

$$(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)^2=|\mathbf{n}_1|^2|\mathbf{n}_2|^2\cos^2\alpha$$

也即

$$x^2y^2 = (y^2+z^2)(x^2+z^2)\cos^2\alpha$$

□

Exercise 4.0.3. 求经过两条抛物线

$$\begin{cases} x^2-6y=0, \\ z=0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} z^2+4y=0, \\ x=0 \end{cases}$$

的二次曲面的方程.

Solution. 对比系数可得：

$$\frac{x^2}{6}-\frac{z^2}{4}+kxz=y$$

□

Remark 4.0.1. 上面这道题选自《解析几何》(丘维声)第三版习题 3.3 第四题，给的标准答案中没有 kxy 交叉项，但实际对比系数发现并不能确定 $k=0$.

Exercise 4.0.4. 求与下列三条直线同时共面的直线所构成的曲面:

$$l_1: \begin{cases} x=1, \\ y=z; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x=-1, \\ y=-z; \end{cases} \quad l_3: \frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}.$$

Solution. 设所求的直线方程为：

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

利用共面可以得到关于 X,Y,Z 的三个方程，由于有非零解，从而系数行列式为 0，也即 x_0,y_0,z_0 满足的方程，计算得到：

$$x^2+y^2-z^2=1$$

□

Remark 4.0.2. 实际上上题中的 l_1,l_2,l_3 为单页双曲面的同一族直母线，所以所有满足条件的直线为异族直母线，所有异族直母线织成的就是单叶双曲面.

Exercise 4.0.5. 设有直线 l_1 和 l_2 ,它们的方程分别是

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}+3t, \\ y=-1+2t, \\ z=-t, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3t, \\ y=2t, \\ z=0, \end{cases}$$

求所有由 l_1, l_2 上有相同参数值 t 的点的连线所构成的曲面的方程.

Solution. 这样的连线经过两点: $M_1\left(\frac{3}{2}+3t, -1+2t, -t\right)^{\mathrm{T}}, M_2(3t, 2t, 0)^{\mathrm{T}}$,其中 t 是任意给定的一个实数,从而这条连线的方程为

$$\frac{x-3t}{\frac{3}{2}} = \frac{y-2t}{-1} = \frac{z}{-t}$$

消去 t ,得 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 2z$. 这就是所求曲面的方程,它是马鞍面. □

Exercise 4.0.6. 求双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 上互相垂直的直母线的交点轨迹, 并指出它是什么图形.

Solution. 因为双曲抛物面上任意一点, 有且仅有两条不同直母线通过它. 不妨设这两条直母线方程分别为

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\lambda', \\ \lambda'\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda, \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

设这两条直母线相交于 $P(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$,则

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{x}}{a} + \frac{\widetilde{y}}{b}\right), \lambda' = \frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{x}}{a} - \frac{\widetilde{y}}{b}\right)$$

由于这两条直母线的方向向量
为 $\mathbf{v}_1 = \left(a, -b, \frac{\widetilde{x}}{a} + \frac{\widetilde{y}}{b}\right)$ 及 $\mathbf{v}_2 = \left(a, b, \frac{\widetilde{x}}{a} - \frac{\widetilde{y}}{b}\right)$. 由 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ 得

$$a^2 - b^2 + \frac{\widetilde{x}^2}{a^2} - \frac{\widetilde{y}^2}{b^2} = 0$$

因此双曲抛物面上互相垂直的直母线的交点 $P(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ 的轨迹为

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{x}^2}{a^2} - \frac{\widetilde{y}^2}{b^2} = 2\widetilde{z}, \\ a^2 - b^2 + \frac{\widetilde{x}^2}{a^2} - \frac{\widetilde{y}^2}{b^2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{x}^2}{a^2} - \frac{\widetilde{y}^2}{b^2} = b^2 - a^2, \\ 2\widetilde{z} = b^2 - a^2 \end{cases}$$

□

Exercise 4.0.7. 求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上互相垂直的直母线的交点轨迹.

Solution. 两相交直母线必异族,单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的两直母线为

$$u\text{族}:\left\{\begin{array}{l} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right); \end{array}\right. ,v\text{族}:\left\{\begin{array}{l} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{array}\right.$$

所以两相交直母线的交点的坐标为

$$x=\frac{a\left(v^2+t^2\right)}{vw+ut}, y=\frac{b\left(vw-ut\right)}{vw+ut}, z=\frac{c\left(uv-wt\right)}{vw+ut}$$

两族直母线的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_u=\left\{a\left(u^2-w^2\right), 2buw, c\left(u^2+w^2\right)\right\}$$

$$\mathbf{s}_v=\left\{a\left(v^2-t^2\right), -2bvt, c\left(v^2+t^2\right)\right\}$$

因为 $\mathbf{s}_u \perp \mathbf{s}_v$,所以有 $\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_v=0$,即

$$a^2\left(u^2-w^2\right)\left(v^2-t^2\right)-4b^2uvwt+c^2\left(u^2+w^2\right)\left(v^2+t^2\right)=0$$

从而得

$$\frac{a^2(uv+wt)^2}{(vw+ut)^2}+\frac{b^2(vw-ut)^2}{(vw+ut)^2}+\frac{c^2(uv-wt)^2}{(vw+ut)^2}=a^2+b^2-c^2$$

代入得交点坐标满足 $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$,所以
所求的轨迹方程为

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{array}\right.$$

□