数理方程笔记

Settings

- 授课教师：魏雅薇
- 参考教材：广义函数与数学物理方程/齐民友
- 分数组成：
- 参考文献：
  - 《椭圆与抛物型方程引论》伍卓群
  - 《广义函数与数学物理方程》齐民友
  - 《数理方程》谷超豪
  - PDE，Evans
- Contents
  1. 准备知识
     1. 常用不等式 + 基本定理
     2. 磨光：截断函数+单位分解
     3. Sobolev 空间+Holder空间
  2. 二阶线性椭圆方程
     1. Laplace 方程：基本解，Green 函数及其性质，调和函数性质
     2. Poisson 方程：变分法及 2-阶线性估计
     3. $\mathcal{L}^2$ 理论
  3. 二阶线性抛物方程
     1. 热传导方程：基本解，初值问题，初边值问题($n=1$).
     2. 能量方法
     3. Galerkin 方法
  4. 二阶线性双曲方程
     1. 波动方程：基本解，初值问题($n=1,2,3$)，初边值问题($n=1$)，能量方法
     2. 半群理论

> 2025-09-08

Chapter 1：准备知识

1.1 常用不等式

1.1.1 Young 不等式

> Thm
>
> $a,b>0$，$p,q>1$，有 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则 $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\geq ab$.

PROOF:

我们注意到 $x^{\frac{1}{p}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是上凸的，所以我们知道在 $x=1$ 处的切线 $y=\dfrac{1}{p}x+\dfrac{1}{q}$ 在整条曲线的上方，即

对于任意的 $x>0$，有 $y=\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}\geq x^{\frac{1}{p}}$，我们令 $x=\frac{u}{v}$，得到

$$\frac{u}{pv}+\frac{1}{q}\geq\frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}}$$

化简得到

$$\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\geq u^{\frac{1}{p}}v^{1-\frac{1}{p}}=u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}}$$

再令 $u=a^p,v=b^q$，我们立刻得到

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab$$

一个常用的推论是带 ε 的 Young 不等式，即

Cor

相同的条件，对 $\varepsilon>0$，有 $\varepsilon a^p+\varepsilon^{-\frac{p}{q}}b^q\geq ab$.

PROOF:
只需要在 Young 不等式中取 $a=\varepsilon^{\frac{1}{p}}a$，$b=\varepsilon^{-\frac{1}{q}}b$ 即可.

1.1.2 Holder 不等式

Thm

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为可测开集，$p,q>1$，有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，设 $f\in\mathcal{L}^p(\Omega),g\in\mathcal{L}^q(\Omega)$，则有 $f,g\in\mathcal{L}^1(\Omega)$，并且 $||fg||_{\mathcal{L}^1}\leq||f||_{\mathcal{L}^p}||g||_{\mathcal{L}^q}$.

PROOF:
在 Young 不等式中令

$$a=\frac{|f(x)|}{||f(x)||_{\mathcal{L}^p}},\quad b=\frac{|g(x)|}{||g(x)||_{\mathcal{L}^q}}$$

我们得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{||f(x)||_{\mathcal{L}^p}||g(x)||_{\mathcal{L}^q}}\leq\frac{|f(x)|^p}{p||f(x)||_{\mathcal{L}^p}}+\frac{|g(x)|^q}{q||g(x)||_{\mathcal{L}^q}}$$

在两边积分立刻得到

$$\frac{||fg||_{\mathcal{L}^1}}{||f||_{\mathcal{L}^p}||g||_{\mathcal{L}^q}}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

于是我们得到了

$$||fg||_{\mathcal{L}^1}\leq||f||_{\mathcal{L}^p}||g||_{\mathcal{L}^q}$$

1.1.3 Minkovski 不等式

Thm

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$p \geq 1$，并且 $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$，则有 $||f+g||_{\mathcal{L}^p} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p} + ||g||_{\mathcal{L}^p}$.

PROOF:
首先我们需要说明 $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$，这是因为

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (2\max(|f(x)|,|g(x)|))^p \leq 2^p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)$$

所以 $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$，令 $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$，我们注意到 $(f+g)^{p/q} \in \mathcal{L}^q(\Omega)$，由 Holder 不等式有

$$||f\cdot(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^1} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p}||(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^q}, \quad ||g\cdot(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^1} \leq ||g||_{\mathcal{L}^p}||(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^q}$$

再结合

$$|f+g|^p = |f+g|\cdot|f+g|^{p/q} \leq |f|\cdot|f+g|^{p/q} + |g|\cdot|f+g|^{p/q}$$

对两边积分，有

$$||f+g||_{\mathcal{L}^p}^p \leq ||f\cdot(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^1} + ||g\cdot(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^1} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p}||(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^q} + ||g||_{\mathcal{L}^p}||(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^q}$$

注意到

$$||(f+g)^{p/q}||_{\mathcal{L}^q} = ||f+g||_{\mathcal{L}^p}^{p/q}$$

所以有

$$||f+g||_{\mathcal{L}^p}^p \leq (||f||_{\mathcal{L}^p} + ||g||_{\mathcal{L}^p})||f+g||_{\mathcal{L}^p}^{p/q}$$

约分即

$$||f+g||_{\mathcal{L}^p} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p} + ||g||_{\mathcal{L}^p}$$

1.1.4 列紧性

Thm(arzela ascoli)

$F \subset C(M)$，M 为紧集，$C(M)$ 为 M 上的连续函数，有：F 列紧 $\iff$ F 一致有界且等度连续.

Def

拓扑空间 X 的子集 M 称为**相对紧的**，如果其闭包为紧集.

这玩意实际上应该叫做**预紧**(precompact).

Def

拓扑空间 X 的子集 F 称为**弱列紧**，如果任取其中任一序列存在弱收敛子列. 称为**弱相对收敛**，如果其闭包中任一序列存在弱收敛子列. F 称为**强列紧**，如果任取其序列均存在强收敛子列.

Thm

当 $1 < p < \infty$ 时，$\mathcal{L}^p(\Omega)$ 中的集合为弱列紧的 $\iff$ 为其范数有界.

Thm

当 $1<p<\infty$ 时，函数列 $X\subset\mathcal{L}^p(\Omega)$ 相对强列紧的充分必要条件为：

(1) $\{||f||_{\mathcal{L}^p}\mid f\in X\}$ 有界.

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\int_\Omega |f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0$ 对 $f\in X$ 一致成立，则称为 X 等度连续.

(3) 对 $f\in X$ 一致有 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{|x|>R,x\in\Omega}|f(x)|^p\mathrm{d}x=0$.

1.2 磨光，截断函数，单位分解

Def

$\alpha\in\mathbb{N}^n$ 为重指标，有 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，我们定义 $|\alpha|=\sum\alpha_i$.

我们定义

$$\partial^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|u}}{\partial^{\alpha_1}u\cdots\partial^{\alpha_n}u}$$

于是我们可以定义

Def

$C^k(\Omega)$ 为 Ω 中 k-阶连续可微的全体函数集合，并且定义

$$|u|_{k,\Omega}=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_\Omega|\partial^\alpha u|$$

对于 $x\in\mathbb{R}^n$，$\alpha\in\mathbb{N}^n$，我们定义

$$|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},\quad x^\alpha:=\prod_{i=1}^n x^{\alpha_i},\quad \alpha!:=\prod_{i=1}^n(\alpha_i!)$$

> RMK: $C^k(\Omega)$ 是完备的赋范线性空间和 Banach 空间.

1.2.1 磨光变换

Def

$C_0^\infty(\Omega)$ 为 Ω 上**具有紧支集的光滑函数**.

我们可以定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中如何收敛，设 $\{\phi_n(x)\}\subset C_0^\infty(\Omega)$ 收敛于 0 指

- 存在一个紧集 K，使得对于任意的 $\phi_n(x)$，有 $\operatorname{supp}\phi_n\subset K$.
- $\phi_n(x)$ 的任意固定阶 α 微分的序列对 x 一致收敛到 0. 即

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha\phi_k(x)|\right)=0$$

Def

设 $j(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一非负函数，满足 $\operatorname{supp}j(x)\subset\overline{B_1(0)}=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n\colon|x|<1\}}$，且满足 $\int_{\mathbb{R}^n}j(x)\mathrm{d}x=1$，

对于 $\varepsilon > 0$，我们记 $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，称 $j_\varepsilon(x)$ 为**磨光核**.

如果 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)\mathrm{d}x = 1$，则我们有 $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} j\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)\mathrm{d}\frac{x}{\varepsilon} = 1$，所以磨光核的积分值也是 1. 并且磨光核 $j_\varepsilon(x)$ 的支集包含在 $\overline{B_\varepsilon(0)}$ 中.

$j(x)$ 的典型例子是

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} e^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

其中 $A = \int_{B_1(0)} e^{1/(|x|^2-1)}\mathrm{d}x$.

Def

对于函数 $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，令

$$u_\varepsilon(x) = (j_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$$

称 $u_\varepsilon(x)$ 为 $u(x)$ 的**磨光**.

函数 f 属于 $L^1_{loc}(\Omega)$，当且仅当对于任意紧集 $K \subset \Omega$，都有:

$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty$$

我们注意，

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(y)f(x-y)\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(0)} j_\varepsilon(y)f(x-y)\mathrm{d}y$$

这告诉我们如果 f 定义在 U 上，则 f_ε 就可以定义在 $\{x \in U \mid d(x, \partial U) > \varepsilon\}$ 上.

C.5. Convolution and smoothing. We next introduce tools that will allow us to build smooth approximations to given functions.

NOTATION. If $U \subset \mathbb{R}^n$ is open and $\epsilon > 0$, we write

$$U_\epsilon := \{ x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \epsilon \}.$$

DEFINITIONS.

(i) Define $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ by

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1, \end{cases}$$

the constant $C > 0$ selected so that $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

(ii) For each $\epsilon > 0$, set

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

We call η the *standard mollifier*. The functions η_ϵ are C^∞ and satisfy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1, \ \operatorname{spt}(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

DEFINITION. If $f : U \to \mathbb{R}$ is locally integrable, define its *mollification*

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad \text{ in } U_\epsilon.$$

That is,

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y) \, dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y) f(x-y) \, dy$$

for $x \in U_\epsilon$.

THEOREM 7 (Properties of mollifiers).

(i) $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

(ii) $f^\epsilon \to f$ *a.e. as* $\epsilon \to 0$.

(iii) *If* $f \in C(U)$, *then* $f^\epsilon \to f$ *uniformly on compact subsets of* U.

(iv) *If* $1 \leq p < \infty$ *and* $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$, *then* $f^\epsilon \to f$ *in* $L^p_{\text{loc}}(U)$.

Proof.

1. Fix $x \in U_\epsilon$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, and h so small that $x + he_i \in U_\epsilon$. Then

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x+he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \right] f(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \right] f(y) \, dy \end{aligned}$$

for some open set $V \subset\subset U$. As

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right]\to\frac{1}{\epsilon}\eta_{x_i}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

uniformly on V, the partial derivative $f^{\epsilon}_{x_i}(x)$ exists and equals

$$\int_U \eta_{\epsilon,x_i}(x-y)f(y)\,dy.$$

A similar argument shows that $D^\alpha f^\epsilon(x)$ exists, and

$$D^\alpha f^\epsilon(x)=\int_U D^\alpha\eta_\epsilon(x-y)f(y)\,dy \quad (x\in U_\epsilon),$$

for each multiindex α. This proves (i).

2. According to Lebesgue's Differentiation Theorem (§E.4),

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy=0 \tag{4}$$

for a.e. $x\in U$. Fix such a point x. Then

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x)-f(x)| &= \left|\int_{B(x,\epsilon)}\eta_\epsilon(x-y)[f(y)-f(x)]\,dy\right|\\ &\le \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)|f(y)-f(x)|\,dy\\ &\le C ⨍_{B(x,\epsilon)}|f(y)-f(x)|\,dy\to 0 \quad \text{as } \epsilon\to 0,\end{aligned}$$

by (4). Assertion (ii) follows.

3. Assume now $f\in C(U)$. Given $V\subset\subset U$, we choose $V\subset\subset W\subset\subset U$ and note that f is uniformly continuous on W. Thus the limit (4) holds uniformly for $x\in V$. Consequently the calculation above implies $f^\epsilon\to f$ uniformly on V.

4. Next, assume $1\le p<\infty$ and $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(U)$. Choose an open set $V\subset\subset U$ and, as above, an open set W so that $V\subset\subset W\subset\subset U$. We claim that for sufficiently small $\epsilon>0$

$$\|f^\epsilon\|_{L^p(V)}\le\|f\|_{L^p(W)}. \tag{5}$$

To see this, we note that if $1 \le p < \infty$ and $x \in V$,

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x)| &= \left|\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)f(y)\,dy\right| \\ &\le \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon^{1-1/p}(x-y)\eta_\epsilon^{1/p}(x-y)|f(y)|\,dy \\ &\le \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\,dy\right)^{1-1/p}\left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Since $\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\,dy = 1$, this inequality implies

$$\begin{aligned}\int_V |f^\epsilon(x)|^p\,dx &\le \int_V \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)dx \\ &\le \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\,dx\right)dy = \int_W |f(y)|^p\,dy,\end{aligned}$$

provided $\epsilon > 0$ is sufficiently small. This is (5).

5. Now fix $V \subset\subset W \subset\subset U$, $\delta > 0$, and choose $g \in C(W)$ so that

$$\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Then

$$\begin{aligned}\|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} &\le \|f^\epsilon - g^\epsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\le 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} \quad \text{by (5)} \\ &\le 2\delta + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)}.\end{aligned}$$

Since $g^\epsilon \to g$ uniformly on V, we have $\limsup_{\epsilon\to 0} \|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} \le 2\delta$. □

> 2025-09-10

特别地，如果 $f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$，设 $\operatorname{supp} f \subset K$，其中 K 是紧集，则我们有结论：

$$f_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

并且有

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon \subseteq K_\varepsilon := \{x \mid d(x, K) \le \varepsilon\}$$

这是因为

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} j_\varepsilon(y) f(x-y)\mathrm{d}y$$

当 $d(x, K) > \varepsilon$ 时，对于 $y \in B_\varepsilon(0)$，有 $f(x-y) \notin K$，从而 $f(x-y) = 0$，于是 $f_\varepsilon(x) = 0$.

> 我们还有结论：当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$f_\varepsilon \to f$.

Thm

设 Ω 为开集，$f(x)\in C(\Omega)$，则对 Ω 的任意紧子集 K，存在一列函数 $\{\widetilde{f_\varepsilon}(x)\}$ 在 K 上一致收敛到 $f(x)$.

PROOF:
已知 $K\subset\Omega$，由欧式空间的正规性，知道存在闭集 F 使得 $K\subset F^\circ\subset\overline{F}\subset\Omega$.

所以我们知道存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $K_{2\varepsilon_0}\subset\Omega$.，我们令

$$\widetilde{f(x)}=\begin{cases}f(x), & x\in K_{\varepsilon_0}\\ 0, & x\notin K_{\varepsilon_0}\end{cases}$$

对于任意的 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$，取 J_ε 为磨光核，有

$$\widetilde{f_\varepsilon}(x)=J_\varepsilon(x)*\widetilde{f}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$$

有

$$\operatorname{supp}\widetilde{f_\varepsilon}\subset K_{\varepsilon_0+\varepsilon}\subset K_{2\varepsilon_0}\subset\Omega$$

于是对于任意的 $x\in K$，我们计算

$$\begin{aligned}|\widetilde{f_\varepsilon(x)}-f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)-f(x)\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}J_\varepsilon(x-y)(f(x)-\widetilde{f}(y))\mathrm{d}y\right|\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}J_\varepsilon(x-y)|f(x)-\widetilde{f}(y)|\mathrm{d}y\\ &\leq \sup_{x\in K,|x-y|\leq\varepsilon}|f(x)-\widetilde{f}(y)|\cdot\int_{\mathbb{R}^n}J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\\ &= \sup_{x\in K,|x-y|\leq\varepsilon}|f(x)-\widetilde{f}(y)|\to 0\end{aligned}$$

这个估计是对 $x\in K$ 一致的，所以得证.

Cor

Ω 是开集，如果 $f(x)\in C^k(\Omega)$，则对 Ω 内的任一紧集 K，可以构造一族光滑紧支集函数 $\widetilde{f_\varepsilon}$ 使得对于任意的 $a\in\mathbb{N}^n$，$|\alpha|\leq k$，有

$$\partial_x^\alpha\widetilde{f_\varepsilon}(x)\to\partial_x^\alpha f(x)\quad(\varepsilon\to 0^+)$$

PROOF:
同理我们知道存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $K_{2\varepsilon_0}\subset\Omega$.，我们令

$$\widetilde{f(x)}=\begin{cases}f(x), & x\in K_{\varepsilon_0}\\ 0, & x\notin K_{\varepsilon_0}\end{cases}$$

对于任意的 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$，取 J_ε 为磨光核，有

$$\widetilde{f_\varepsilon}(x)=J_\varepsilon(x)*\widetilde{f}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$$

我们估计

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \widetilde{f}_\varepsilon - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left|\partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)\Big) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \sup_{|x-y|<\varepsilon} \left|\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)\right| \int_{\mathbb{R}^n} |J_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

当 $x \in K$ 时，由于 $|x-y| < \varepsilon$，所以 $y \in K_\varepsilon$，所以 $\widetilde{f}(y) = f(y)$，所以

$$
\sup_{|x-y|<\varepsilon} \left|\partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)\right| = \sup_{|x-y|<\varepsilon} \left|\partial_y^\alpha f(y) - \partial_x^\alpha f(x)\right| \to 0(\varepsilon \to 0)
$$

所以我们知道一致趋于零.

RMK: 我们需要解释其中一步，即

$$
(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\alpha \widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y
$$

这个公式的成立是基于**高维空间中的分部积分法** (Integration by Parts)，并且是**弱导数** (Weak Derivative) 或**分布导数** (Distributional Derivative) 定义的核心思想。

我们先从一维单次求导的情况开始理解，这会更直观。假设 $n = 1$ 且 $|\alpha| = 1$。我们想要证明：

$$
-\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy}\widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y
$$

经典的分部积分公式是 $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$。
我们令 $u = \widetilde{f}(y)$ 并且 $dv = \dfrac{d}{dy}J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y$，那么 $du = \dfrac{d}{dy}\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y$ 并且 $v = J_\varepsilon(x-y)$。

将其代入分部积分公式：

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = \Big[\widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\Big]_{y=-\infty}^{y=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} J_\varepsilon(x-y) \frac{d}{dy}\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y
$$

这里的关键在于函数 $J_\varepsilon(z)$ 的性质。J_ε 是一个**磨光核** (mollifier)，它具有**紧支撑集** (compact support)。

- **紧支撑集**意味着这个函数在一个有界区域之外恒等于零。也就是说，存在一个半径 R (通常是 ε)，使得当 $|z| > R$ 时，$J_\varepsilon(z) = 0$。
- 对于我们的被积函数 $J_\varepsilon(x-y)$，当 $|x-y| > \varepsilon$ 时，函数值为零。这意味着对于任意固定的 x，当 y 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，$|x-y|$ 必然会大于 ε。
- 因此，无论 $\widetilde{f}(y)$ 的值是什么，边界项 $\Big[\widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\Big]_{y=-\infty}^{y=\infty}$ 在两个端点处都等于零。

所以，分部积分公式简化为：

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(y) \frac{d}{dy} J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy}\widetilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y
$$

两边乘以 -1，就得到了一维情况下的结果。

这个思想可以推广到 n 维空间和任意阶的多重指标导数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。

在高维空间中，分部积分法源于**高斯散度定理** (Gauss's Divergence Theorem)。通过反复应用这个定理，我们可以将导数从一个函数“转移”到另一个函数上。

这个推导的核心技巧是**构造一个巧妙的矢量场**，然后将散度定理应用其上。

我们一步一步来。我们的目标是证明，对于任意一个方向 y_i（例如 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 中的一个），以下公式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y) \frac{\partial J_\varepsilon(x-y)}{\partial y_i} \mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \widetilde{f}(y)}{\partial y_i} J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y$$

我们知道，对于两个函数 g 和 h，它们乘积的偏导数是：

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) = \frac{\partial g}{\partial y_i} h + g \frac{\partial h}{\partial y_i}$$

移项后得到：

$$g \frac{\partial h}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) - \frac{\partial g}{\partial y_i} h$$

现在，我们在整个 $\mathbb{R}^n$ 空间中对这个等式进行积分：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \frac{\partial h}{\partial y_i} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) \mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial y_i} h \mathrm{d}y \quad (*)$$

我们的任务就是证明右边的第一项积分等于零。为了使用散度定理，我们需要一个矢量场。我们来构造一个非常特殊的矢量场 F，它在所有分量上都为零，**除了第 i 个分量**：

$$\mathbf{F}(y) = (0, \ldots, 0, \underbrace{g(y)h(y)}_{\text{第 i 个分量}}, 0, \ldots, 0)$$

现在，我们来计算这个矢量场 F 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = 0 + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_i}(g(y)h(y)) + \cdots + 0$$

所以，我们得到：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h)$$

高斯散度定理告诉我们：$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dV = \oiint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS$。

我们的积分是在整个 $\mathbb{R}^n$ 空间上进行的，在实际操作中，我们取一个非常大的区域 V（例如一个半径为 R 的超球体），计算积分，然后让 R 趋向于无穷大，这个区域 V 的边界就是 S（半径为 R 的超球面）。

将我们构造的 F 代入散度定理：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}(g \cdot h) \mathrm{d}y = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S$$

其中 $\mathbf{n}$ 是边界 S 的单位外法向量。$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 的点积结果是 $F_1 n_1 + \cdots + F_i n_i + \cdots = (g \cdot h) n_i$。
所以我们有：

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}(g\cdot h)\mathrm{d}y = \int_S (g\cdot h)n_i \mathrm{d}S$$

现在，我们把具体的函数代入。令 $g(y)=\widetilde{f}(y)$ 并且 $h(y)=J_\varepsilon(x-y)$。

边界积分项就变成了 $\int_S \widetilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)n_i\mathrm{d}S$。

这里的**决定性因素**是磨光核 J_ε 具有**紧支撑集** (compact support)。对于充分大的区域，积函数在整个边界 S 上都为零，那么边界积分的结果自然就是零:

$$\int_S \widetilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)n_i\mathrm{d}S = 0$$

因为边界项为零，所以我们证明了:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{V_R}\frac{\partial}{\partial y_i}(g\cdot h)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial y_i}(g\cdot h)\mathrm{d}y = 0$$

现在回到我们第一步的公式 $(*)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\frac{\partial h}{\partial y_i}\mathrm{d}y = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial y_i}(g\cdot h)\mathrm{d}y}_{0} - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial y_i}h\mathrm{d}y$$

于是我们就得到了:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\frac{\partial h}{\partial y_i}\mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial y_i}h\mathrm{d}y$$

这就是高维空间中的分部积分法。

每转移一次偏导数 ∂_{y_i}，就会产生一个负号。例如，我们将 ∂_{y_i} 从 J_ε 转移到 $\widetilde{f}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(y)\partial_{y_i}J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{y_i}\widetilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y$$

边界项同样因为 J_ε 的紧支撑性质而消失。

我们要转移的导数是 $\partial_y^\alpha = \partial_{y_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{y_n}^{\alpha_n}$。这个过程包含了总共 $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$ 次求导。每次转移一个一阶偏导数，都会引入一个 (-1) 的系数。因此，在把所有 $|\alpha|$ 次求导都从 $J_\varepsilon(x-y)$ 转移到 $\widetilde{f}(y)$ 之后，总共会产生一个 $(-1)^{|\alpha|}$ 的系数。

这就得到了最终的公式:

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(y)\partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\partial_y^\alpha\widetilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y$$

> 这个公式在现代数学分析中至关重要，因为它正是**弱导数**的定义方式。
>
> 函数 $\widetilde{f}$ 可能不是传统意义上可微的（例如，它可能在某些点有尖角或跳跃）。然而，我们可以通过这个积分公式来**定义**它的导数。
>
> 我们称函数 g 是 $\widetilde{f}$ 的 α-阶弱导数（记作 $g=\partial^\alpha\widetilde{f}$），如果对于**所有**光滑且具有紧支撑的“测试函数” ϕ（在我们的例子中，$J_\varepsilon(x-y)$ 就扮演了这个角色），以下等式都成立：>
>
> $$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\phi(y)\mathrm{d}y = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(y)\partial^\alpha\phi(y)\mathrm{d}y$$

所以，公式实际上可以看作是**用光滑的磨光核 J_ε 来定义（或计算）函数 $\tilde{f}$ 的弱导数** $\partial_y^\alpha \tilde{f}$。这种"通过积分将导数作用转移到光滑函数上"的方法，是处理非光滑函数求导的核心工具。

Lem 卷积的young不等式

假设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 并且 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$。设 $1 \leq p, q, r \leq \infty$ 并且满足以下关系：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

那么，它们的卷积 $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$ 是良定义的（对于几乎所有的 x），并且属于 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 空间。其 L^r 范数满足以下不等式：

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

特例 1： $q = 1$
如果 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，那么条件变为 $\frac{1}{p} + 1 = 1 + \frac{1}{r}$，这意味着 $r = p$。
不等式变为：

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$$

这是最常用的一个版本。它说明，**用一个 L^1 函数去卷积一个 L^p 函数，得到的结果仍然是一个 L^p 函数**，并且其范数被两个原始函数的范数乘积所控制。这在偏微分方程中，当 g 是一个基本解（通常是 L^1 函数）时尤其有用。

特例 2： $r = \infty$

如果我们想让卷积结果 $f * g$ 是一个有界函数（属于 L^∞），那么 $\frac{1}{r} = 0$。
条件变为 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。这组 (p, q) 是一对**共轭指数**（与赫尔德不等式中的指数相同）。
不等式变为：

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

这说明，如果 $f \in L^p$ 且 $g \in L^q$ 并且 p, q 是共轭的，那么它们的卷积是一个**有界连续函数**。

Thm

$u(x) \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，可以定义 $u_\varepsilon(x) = J_\varepsilon(x) * u(x)$，我们有结论：
（1）若 $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\overline{\Omega})$，则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
（2）若 $u \in \mathcal{L}_{loc}(\overline{\Omega})$，$\operatorname{supp} u \subset K \subset\subset \Omega$，且 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega) > \varepsilon$，则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
（3）$u \in \mathcal{L}^p(\Omega)(1 \leq p < \infty)$，则 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$，且

$$||u_\varepsilon||_{\mathcal{L}^p} \leq ||u||_{\mathcal{L}^p}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} ||u_\varepsilon - u||_{\mathcal{L}^p} = 0$$

PROOF:
前两个结果在前面已经证明，现在证明第三个结果. 首先我们使用卷积的 Young 不等式，所以自然有

$$||u_\varepsilon||_{\mathcal{L}^p} = ||u * J_\varepsilon||_{\mathcal{L}^p} \leq ||u||_{\mathcal{L}^p} \cdot ||J_\varepsilon||_{\mathcal{L}^1} = ||u||_{\mathcal{L}^p}$$

记得

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} u(x)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x))J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y$$

所以我们有

$$||u_\varepsilon - u||_{\mathcal{L}^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x)) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x)) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y = \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (u(y)-u(x)) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y$$

由积分的绝对连续性，知道

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x)) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (u(y)-u(x)) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y = 0$$

并且我们知道

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x)) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y \right| \leq |u_\varepsilon(x)| + |u(x)|$$

右边是 $\mathcal{L}^p$ 可积函数，所以是控制函数，所以由 DCT 我们知道

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} ||u_\varepsilon - u||_{\mathcal{L}^p}^p = 0$$

1.2.2 截断函数

考虑 $K \subset\subset \Omega$ 为紧集，称 $f(x)$ 为**截断函数**，如果 f 满足 $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 并且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K_{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

我们现在来构造截断函数：对于 $K \subset\subset \Omega$，取 K_{ε_0} 上的特征函数 $\chi(x)$，对 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$我们令

$$f_\varepsilon = J_\varepsilon * \chi$$

我们自然有 $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$，并且 $\operatorname{supp} f \subseteq K_{2\varepsilon_0}$，所以是截断函数.

Thm

我们可以对截断函数作估计，对于固定的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，存在常数 C 使得

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C \cdot \varepsilon^{-|\alpha|}$$

PROOF:
直接计算

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha f(x) &= \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) J_\varepsilon(x-y) \mathrm{d}y \\ &= \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \frac{1}{\varepsilon^n} J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y \\ &= \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \chi(y) (\partial_x^\alpha J) \left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

于是，我们可以知道

$$
\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha f(x)\right| &\leq \varepsilon^{-|\alpha|} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\partial_x^\alpha J\right)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right| \mathrm{d} y \\
&= \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}}\left|\left(\partial_x^\alpha J\right)(y)\right| \mathrm{d} y=C \varepsilon^{-|\alpha|}
\end{aligned}
$$

于是有，对于截断函数 $f(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，满足

$$
f(x)=\begin{cases}1, & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \notin \Omega_2\end{cases}
$$

其中 $\Omega_1 \subset \Omega_2$，并且 $\operatorname{dist}\left(\Omega_1, \Omega_2\right)=d>0$，则有

$$
|\nabla f(x)| \leq \frac{C}{d}
$$

其中 C 只和 f 有关.

1.2.3 单位分解

Lemma

设 X 为正规空间, $U_1, U_2, \cdots, U_n \subseteq X$ 为开集, $\bigcup_{i \leq n} U_i=X$. 则存在开集 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 使得 $\bigcup_{i \leq n} V_i=X$ 并且对每个 $i \leq n$ 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

PROOF:
只考虑 $n \geq 2$. 我们逐个构造 V_i .

闭集 $X \setminus \bigcup_{i \geq 2} U_i \subseteq U_1$. 由 X 正规，取开集 V_1 使得 $X \setminus \bigcup_{i \geq 2} U_i \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$，则 $V_1 \cup \bigcup_{i \geq 2} U_i=X$.
设 $1 \leq k \leq n-1$ 且已取定使得开集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 满足 $\bigcup_{i \leq k} V_i \cup \bigcup_{i>k+1} U_i=X$ 并且对每个 $i \leq k$ 有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$ ，则闭集 $X \setminus\left(\bigcup_{i<k} V_i \cup \bigcup_{i>k+2} U_i\right) \subseteq U_{k+1}$.

由 X 正规，取开集 V_{k+1} 使得 $X \setminus\left(\bigcup_{i \leq k} V_i \cup \bigcup_{i \geq k+2} U_i\right) \subseteq V_{k+1} \subseteq \overline{V_{k+1}} \subseteq U_{k+1}$ ，则 $\bigcup_{i<k+1} V_i \cup \bigcup_{i>k+2} U_i=X$.

这样便依次得到 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ ，使得 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_i=X$ 并且对每个 $i \leq n$，有 $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

Thm 单位分解

设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，$U_1, \cdots, U_k$ 为 K 的一个开覆盖，则存在函数 $\eta_1 \in C_0^{\infty}(U_1), \cdots, \eta_N \in C_0^{\infty}(U_N)$，使得
(1) $0 \leq \eta_i(x) \leq 1$，$\forall x \in U_i$，$i=1, \cdots, N$.
(2) $\sum_{i=1}^N \eta_i(x)=1, \forall x \in K$.

PROOF:
因为 $K \subset \mathbb{R}^n$ 仍然正规，由引理，我们做出有限多个开集 $D_1, \cdots, D_N$ 使得 $D_i \subset \overline{D_i} \subset U_i$，使得 $\{D_i\}_{i=1}^N$ 还是一个开覆盖.

由于 $D_i \subset\subset U_i$，我们可以做出 D_i 的截断函数 $\zeta_i \in C_0^{\infty}(U_i)$，使得 $\zeta_i(x) \geq 0$ 在 U_i 上成立，并且在 D_i 上为正，由于 $K \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$，所以 $\sum_{i=1}^N \zeta_i(x)>0$，$\forall x \in K$，于是可以令

$$\eta_i(x) = \frac{\zeta_i(x)}{\sum_{i=1}^N \zeta_i(x)}$$

于是自然有 $\sum_{i=1}^{N} \eta_i(x) = 1$，$\forall x \in K$.

Lem

第二可数，局部紧的 Hausdorff 空间存在一个紧穷竭，即存在紧集 $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

PROOF:
令 X 为一个这样的空间，由于 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间，所以存在一个预紧开集基，再由第二可数性质知道存在可数的预紧开集基，令 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ 为这个预紧开集基.

令 $K_1 = \overline{U_1}$，下面归纳定义，假设 $K_1, \cdots, K_k$ 满足 $U_j \subset K_j$，并且 $K_{j-1} \subset K_j^\circ$，$j = 1, \cdots, k$. 现在我们来定义 K_{k+1}，由于 K_k 是紧的，所以存在 m_k 使得 $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} U_j$，令 $K_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{m_k} \overline{U_j}$，并且满足 K_{k+1} 是紧集，并且 $K_k \subset K_{k+1}^\circ$. 所以我们得到一个紧穷竭.

高级版本

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$\{U_i\}_{i\in I}$ 为 Ω 的开覆盖，一族 C_0^∞ 函数 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 称为从属于 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的单位分解，如果满足：

（1）$0 \le \varphi_\alpha \le 1$

（2）$\{\text{supp } \varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的局部有限加细.

（3）$\sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha(x) \equiv 1$.

PROOF:
由于 Ω 继承 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑，知道 Ω 自然是一个第二可数的，局部紧的 Hausdorff 空间，所以存在一个紧穷竭 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，此时有 $A_j - A_{j-1}^\circ$ 是紧集，$A_{j+1}^\circ - A_{j-2}$ 是开集，有

$$A_j - A_{j-1}^\circ \subset\subset A_{j+1}^\circ - A_{j-2}$$

并且结合 $\{U_i \cap (A_{j+1} - A_{j-2}^\circ) \mid i \in I\}$ 为紧集 $B_j = A_j - A_{j-1}^\circ$ 的开覆盖，所以我们可以做 B_j 从属于这个开覆盖的一个单位分解 $\Phi_j = \{\varphi_\alpha^{(j)}\}$.

对于任意的 $x \in \Omega$，我们知道存在 j 使得 $x \in B_j$，并且 $x \notin B_k$，其中 $k \ge j+2$，于是对于 Φ_k 中的 $\varphi_\alpha^{(k)}$，有 $\varphi_\alpha^{(k)}(x) = 0$. 所以我们有

$$\sigma(x) := \sum_{\alpha,j} \varphi_\alpha^{(j)}(x)$$

在任意 x 附近都是有限和，从而 $\sigma(x)$ 有意义，令

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\sum_j \varphi_\alpha^{(j)}(x)}{\sigma(x)}$$

则 $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 即为我们所求单位分解.

2025-09-15