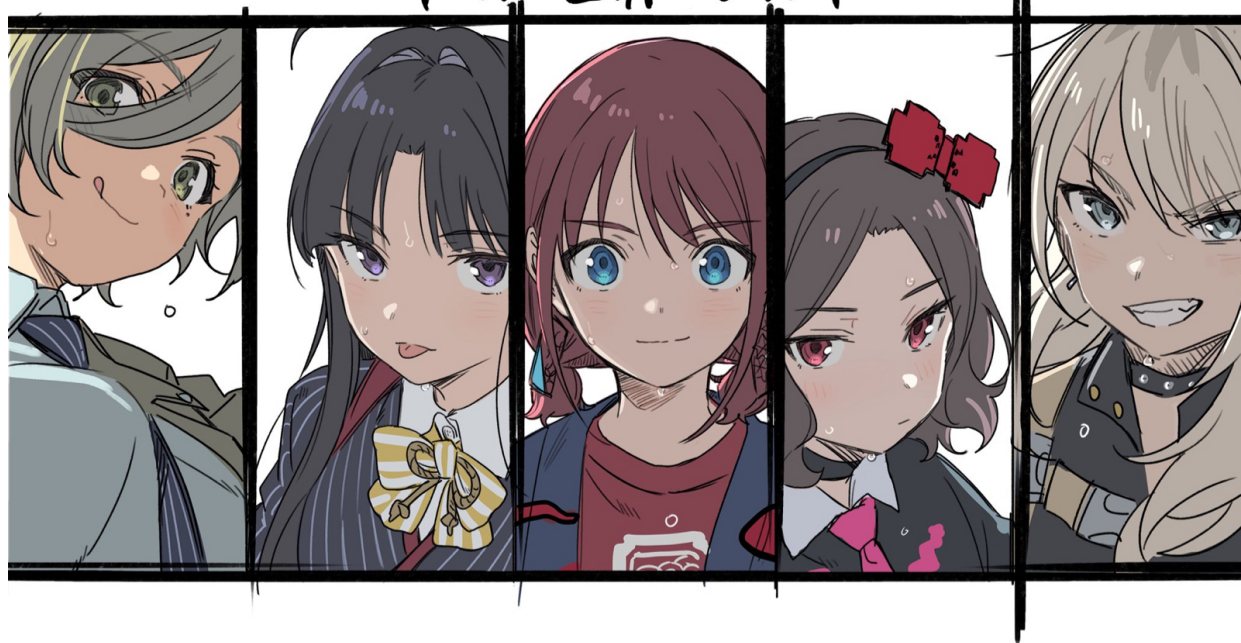


表示论入门

Muke

April 10, 2026

#11 世界のまん中



Contents

1	代数学拾遗	1
1.1	表示的概念	1
1.2	半单表示	2
1.3	半单代数的结构	3
1.4	双倍集	8
1.5	Hopf 代数	10
2	有限群的表示	11
2.1	特征标	11
2.2	表示的构造	12
2.3	特征标的正交关系	14
2.4	单复特征的数量	17
2.5	特征的代数性质	19
2.6	幂等元与直和分解	21
2.7	Burnside 定理	24
2.8	循环群与直积	28
2.9	商群表示的拉回	30
2.10	诱导与限制	31
2.11	对称幂与外幂	35
2.12	构造复特征标表	37
2.13	Mackey 定理	38
2.14	Clifford 定理	40
2.15	有限群的 Peter-Weyl 定理	42
2.16	Artin 定理	45
2.17	Brauer 定理	45
2.18	有限群的淡中忠郎重构定理	45

Chapter 1: 代数学拾遗

1.1 表示的概念

R 为环, V 为 R -模, 群 G 在 R 上的线性表示为群同态

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$$

当 V 是自由 R -模的时候可以把 $\text{GL}(V)$ 看成是 R 上的矩阵, 其秩称为表示的 **degree**. 有时直接把表示记为 V , 称 V 为 **representation module** 或者 **representation space**(当 R 是域时).

令 \mathbb{F} 是一个域, A 是一个 \mathbb{F} -结合代数(可能非交换), 如果 A 作为 \mathbb{F} -线性空间是有限维的, 就称 A 为**有限维代数**. 笔记中代数都默认有么元.

给定任意的群 G 和环 R , 可以构造 G 相对于 R 的 **group algebra** $RG = R[G]$ 为以 G 中元素为基的自由模, 其上的乘法如下定义

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{k \in G} \left(\sum_{gh=k} a_g b_h \right) k$$

若 V 是一个 G 在 R 上的表示, 不难看出 V 可以被看成是一个 RG -模¹, 并且可以得到一一对应的关系.

定理 1.1.1: 表示与模的对应

G 在 R 上的表示与 RG -模存在一个典范的一一对应关系.

证明: 任给 G 在 R 上的一个表示 V , 我们知道 V 是一个 RG -模, 作用为

$$\left(\sum a_g g \right) v = \sum a_g (\rho(g)v)$$

反过来, 任给一个 RG -模 V , 可以给出一个 G 到 $\text{GL}(V)$ 的同态:

$$g \mapsto (v \mapsto gv)$$

容易验证互逆, 故双射. □

此后将把表示和 RG -模混为一谈, 从模的观点看会得到许多有益的性质.

¹若非指出, 默认为左模.

任给一环 A , 可将 A 视为左 A -模, 为了强调其模结构, 将其记为 ${}_A A$. 取 $A = RG$ 时得到的左 RG -模对应的表示称为 **regular representation**. 正则表示可以帮助我们判断是否半单, 见后文.

给定表示 V , 我们称 V 的一个 RG -子模为子表示, 所谓 RG -子模就是在 G 作用下不变子模, 当 R 为域的时候也称为 G -不变子空间.

定义表示的 **equivalent** 就是其对应模的同构, 换句话说, 表示之间的态射是一个满足共变条件的模同态 $f: V \rightarrow W$, 所谓共变条件为下图交换

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

即检查

$$f(gv) = gf(v)$$

这样的 f 也被称为**缠结算子**. 表示的直和定义为作为 RG -模的直和.

1.2 半单表示

首先要介绍著名的 Maschke 定理.

定理 1.2.1: Maschke

V 是有限群 G 在域 \mathbb{F} 上的表示, 其中 $|G|$ 在 \mathbb{F} 上可逆, 则 V 是完全可约的.

证明: 其策略为酉化投影得到正交补, 任给 V 的 G -不变子空间 W , 取一个典范的 \mathbb{F} -线性投影

$$\pi: V \rightarrow W$$

其问题在于 π 未必是 $\mathbb{F}G$ -线性的, 所以不能得到直和分解

$$V = W \oplus \text{Ker } \pi$$

为了得到分解, 需要把 π 修改成 $\mathbb{F}G$ -线性的, 并且保持其像空间为 W , 令

$$\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}: V \rightarrow V$$

验证 G -等变性:

$$\begin{aligned} \pi'(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(\pi(g^{-1}hv)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hh^{-1}g(\pi(g^{-1}hv)) = h\pi'(v) \end{aligned}$$

故 π' 为 $\mathbb{F}G$ -线性, 同时易见为 V 到 W 的投影, 故得到直和分解

$$V = W \oplus \text{Ker } \pi'$$

故知完全可约. □

若代数 A 的模 V 没有非平凡的子模, 则称 V 是 **irreducible** 或者 **simple**. 若 V 的任意子模 U 均存在补子模, 即存在子模 W 使得

$$V = U \oplus W$$

则称 V 是 **semisimple** 或者 **completely reducible**.

易见所谓单模当且仅当被任意非零元生成, 从而知道代数 A 的单模都形如 A/\mathfrak{m} , 其中 \mathfrak{m} 是 A 的极大理想: 若 V 为 A -单模, 取 $x \in V$ 为非零元, 考虑态射

$$\varphi: A \rightarrow V, \quad a \mapsto ax$$

此为满态射, 得到模同构

$$A/\text{Ker } \varphi \cong V$$

若 $\text{Ker } \varphi$ 非极大理想, 则知存在包含 $\text{Ker } \varphi$ 的极大理想对应着 V 的一个非平凡子模, 与单模矛盾.

现在考虑 A 是域 \mathbb{F} 上的有限维代数, 要说明其单模同构类是有限的, 注意到任何一个单模都形如 A/\mathfrak{m} , 其中 \mathfrak{m} 是极大理想, 故知其为合成列

$$A \supseteq I \supseteq \dots$$

的一个合成因子, 由 Jordan-Holder 定理知道合成列的合成因子在同构意义下相同(可能顺序不同), 故结合有限长度知道单模有限. 此外, 知道单模满足

$$\dim_k V = \dim_k(A/\mathfrak{m}) \leq \dim_k A < \infty$$

从而有限维代数的单模都是有限维的.

1.3 半单代数的结构

定理 1.3.1: 完全可约模的刻画

A -模 V 是完全可约的当且仅当 V 是若干不可约 A -模的直和.

证明: 左推右是易见的, 至于右推左, 若 V 为不可约模的直和

$$V = \bigoplus V_i$$

任取 V 的子模 U , 考虑所有与 U 交为 $\{0\}$ 的子模构成的集合, 利用 Zorn 引理可见其有极大元 W , 若 $W \oplus U \subsetneq V$, 则存在 $x \in V \setminus (U \oplus W)$, 设其为

$$x = \sum x_i, \quad x_i \in V_i$$

知有 x_j 使得 $x_j \in V \setminus (U \oplus W)$, 否则 $x \in U \oplus W$, 故由 V_j 不可约知

$$(U \oplus W) \cap V_j = \{0\}$$

知 $W \oplus V_j \in S$ 与极大元矛盾, 得证. \square

对于任意的 A -模 U , 可以定义其 **socle**, 记为 $\text{Soc}(U)$, 定义为 U 的所有子单模的和, 这是 U 的唯一的最大半单子模, 如若添加要求取出 U 的所有与单模 S 同构的子模的和, 也是唯一的. 从而知道如果

$$U = S_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{a_r}$$

为若干半单模的直和, 其中 a_i 为 S_i 的直和重数, 则 S_i 的同构类完全由 U 决定.

定理 1.3.2: Schur's Lemma

A 为么环, S_1 与 S_2 为单 A -模, 则若 S_1 与 S_2 不同构时均有 $\text{Hom}_A(S_1, S_2) = 0$, 同构时有 $\text{Hom}_A(S_1, S_2) \cong \text{End}_A(S_1)$ 是除环. 此外当 A 是代数闭域 k 上有限维代数时, 有任意 S_1 的自同态都是数量积, 即 $\text{End}_A(S_1) \cong k$.

证明: 第一个论断是显然的, 对于第二个论断, 任给 $\theta: S_1 \rightarrow S_2$, 取一个特征值 λ , 知道

$$\theta - \lambda I: S_1 \rightarrow S_1$$

是一个不可逆的态射, 从而 $\theta - \lambda I = 0$, 即 $\theta = \lambda I$. \square

推论 1.3.3

G 是有限群, ρ 是 G 的不可约表示, 若矩阵 M 满足与任意 $\rho(g)$ 交换, 则 M 是纯量矩阵.

证明: 因为与任意 $\rho(g)$ 交换知道是 $\mathbb{C}G$ -模态射, 故 \mathbb{C} 上不可约表示的态射只能是纯量的. \square

引理 1.3.4

对任意么环 A , 有 $\text{End}_A({}_A A) \cong A^{\text{op}}$.

证明是显然的, 注意到对两个自同态 φ, ψ , 有

$$(\varphi \circ \psi)(1) = \varphi(\psi(1) \cdot 1) = \psi(1)\varphi(1)$$

我们称一个环是 **semisimple**, 如果其上的任何模都是半单的, 从而我们由 Maschke 定理知道若域 \mathbb{F} 的特征不整除 $|G|$, 则 $\mathbb{F}G$ 是半单环.

定理 1.3.5: 半单环的等价条件

A 是半单环当且仅当 ${}_A A$ 作为左 A -模是半单的.

证明: 只需要证右推左, 先说明有限生成 A -模都是半单的, 设 v_1, \dots, v_n 是 M 的生成元, 取 ${}_A A$ 的不可约分解为

$${}_A A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$$

易见 I_i 为 A 的非零极小左理想, 容易见到

$$\varphi_{ij}: I_i \rightarrow I_i v_j, \quad a \mapsto av_j$$

为满射, 结合 I_i 极小知道是单射, 从而同构, 知 $I_i v_j$ 不可约, 注意到

$$M = \sum_j Av_j = \sum_i \left(\sum_i I_i \right) v_j = \sum_{i,j} I_i v_j$$

故 M 为单模的和, 从而半单. 于是证明了有限生成的情况, 现在对任意的模 M , 考虑 M 的所有半单子模, 由 Zorn 引理知道存在极大元 N , 若 $N \neq M$, 任取 $x \in M - N$, 考虑由 x 生成的循环子模 Ax . 因为 Ax 由单个元素生成, 它显然是有限生成的 A -模. 根据前面的证明, Ax 是半单模. 此时考虑子模 $N + Ax$. 由于 N 是半单模, Ax 也是半单模, 而半单模的和依然是半单模, 故 $N + Ax$ 是半单的. 但由于 $x \notin N$, 我们有:

$$N \subsetneq N + Ax$$

这与 N 是 M 中极大半单子模的假设相矛盾! 因此, 假设 $N \neq M$ 不成立, 必定有 $N = M$. 这证明了任意 A -模 M 都是半单的, 从而 A 是半单环. \square

现在我们可以说明我们的主定理.

定理 1.3.6: Artin-Wedderburn

A 是 k 上有限维代数, 满足任意有限维 A -模都是半单的, 则 A 可以表达成一些除环上矩阵代数的直和, 特别地, 若

$${}_A A \cong S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n_r}$$

其中 S_i 是互不同构的单模, n_i 为直和重数, 则有

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$$

其中 $D_i = \text{End}_A(S_i)^{\text{op}}$, 如果 k 是代数闭的, 则 $D_i = k$.

证明: 若有模直和分解

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

则 $\text{End}_A(U)$ 可以看成是一个 $r \times r$ 的矩阵, 其 i, j 元素为 $\text{Hom}_A(U_j, U_i)$ 中的元素. 注意到若 $i \neq j$, 则由 Schur 引理

$$\text{Hom}_A(S_j^{n_j}, S_i^{n_i}) = 0$$

从而知道

$$\text{End}_A({}_A A) \cong \text{End}_A(S_1^{n_1}) \oplus \cdots \oplus \text{End}_A(S_r^{n_r})$$

并且有

$$\text{End}_A(S_i^{n_i}) = \text{Hom}_A(S_i^{n_i}, S_i^{n_i}) \cong M_{n_i}(\text{End}_A(S_i)) = M_{n_i}(D_i^{\text{op}})$$

结合 $M_{n_i}(D_i^{\text{op}})^{\text{op}} \cong M_{n_i}(D_i)$ (这是一个自然同构, 利用转置来构造), 所以有

$$A \cong \text{End}_A({}_A A)^{\text{op}} \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i^{\text{op}})^{\text{op}} \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$$

最后, 若 k 代数闭, 知道 $D_i = \text{End}_A(S_i)^{\text{op}} = k^{\text{op}} = k$. □

Remark 1.3.1

其逆定理也是成立的, 即任何矩阵代数的有限直和, 必然是一个半单代数. 此外, 除环上的矩阵代数被称为单代数, 它的特点是除了零理想和它自身之外, 没有其他的双边理想. 后面会说明虽然模的分解同构可能不唯一, 但作为 A 的子集, 这些矩阵代数直和项是唯一确定的.

Remark 1.3.2

A 是 k 上有限维代数, 若满足任意有限维 A -模都是半单的, 这足以推出任意 A -模都是半单的, 即 A 是半单代数. 其原因在于 ${}_A A$ 是有限维的, 从而半单, 于是等价于 A 半单.

定理 1.3.7: Artin-Wedderburn 定理的逆定理

设 A 是一个代数, 若 A 同构于有限个除环上的全矩阵环的直和, 即

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$$

其中 D_i 为除环, $n_i \geq 1$ 为正整数, 则 A 是一个半单代数.

证明: 要证 A 是半单的, 即证 A 作为自身的左模可以分解为单子模的直和, 由于 $A = \bigoplus_{i=1}^r R_i$ (其中 $R_i = M_{n_i}(D_i)$), 且 A 对 R_i 的左乘作用完全通过投影到分量 R_i 来实现. 因此, R_i 作为左 A -模的子模结构, 与其作为左 R_i -模的子模结构完全相同.

故此, 我们只需证明: 任意单个全矩阵环 $R = M_n(D)$ 作为自身的左 R -模是半单的, 即可推导出 A 是半单的左 A -模.

第一步: 构造左理想(列空间切片): 对于 $k = 1, 2, \dots, n$, 定义 R 的子集 L_k 如下:

$$L_k = \{M \in R \mid M \text{ 的第 } j \text{ 列全为 } 0, \forall j \neq k\}$$

即 L_k 中的矩阵仅在第 k 列可能有非零元素. 对于任意 $X \in R$ 和 $Y \in L_k$, 根据矩阵乘法规则, 积 XY 的第 j 列等于 X 乘以 Y 的第 j 列. 由于 Y 除第 k 列外全为 0, 积 XY 也除第 k 列外全为 0. 因此 $XY \in L_k$, 这说明 L_k 是 R 的一个左理想(即左子模).

第二步: 证明矩阵环是列空间的直和: 对于任意矩阵 $M \in R$, 我们可以将其唯一地分解为 n 个矩阵之和:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

其中 $M_k \in L_k$, 且 M_k 的第 k 列与 M 的第 k 列完全相同. 因此, 作为左 R -模, 我们有如下的直和分解:

$$R = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$$

第三步: 证明列空间是单模: 接下来证明每个 L_k 都是单模. 作为左 R -模, L_k 同构于 D 上的 n 维列向量空间 D^n , 且 R 在 L_k 上的左乘作用, 等同于全矩阵环 $M_n(D)$ 对列向量空间的自然作用. 设 $v \in L_k$ 是任意一个非零元素(对应一个非零列向量). 我们需要证明由 v 生成的循环子模 Rv 等于整个 L_k . 由于 D 是除环, 在向量空间 D^n 中, 只要向量 $v \neq 0$, 对于任意目标向量 $w \in D^n$, 总存在一个矩阵 $X \in M_n(D)$ 使得 $Xv = w$. 这意味着 $Rv = L_k$. 因此, L_k 中除了 0 子模和其自身外, 不存在任何真子模, 故 L_k 是单模.

综上所述, $R = M_n(D)$ 可以被完全分解为 n 个单模 L_k 的直和, 故 R 是半单代数. 由于原代数 A 是有限个此类半单代数的直和, 因此 A 必然也是半单代数, 逆定理得证. \square

推论 1.3.8

令 A 是一个 k 上有限维半单代数, 若有单模分解

$${}_A A = S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n_r}$$

则 S_1, \dots, S_r 为 A 的单子模的所有同构类, 当 k 是代数闭的时候, 我们有 $n_i = \dim_k S_i$, 并且

$$\dim_k A = n_1^2 + \cdots + n_r^2$$

证明: 所有单模的同构类必定出现在该分解中, 因为每个单模都可以表示为 ${}_A A$ 的同态像, 因此也必定是其中一个模 S_i 的同态像. 当 k 是代数闭域时, 由 Schur 引理可知, 所有的除环 D_i 都与 k 一致, 且 $\text{End}_A(S_i^{n_i}) \cong M_{n_i}(k)$. 由 Artin-Wedderburn 定理给出的环分解 $A = M_{n_1}(k) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(k)$ 可直接得到

$$\dim_k A = n_1^2 + \cdots + n_r^2$$

我们是通过将 A 与 $\text{End}({}_A A)^{\text{op}}$ 等同起来从而获得这个分解的, 这种等同方式是将元素 $a \in A$ 视作自同态“右乘 a ”. 由此我们可以看出, 如果 $i \neq j$, 将 $S_j^{n_j}$ 中的元素右乘 $M_{n_i}(k)$ 中的元素, 结果为 0. 因此, $S_i^{n_i}$ 是 A (在 A 的初始分解中)唯一包含能被 $M_{n_i}(k)$ 从右侧进行非零作用的元素的直和项. 我们可以推断出, 作为左 A -模, $M_{n_i}(k) \cong S_i^{n_i}$. 这是因为, 左边的项同构于 A 模掉一个特定的左子模所得的商模(该左子模由被直和项 $M_{n_i}(k)$ 通过右乘所零化的元素组成), 而右边的项则是这个商模的一个像; 并且, 为了满足 $\dim_k A = \sum_i \dim_k S_i^{n_i}$, 它们必须是同构的. 因此

$$\dim_k M_{n_i}(k) = n_i^2 = \dim_k S_i^{n_i} = n_i \dim S_i$$

从而推得 $\dim S_i = n_i$. \square

我们可以在群表示论的语境下重述一些结果.

推论 1.3.9

G 是一个有限群, k 是一个域使得 $|G|$ 可逆, 则

(1) 作为环, kG 是除环上矩阵代数的直和.

(2) 若 k 是代数闭的, 设 S_1, \dots, S_r 为 kG 的完全同构类, 令 $d_i = \dim_k S_i$, 则有

$$|G| = d_1^2 + \dots + d_r^2$$

对于 Abel 群而言, 我们有如下结果:

推论 1.3.10

设 G 是一个有限阿贝尔群, 在一个使得 $|G|$ 可逆的代数闭域 k 上, G 的每一个单表示的次数都是 1, 且非同构的单表示的数量等于 $|G|$. 特别地, 我们可以推断出, 每个有限阶且其阶数与 k 的特征互素的可逆矩阵都是可对角化的.

证明: 我们知道群代数 kG 是半单的, 又因为 kG 是一个交换环, 从而不可约分解中出现的矩阵直和项的阶必须全是 1, 且其中出现的除环也必须是交换的. 事实上, 既然我们假设了 k 是代数闭域, 这些除环就必须全都是 k . 这意味着不可约表示的次数全都是 1, 因此它们的数量必定是 $|G|$, 因为

$$|G| = d_1^2 + \dots + d_r^2 = r$$

一个有限阶矩阵在它所作用的向量空间上, 给出了一个由它所生成的循环群的表示; 并且, 由于该群的阶数是可逆的, 这个表示是半单的. 由我们刚才所证明的结论可知, 它是 1 维空间的直和. 只要选取这些 1 维空间中的向量作为基向量, 该矩阵即为对角矩阵. \square

1.4 双倍集

给定群 G 的子群 H 与 K , 我们可以对每个 $g \in G$ 定义 (H, K) -double coset

$$HgK := \{h g k \mid h \in H, k \in K\}$$

若 Ω 是一个左 G -集, 即 G 在其上有群作用, 我们使用 $G \backslash \Omega$ 来表示群 G 在 Ω 上作用的轨道集, 令 $[G \backslash \Omega]$ 为一个轨道代表元集. 同理如果 Ω 是一个右 G -集, 我们令 Ω / G 与 $[\Omega / G]$ 为对应的轨道集和轨道代表元集. 若 Ω 是一个可递的 G -集, 对任意的 $\omega \in \Omega$ 都有

$$\Omega \cong G / \text{Stab}_G(\omega)$$

作为集合同构.

定理 1.4.1: 双陪集分解

设 $H, K \leq G$, 则

- (1) 每个 (H, K) -双陪集是 H 的右陪集的不相交并, 也是 K 的左陪集的不相交并.
- (2) 任意两个 (H, K) -双陪集要么相同, 要么不相交. (H, K) -双陪集构成 G 的一个划分.
- (3) (H, K) -双陪集的集合与轨道 $H \backslash (G/K)$ 之间存在双射, 也与轨道 $(H \backslash G)/K$ 之间存在双射, 对应映射为

$$HgK \mapsto H(gK) \in H \backslash (G/K)$$

$$HgK \mapsto (Hg)K \in (H \backslash G)/K.$$

在接下来的结果中, 我们区分左共轭和右共轭: ${}^g x = gxg^{-1}$ 和 $x^g = g^{-1}xg$. 之后我们将记 $c_g(x) = {}^g x$, 使得 $c_g: H \rightarrow {}^g H$ 是由 g 进行左共轭的同态, 且 $c_{g^{-1}}(x) = x^g$.

定理 1.4.2

设 H, K 是 G 的子群, $g \in G$ 是一个元素. 我们有如下同构

$$HgK/K \cong H/(H \cap {}^g K) \quad \text{作为左 } H\text{-集}$$

以及

$$H \backslash HgK \cong (H^g \cap K) \backslash K \quad \text{作为右 } K\text{-集}.$$

因此, 双陪集 HgK 是 $|H : H \cap {}^g K|$ 个左 K -陪集的并, 也是 $|K : H^g \cap K|$ 个右 H -陪集的并. 我们有

$$|G : K| = \sum_{g \in [H \backslash G/K]} |H : H \cap {}^g K|$$

以及

$$|G : H| = \sum_{g \in [H \backslash G/K]} |K : H^g \cap K|$$

证明: HgK 是左 K -陪集的一个 H -轨道的并. 其中一个陪集在 H 中的稳定子为

$$\begin{aligned} \text{Stab}_H(gK) &= \{h \in H \mid hgK = gK\} \\ &= \{h \in H \mid h^g K = K\} \\ &= \{h \in H \mid h^g \in K\} \\ &= H \cap {}^g K \end{aligned}$$

因此, $HgK/K \cong H/(H \cap {}^g K)$ 作为左 H -集, 且 HgK 中左 K -陪集的个数等于 $|H : H \cap {}^g K|$. 将所有双陪集上的这些数求和, 我们得到左 K -陪集的总数 $|G : K|$. 关于右 H -陪集的论证是类似的. \square

1.5 Hopf 代数

Chapter 2: 有限群的表示

2.1 特征标

G 是有限群, 考虑 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是 G 的有限维表示, 我们定义 ρ 的 **character** χ 为

$$\chi: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

称 χ 的 **degree** 为 $\dim V$, 有

$$\chi(1) = \dim V$$

我们称表示 ρ 与 V **afford** 特征标 χ , 我们为了强调表示的对应关系, 有时也把 χ 记为 χ_ρ 或者 χ_V .

很显然, 由于 trace 是类函数, 即对于相似的矩阵取值一致, 我们可以知道 χ 是 G 上的 **class function**, 即在同一个元素的共轭类上取值一致, 我们不加证明地罗列特征标的一些简单性质如下:

命题 2.1.1: 特征标的性质

令 χ 为 \mathbb{C} 上 G 的表示 ρ 的特征标, 对 $g, h \in G$, 有

(1) $\chi(1) = \dim_{\mathbb{C}} \rho = \dim_{\mathbb{C}} V$.

(2) 若 g 的阶为 n , 则 $\chi(g)$ 是 n 次单位根的和.

(3) $|\chi(g)| \leq \chi(1)$, 取等当且仅当 $\rho(g)$ 是一个纯量乘法.

(4) $\chi(g) = \chi(1)$ 当且仅当 $\rho(g) = 1$, 即 $g \in \text{Ker } \rho$.

(5) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

(6) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$.

(7) 若 V 与 W 作为 $\mathbb{C}G$ -模同构, 则作为 G 上的函数 $\chi_V = \chi_W$.

唯一需要解释一下的可能就是 (4), 因为 $\rho(g)$ 可对角化, 所以若特征值的和为 $\chi(1)$ 当且仅当特征值全是 1, 也当且仅当是单位矩阵.

要了解一个特征标在 G 上的取值, 只需要对 G 的同构类的代表元考虑即可, 而 G 的 **character table** 就刻画了这些信息.

特征标表有 m 列, 其中 m 是 G 的共轭类的个数, 有 n 行, 其中 n 是 G 的所有互不同构的不可约表示的个数. 如下图是 S_3 的特征标表, 我们将会在后面展示其妙处.

g	$()$	(12)	(123)
$ C_G(g) $	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1
χ_2	2	0	-1

2.2 表示的构造

我们可以从已有表示来构造新的表示, 表示的构造实际上是 RG -模的构造, 首先看到的是表示的直和, 即若 V, W 是 G 的两个表示, 我们可以考虑其直和

$$V \oplus W$$

定义 kG -作用为

$$rg(v \oplus w) = r \cdot (gv) \oplus (gw)$$

此外可以构造表示的张量积 $V \otimes_R W$, 定义作用为

$$rg(v \otimes_R w) = r \cdot (gv) \otimes_R (gw)$$

还有一类非常重要的构造是 hom 构造, 即考虑 $\text{Hom}_R(V, W)$, 我们需要在其上定义一个作用, 即对 $f: V \rightarrow W$, 我们需要定义 $g \cdot f$ 如下

$$(g \cdot f)(v) = gf(g^{-1}v)$$

如此定义是为了让缠结算子对应 $\text{Hom}_R(V, W)$ 的不动点, 即若 f 是缠结算子, 则有

$$f(gv) = gf(v) \iff g^{-1}f(gv) = f(v) = (g^{-1}f)(v)$$

当 $W = R$ 时, G 在 R 上的作用是平凡作用, 我们在 $\text{Hom}_R(V, R)$ 上定义的作用为

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v)$$

我们将 $\text{Hom}_R(V, R)$ 记为 V^* , 称为 V 的 **dual representation**.

命题 2.2.1

M, N 为 G 在环 R 上的表示, M 或者 N 其中一个是有限秩的自由 R -模, 则我们有 RG -模同构

$$\text{Hom}_R(M, N) \cong M^* \otimes_R N$$

证明: 直接给出同构:

$$\begin{aligned}\alpha: M^* \otimes_R N &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ \varphi \otimes v &\mapsto (u \mapsto \varphi(u)v)\end{aligned}$$

可以对 M 或者 N 是有限秩自由模的情况讨论, 然后证明确实是同构. \square

定理 2.2.2

V, W 为 G 在特征零的域 k 上的有限维表示, 则

- (1) $V \oplus W$ 的特征标为 $\chi_V + \chi_W$.
- (2) $V \otimes_k W$ 的特征标为 $\chi_V \cdot \chi_W$.
- (3) V^* 的特征标为 $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.
- (4) $\text{Hom}_k(V, W)$ 的特征标为 $\chi_{V^*} \cdot \chi_W$.

证明: (1) 我们有

$$\chi_{V \oplus W}(g) = \text{tr}(\rho_V(g) \oplus \rho_W(g)) = \text{tr}(\rho_V(g)) + \text{tr}(\rho_W(g)) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$$

(2) 我们有

$$\chi_{V \otimes_k W}(g) = \text{tr}(\rho_V(g) \otimes \rho_W(g)) = \text{tr}(\rho_V(g)) \cdot \text{tr}(\rho_W(g)) = \chi_V \cdot \chi_W$$

(3) 我们需要弄清楚 g 在 V^* 上的作用, 即

$$(gf)(v) = f(\rho(g)^{-1}v)$$

取 $\rho(g)$ 的特征向量 v_1, \dots, v_n , 有

$$\rho(g)v_i = \lambda_i v_i$$

取 v_i 的对偶基 v_1^*, \dots, v_n^* , 则有

$$\rho^*(g)(v_i^*)(v) = v_i^*(\rho(g)^{-1}v)$$

设

$$v = \sum a_i v_i$$

则有

$$\rho(g)^{-1}\left(\sum a_i v_i\right) = \sum a_i \lambda_i^{-1} v_i$$

所以

$$v_i^*(\rho(g)^{-1}v) = v_i^*\left(\sum a_i \lambda_i^{-1} v_i\right) = a_i \lambda_i^{-1} = \lambda_i^{-1} v_i^*(v)$$

故知 $\rho^*(g)$ 的特征值为 λ_i^{-1} , 从而

$$\chi_{V^*}(g) = \text{tr}(\rho^*(g)) = \sum \lambda_i^{-1} = \text{tr}(\rho(g)^{-1}) = \chi_V(g^{-1})$$

(4) 注意到 $\text{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W$, 则由 (3) 立刻得到. □

在 $V \otimes_R V$ 中, 我们可以构造对称张量空间

$$S^2(V) = \langle v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \rangle$$

为对称张量张成的线性空间, 同理有反对称张量空间

$$\Lambda^2(V) = \langle v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \rangle$$

于是我们得到

$$V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$$

2.3 特征标的正交关系

对 RG -模 V , 我们定义

$$V^G = \{v \in V : gv = v \quad \forall g \in G\}$$

引理 2.3.1

在任意环 R 上, 有 $\text{Hom}_R(V, W)^G = \text{Hom}_{RG}(V, W)$.

这就是我们之前定义 G 在 $\text{Hom}_R(V, W)$ 上作用的用意, 由定义是立刻得到的.

引理 2.3.2

V 是一个 RG -模, 其中 R 是一个环使得 $|G|$ 是可逆元, 则

$$\pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g : V \rightarrow V^G$$

是一个 RG -模的投影映射, 特别地, V^G 是 V 的一个 RG -模直和项. 当 R 是特征零的域 k 时, 有

$$\text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \right) = \dim_k V^G$$

证明: 容易验证

$$\pi(hv) = \pi(v) = h\pi(v)$$

所以 π 自然是一个 RG -模态射, 并且很显然在 V^G 上是 id , 把 V 中元素映入 V^G 中, 所以还有

$$\pi^2 = \pi \iff \pi(\text{id} - \pi) = 0$$

所以可以造出以 V^G 为直和项的直和分解. 最后, 由于投影映射的 trace 就是像空间的维数, 所以得到最后的式子. \square

我们可以通过逐点定义加法与乘法运算来将 G 上的类函数视为一个 \mathbb{C} -代数. 我们记 $\text{cc}(G)$ 为 G 的共轭类, 把 G 上的类函数记为 $\mathbb{C}^{\text{cc}(G)}$. 若 $|\text{cc}(G)| = n$, 则我们知道

$$\mathbb{C}^{\text{cc}(G)} \cong \mathbb{C}^n$$

这是一个 \mathbb{C} -代数同构, 由 Artin-Wedderburn 定理的逆定理知道 \mathbb{C}^n 是半单代数, 即 $\mathbb{C}^{\text{cc}(G)}$ 是半单代数.

我们可以利用 \mathbb{C}^n 的 **Hermitian form** 来定义类函数的内积为:

$$\langle \chi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \psi(g) = \sum_{g \in \text{cc}(G)} \frac{1}{|C_G(g)|} \overline{\chi(g)} \psi(g)$$

其中 $C_G(g)$ 是 g 的中心化子, 也是 g 在共轭作用下的迷向子群, 我们有

$$\text{Cl}(g) = \frac{|G|}{|C_G(g)|}$$

其中 $\text{Cl}(g)$ 是 g 所在的共轭类.

由定义, 我们也有

$$\langle \chi\varphi, \psi \rangle = \langle \chi, \varphi^* \psi \rangle$$

其中 $\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g)}$ 是由复共轭定义的一类函数. 若 χ, ψ 是特征标, 则我们注意到 ψ^* 是对偶表示的特征标, 这与我们之前计算的对偶表示特征标定义是一致的.

在特征标的情况下, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \chi, \psi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}) \\ &= \langle \psi, \chi \rangle \end{aligned}$$

从而我们得到

$$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}$$

故特征标的 Hermite 型是实数.

定理 2.3.3: 行正交关系

G 是有限群, V, W 是 G 的单复表示, 则

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明: 注意到 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ 的特征标就是 $\overline{\chi_V} \cdot \chi_W$, 则我们有

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G \\ &= \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \langle \chi_V, \chi_W \rangle \end{aligned}$$

Schur 引理告诉我们同构是 1 不同构是 0. □

Remark 2.3.1

其行正交表示在内积意义下特征标表中不同的两行是相互正交的. 所以可以将其视为一组正交基来刻画任何一个表示的特征标.

我们利用行正交关系立刻得到.

推论 2.3.4

令 V 是一个有限维 $\mathbb{C}G$ -模, 则我们有分解

$$V = S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n_r}$$

其中 S_1, \dots, S_r 为互不同构的单模, 我们有

$$n_i = \langle \chi_V, \chi_{S_i} \rangle$$

特别地, n_i 被 V 唯一决定.

推论 2.3.5

对有限维复表示 V 与 W , 有 $V \cong W$ 当且仅当 $\chi_V = \chi_W$.

证明: 左推右显然, 反之若 $\chi_V = \chi_W$, 可见 V 与 W 的单模分解成分相同, 故同构. □

利用特征标我们也可以判断一个模是不是单模.

推论 2.3.6

χ 为复表示 V 的特征, 则 $\langle \chi, \chi \rangle$ 是一个正整数, 当且仅当 V 是单模的时候等于 1.

证明: 设

$$V = S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n_r}$$

则我们知道

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^r n_i^2$$

为一个正整数，并且当且仅当只有唯一单模成分的时候等于 1. □

考虑 G 在 $\mathbb{C}G$ 上的正则表示，令 $\chi_{\mathbb{C}G}$ 为正则表示的特征.

引理 2.3.7

有

$$\chi_{\mathbb{C}G}(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明: 对 $g \in G$ 为在基 G 上的置换，其矩阵为置换矩阵，若 $g \neq 1$ ，我们知道没有任何基被保持不动，所以对角线上全是 0，故得证. □

推论 2.3.8

令 χ_1, \dots, χ_r 为 G 的所有单复表示特征，其中 d_1, \dots, d_r 为其次数，则

$$\langle \chi_{\mathbb{C}G}, \chi_i \rangle = d_i$$

因此

$$(1) \sum_{i=1}^r d_i^2 = |G|.$$

$$(2) \text{ 对 } g \neq 1, \text{ 有 } \sum_{i=1}^r d_i \chi_i(g) = 0.$$

证明: 很显然有

$$\langle \chi_{\mathbb{C}G}, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} |G| \chi_i(1) = d_i$$

因此有

$$\chi_{\mathbb{C}G} = d_1 \chi_1 + \dots + d_r \chi_r$$

取 $g \neq 1$ 就得到 (2). □

2.4 单复特征的数量

我们令 $Z(A)$ 表示环 A 的 **center**.

引理 2.4.1

(1) 对任意的交换环 R , 我们有

$$Z(M_n(R)) = \{\lambda I \mid \lambda \in R\} \cong R$$

(2) G 的单复特征的数量等于 $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G)$.

证明: (1) 是线性代数的基本结论.

(2) Artin-Wedderburn 定理提供了 $\mathbb{C}G$ 的分解

$$\mathbb{C}G \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$$

则推论 1.3.8 告诉我们每一个 $M_{n_i}(\mathbb{C})$ 都对应了一个单模同构类, 通过取中心知道每一个矩阵直和因子都贡献了 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一个维数. \square

引理 2.4.2

令 x_1, \dots, x_t 为 G 的共轭类的代表元, R 是一个环, 令 $\bar{x}_i \in RG$ 为 x_i 所在共轭类元素的和. 则 $Z(RG)$ 是自由 R -模, 其基为 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t$.

证明: 注意到

$$g\bar{x}_i = \sum_{y \sim x_i} gy = \left(\sum_{y \sim x_i} gyg^{-1} \right) g = \bar{x}_i g$$

接着设 $\sum_{g \in G} a_g g \in Z(RG)$. 下证若 $g_1 \sim g_2$, 则 $a_{g_1} = a_{g_2}$. 设 $g_2 = hg_1h^{-1}$. 在 $h(\sum_{g \in G} a_g g)h^{-1}$ 中 g_2 的系数是 a_{g_1} , 而在 $\sum_{g \in G} a_g g$ 中 g_2 的系数是 a_{g_2} . 由于 G 的元素在 RG 中 R -线性无关, 这两个系数必须相等. 由此可见, $Z(RG)$ 的每个元素都可以表示成若干 \bar{x}_i 的 R -线性组合.

最后, 我们注意到各个 \bar{x}_i 在 R 上线性无关, 因为每个 \bar{x}_i 都是若干群元素之和, 其支集与其余 \bar{x}_j 的支集互不相交. \square

定理 2.4.3

G 是有限群, 下面的数全部相等:

- (1) G 的单复特征的数量.
- (2) G 的单复表示同构类的数量.
- (3) G 的共轭类的数量.

证明: 单复特征数量等于单复表示同构类的数量, 此外注意到单复特征的数量等于 $\dim_{\mathbb{C}} Z(CG)$, 而后者的基的数量为 G 的共轭类的数量, 故得证. \square

于是我们立刻看到 G 的特征标表是正方形的, 即行列数量相同, 并且 G 的单复表示构成了类函数 $\mathbb{C}^{\text{cc}(G)}$ 的一组正交基.

我们现在不仅有特征标表的行正交, 还有还有列正交关系.

推论 2.4.4: 列正交关系

令 X 为 G 的特征标表, 将其视为一个矩阵, 则有

$$X^T \bar{X} = C$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} |C_G(x_1)| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |C_G(x_2)| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |C_G(x_r)| \end{pmatrix}$$

其中 x_i 为 G 的同构类的代表元. 或者我们可以写成

$$\sum_{i=1}^r \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} |C_G(h)|, & g \sim h \\ 0, & g \not\sim h \end{cases}$$

证明: 注意到行正交关系本质上就是

$$\bar{X} C^{-1} X^T = I$$

于是我们知道

$$X^T = (\bar{X} C^{-1})^{-1} = C \bar{X}^{-1}$$

故

$$X^T \bar{X} = C$$

得证. \square

2.5 特征的代数性质

定理 2.5.1: 特征是代数整数

$g \in G$ 为有限群 G 的一个元素, χ 为 G 的任意特征标, 则 $\chi(g)$ 是一个代数整数.

证明: $\chi(g)$ 是单位根的和, 从而是代数整数. \square

命题 2.5.2

$\mathbb{Z}G$ 的中心 $Z(\mathbb{Z}G)$ 在 \mathbb{Z} 上整. 因此若 x_1, \dots, x_r 为 G 的共轭类的代表元, $\bar{x}_i \in \mathbb{Z}G$ 为共轭类中元素的和, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ 为代数整数, 则 $\sum_{i=1}^r \lambda_i \bar{x}_i \in Z(\mathbb{C}G)$ 在 \mathbb{Z} 上整.

证明: $\mathbb{Z}G$ 的交换子环是 \mathbb{Z} 上的有限代数, 即作为模有限生成, 所以其上的元素都是整的. \square

令 ρ_1, \dots, ρ_r 为 G 的单表示, 次数为 d_1, \dots, d_r , 其特征分别为 χ_1, \dots, χ_r . 则每个 $\rho_i: G \rightarrow M_{d_i}(\mathbb{C})$ 可以延拓为

$$\rho_i: \mathbb{C}G = \bigoplus M_{d_i}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{d_i}(\mathbb{C})$$

即到第 i 个直和分量的投影.

命题 2.5.3

对于固定的 i , 若 $x \in Z(\mathbb{C}G)$, 则 $\rho_i(x) = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. 事实上有

$$\rho_i(x) = \frac{1}{d_i} \operatorname{tr}(\rho_i(x)) \cdot I$$

令 $x = \sum_{g \in G} a_g g$, 则有

$$\rho_i(x) = \frac{1}{d_i} \sum_{g \in G} a_g \chi(g) \cdot I$$

证明: 由于 x 在中心, 所以 $\rho_i(x)$ 与任意矩阵 $\rho_i(g)$ 交换. 知道 $\rho_i(x)$ 是一个单模的 G -等变映射, 从而由 Schur 引理知为 λI , 所以知道 $\lambda = \frac{1}{d_i} \operatorname{tr}(\rho_i(x))$. 后续显然. \square

定理 2.5.4

单复表示的次数 $d_i \mid |G|$.

证明: 令 $x = \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g$, 很显然 $x \in Z(\mathbb{C}G)$, 则我们由上面的命题知道

$$\rho_i(x) = \frac{1}{d_i} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\chi_i(g) \cdot I = \frac{|G|}{d_i} I$$

由于 x 在 \mathbb{Z} 上整, 而 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$, 所以 $\frac{|G|}{d_i} \in \mathbb{Z}$. \square

2.6 幂等元与直和分解

定义 2.6.1: 幂等元

环 A 的元素 e 被称为是**幂等元**如果 $e^2 = e$, 称为是**中心幂等元**如果 $e \in Z(A)$. 幂等元 e, f 被称为是**正交的**如果 $ef = fe = 0$, 幂等元 e 被称为是 *primitive* 的, 如果 $e = e_1 + e_2$ 为两个正交幂等元的和则 $e_1 = 0$ 或 $e_2 = 0$. 我们称 e 是 *primitive central idempotent element* 如果是本原的中心幂等元.

命题 2.6.2

A 是一个幺环, 则

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$$

使得 A_i 为双边理想到直和分解与把幺元表示为正交中心幂等元之和的方式一一对应

$$1 = e_1 + \cdots + e_r$$

对应方式为 $A_i = Ae_i$. 其中 A_i 作为环不能进行直和分解当且仅当 e_i 是一个本原的中心幂等元. 如果每个 A_i 都是作为环不可直和分解的, 则 A_i 与对应的本原中心幂等元都是被唯一决定的. 并且每一个中心幂等元都可以写成这些确定的本原中心幂等元的和.

证明: 证明很直接也很显然, 略. □

由命题可知不同的本原中心幂等元必然正交, 确切地说, 若 $e, f \in A$ 是两个不同的本原中心幂等元, 则

$$ef = 0.$$

证明如下: 由于 e, f 都是中心幂等元, 所以 $ef = fe$, 且

$$(ef)^2 = e^2 f^2 = ef,$$

因此 ef 也是中心幂等元. 又因为

$$e = ef + e(1 - f),$$

其中 ef 与 $e(1 - f)$ 都是中心幂等元, 并且二者正交:

$$(ef)e(1 - f) = e^2 f(1 - f) = ef(1 - f) = 0.$$

由于 e 是本原中心幂等元, 它不能分解成两个非零正交中心幂等元之和, 因此只能有

$$ef = 0 \quad \text{或} \quad ef = e.$$

同理, 由

$$f = ef + (1 - e)f,$$

且 f 也是本原中心幂等元, 只能有

$$ef = 0 \quad \text{或} \quad ef = f.$$

若 $ef \neq 0$, 则必须同时有 $ef = e$ 与 $ef = f$, 从而 $e = f$, 这与 e, f 不同矛盾. 故只能有

$$ef = 0.$$

需要注意的是, 若去掉“中心”这一条件, 上述结论一般不成立. 也就是说, 不同的本原幂等元未必正交. 例如在矩阵环 $M_2(k)$ 中,

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

都有

$$e^2 = e, \quad f^2 = f,$$

但

$$ef = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f \neq 0.$$

因此, “不同的本原幂等元必正交”只有在它们是中心幂等元时才成立.

根据命题, 若

$$1 = e_1 + \cdots + e_r$$

是 A 中本原中心幂等元的分解, 则对应地有环的直和分解

$$A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_r,$$

其中每个 Ae_i 都是不可分解环. 这些本原中心幂等元 e_i , 以及与之对应的不可分解直和因子 Ae_i , 称为 **block**.

从直观上看, 本原中心幂等元将整个环分割成若干彼此独立的部分, 每一部分对应一个块; 不同块之间由于正交性而互不干扰.

当 $A = \mathbb{C}G$ 是有限群 G 的复群代数时, 由 Maschke 定理与 Wedderburn 结构定理可知,

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

因此 $\mathbb{C}G$ 分解为若干矩阵环的直和. 在这种情形下, 每一个块就是其中一个矩阵环分量, 而对应的块幂等元正是在该分量中等于单位元、在其余分量中等于零的元素, 即

$$e_i = (0, \dots, 0, I_{n_i}, 0, \dots, 0).$$

这些 e_i 满足

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_j = 0 \quad (i \neq j), \quad 1 = e_1 + \cdots + e_r.$$

进一步地, $\mathbb{C}G$ 的本原中心幂等元可以用不可约特征标显式写出. 若 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 是 G 的一个不可约复特征标, 则对应的块幂等元为

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g.$$

这些元素满足:

$$e_\chi^2 = e_\chi, \quad e_\chi e_\psi = 0 \quad (\chi \neq \psi), \quad 1 = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi.$$

因此有分解

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_{\chi \in \text{Irr}(G)} \mathbb{C}G e_\chi.$$

本原中心幂等元与环的不可分解直和因子一一对应; 这些对象称为块. 不同的本原中心幂等元必然正交, 而在复群代数 $\mathbb{C}G$ 中, 它们正对应于 Wedderburn 分解中的各个矩阵环分量, 并可由不可约特征标公式显式给出. 现在证明 $\mathbb{C}G$ 的相关叙述.

定理 2.6.3

χ_1, \dots, χ_r 为 G 的单表示, d_i 为其次数, 则 $\mathbb{C}G$ 的本原中心幂等元为

$$\frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g$$

对应的 $\mathbb{C}G$ 不可分解直和项对应表示 ρ_i 使得特征为 χ_i .

证明: 设 ρ_i 是赋予不可约特征标 χ_i 的表示, 则 ρ_i 诱导出一个代数同态

$$\rho_i: \mathbb{C}G \rightarrow M_{d_i}(\mathbb{C}),$$

它正是将 $\mathbb{C}G$ 作为若干矩阵环直和分解时投影到第 i 个矩阵直和项上的投影. 另一方面, 对任意域 k , 矩阵环 $M_n(k)$ 作为环是不可分解的, 事实上

$$Z(M_n(k)) \cong k,$$

而域中的非零幂等元只有 1. 因此 $M_n(k)$ 没有非平凡的中心幂等元, 从而不能分解为两个非零双边理想的直和. 于是, $\mathbb{C}G$ 作为矩阵环直和的分解, 就是它分解为不可分解环直和项的唯一分解. 与这些不可分解直和项对应的原始中心幂等元, 正是各个直和项中的单位矩阵. 因此, 它们恰好是那些元素 $e_i \in \mathbb{C}G$, 满足

$$\rho_i(e_i) = I, \quad \rho_j(e_i) = 0 \quad (i \neq j).$$

下面验证定理中给出的元素确实满足这一性质. 计算得

$$\rho_j \left(\frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g \right) = \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\rho_j(g).$$

由于 ρ_j 投影到第 j 个矩阵直和项, 而该项中的中心元必为标量矩阵, 上式可写为

$$\rho_j \left(\frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g \right) = \frac{d_i}{|G|d_j} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\chi_j(g) \cdot I.$$

再利用特征标内积的定义,

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\chi_j(g),$$

得到

$$\rho_j \left(\frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g \right) = \frac{d_i}{d_j} \langle \chi_i, \chi_j \rangle \cdot I.$$

由不可约特征标的正交关系,

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{i,j},$$

于是

$$\rho_j \left(\frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g \right) = \frac{d_i}{d_j} \delta_{i,j} \cdot I = \delta_{i,j} \cdot I.$$

这里最后一步是因为当 $i = j$ 时有 $\frac{d_i}{d_j} = 1$, 而当 $i \neq j$ 时 $\delta_{i,j} = 0$. 因此, 定理陈述中给出的元素确实在第 i 个矩阵直和项上投影为单位矩阵, 在其余各项上投影为零矩阵. 故它们正是 $\mathbb{C}G$ 的原始中心幂等元. \square

2.7 Burnside 定理

定理 2.7.1: Burnside's $p^a q^b$ Theorem

G 是一个群, $|G| = p^a q^b$, 其中 p, q 为素数, 则 G 可解.

证明: 用反证法. 设结论不成立, 并在所有不可解且阶为 $p^a q^b$ 的群中, 取一个阶最小的群 G .

第 1 步: G 是非交换单群, 且其阶不是素数幂.

若 G 是交换群, 则 G 可解; 若 $|G|$ 是素数幂, 则 G 是 p -群, 从而可解, 这都与假设矛盾.

又若 G 有非平凡正规子群 N , 则 N 与 G/N 的阶都仍为 $p^a q^b$ 形, 并且都比 G 小. 由 G 的极小性, N 与 G/N 都可解, 于是 G 也可解, 矛盾.

故 G 必为单群; 又它既不可解, 也就不可能是交换群. 因此 G 是非交换单群, 且 $|G|$ 不是素数幂.

第 2 步: 存在元素 $g \in G$, 其共轭类大小为 q^d , 其中 $d > 0$.

取 P 为 G 的一个 Sylow p -子群. 由于 $|G|$ 不是素数幂, 所以 $P \neq G$. 又 P 是 p -群, 故中心 $Z(P)$ 非平凡. 取

$$1 \neq g \in Z(P).$$

因为 g 与 P 中每个元素交换, 故

$$P \subseteq C_G(g).$$

于是

$$|G : C_G(g)|$$

整除 $|G : P|$, 因而是 q 的幂. 记

$$|G : C_G(g)| = q^d.$$

由于 $g \neq 1$ 且 G 为单群, g 不可能在中心中, 所以其共轭类不是单点, 从而 $d > 0$. 注意到

$$|G : C_G(g)|$$

正是 g 的共轭类大小.

第 3 步: 存在一个非平凡不可约特征标 χ , 使得 $q \nmid \chi(1)$ 且 $\chi(g) \neq 0$.

反设: 只要 $\chi \neq 1$ 且 $q \nmid \chi(1)$, 就有 $\chi(g) = 0$.

设 R 为 \mathbb{C} 中代数整数所成的环. 考虑特征标表中单位元所在列与 g 所在列的正交关系:

$$1 + \sum_{\chi \neq 1} \chi(1)\chi(g) = 0.$$

根据反设, 凡是满足 $\chi(g) \neq 0$ 的非平凡不可约特征标 χ , 必有 $q \mid \chi(1)$. 因此上式左边除 1 之外的每一项都属于 qR , 于是

$$1 \in qR.$$

这说明

$$q^{-1} \in R.$$

但 $q^{-1} \in \mathbb{Q}$, 而一个有理代数整数必为整数, 所以 $q^{-1} \in \mathbb{Z}$, 矛盾.

故存在某个非平凡不可约特征标 χ , 满足

$$q \nmid \chi(1), \quad \chi(g) \neq 0.$$

第 4 步: 证明 $\frac{q^d \chi(g)}{\chi(1)}$ 是代数整数.

设

$$\bar{g} = \sum_{h \sim g} h \in \mathbb{C}G,$$

其中求和遍及 g 的所有共轭元. 由于 \bar{g} 是共轭类和, 故

$$\bar{g} \in Z(\mathbb{C}G).$$

设 ρ 是赋予特征标 χ 的表示. 由中心元在不可约表示下作用为标量矩阵可知,

$$\rho(\bar{g}) = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{h \sim g} \chi(h) \cdot I.$$

由于共轭元具有相同特征标值, 而 g 的共轭类大小为 q^d , 得

$$\rho(\bar{g}) = \frac{q^d \chi(g)}{\chi(1)} \cdot I.$$

另一方面, $\bar{g} \in \mathbb{Z}G$, 故 $\rho(\bar{g})$ 整于 $\rho(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot I$. 因此其标量

$$\frac{q^d \chi(g)}{\chi(1)}$$

是代数整数.

第 5 步: 推出 $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ 是代数整数.

因为 $q \nmid \chi(1)$, 所以存在整数 λ, μ , 使得

$$\lambda q^d + \mu \chi(1) = 1.$$

于是

$$\frac{\chi(g)}{\chi(1)} = \lambda \frac{q^d \chi(g)}{\chi(1)} + \mu \chi(g).$$

右边第一项由第 4 步知是代数整数, 第二项 $\chi(g)$ 也是代数整数, 因此

$$\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

是代数整数.

第 6 步: 证明 $|\chi(g)| = \chi(1)$.

设

$$\zeta = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}.$$

由第 5 步, ζ 是代数整数. 设 ζ 的所有代数共轭为 ζ_1, \dots, ζ_n . 它们也都是代数整数, 因此其范数

$$N(\zeta) = \zeta_1 \cdots \zeta_n$$

也是代数整数. 另一方面, $N(\zeta)$ 是 ζ 的极小多项式常数项的符号差, 因此是有理数. 由于有理代数整数必为整数, 故

$$N(\zeta) \in \mathbb{Z}.$$

又 $\chi(g) \neq 0$, 所以 $\zeta \neq 0$, 从而

$$N(\zeta) \neq 0.$$

现在考察 $\chi(g)$. 因为 $\rho(g)$ 有有限阶, 所以它的全部特征值都是单位根. 设这些特征值为

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{\chi(1)},$$

则

$$\chi(g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\chi(1)}.$$

由三角不等式,

$$|\chi(g)| \leq \chi(1),$$

故

$$|\zeta| \leq 1.$$

同理, 对 ζ 的每个代数共轭也有绝对值不超过 1. 于是

$$|N(\zeta)| \leq 1.$$

但 $N(\zeta)$ 是非零整数, 所以只能有

$$|N(\zeta)| = 1.$$

这迫使每个共轭都满足绝对值恰等于 1, 特别地

$$|\zeta| = 1.$$

因此

$$\left| \frac{\chi(g)}{\chi(1)} \right| = 1,$$

即

$$|\chi(g)| = \chi(1).$$

第 7 步: 导出矛盾.

定义子集

$$H = \{ h \in G \mid |\chi(h)| = \chi(1) \}.$$

我们先说明 H 是正规子群.

设 $\rho(h)$ 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_{\chi(1)}$, 它们都是单位根, 于是

$$\chi(h) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{\chi(1)}.$$

因为每个 λ_i 的模都为 1, 所以

$$|\chi(h)| = \chi(1)$$

当且仅当所有 λ_i 都相等. 也就是说, 这当且仅当 $\rho(h)$ 是某个标量矩阵. 于是

$$H = \{ h \in G \mid \rho(h) \text{ 是标量矩阵} \}.$$

显然这对乘法、逆元与共轭都封闭, 因此 H 是正规子群.

又因为标量矩阵彼此交换, 所以

$$H / \text{Ker } \rho$$

是交换群.

由第 6 步知, $g \in H$, 且 $g \neq 1$, 因此 H 非平凡. 由于 G 是单群, 必有

$$H = G.$$

于是对每个 $h \in G$, $\rho(h)$ 都是标量矩阵, 从而 $\rho(G)$ 是交换群. 这说明

$$G/\text{Ker } \rho$$

是交换群.

但 χ 是非平凡不可约特征标, 所以 ρ 不是平凡表示, 故

$$\text{Ker } \rho \neq G.$$

而 G 是单群, 所以只能有

$$\text{Ker } \rho = 1.$$

于是

$$G \cong G/\text{Ker } \rho$$

是交换群. 这与第 1 步中 G 非交换矛盾.

矛盾表明最初假设不成立. 因此任意阶为 $p^a q^b$ 的有限群都是可解群. □

2.8 循环群与直积

命题 2.8.1: 循环群的特征群

令 G 是一个 n 阶循环群, 令 $\xi_n \in \mathbb{C}$ 为一个本原的 n -次单位根, 则 G 的单复特征为

$$\chi_r(x^s) = \xi_n^{rs}$$

其中 $0 \leq r \leq n-1$.

证明: 证明是显然的, 首先如上构造的都一维表示, 所以肯定是单表示, 此外数量与 G 的共轭类数量相同, 所以自然就是全部的单表示. □

考虑群 G_1, G_2 的表示 $\rho_1: G_1 \rightarrow \text{GL}(V_1)$ 与 $\rho_2: G_2 \rightarrow \text{GL}(V_2)$, 我们可以定义 $G_1 \times G_2$ 在 $V_1 \otimes_R V_2$ 上的作用

$$(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = g_1 v_1 \otimes g_2 v_2$$

当 R 是域的时候, 我们可以选择 V_1, V_2 的基, 则 (g_1, g_2) 的作用实际上为矩阵 $\rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$ 的作用, 从而当 $R = \mathbb{C}$ 时我们有

$$\chi_{V_1 \otimes V_2}(g_1, g_2) = \chi_{V_1}(g_1) \chi_{V_2}(g_2)$$

定理 2.8.2: 直积的单特征

令 V_1, \dots, V_m 与 W_1, \dots, W_n 为 G_1 与 G_2 的所有单复表示. 则 $V_i \otimes W_j$ 为 $G_1 \times G_2$ 的所有单复表示.

证明: 注意到

$$\begin{aligned}
 \langle \chi_{V_i \otimes W_j}, \chi_{V_i \otimes W_j} \rangle &= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2} \overline{\chi_{V_i \otimes W_j}(g_1, g_2)} \chi_{V_i \otimes W_j}(g_1, g_2) \\
 &= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2} \overline{\chi_{V_i}(g_1)} \chi_{V_i}(g_1) \overline{\chi_{W_j}(g_2)} \chi_{W_j}(g_2) \\
 &= \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle \langle \chi_{W_j}, \chi_{W_j} \rangle \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

所以 $\chi_{V_i \otimes W_j}$ 是单表示, 现在注意到 $\dim V_i \otimes W_j = \dim V_i \cdot \dim W_j$, 所以有

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\dim V_i \otimes W_j)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\dim V_i \cdot \dim W_j)^2 = \sum_{i=1}^m d_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n e_j^2 = |G_1||G_2| = |G_1 \times G_2|$$

因此这就是所有了. □

推论 2.8.3: 直积群的特征标表

$G_1 \times G_2$ 的特征标表为 G_1 与 G_2 的特征标表的张量积.

定义 2.8.4: 特征群

考虑交换群 G , 对 G 的任意两个特征 φ, ψ , 我们可以定义

$$(\varphi \cdot \psi)(g) = \varphi(g)\psi(g)$$

从而其特征构成一个交换群, 记为 \hat{G} .

由前面的定义我们立刻知道

命题 2.8.5: 循环群的特征群

G 是 n -阶有限循环群, 则

$$G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \hat{G}$$

现在由有限交换群的分解知道任何一个有限交换群都是有限循环群的直积, 所以立刻得到下面的定理:

定理 2.8.6: 有限交换群

设 G 是一个有限交换群, 则 $G \cong \hat{G}$.

证明: 注意到 G 的循环直积因子的单特征的积是 G 的单特征, 通过数量比较可以看到恰好就是这些. 再注意到 G 的特征是一维复表示, 而一维复表示的特征就是本身, 并且一维表示都是单表示, 所以 \hat{G} 本质上就由所有单复表示构成. 综上得证. □

于是可以得到:

定理 2.8.7: 有限交换群的刻画

对于有限群 G , TFAE:

- (1) G 是交换群.
- (2) G 的单复表示都是 1 维的.

2.9 商群表示的拉回

考虑一个群同态 $f: G \rightarrow H$, 我们可以从 H 的表示得到 G 上的表示, 即给定

$$\rho: H \rightarrow \text{GL}(V)$$

则有

$$\rho \circ f: G \rightarrow \text{GL}(V)$$

我们称这个 G 上的表示为 H 表示的拉回或者提升或者 inflation.

命题 2.9.1: 商群的不可约拉回表示

G 是有限群, $N \triangleleft G$, 则若 χ 是 G/N 的一个不可约表示, 则其拉回 $\tilde{\chi}$ 是 G 的不可约表示.

证明: 注意到 $\tilde{\chi}(g) = \chi(gN)$, 所以有

$$\langle \tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\tilde{\chi}(g)} \tilde{\chi}(g) = \frac{|N|}{|G|} \sum_{gN \in G/N} \overline{\chi(gN)} \chi(gN) = 1$$

所以是不可约的. □

命题 2.9.2

有限群 G 在任何域 k 上的一维表示都是 G/G' 一维表示的拉回.

证明: 由于一维表示 ρ 的值域是交换群, 所以肯定有

$$G' = [G, G] \subset \text{Ker } \rho$$

所以立刻得到 $\bar{\rho}: G/G' \rightarrow \text{GL}(1, k)$, 反之亦然. □

2.10 诱导与限制

现在我们来考虑如何从子群的表示来构造群的表示. 令 H 是 G 的一个子群, V 是一个 RH -模, 我们定义一个 RG -模

$$V \uparrow_H^G = RG \otimes_{RH} V$$

上面 RG 为 (RG, RH) -双模, 其作用为

$$x \cdot \left(\sum_{g \in G} a_g g \otimes v \right) = \left(x \sum_{g \in G} a_g g \right) \otimes v$$

其中 $x, g \in G, a_g \in R, v \in V$. 我们称 V **induced** from H to G , 并且称 $V \uparrow_H^G$ 为 **induced module**. 算子 \uparrow_H^G 被称为 **induction**.

Example 2.10.1

我们立刻有 $R \uparrow_1^G \cong RG \otimes_R R \cong RG$.

命题 2.10.1: 诱导模的结构

令 H 为 G 的一个子群, 令 V 为一个 RH -模, 令 $g_1H, \dots, g_{|G/H|}H$ 为左陪集 G/H 的全部元素, 则

$$V \uparrow_H^G = \bigoplus_{i=1}^{|G/H|} g_i \otimes V$$

为模的直和分解, 每一个 $g_i \otimes V$ 作为 R -模同构于 V , 在此意义下 V 是自由 R -模, 有

$$\text{rank}_R(V \uparrow_H^G) = |G/H| \text{rank}_R V$$

若 $x \in G$, 则 $x(g_i \otimes V) = g_j \otimes V$, 其中存在 $h \in H$ 使得 $xg_i = g_jh$. 因此 R -子模 $g_i \otimes V \subset V \uparrow_H^G$ 在 G 的作用下为置换作用. 这个作用是可递的, 并且如果 $g_1 \in H$, 则 $\text{Stab}_G(g_1 \otimes V) = H$.

证明: 我们知道有右 RH -模同构:

$$RG_{RH} = \bigoplus_{i=1}^{|G/H|} g_i RH \cong RH^{|G/H|}$$

现在

$$\begin{aligned} RG \otimes_{RH} V &= \left(\bigoplus_{i=1}^{|G/H|} g_i RH \right) \otimes_{RH} V \\ &= \bigoplus_{i=1}^{|G/H|} (g_i RH \otimes_{RH} V) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{|G/H|} g_i \otimes_{RH} V \end{aligned}$$

故得到第一个等式. 并且作为 R -模我们有 $g_i RH \otimes_{RH} V \cong RH \otimes_{RH} V \cong V$, 所以得到秩关系. 后面都是显然的. \square

命题 2.10.2

令 M 是一个 RG -模, 并且有一个 R -子模 V 使得 M 为 R -子模 $\{gV \mid g \in G\}$ 的直和. 令 $H = \{g \in G \mid gV = V\}$. 则有 RG -模同构 $M \cong V \uparrow_H^G$.

证明: 很显然可以看出 V 是一个 RH -模, 所以我们定义态射

$$RG \otimes_{RH} V \rightarrow M, \quad g \otimes v \mapsto gv$$

容易验证这是 RG -模同态, 可以验证这就是同构. □

命题 2.10.3

令 H 为 G 的一个子群, V 为一个 CH -模, 特征为 χ , 则 $V \uparrow_H^G$ 的特征为

$$\chi \uparrow_H^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G, t^{-1}gt \in H} \chi(t^{-1}gt) = \sum_{t \in [G/H], t^{-1}gt \in H} \chi(t^{-1}gt)$$

证明: 利用向量空间分解

$$V \uparrow_H^G = \bigoplus_{i=1}^{|G/H|} g_i \otimes V$$

我们得到 g 在 $V \uparrow_H^G$ 上的迹等于 g 在那些在 g 作用下不变的空间 $t \otimes V$ 上的迹的总和, 其中 $t \in [G/H]$. 这是因为如果 $t \otimes V$ 在 g 的作用下不能保持不变, 那么在 g 的分块矩阵分解中, 我们对位置的对角线上将会得到一个零矩阵. 因此, 我们只能从满足 $gt \otimes V = t \otimes V$ 的子空间 $t \otimes V$ 中获得非零的贡献. 这种情况发生当且仅当 $t^{-1}gt \otimes V = 1 \otimes V$, 也就是 $t^{-1}gt \in H$. 我们有

$$\chi \uparrow_H^G(g) = \sum_{\substack{t \in [G/H] \\ t^{-1}gt \in H}} \text{tr}(g|_{t \otimes V})$$

现在 g 作用在 $t \otimes V$ 上的方式为

$$g(t \otimes v) = t(t^{-1}gt) \otimes v = t \otimes (t^{-1}gt)v$$

因此 g 在该空间上的迹为 $\chi(t^{-1}gt)$. 将此结果与上一个表达式结合即得证. □

从大群 G 到子群 H 的限制是显然的, 就是单纯的限制, 作用没有任何区别, 为了强调其限制结构, 我会记为 $W \downarrow_H^G$. 限制与诱导的结构可以推广到一半的环扩张以及模上, 比如给定环同态 $A \rightarrow B$, 可以将 B -模限制成 A -模, 而 A -模同样可以利用张量积扩张成 B -模.

我们还有所谓的 **coinduction** 构造, 即给定一个 A -模 V , 我们可以利用态射空间

$$\text{Hom}_A(B, V)$$

来得到一个 B -模结构, 作用为

$$(bf)(-) := f(- \cdot b)$$

可以证明对于有限群而言, 诱导和余诱导是同构的. 即

$$RG \otimes_{RH} V \cong \text{Hom}_{RH}(RG, V)$$

于是有

$$\text{Ind}(V) \cong \text{Coind}(V) \implies \chi_{\text{Ind } V} = \chi_{\text{Coind } V}$$

我们在交换代数中有如下结论:

定理 2.10.4: Tensor-Hom 伴随

$A \rightarrow B$ 为环同态, V 是一个 A -模而 W 是一个 B -模. 则我们有

- (1) 诱导-限制伴随: $\text{Hom}_B(B \otimes_A V, W) \cong \text{Hom}_A(V, W \downarrow_A^B)$.
- (2) 限制-余诱导伴随: $\text{Hom}_A(W \downarrow_A^B, V) \cong \text{Hom}_B(W, \text{Hom}_A(B, V))$.
- (3) 诱导的传递性: 给定 $B \rightarrow C$, 则 $C \otimes_B (B \otimes_A V) \cong C \otimes_A V$.

Remark 2.10.1

事实上前两个伴随为下面的特殊情况, 任给两个环 A, B (不要求他们之间有环同态), 考虑一个 (A, B) -双模 T , 则有自然同构

$$\text{Hom}_A(T \otimes_B W, V) \cong \text{Hom}_B(W, \text{Hom}_A(T, V))$$

注意 B 是一个 (A, B) -双模 ${}_A B_B$, 所以注意到

$$\text{Hom}_A(W \downarrow_A^B, V) \cong \text{Hom}_A({}_A B_B \otimes_B W, V) \cong \text{Hom}_B(W, \text{Hom}_A(B, V))$$

此即限制-余诱导伴随, 若考虑 B 是一个 (B, A) -双模 ${}_B B_A$, 把上面同构的 A, B 位置互换一下有

$$\text{Hom}_B(T \otimes_A V, W) \cong \text{Hom}_A(V, \text{Hom}_B(T, W))$$

令 T 为 B 即

$$\text{Hom}_B(B \otimes_A V, W) \cong \text{Hom}_A(V, \text{Hom}_B(B, W)) \cong \text{Hom}_A(V, W \downarrow_A^B)$$

令 V 是 H 的一个表示, 特征为 χ , W 是 G 的表示, 特征为 ψ , 用 $\chi \uparrow_H^G$ 与 $\psi \downarrow_H^G$ 来表示诱导与限制特征.

定理 2.10.5: Frobenius 互反律

令 $H < G$ 为 G 的子群, χ 为 H 的一个复特征, ψ 为 G 的一个复特征, 则有 Frobenius 互反律:

$$\mathrm{Hom}_{RG}(V \uparrow_H^G, W) \cong \mathrm{Hom}_{RH}(V, W \downarrow_H^G), \quad \mathrm{Hom}_{RH}(W \downarrow_A^B, V) \cong \mathrm{Hom}_{RG}(W, \mathrm{Hom}_{RH}(RG, V))$$

或者写成

$$\mathrm{Hom}_{RG}(\mathrm{Ind}_H^G V, W) \cong \mathrm{Hom}_{RH}(V, \mathrm{Res}_H^G W), \quad \mathrm{Hom}_{RH}(\mathrm{Res}_H^G V, W) \cong \mathrm{Hom}_{RG}(W, \mathrm{Coind}_H^G V)$$

从而有

$$\langle \chi \uparrow_H^G, \psi \rangle_G = \langle \chi, \psi \downarrow_H^G \rangle_H = \langle \psi \downarrow_H^G, \chi \rangle_H = \langle \psi, \chi \uparrow_H^G \rangle_G$$

证明: 由 Schur 引理, 我们知道

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, V_2) = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle_G$$

所以我们知道

$$\langle \chi \uparrow_H^G, \psi \rangle_G = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V \uparrow_H^G, W) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(V, W \downarrow_H^G) = \langle \chi, \psi \downarrow_H^G \rangle_H$$

然后由于内积是实数就得到后面的. □

定理 2.10.6: 限制与诱导的传递性

令 $H < K < G$ 为 G 的子群, χ 为 H 的一个复特征, ψ 为 G 的一个复特征, 则

(1) 诱导的传递性: $\mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{Ind}_H^K V) \cong \mathrm{Ind}_H^G V$, 从而 $(\chi \uparrow_H^K) \uparrow_K^G = \chi \uparrow_H^G$.

(2) 限制的传递性: $\mathrm{Res}_H^K(\mathrm{Res}_K^G W) \cong \mathrm{Res}_H^G W$, 从而 $(\psi \downarrow_K^G) \downarrow_H^K = \psi \downarrow_H^G$.

(3) 米奇妙妙乘法: $\chi \uparrow_H^G \cdot \psi = (\chi \cdot \psi \downarrow_H^G) \uparrow_H^G$.

证明: 本质上都是模的同构, 注意到

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} (\mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}H} V) \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$$

所以

$$\mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{Ind}_H^K V) \cong \mathrm{Ind}_H^G V$$

所以诱导传递性得证. 再注意到

$$({}_{\mathbb{C}H}\mathbb{C}K_{\mathbb{C}K}) \otimes_{\mathbb{C}K} (({}_{\mathbb{C}K}\mathbb{C}G_{\mathbb{C}G}) \otimes_{\mathbb{C}G} W) \cong ({}_{\mathbb{C}H}\mathbb{C}G_{\mathbb{C}G}) \otimes_{\mathbb{C}G} W$$

所以

$$\mathrm{Res}_H^K(\mathrm{Res}_K^G W) \cong \mathrm{Res}_H^G W$$

所以限制的传递性得证. 最后的乘法实际上是在说

$$\mathrm{Ind}_H^G V \otimes_{\mathbb{C}} W \cong \mathrm{Ind}_H^G (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Res}_H^G W)$$

任给一个 $\mathbb{C}G$ -模 U , 我们有

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G} \left(\mathrm{Ind}_H^G (V \otimes_{\mathbb{C}} W), U \right) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G} \left(\mathrm{Ind}_H^G (V), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} (W, U) \right) && \text{(应用张量-Hom 伴随)} \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H} \left(V, \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} (W, U) \right) && \text{(应用 Frobenius 互反律)} \\ & = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H} \left(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} (\mathrm{Res}_H^G W, \mathrm{Res}_H^G U) \right) && \text{(限制函子进入内部 Hom)} \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H} \left(V \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Res}_H^G W, \mathrm{Res}_H^G U \right) && \text{(在群 } H \text{ 上应用张量-Hom 伴随)} \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G} \left(\mathrm{Ind}_H^G (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Res}_H^G W), U \right) && \text{(反向应用 Frobenius 互反律)} \end{aligned}$$

从而由米田引理立刻得到同构, 得证. □

2.11 对称幂与外幂

若 V 是域 k 上的线性空间, 则其 n -次对称幂(symmetric power) 为向量空间

$$S^n(V) = V^{\otimes n} / I$$

其中 I 为所有

$$(\cdots \otimes v_i \otimes v_j \otimes \cdots) - (\cdots \otimes v_j \otimes v_i \otimes \cdots)$$

张成的子空间, 于是在 $S^n(V)$ 中张量积是可交换的, 所以在 $S^n(V)$ 里, 我们不再使用带有顺序暗示的符号 \otimes , 而是直接写成普通的乘积形式 $v_1 v_2 \cdots v_n$. 事实上, 如果 u_1, \cdots, u_r 为 V 的一组基, 我们有线性空间的同构:

$$S^n(V) \cong k[u_1, \cdots, u_r]_n$$

后者是 n 次齐次多项式空间. 所以可以得到

$$\dim_k S^n(V) = \dim_k k[u_1, \cdots, u_r]_n = \binom{n+r-1}{n}$$

现在定义 n 次外幂(exterior power) 为

$$\Lambda^n(V) = V^{\otimes n} / J$$

其中 J 为所有

$$(\cdots \otimes v_i \otimes v_j \otimes \cdots) + (\cdots \otimes v_j \otimes v_i \otimes \cdots)$$

与

$$(\cdots \otimes v_i \otimes v_i \otimes \cdots)$$

生成的子空间. 此即外代数, 我们有

$$\dim_k \Lambda^n(V) = \binom{r}{n}, n \leq \dim_k V, \quad \dim_k \Lambda^n(V) = 0, n > \dim V$$

群 G 在 V 上的作用可以推广至 $S^n(V)$ 和 $\Lambda^n(V)$ 如下

$$g \cdot (v_1 v_2 \cdots v_n) = (g v_1)(g v_2) \cdots (g v_n)$$

$$g \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = (g v_1) \wedge \cdots \wedge (g v_n)$$

我们也可以从群作用的角度来构造 $S^n(V)$ 与 $\Lambda^n(V)$, 考虑置换群 S_n , 定义 S^n 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用为

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$$

其逆是为了自然的左作用, 从而我们知道

$$I = \{w - \sigma(w) \mid w \in V^{\otimes n}, \sigma \in S_n\}, \quad J = \{w - \text{sign}(\sigma)\sigma(w) \mid w \in V^{\otimes n}, \sigma \in S_n\}$$

我们也可以寻找 $V^{\otimes n}$ 中有类似性质的向量, 定义**对称张量**:

$$\{w \in V^{\otimes n} \mid \sigma(w) = w \text{ for all } \sigma \in S_n\}$$

与**斜对称张量**:

$$\{w \in V^{\otimes n} \mid \sigma(w) = \text{sign}(\sigma)w \text{ for all } \sigma \in S_n\}$$

一般情况下, 作为 G 的表示, 商空间 $S^n(V)$ 与对称张量子空间是不同构的, 外幂与斜对称张量同理, 但是当特征零的时候是同构的. 特别地, 当 $n = 2$ 时, 只要特征不为 2, 就有

$$v_1 \otimes v_2 = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) + \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1)$$

利用一下维数论证可以得到:

$$S^2(V) \cong \text{symmetric tensors}, \quad \Lambda^2(V) \cong \text{skew-symmetric tensors}$$

并且

$$V \otimes V \cong \text{symmetric tensors} \oplus \text{skew-symmetric tensors} \cong S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$$

上述同构与直和分解是作为 kG -模的. 即为表示的同构与分解.

命题 2.11.1

令 χ 为 G 在 V 上的复表示特征, 则有

$$\chi_{S^2(V)}(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)), \quad \chi_{\Lambda^2(V)}(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$$

证明: 对每个 $g \in G$, 将表示 V 限制到循环群 $\langle g \rangle$ 上, 即 $V \downarrow_{\langle g \rangle}^G$, 它是一维表示的直和. 因此我们可以选择 V 的一组基 u_1, \dots, u_r , 使得

$$g \cdot u_i = \lambda_i u_i$$

其中 λ_i 是标量.

单项式 $u_i^2 (1 \leq i \leq r)$ 和 $u_i u_j (1 \leq i < j \leq r)$ 构成 $S^2(V)$ 的一组基, 因此 g 在该空间上的特征值为 $\lambda_i^2 (1 \leq i \leq r)$ 和 $\lambda_i \lambda_j (1 \leq i < j \leq r)$. 从而

$$\begin{aligned} S^2\chi(g) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{1}{2}((\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^2 + (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2)) \\ &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)). \end{aligned}$$

类似地, $\Lambda^2(V)$ 以 $u_i \wedge u_j (1 \leq i < j \leq r)$ 为基, 因此 g 在 $\Lambda^2(V)$ 上的特征值为 $\lambda_i \lambda_j (1 \leq i < j \leq r)$, 于是

$$\begin{aligned} \Lambda^2\chi(g) &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{1}{2}((\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^2 - (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2)) \\ &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)). \end{aligned}$$

故得证. □

2.12 构造复特征标表

1. 基本信息, 在构造群 G 的复特征标表时, 首先需要确定以下基本信息:

- G 的共轭类;
- G 的交换化 G/G' (其中 $G' = [G, G]$ 是导出子群);
- G 的所有一维特征标与 G/G' 的特征标一一对应.

2. 构造次数大于 1 的特征标, 我们可以通过以下途径构造次数大于 1 的特征标:

- G 的自然表示 (例如 G 本身作为矩阵群或置换群时自带的表示);
- 从商群提升得到的表示 (若 $N \triangleleft G$, 则 G/N 的表示可自然提升为 G 的表示);
- 从子群诱导得到的表示;
- 已知表示的张量积;
- 已知表示的对称幂和外幂;
- 已知表示的对偶表示 (逆步表示).

作为诱导表示的特例, 我们有置换表示——它是从平凡模诱导而来的.

3. 分解与验证, 通过上述方法得到的表示未必是单表示, 因此我们需要:

- 利用正交关系检验所得特征标是否不可约，并减去已知的不可约特征标分量，从而分离出新的不可约特征标；
- 在处理诱导特征标时，可借助 Frobenius 互反律来计算不可约分量的重数.

正交关系同时也为计算的正确性提供了校验，并能帮助我们补全特征标表的最后一行. 此外，以下两个事实也十分有用：

- 每个不可约特征标的次数整除 $|G|$ ；
- 所有不可约特征标次数的平方和等于 $|G|$ ，即 $\sum_x \chi(1)^2 = |G|$.

2.13 Mackey 定理

设 $H < G$, $g \in G$, V 是 H 的一个表示. 我们定义 gH 的表示 gV 为把 ${}^gV = V$ 视为相同的集合, 若 ${}^gh \in {}^gH$, 则定义

$${}^gh \cdot v = hv$$

因此若 $\rho: H \rightarrow \text{GL}(V)$ 为原本的表示, 则其共轭表示为下面的复合同态

$${}^gH \xrightarrow{c_{g^{-1}}} H \xrightarrow{\rho} \text{GL}(V)$$

其中 $c_{g^{-1}}({}^gh) = h$. 当研究诱导表示的结构时, 先有

$$V \uparrow_H^G = \bigoplus_{g \in [G/H]} g \otimes V$$

子空间 $g \otimes V$ 实际上是 gH 的一个表示, 作用为:

$$(ghg^{-1}) \cdot (g \otimes v) = ghg^{-1}g \otimes v = gh \otimes v = g \otimes hv$$

定理 2.13.1: Mackey decomposition formula

令 H, K 为 G 的子群, V 是一个 RK -模, 则有 RH -模同构:

$$(V \uparrow_K^G) \downarrow_H^G \cong \bigoplus_{g \in [H \backslash G / K]} ({}^g(V \downarrow_{H^g \cap K}^K)) \uparrow_{H \cap {}^gK}^H$$

证明: 我们有 $V \uparrow_K^G = \bigoplus_{x \in [G/K]} x \otimes V$. 考虑一个特定的双陪集 HgK . 这些项

$$\bigoplus_{\substack{x \in [G/K] \\ x \in HgK}} x \otimes V$$

构成了一个在 H 的作用下不变的 R -子模, 因为它是在 H 的置换作用下的一个 R -子模轨道的直和. 现在

$$\begin{aligned}\text{Stab}_H(g \otimes V) &= \{h \in H \mid hg \otimes V = g \otimes V\} \\ &= \{h \in H \mid g^{-1}hg \in \text{Stab}_G(1 \otimes V) = K\} \\ &= H \cap {}^g K.\end{aligned}$$

因此, 作为 H 的一个表示, 由命题 2.10.2 可知该子空间为 $(g \otimes V) \uparrow_{H \cap {}^g K}^H$. 正如在本定理陈述之前所观察到的, 作为 $H \cap {}^g K$ 的表示, 有 $g \otimes V \cong {}^g(V \downarrow_{H \cap {}^g K}^K)$. 将这些表达式结合起来即得此结论. \square

作为 Mackey 定理的一个应用, 我们考虑由多重可递的 G -集合产生的置换模. 如果一个 G -集合 Ω 至少有 n 个元素, 并且对于每一对 n -元组 (a_1, \dots, a_n) 和 (b_1, \dots, b_n) , 其中 a_i 是 Ω 中互不相同的元素, 且 b_i 也是 Ω 中互不相同的元素, 都存在一个 $g \in G$ 使得对所有的 i 都有 $ga_i = b_i$, 我们就称 Ω 是 **n -可递的**(或者更准确地说, G 在 Ω 上的作用是 n -可递的). 例如, S_n 在 $\{1, \dots, n\}$ 上的作用是 n -可递的, 并且可以证明只要 $n \geq 3$, A_n 在 $\{1, \dots, n\}$ 上的作用就是 $(n-2)$ -可递的. 注意, 如果 G 在 Ω 上是 n -传递作用的, 那么它在 Ω 上也是 $(n-1)$ -传递作用的.

引理 2.13.2

设 Ω 是一个至少有 n 个元素的 G -集合(其中 $n \geq 1$), 并且设 $\omega \in \Omega$. 则 G 在 Ω 上的作用是 n -可递的, 当且仅当 G 在 Ω 上的作用是可递的, 且 $\text{Stab}_G(\omega)$ 在 $\Omega - \{\omega\}$ 上的作用是 $(n-1)$ -可递的.

证明: 如果 G 的作用是 n -可递的, 那么 G 的作用也是可递的; 并且如果 a_2, \dots, a_n 和 b_2, \dots, b_n 是 Ω 中 $n-1$ 个互不相同的点的两个列表, 且它们都不等于 ω , 那么存在 $g \in G$ 使得 $g(\omega) = \omega$ 且对于所有的 i 都有 $g(a_i) = b_i$. 这表明 $\text{Stab}_G(\omega)$ 在 $\Omega - \{\omega\}$ 上的作用是 $(n-1)$ -可递的.

反之, 假设 G 在 Ω 上的作用是可递的, 并且 $\text{Stab}_G(\omega)$ 在 $\Omega - \{\omega\}$ 上的作用是 $(n-1)$ -可递的. 设 a_1, \dots, a_n 和 b_1, \dots, b_n 是 Ω 中 n 个互不相同的点的两个列表. 由 G 在 Ω 上的传递性, 我们可以找到 $u, v \in G$ 使得 $ua_1 = \omega$ 且 $vb_1 = \omega$. 元素 $\omega, ua_2, \dots, ua_n$ 是互不相同的, 点 $\omega, v^{-1}b_2, \dots, v^{-1}b_n$ 也是互不相同的, 因此我们可以找到 $g \in \text{Stab}_G(\omega)$ 使得当 $2 \leq i \leq n$ 时有 $gua_i = v^{-1}b_i$. 现对于 $1 \leq i \leq n$ 有 $vgua_i = b_i$, 这就证明了 G 在 Ω 上的作用是 n -可递的. \square

命题 2.13.3

只要 Ω 是一个 G -集合, 置换模 $\mathbb{C}\Omega$ 就可以写成 $\mathbb{C}G$ -模的直和

$$\mathbb{C}\Omega = \mathbb{C} \oplus V$$

对于某个模 V . 假设 $|\Omega| \geq 2$, 从而 $V \neq 0$. 表示 V 是单当且仅当 G 在 Ω 上的作用是 2-传递的. 在这种情况下, V 不是平凡表示.

证明: 任取 G 在 Ω 上的一个轨道. 作为 G -集合, 它同构于某个子群 $H \leq G$ 的 G/H , 因此 $\mathbb{C}[G/H]$ 是 $\mathbb{C}\Omega$ 的一个直和项, 其特征标为 $1 \uparrow_H^G$. 由于 Frobenius 互反律

$$\langle 1, 1 \uparrow_H^G \rangle_G = \langle 1, 1 \rangle_H = 1$$

我们可以推断 \mathbb{C} 是 $\mathbb{C}[G/H]$ 的一个和项, 从而也是 $\mathbb{C}\Omega$ 的和项.

在构成第三句话的等价命题中, 如果 G 在 Ω 上有超过一个轨道, 那么等价性的两边都不成立, 因此我们可以假设 $\Omega = G/H$. $\mathbb{C}\Omega$ 的特征标为 $1 \uparrow_H^G$, 我们计算

$$\begin{aligned} \langle 1 \uparrow_H^G, 1 \uparrow_H^G \rangle_G &= \langle (1 \uparrow_H^G) \downarrow_H^G, 1 \rangle_H \\ &= \left\langle \sum_{g \in [H \backslash G/H]} (g1) \uparrow_{H \cap gH}^H, 1 \right\rangle_H \\ &= \sum_{g \in [H \backslash G/H]} \langle 1 \uparrow_{H \cap gH}^H, 1 \rangle_H \\ &= \sum_{g \in [H \backslash G/H]} \langle 1, 1 \rangle_{H \cap gH} \\ &= \sum_{g \in [H \backslash G/H]} 1 \\ &= |H \backslash G/H|, \end{aligned}$$

这里使用了两次 Frobenius 互反律和 Mackey 公式. 现在 $|H \backslash G/H|$ 是 H 在 G/H 上的轨道数. 根据引理 2.13.2, 如果 G 在 Ω 上的作用是 2-传递的, 则这个数为 2; 否则, 它大于 2 (因为假设了 $|\Omega| \geq 2$). 将 $\mathbb{C}[G/H] = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ 写作单表示的直和, 我们有

$$\langle 1 \uparrow_H^G, 1 \uparrow_H^G \rangle_G \geq n,$$

并且当且仅当该表达式中有 2 个单表示且它们并不同构时, 我们会得到这个内积的值为 2. 这等价于要求 V 是单的, 因为只有当 G 在 G/H 上的作用是平凡的 (我们的假设排除了这一点) 时, V 才可能是平凡表示. 无论在何种情况下, 我们都可以得出结论 V 不是平凡表示. \square

2.14 Clifford 定理

定理 2.14.1: Clifford 定理弱形式

设 k 为任意域, U 为一个单 kG -模, 且 N 是 G 的一个正规子群. 那么 $U \downarrow_N^G$ 作为一个 kN -模是半单的.

证明: 设 V 为 $U \downarrow_N^G$ 的任意一个单 kN -子模. 对于每个 $g \in G$, gV 也是一个 kN -子模, 因为如果 $n \in N$, 利用 N 是正规的这一事实, 我们有 $n(gv) = g(g^{-1}ng)v \in gV$. 显然 gV 也是单的, 因为如果 W 是 gV 的一个 kN -子模, 那么 $g^{-1}W$ 将会是 V 的一个子模. 现在 $\sum_{g \in G} gV$ 是单 kG -模 U 的

一个非零 G -不变子空间, 因此 $\sum_{g \in G} gV = U$. 作为一个 kN -模, 我们看到 $U \downarrow_N^G$ 是所有单模的和, 由此知 $U \downarrow_N^G$ 是半单的. \square

在证明中出现的 kN -子模 gV 同构于我们之前见过的模. 由于 $N \triangleleft G$, 共轭模 gV 是 ${}^gN = N$ 的一个表示. 映射

$$\begin{aligned} {}^gV &\rightarrow gV \\ v &\mapsto gv \end{aligned}$$

是一个 kN -模的同构, 因为如果 $n \in N$, 对 gV 的作用为 $n \cdot v = g^{-1}ngv$, 且对 gV 的作用为 $n(gv) = g(g^{-1}ngv)$. 同时回想一下, 当我们描述诱导模时也出现过这些模. Clifford 定理的一部分断言, 单模 U 实际上是一个诱导模.

定理 2.14.2: Clifford 定理

设 k 为任意域, U 为单 kG -模, 且 N 是 G 的一个正规子群. 我们可以写出 $U \downarrow_N^G = S_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{a_r}$, 其中 S_i 是互不同构的单 kN -模, 其出现的重数为 a_i . (我们将直和项 $S_i^{a_i}$ 称为齐次分支.) 那么

- (1) G 传递地置换这些齐次分支;
- (2) $a_1 = a_2 = \cdots = a_r$ 且 $\dim S_1 = \dim S_2 = \cdots = \dim S_r$; 并且
- (3) 如果 $H = \text{Stab}_G(S_1^{a_1})$, 那么作为 kG -模有 $U \cong S_1^{a_1} \uparrow_H^G$.

证明: 由弱形式可知 $U \downarrow_N^G$ 是半单的, 从而可以如断言那样写成直和. 我们观察到, 根据推论 1.2.7, 齐次分支 $S_i^{a_i}$ 可以被刻画为同构于若干 S_i 副本之直和的唯一最大 kN -子模. 如果 $g \in G$, 那么 $g(S_i^{a_i})$ 是一组同构单模 gS_i 的直和, 因此根据此刻画, 它必然包含在某个齐次分支中: 对某个 j 有 $g(S_i^{a_i}) \subseteq S_j^{a_j}$. 由于 $U = g(S_1^{a_1}) \oplus \cdots \oplus g(S_r^{a_r})$, 通过计算维数可以得到 $g(S_i^{a_i}) = S_j^{a_j}$. 因此, G 置换这些齐次分支. 由于 $\sum_{g \in G} g(S_1^{a_1})$ 是单模 U 的一个非零 G -不变子模, 它必然等于 U , 因此 G 在齐次分支上的作用是传递的. 这就证明了(1); 而由于对于任何数对 (i, j) , 我们都能找到 $g \in G$ 使得 $g(S_i^{a_i}) = S_j^{a_j}$, 故得到 $a_i = a_j$ 且 $\dim S_i = \dim S_j$, (2) 得证. 最后, (3) 是命题 2.10.2 的直接推论. \square

定理 2.14.3: 代数闭域上 Abel 群的不可约表示

设 k 为任意代数闭域. 如果 G 是阿贝尔群, 那么每个单 kG -模的维数都为 1.

证明: 考虑单 kG -模 S 并设 $g \in G$. 在对 S 的作用中, g 有一个特征值 λ , 并带有非零的特征空间 S_λ . 由于所有的元素 $h \in G$ 都与 g 交换, 我们有 $hS_\lambda = S_\lambda$ (此处的理由是: 如果 $v \in S_\lambda$, 则 $gv = \lambda v$, 因此 $g(hv) = h(gv) = h\lambda v = \lambda hv$, 所以 $hv \in S_\lambda$; 并且 h 的作用也是可逆的). 由此可知,

S_λ 是 S 的一个 kG -子模, 再由 S 的单性可知 $S_\lambda = S$. 这就说明每个元素 $g \in G$ 在 S 上的作用都是标量乘法, 而像这样的单模 S 维数必须为 1. \square

推论 2.14.4

设 k 为任意代数闭域并且 G 是一个 p -群. 那么 G 的每一个单模都具有 $U \uparrow_H^G$ 的形式, 其中 U 是某个子群 H 的 1 维模.

证明: 我们对 $|G|$ 进行归纳. 设 $\rho: G \rightarrow GL(S)$ 为 G 在 k 上的单表示, 并令 $N = \text{Ker } \rho$. 那么 S 实际上是一个 G/N 的表示. 如果 $N \neq 1$, 那么 G/N 是一个阶数比 G 小的群, 因此由归纳法可知, S 作为 G/N 的表示具有所断言的结构, 因此作为 G 的表示也是如此. 因此, 我们可以假设 $N = 1$ 并且 G 嵌入到 $GL(S)$ 中.

如果 G 是阿贝尔群, 那么所有的单表示都是 1 维的, 于是我们就证明完毕了. 现在假设 G 不是阿贝尔群. 那么 G 有一个不在群中心的正规阿贝尔子群 A . 为了构造这个子群 A , 令 $Z_2(G)$ 表示 G 的第二中心, 即 $Z(G/Z(G))$ 在 G 中的原像. 如果 x 是 $Z_2(G) - Z(G)$ 中的任意元素, 那么 $A = \langle Z(G), x \rangle$ 是一个不包含在 $Z(G)$ 中的正规阿贝尔子群.

我们应用 Clifford 定理:

$$S \downarrow_A^G = S_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{a_r}$$

并且 $S = V \uparrow_K^G$, 其中 $V = S_1^{a_1}$ 且 $K = \text{Stab}_G(S_1^{a_1})$. 我们断言 V 必然是一个单 kK -模, 因为如果它有一个真子模 W , 那么 $W \uparrow_K^G$ 将会是 S 的一个真子模, 而 S 是单的. 如果 $K \neq G$, 那么通过归纳法 $V = U \uparrow_H^K$, 其中 U 是 1 维的, 因此 $S = (U \uparrow_H^K) \uparrow_K^G = U \uparrow_H^G$ 具有要求的形式.

最后我们证明 $K = G$ 的情况不可能发生. 因为如果它发生, 那么 $S \downarrow_A^G = S_1^{a_1}$, 并且由于 A 是阿贝尔群, 则 $\dim S_1 = 1$. 因此 A 的元素必定通过标量乘法作用在 S 上. 由于这种作用会与 G 的作用交换, 而 G 忠实地表示在 S 上, 我们推断出 $A \subseteq Z(G)$, 产生矛盾. \square

对于某个子群 H 以及 H 的 1 维表示 U , 形如 $U \uparrow_H^G$ 的表示被称为 **monomial**. 一个所有不可约复表示都是单项表示的群 G 被称为 **M-群**. 因此, p -群(以及超可解群)都是 M-群.

2.15 有限群的 Peter-Weyl 定理

回忆命题 2.2.1 与引理 2.3.1, 立刻得到

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G = (V^\vee \otimes W)^G$$

考虑将 $\mathbb{C}[G]$ 视为 G 上全体函数构成的线性空间, 由于

$$f = \sum_{g \in G} f(g) \delta_g$$

其中 $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$, 若 $g \neq h$ 则取值 0, 反之为 1, 于是我们得到了一组基底, 通过这组基底很显然可以得到与群代数的线性空间同构. 而若需要代数视角的同构, 需要在函数代数中将乘法定义为卷积, 即

$$(f_1 * f_2)(g) := \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$$

现在我们都将 $\mathbb{C}[G]$ 视为函数空间, 考虑 $G \times G$ 在 $\mathbb{C}[G]$ 上的左右正则作用

$$(g_1, g_2)f := \rho(g_1, g_2)f := (x \mapsto f(g_1^{-1}xg_2))$$

引入矩阵系数, 设 π 为 G 的一个表示, 则 π 的一个**矩阵系数**是 G 上的函数

$$\pi_{v,f}(g) = \langle v, \pi^\vee(g)f \rangle = \langle \pi(g^{-1})v, f \rangle, \quad v \in \pi, f \in \pi^\vee$$

于是我们定义了 $G \times G$ 表示的同态

$$\pi \otimes \pi^\vee \rightarrow \mathbb{C}[G], \quad v \otimes f \mapsto (v, \pi^\vee(-)f)$$

我们给出矩阵系数的正交关系:

定理 2.15.1: 矩阵系数正交关系

设 π, σ 是 G 的不可约表示, $v \in \pi, f \in \pi^\vee, w \in \sigma, t \in \sigma^\vee$, 则

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi_{v,f}(g^{-1}) \sigma_{w,t}(g) = \begin{cases} 0, & \pi \not\cong \sigma \\ \frac{\langle v, t \rangle \langle w, f \rangle}{\dim \pi}, & \pi \cong \sigma \end{cases}$$

证明: 给定 $v \in \pi$ 与 $t \in \sigma^\vee$, 我们定义 $T: \pi^\vee \rightarrow \sigma^\vee$ 如下:

$$T(f) := \sum_{g \in G} \pi_{v,f}(g^{-1}) \sigma^\vee(g)t$$

这是线性映射 $T_0 = f \mapsto \langle v, f \rangle t$ 的 Weyl 酉化, 所以自然落在 $\text{Hom}_G(\pi^\vee, \sigma^\vee)$ 中, 由 Schur 引理我们只需要考虑同构的情况, 计算 T 的迹, 一方面为

$$T \cong \lambda \cdot \text{id} \implies \text{tr}(T) = \lambda \cdot \dim \pi$$

另外一方面

$$\text{tr}(T_0) = \langle v, t \rangle$$

所以

$$\text{tr}(T) = \sum_{g \in G} \text{tr}(gT_0g^{-1}) = \sum_{g \in G} \text{tr}(T_0) = |G| \langle v, t \rangle$$

故

$$\lambda = \frac{|G| \langle v, t \rangle}{\dim \pi}$$

所以发现

$$\sum_{g \in G} \pi_{v,f}(g^{-1}) \sigma_{w,t}(g) = \langle w, T(f) \rangle = \langle w, \lambda f \rangle = \frac{|G| \langle v, t \rangle}{\dim \pi} \langle w, f \rangle$$

因此得到

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi_{v,f}(g^{-1}) \sigma_{w,t}(g) = \frac{\langle v, t \rangle \langle w, f \rangle}{\dim \pi}$$

□

有了这个东西，我们注意到所谓的特征就是一堆矩阵系数的和，注意到

$$\chi(g) = \text{tr}(\pi(g)) = \sum_{v_i} \pi_{v_i, v_i^\vee}(g)$$

其中 v_i 是表示空间 V 的一组基， v_i^\vee 是对偶基，利用上面矩阵系数的正交关系立刻可以得到定理 2.3.3. 所以矩阵系数的正交关系是更加底层本质的内容，利用这个定理我们还可以得到不同不可约表示的矩阵系数是正交的，并且同一个不可约表示不同位置的矩阵系数还是线性无关的，要看到这一点只需要考察

$$\sum_{i,j} c_{ij} \pi_{v_i, v_j^\vee}(g) = 0$$

我们乘上 $\pi_{v_l, v_k^\vee}(g^{-1})$ 并对 g 求和，得到

$$\sum_{i,j} c_{ij} \frac{|G|}{\dim \pi} \langle v_i, v_k^\vee \rangle \langle v_l, v_j^\vee \rangle = 0$$

可以得到 $c_{kl} = 0$ ，从而可知对任意 k, l 都成立，即所有 $c_{ij} = 0$ ，所以线性无关。

定理 2.15.2: 有限群情况下的 Peter-Weyl 定理

我们有 $G \times G$ 表示的典范的同态：

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^\vee$$

证明： 利用矩阵系数立刻得到同态

$$\bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^\vee \rightarrow \mathbb{C}[G]$$

前面的讨论告诉我们不同表示的矩阵系数是线性无关的，统一表示的不同位置的矩阵系数是线性无关的，所以必定是单射，而维数告诉我们

$$\dim_{\mathbb{C}[G]} = |G| = \sum_{\chi} (\dim \chi)^2 = \sum_{\chi} \dim(\chi \otimes \chi^\vee) = \dim \left(\bigoplus_{\pi} \pi \otimes \pi^\vee \right)$$

维数相同，又是单射，所以同构。

□

2.16 Artin 定理

2.17 Brauer 定理

2.18 有限群的淡中忠郎重构定理

我们要明白群代数 $\mathbb{C}[G]$ 作为 \mathbb{C} 上有限维代数的结构, 一言以蔽之即它是一个 Hopf 代数, 首先我们知道 $\mathbb{C}[G]$ 中的函数由乘法的卷积给出, 将 $\mathbb{C}[G]$ 中的元素记为

$$\sum_{g \in G} a_g [g], \quad a_g \in \mathbb{C}$$

其中 $[g]$ 视为 G 上函数满足对 $h \neq g$ 有 $[g](h) = 0, g = 1$, 可以验证

$$[g] * [h] = [gh]$$

其次, $\mathbb{C}[G]$ 上还有一个余代数结构, 我们有余乘法

$$\Delta: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G], \quad \sum_{g \in G} a_g [g] \mapsto \sum_{g \in G} a_g [g] \otimes [g]$$

与余单位

$$\varepsilon: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sum_{g \in G} a_g [g] \mapsto \sum_{g \in G} a_g$$

可以验证 Δ 是 G 的表示的同态(右正则表示). 我们直接计算可以得到:

引理 2.18.1

设 $x \in \mathbb{C}[G]$, 若 $\Delta(x) = x \otimes x$, 则 $x \in G$.

记 $\mathcal{R}(G)$ 为 G 上所有有限维表示给出的范畴(态射为表示的同态), \mathcal{V} 为所有有限维线性空间给出的范畴(态射为线性映射), 我们有遗忘函子

$$F: \mathcal{R}(G) \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\pi, V) \mapsto V$$

可以验证这两个范畴都是 Abel 范畴, 在其上各自有张量积结构, 可以看出 F 保持张量积结构

$$F((\pi, V) \otimes (\sigma, W)) = V \otimes W$$

可以说明遗忘函子是正合且忠实的, 我们尤其对遗忘函子的自同构群感兴趣, 即遗忘函子到自身的自然同构, 将其记为 $\text{Aut}(F)$, 令 $\text{Aut}^{\otimes}(F)$ 为所有保持张量积结构的自同构构成的子群. 所谓保持张量积结构即给定自然变换 φ , 有

$$\varphi_{(\pi, V)} \otimes \varphi_{(\sigma, W)} = \varphi_{(\pi \otimes \sigma, V \otimes W)}$$

可以看出如果不考虑张量积的保持，直觉上就可以写出

$$\text{Aut}(F) \cong \prod_{(\pi_i, V_i) \text{ irre}} \text{GL}(V_i)$$

是群同构.

引理 2.18.2

若 $\varphi \in \text{Aut}^\otimes(F)$, 则

$$\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1) \in G$$

证明: 由引理只需要证明

$$\Delta(\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1)) = \varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1) \otimes \varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1)$$

由于 φ 保持张量积结构, 所以

$$RHS = \varphi_{(R \otimes R, \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G])}(1 \otimes 1)$$

而由交换图

$$\begin{array}{ccccc} (R, \mathbb{C}[G]) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}[G] & \xrightarrow{\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}} & \mathbb{C}[G] \\ \Delta \downarrow & & \Delta \downarrow & & \Delta \downarrow \\ (R \otimes R, \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] & \xrightarrow{\varphi_{(R \otimes R, \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G])}} & \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \end{array}$$

我们有

$$LHS = \varphi_{(R \otimes R, \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G])}(\Delta(1)) = \varphi_{(R \otimes R, \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G])}(1 \otimes 1)$$

故得证. □

引理 2.18.3

设 $\varphi, \psi \in \text{Aut}^\otimes(F)$, $\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1) = \psi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1)$, 则 $\varphi = \psi$.

证明: 我们只要证明可以从 $\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1)$ 还原出任意的 $\pi_{(\pi, V)}$ 即可, 设 $\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1) = g \in G$, 我们将证明

$$\varphi_{(\pi, V)}(v) = \pi(g^{-1})(v)$$

这是因为若 (π, V) 是 G 的表示, 则存在唯一的表示同态

$$f_v: (R, \mathbb{C}[G]) \rightarrow (\pi, V), \quad f_v(1) = v$$

这个性质是显然的，于是考虑下图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G] & \xrightarrow{f_v} & V \\ \downarrow \varphi_{(R, \mathbb{C}[G])} & & \downarrow \varphi_{(\pi, V)} \\ \mathbb{C}[G] & \xrightarrow{f_v} & V \end{array}$$

立刻得到欲求等式. □

现在我们定义一个映射

$$T: G \rightarrow \text{Aut}(F)$$

对任意的 $g \in G$ ，我们定义 $\varphi = T(g)$ 为

$$\varphi_{(\pi, V)} = \pi(g)$$

于是可见

$$\varphi_{(\pi, V) \otimes (\sigma, W)} = \pi(g) \otimes \sigma(g) = \varphi_{(\pi, V)} \otimes \varphi_{(\sigma, W)}$$

所以像落在 $\text{Aut}^{\otimes}(F)$ 中，故实际上定义了一个

$$T: G \rightarrow \text{Aut}^{\otimes}(F)$$

定理 2.18.4: 淡中忠郎重构定理

如上定义的映射 T 是群同构，即 $G \cong \text{Aut}^{\otimes}(F)$.

证明: 容易验证是同态，先证单，若

$$T(g) = 1 \in \text{Aut}^{\otimes}(F)$$

则对任意的表示 (π, V) ，都有 $\pi(g) = 1$ 是恒等映射，特别地，我们考虑右正则表示，由于右正则表示是忠实的，所以若 $\pi(g) = 1$ 那么 $g = 1$ ，所以是单射。下面说明是满射，对任意的 $\varphi \in \text{Aut}^{\otimes}(F)$ ，若 $\varphi_{(R, \mathbb{C}[G])}(1) = g$ ，那么有 $T(g^{-1}) = \varphi$ ，这是因为

$$T(g^{-1})_{(R, \mathbb{C}[G])}(1) = R(g^{-1}) = g$$

由前一个引理立刻得到. □

淡中忠郎同构定理帮助我们我们从群的表示重构这个群，而非不仅仅是重构群代数。重构群代数只需要注意到遗忘函子是一个可表函子，即

$$F(V) = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], V)$$

于是由米田引理立刻得到

$$\text{Nat}(F, F) = \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], -), \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], -)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G]) \cong \mathbb{C}[G]$$

于是从遗忘函子重构出了群代数。