代数几何笔记

Muke

April 5, 2026

Contents

Chapter 1: Sheaves

1.1 Presheaves and sheaves

定义 1.1.1: Presheaf

X 是一个拓扑空间，X 上由 Abel 群构成的 **presheaf** $\mathscr{F}$ 由以下内容构成：

(a) 对于每一个开集 $U \subset X$，有一个 Abel 群 $\mathscr{F}(U)$.

(b) 对于每一个开集的包含关系 $V \subseteq U$，有一个 Abel 群的态射 $\rho_{UV}\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$.

且满足以下条件

(0) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$.

(1) ρ_{UU} 是恒等映射 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$.

(2) 若 $W \subset V \subset U$ 是开集，则有 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Remark 1.1.1

我们可以用范畴论的语言重新叙述这个定义，对于任意的拓扑空间 X，我们可以定义一个范畴 $\mathbf{Top}(X)$，它的对象是 X 的开集，唯一的态射是含入映射，从而如果 $V \not\subseteq U$，则 $\mathrm{Hom}(V,U) = \emptyset$，如果 $V \subseteq U$，$\mathrm{Hom}(V,U)$ 只有一个元素. 那么现在我们就知道一个预层实际上就是一个从 $\mathbf{Top}(X)$ 到 Abel 群范畴 $\mathbf{Ab}$ 的一个反变函子.

我们可以把定义中的 Abel 群换成环，集合，范畴 $\mathfrak{C}$ 中的元素等，得到关于其他东西的预层. 如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个预层，我们称 $\mathscr{F}(U)$ 是 $\mathscr{F}$ 在 U 上的 **sections**，并且有时用 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 来表示群 $\mathscr{F}(U)$. 我们称态射 ρ_{UV} 为 **restriction maps**，并且有时对于 $s \in \mathscr{F}(U)$，我们用 $s|_V$ 来表示 $\rho_{UV}(s)$.

简单地说，层就是一个可以用局部信息来决定截面的预层.

定义 1.1.2: Sheaf

拓扑空间 X 上的预层 $\mathscr{F}$ 是一个 **sheaf**，如果满足下面的条件：

(3) U 是一个开集，$\{V_i\}$ 是 U 的一个开覆盖，对于 $s \in \mathscr{F}(U)$，如果 $s|_{V_i} = 0$ 对于所有的 i 成立，则 $s = 0$.

(4) U 是一个开集，$\{V_i\}$ 是 U 的一个开覆盖，如果我们对于每一个 i 都有 $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$，并且满足 $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$，则存在一个唯一的((3)保证的)元素 $s \in \mathscr{F}(U)$，使得 $s|_{V_i} = s_i$ 对于任意的 i 成立.

Remark 1.1.2

其中 (3) 保证了唯一性，被称为 **Locality axiom**，(4) 保证了存在性，被称为 **Gluing axiom**.

Remark 1.1.3

我们可以用正合列的语言来把层重新地定义一遍：对于拓扑空间 X，预层 $\mathscr{F}$ 是一个层，如果满足对于任意开集 $U \subset X$，以及 U 的开覆盖 $\{V_i\}$，有下面序列是正合的.

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\quad u \quad} \prod_i \mathscr{F}(V_i) \xrightarrow{\quad v \quad} \prod_{i,j} \mathscr{F}(V_i \cap V_j)$$

$$s \longmapsto (s|_{V_i})_i$$

$$(s_i)_i \longmapsto (s_i|_{V_i \cap V_j} - s_j|_{V_i \cap V_j})_{ij}$$

我们来解释一下这个等价定义：$\prod_i \mathscr{F}(V_i)$ 处的正合告诉我们，如果

$$(s_i|_{V_i \cap V_j} - s_j|_{V_i \cap V_j})_{ij} = 0$$

也就是 $(s_i)_i \in \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$，也就是说可以黏成一个 $\mathscr{F}(U)$ 中的截面，而 $\mathscr{F}(U)$ 处的正合告诉我们要黏也只能黏成一个，因为是单射，所以我们就得到了 uniqueness 与 existence.

Remark 1.1.4

注意到上面的正合列可以写成：

$$\mathscr{F}(U) = \lim \left(\prod_{\alpha \in I} \mathscr{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \right)$$

所以层在界面层次是一个极限，于是利用极限可以和极限交换，知道层的极限还是层!

Example 1.1.1

1) X 是拓扑空间，考虑

$$U \mapsto (\mathsf{U}) = \{\text{continuous functions } U \to \mathbb{R}\}$$

2) X 为一个微分流形，考虑

$$U \mapsto \mathscr{F}(U) = \{C^\infty \text{ functions } U \to \mathbb{R}\}$$

3) X 是拓扑空间，A 是 Abel 群，考虑

$$U \mapsto \mathscr{F}(U) = \{\text{locally constant functions(即在每个连通分支上是常值) } U \to A\}$$

此时 $\mathscr{F}$ 称为以 A 为值的常值层，记为 $\underline{A}_X$.

Note 1.1.1
如果我们令 $\mathscr{F}(U) = A$，对于任意的非空开集 U 都成立，限制映射为恒等映射，则我们得到一个预层而非层，比如取 $X = U \cup V$，其中 U, V 是不交的开集，取 $s_U \in \mathscr{F}(U)$，$s_V \in \mathscr{F}(V)$，其中 $s_U \neq s_V$，我们知道不存在 $s \in \mathscr{F}(X)$ 使得 $s|_U = s_U$，$s|_V = s_V$. 所以并不是一个层.

定义 1.1.3: Morphisms and Isomorphisms

$\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 是 X 上的(预)层，则一个从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的 **morphism** φ 是一族群同态

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U), \quad U \text{ 是 } X \text{ 的开集}$$

并且对任意的 $V \subset U$，满足下面图表交换：

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

其中 ρ 与 ρ' 分别为 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 的限制映射. (预)层之间的 **isomorphism**就是有互逆元的态射.

Remark 1.1.5
已知 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是层的态射，并且 X 有一族在有限交下封闭的拓扑基 $\{U_i\}$，则我们可以说态射 φ 被 $\varphi_{U_i}\colon \mathscr{F}(U_i) \to \mathscr{G}(U_i)$ 唯一决定.

Remark 1.1.6
注意层之间的态射就是作为预层的态射，所以层范畴是预层范畴的一个满子范畴.

1.2 Stalks and germs

定义 1.2.1: Stalk

$\mathscr{F}$ 是 X 的一个(预)层，$x \in X$ 是一个点，则我们定义 $\mathscr{F}$ 在 x 处的 **stalk** 为

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U)$$

更加具体地说，一个 $\mathscr{F}_x$ 中的元素被一个元素对 (U, s) 表示，其中 U 是 x 的邻域，$s \in \mathscr{F}(U)$，这个对称之为 **germ**. 两个芽 $(U, s), (V, t)$ 表示同一个元素，如果存在开集 $x \in W \subset U \cap V$，使得 $s|_W = t|_W$.

Remark 1.2.1

实际上正向极限就是滤过余极限(filtered colimit)，滤过余极限有一些非常好的性质，比如在某些特定的 Abel 范畴中(如模范畴，Abel群范畴，层范畴)，有滤过范畴 $\mathscr{I}$ 与一个范畴 $\mathscr{C}$，我们有滤过余极限函子：

$$\mathrm{colim}_{i \in \mathscr{I}} \colon \mathbf{Fct}(\mathscr{I}, \mathscr{C}) \to \mathscr{C}$$

是正合函子，并且保持单射与满射.

Remark 1.2.2

- 如果 X 有一个在有限交意义下封闭的拓扑基 $\{U_i\}$，则任何 X 的层 $\mathscr{F}$ 都被 $\{\mathscr{F}(U_i)\}$ 完全决定.
- $\mathscr{F}$ 是 X 的(预)层，$U \subset X$ 是开集，则可以说 $\mathscr{F}|_U$ 是 U 上的(预)层.
- $\mathscr{F}$ 是 X 的(预)层，$s \in \mathscr{F}(U)$ 诱导出 $s_x \in \mathscr{F}_x$，对于任意的 $x \in U$，我们取出 (U, s)，定义 s_x 为 (U, s) 在 $\mathscr{F}_x$ 中的等价类，容易验证是良定义的.

命题 1.2.1

如果 $\mathscr{F}$ 是一个层，则对 $s, t \in \mathscr{F}(U)$，则我们可以说 $s = t \iff s_x = t_x, \forall x \in U$.

证明: $\Rightarrow$ 是显然的，对于 $\Leftarrow$，由于 $s_x = t_x$，告诉我们存在 $x \in V_x$，使得 $s|_{V_x} = t|_{V_x}$，而 $\{V_x\}$ 构成一个开覆盖，于是由层的唯一性条件，我们知道 $s = t$. □

对于任意的包含 x 的开集 U，我们会有典范态射

$$\mathscr{F}(U) \to \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U) = \mathscr{F}_x$$

现在若给定预层之间的态射

$$\varphi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

我们会自然有复合态射

$$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}_x$$

并且容易验证这个态射与限制映射是相容的，即

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & \mathscr{G}_x \\ \mathscr{F}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

结合正向极限的泛性质，我们立刻得到

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ & \mathscr{F}_x \arrow[r, dashed] & \mathscr{G}_x \\ \mathscr{F}(V) \arrow[ur] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

所以我们知道预层之间的态射可以诱导茎之间的态射，其具体的元素刻画为：

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"'] & \mathscr{G}_x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi_U(s) \arrow[d, mapsto] \\ s_x \arrow[r, mapsto] & \varphi_x(s_x) = [(U, \varphi_U(s))] \end{tikzcd}$$

容易验证这个定义不依赖代表元的选择，所以是良定义的.

命题 1.2.2: 态射由茎决定

若 φ, ψ 都是从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的态射，其中 $\mathscr{G}$ 是层，则我们有

$$\varphi = \psi \iff \varphi_x = \psi_x, \forall x \in X$$

证明: 首先我们注意到

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$$

的典范映射是单射，所以若 $\varphi_x = \psi_x$ 对任意的 x 成立，则有下面交换图成立

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi_U"'] \arrow[d, shift left, "\psi_U"] & \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x \arrow[d, "\prod \varphi_x = \prod \psi_x"] \\
\mathscr{G}(U) \arrow[r] & \prod_{x\in U} \mathscr{G}_x
\end{tikzcd}$$

由于底部的水平态射是单射，所以我们知道 $\varphi_U = \psi_U$. □

1.3 Kernels and images

定义 1.3.1: Kernel

给定层之间的同态 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，我们可以定义 $\mathscr{F}$ 的一个子层 $\operatorname{Ker}\varphi$ 为映射 φ 的 **kernel**，定义为

$$(\operatorname{Ker}\varphi)(U) := \operatorname{Ker}\varphi_U$$

这样定义的确实是一个层，首先由于 $(\operatorname{Ker}\varphi)(U)$ 为 $\mathscr{F}(U)$ 的子集，于是自然满足 locality axiom，下面只需要说明满足 gluing axiom 即可：令 $\{U_i\}$ 为 U 的一个开覆盖，$s_i \in (\operatorname{Ker}\varphi)(U_i)$ 并且相容，则由于 $\mathscr{F}$ 是一个层，我们知道 s_i 可以粘成 $\mathscr{F}(U)$ 中的一个截面 s，满足

$$s|_{U_i} = s_i$$

于是

$$\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s_i) = 0$$

则由 $\mathscr{G}$ 的 locality axiom 知道

$$\varphi_U(s) = 0 \implies s \in (\operatorname{Ker}\varphi)(U)$$

引理 1.3.1: kernel 保持茎

对任意 $x \in X$，都有

$$(\operatorname{Ker}\varphi)_x = \operatorname{Ker}\varphi_x$$

证明: 首先设 $s_x \in (\operatorname{Ker}\varphi)_x$，从而存在开集 V 使得 s_x 的一个代表元为 (s, V)，其中

$$s \in \operatorname{Ker}\varphi_V$$

于是

$$\varphi_x(s_x) = (\varphi_V(s))_x = 0 \in \mathscr{G}_x$$

于是

$$s_x \in \operatorname{Ker}\varphi_x \implies (\operatorname{Ker}\varphi)_x \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_x$$

反过来，任给 $s_x \in \operatorname{Ker}\varphi_x$，令 (s, V) 为一个代表元，由于

$$\varphi_x(s_x) = (\varphi_V(s))_x = 0$$

于是存在 $W \subset V$ 使得

$$\varphi_V(s)|_W = 0 \in \mathscr{G}(W)$$

于是

$$s|_W \in (\operatorname{Ker}\varphi)(W) \implies s_x \in (\operatorname{Ker}\varphi)_x$$

$\square$

定义 1.3.2: Image presheaf

定义层的态射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 的 **image presheaf** 为

$$U \mapsto \operatorname{Im}\varphi_U$$

这是 $\mathscr{G}$ 的一个 subpresheaf，但不一定是 sheaf，其虽然继承 $\mathscr{G}$ 满足 locality axiom，但是不一定可以粘起来. 为了使其成为一个 sheaf，我们需要把截面从 image 变成 locally image，即如下.

定义 1.3.3: Image sheaf

对于预层之间的态射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，其中 $\mathscr{G}$ 是一个层，我们定义 φ 的 **image sheaf** 为

$$(\operatorname{Im}\varphi)(U) = \{t \in \mathscr{G}(U)\colon \text{there is a cover } U_i \text{ of } U \text{ and sections } s_i \in \mathscr{F}(U_i) \text{ such that } t|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s_i)\}$$

容易验证这样的定义确实是一个层，但是对于 image，我们并没有

$$(\operatorname{Im}\varphi)(U) = \operatorname{Im}\varphi_U$$

一般情况下我们只有

$$\operatorname{Im}\varphi_U \subset (\operatorname{Im}\varphi)(U)$$

多的那些是 locally image，即局部是像. 但在某些情况下我们可以说他们俩相等.

命题 1.3.1

当对于任意的 U，$\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ 是单射时，我们有

$$(\operatorname{Im}\varphi)(U) = \operatorname{Im}\varphi_U$$

证明: 令 $t \in (\operatorname{Im}\varphi)(U)$，设 $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ 为局部表示，即

$$t|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s_i)$$

很显然有

$$\varphi_{U_i\cap U_j}(s_i|_{U_i\cap U_j}) = \varphi_{U_i}(s_i)|_{U_i\cap U_j} = t|_{U_i\cap U_j} = \varphi_{U_j}(s_j)|_{U_i\cap U_j} = \varphi_{U_i\cap U_j}(s_j|_{U_i\cap U_j})$$

由单射我们知道

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$$

所以我们知道可以粘成 $s \in \mathscr{F}(U)$，并且满足

$$\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \implies \varphi_U(s) = t$$

于是我们知道

$$t \in \operatorname{Im}\varphi_U$$

□

引理 1.3.2: Image 保持茎

对任意的 $x \in X$，有

$$(\operatorname{Im}\varphi)_x = \operatorname{Im}\varphi_x$$

证明: 令 $t_x \in \operatorname{Im}\varphi_x$，令 $s_x \in \mathscr{F}_x$ 满足

$$\varphi_x(s_x) = t_x$$

选择 $s \in \mathscr{F}(V)$ 与 $t \in \mathscr{G}(V)$ 为代表元，则有对 V 进行适当的缩小，不妨设

$$\varphi_V(s) = t$$

于是

$$t \in (\operatorname{Im}\varphi)(V) \implies t_x \in (\operatorname{Im}\varphi)_x$$

反过来，令 $t_x \in (\operatorname{Im}\varphi)_x$，存在 U 使得 $t \in (\operatorname{Im}\varphi)(U)$ 为代表元，从而存在 $\{U_i\}$ 为 U 的开覆盖，使得

$$t|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s_i)$$

对 $U_i \ni x$，有

$$t_x = (t|_{U_i})_x = (\varphi_{U_i}(s_i))|_x = \varphi_x((s_i)_x)$$

于是

$$t_x \in \operatorname{Im}\varphi_x$$

□

1.4 Injective, surjective and isomorphism

这里的定义很简单，就是利用 kernel 和 image 来定义.

定义 1.4.1: Injective and surjective

我们称层之间的映射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是 **injective** 的，如果 $\operatorname{Ker}\varphi = 0$，称是 **surjective** 的，如果 $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{G}$.

一个判断单射和满射的办法就是通过检查在茎上的态射来判断，在此之前我们先引入一个引理.

引理 1.4.1: 层由茎决定

$\mathscr{F}$ 的两个子层 $\mathscr{H}, \mathscr{G}$ 相等当且仅当 $\mathscr{H}_x = \mathscr{G}_x, \forall x \in X$.

证明: 只需要证明一边，若 $\mathscr{H}_x = \mathscr{G}_x$，对任意的 $U \subset X$，取 $s \in \mathscr{G}(U)$ 为一个截面，则有

$$s_x \in \mathscr{G}_x = \mathscr{H}_x$$

于是存在 x 的一个邻域 $U_x \subset U$ 和 $t^x \in \mathscr{H}(U_x)$，使得 t^x 为 $s_x \in \mathscr{H}_x$ 的代表元，即有

$$s|_{U_x} = t^x$$

所以有

$$t^x|_{U_x \cap U_y} = s|_{U_x \cap U_y} = t^y|_{U_x \cap U_y}$$

结合 $\{U_x\}$ 是 U 的开覆盖，我们知道 $\{t^x\}$ 可以粘成 $\mathscr{H}(U)$ 中的一个截面 t，由于

$$t_x = s_x, \forall x \in U$$

我们知道

$$t = s$$

也即

$$\mathscr{G}(U) = \mathscr{H}(U)$$

所以 $\mathscr{G} = \mathscr{H}$. □

命题 1.4.1: 单射的刻画

对于层之间的态射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，TFAE：

(1) φ 是单射.

(2) $\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ 对任意的开集 U 是单射.

(3) $\varphi_x\colon \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ 对任意的 $x \in X$ 是单射.

证明: 我们注意到

$$\operatorname{Ker}\varphi_U = (\operatorname{Ker}\varphi)(U)$$

所以前两个自然等价，而

$$\operatorname{Ker}\varphi_x = (\operatorname{Ker}\varphi)_x$$

所以 (1) 可以推 (3)，而若 (3) 成立，则有

$$(\operatorname{Ker}\varphi)_x = \operatorname{Ker}\varphi_x = 0 = 0_x$$

所以由上面引理

$$\operatorname{Ker}\varphi = 0$$

也就是单射. □

命题 1.4.2: 满射的刻画

对于层之间的态射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，TFAE：

(1) φ 是满射.

(2) $\varphi_x\colon \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ 对任意的 $x \in X$ 是满射.

证明: 同理有

$$\operatorname{Im}\varphi_x = (\operatorname{Im}\varphi)_x$$

所以由引理自然得到. □

Remark 1.4.1

满射相较于单射缺少了在开集上的检验，原因在于我们没有

$$(\operatorname{Im}\varphi)(U) = \operatorname{Im}\varphi_U$$

定义 1.4.2: isomorphism

令 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 为层之间的态射，我们称之为 **isomorphism**，如果存在一个逆 $\psi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ 使得

$$\psi \circ \varphi = 1_{\mathscr{F}}, \quad \varphi \circ \psi = 1_{\mathscr{G}}$$

Remark 1.4.2

把层看成是函子，那么层之间的态射其实就是自然变换，层之间的同构就是自然同构. 而一个自然变换是自然同构 $\iff$ 对于任意的范畴中的对象，都有自然变换在这个对象上的映射是同构，即：考虑自然变换 α：

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

则 α 是自然同构当且仅当对任意的 $A \in \mathscr{A}$，有 $\alpha_A\colon F(A) \to G(A)$ 是同构. 而把这个放到层上面就相当于

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Open}(X) \arrow[r, bend left, "\mathscr{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathscr{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

同构当且仅当对任意的 $U \subset X$，都有

$$\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

是同构.

命题 1.4.3: 同构的刻画

令 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 为层之间的态射，TFAE:

(1) φ 是同构.

(2) 对任意的 $x \in X$，$\varphi_x\colon \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ 是同构.

(3) $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ 且 $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{G}$.

(4) 对任意的 $U \subset X$，有 $\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ 是同构.

证明: 由于取茎是函子性的，所以 (1) 推 (2) 是显然的，而 (2) 推 (3) 由我们前面对满射和单射的刻画也是显然的，此时 (3) 推 (4) 首先可以得到 φ_U 是单射，这是单射的刻画，而当单射的情况下我们有

$$\operatorname{Im}\varphi_U = (\operatorname{Im}\varphi)_U$$

所以同理可以得到 φ_U 是满射. 最后 (4) 推 (1) 只需要定义 $\psi_U = \varphi_U^{-1}$ 即可. □

1.5 Exact sequences

定义 1.5.1: exact

称层之间的态射

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}$$

是 **exact** 的，如果 $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$ as subsheaves of $\mathscr{G}$.

命题 1.5.1: 正合是局部性质

序列

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}$$

正合当且仅当对于任意 $x \in X$，都有

$$\mathscr{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathscr{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathscr{H}_x$$

正合.

证明: 道理是因为

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \iff (\operatorname{Im}\varphi)_x = (\operatorname{Ker}\psi)_x \iff \operatorname{Im}\varphi_x = \operatorname{Ker}\psi_x$$

□

下面一个命题非常重要：

命题 1.5.2: 截面函子是左正合的

给定一个短正合列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \to 0$$

则对任意的 $U \subset X$，都有短正合列

$$0 \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}(U)$$

证明: 由 $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ 立刻得到 $\operatorname{Ker}\varphi_U = 0$. 此外由于 φ_U 对任意的 U 是单射，所以有 image sheaf 等于 image presheaf，故

$$\operatorname{Im}\varphi_U = (\operatorname{Im}\varphi)(U) = (\operatorname{Ker}\psi)(U) = \operatorname{Ker}\psi_U$$

所以正合. □

1.6 The sheaf associated to a presheaf

令 $X=\mathbb{C}^*$，赋予一般意义上的拓扑，我们考虑全纯函数层

$$\mathcal{O}_{X^{an}}\colon U\mapsto\{\text{hol function } U\mapsto\mathbb{C}\}$$

这是一个加法 Abel 群，也可以考虑

$$\mathcal{O}^*_{X^{an}}\colon U\mapsto\{\text{invertible hol function } U\mapsto\mathbb{C}^*\}$$

这是一个乘法 Abel 群，那么我们可以考虑层的态射

$$\begin{aligned}\exp\colon\mathcal{O}_{X^{an}}&\to\mathcal{O}^*_{X_{an}}\\ \exp_U\colon\mathcal{O}_{X^{an}}(U)&\to\mathcal{O}^*_{X_{an}}(U)\\ s&\mapsto e^s\end{aligned}$$

考虑 $f(z)=z$，则我们知道

$$f\notin\operatorname{Im}\left(\exp_X\colon\mathcal{O}_{X^{an}}(X)\to\mathcal{O}^*_{X_{an}}(X)\right)$$

即 f 不在整体的像中，因为 x 无法整体地取对数，但是对于任意的 $x\in X=\mathbb{C}^*$，都存在一个小邻域使得存在对数，这告诉我们粘不起来，所以我们知道 $\operatorname{Im}\exp$ 并不是一个层.

定义 1.6.1: Sheafification(层化)

$\mathscr{F}$ 是 X 的一个预层，我们可以定义一个 X 上的层 $\mathscr{F}^+$ 如下：

$$\mathscr{F}^+(U)=\left\{\text{functions } s\colon U\to\coprod_{x\in U}\mathscr{F}_x \text{ satisfying (a),(b)}\right\}$$

其中 (a)，(b) 分别为

(a) $\forall x\in U$，$s(x)\in\mathscr{F}_x$.

(b) $\forall x\in U$，使得存在开集 $x\in V\subset U$ 与 $t\in\mathscr{F}(V)$，使得 $\forall y\in V$，有 $s(y)=t_y\in\mathscr{F}_y$.

其限制映射就是自然的限制映射. 称 $\mathscr{F}^+$ 为 $\mathscr{F}$ 的 **sheafification**.

证明: 很容易验证是一个预层，我们要说明这确实能构成一个层：

(1) 对于任意的开集 U 以及开覆盖 $U=\bigcup V_i$，我们先说明

$$\mathscr{F}^+(U)\to\prod_i\mathscr{F}^+(V_i),\quad s\mapsto(s|_{V_i})$$

是单射，如果 $\exists t\in\mathscr{F}^+(U)$ 使得

$$(s|_{V_i})=(t|_{V_i})$$

所以对于所有的 $y \in V_i$，都有

$$s(y) = s|_{V_i}(y) = t|_{V_i}(y) = t(y)$$

再结合 $\{V_i\}$ 覆盖 U，所以知道对于任意的 $x \in U$，有 $s(x) = t(x)$，也就是 $s = t$. 于是单射.

(2) 再说明黏合条件，对于 $(s_i) \in \prod_i \mathscr{F}^+(V_i)$，如果满足 $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$，下面我们说明可以粘起来. 事实上，对于任意的 $x \in U$，存在 i_x 使得 $x \in V_{i_x}$，有 $s_{i_x} \in \mathscr{F}^+(V_{i_x})$. 我们定义一个 $s \in \mathscr{F}^+(U)$，定义为

$$s(x) = s_{i_x}(x)$$

下面我们说明确实有

$$s|_{V_i} = s_i$$

对于任意的 $y \in V_i$，我们知道存在某个 x 使得 $y \in V_{i_x}$，让

$$s(y) = s_{i_x}(y)$$

而我们知道 $y \in V_i \cap V_{i_x}$，于是有

$$s_{i_x}|_{V_i \cap V_{i_x}} = s_i|_{V_i \cap V_{i_x}}$$

所以有

$$s|_{V_i}(y) = s_{i_x}|_{V_i \cap V_{i_x}}(y) = s_i|_{V_i \cap V_{i_x}}(y) = s_i(y)$$

$\square$

我们注意到证明 $\mathscr{F}^+$ 是一个层的过程中好像并没有用到条件 (a)(b)，事实上这两个条件的要求是为了下面的层化的泛性质：

命题 1.6.1: universal property of sheafification

容易有自然的态射 $\theta\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$，使得对于任意的层 $\mathscr{G}$，与任意的态射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，都存在一个唯一的态射 $\psi\colon \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ 使得下面交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathscr{F}^+ \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\
 & \mathscr{G}
\end{tikzcd}$$

并且 $(\mathscr{F}^+, \theta)$ 在同构意义下是唯一的.

证明: 显然，θ 由

$$\theta_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}^+(U), \quad s \mapsto (x \mapsto s_x)$$

给出，我们下面构造 ψ，也就是对每一个开集来定义，考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[dr, "\varphi_U"'] & \mathscr{F}^+(U) \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_U"] \\
& \mathscr{G}(U)
\end{tikzcd}$$

对于任意的 $s \in \mathscr{F}^+(U)$，以及 $x \in U$，我们知道存在开集 $x \in V_x \subset U$，使得存在 $t^x \in \mathscr{F}(V_x)$，有 $\forall y \in V_x$，$s(y) = t^x_y \in \mathscr{F}_y$. 通过 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，我们知道有

$$\varphi_{V_x}\colon \mathscr{F}(V_x) \to \mathscr{G}(V_x)$$

从而我们可以将局部的 t^x 映到 $\mathscr{G}(V_x)$ 中，即令

$$g^x = \varphi_{V_x}(t^x) \in \mathscr{G}(V_x)$$

于是我们有了一族定义在开覆盖上面的截面 $\{g^x\}$，下面我们为了去定义 $\psi_U(s)$，我们想要把 $\{g^x\}$ 粘起来，也就是验证相容条件. 对于任意的 $x, z \in U$，在 $\forall y \in V_x \cap V_z$，我们知道

$$t^x_y = s(y) = t^z_y$$

也就是存在开集 $y \in W_y \subset V_x \cap V_z$，使得

$$t^x|_{W_y} = t^z|_{W_y}$$

于是有

$$g^x|_{W_y} = \varphi_{V_x}(t^x)|_{W_y} = \varphi_{W_y}(t^x|_{W_y}) = \varphi_{W_y}(t^z|_{W_y}) = \varphi_{V_x}(t^z)|_{W_y} = g^z|_{W_y}$$

于是 g^x 与 g^y 在 $V_x \cap V_z$ 的每一点处的小邻域内相等，由层的性质我们知道

$$g^x|_{V_x \cap V_z} = g^z|_{V_x \cap V_z}$$

所以知道 $\{g^x\}_{x \in U}$ 可以整体地粘成一个 $\mathscr{G}(U)$ 上的截面 g. 我们就定义

$$\psi_U(s) = g$$

容易验证 ψ 与限制映射是兼容的，所以 ψ 确实为一个层之间的映射，下面说明 ψ 满足交换性，这很容易，对于任意的 $t \in \mathscr{F}(U)$，我们知道

$$\theta_U(t) = s^t\colon x \mapsto t_x$$

我们知道 $g = \psi_U(s^t)$，对于任意的 $x \in U$，我们知道存在开集 $x \in V_x \subset U$，有

$$g|_{V_x} = g^x = \varphi_{V_x}(t|_{V_x}) = \varphi_U(t)|_{V_x}$$

所以 $\psi_U(\theta_U(t)) = g = \varphi_U(t)$，故交换.

假设还存在另外一个 ψ'，那么我们很容易知道在每个开集上这俩玩意都相等，所以由层的定义，$\psi = \psi'$.

由于 $(\mathscr{F}^+, \theta)$ 是一个始对象，所以自然是唯一的 up to isomorphism. □

命题 1.6.2: 层化保持茎

层化态射 θ 诱导了在茎上的同构：

$$\mathscr{F}_x \cong \mathscr{F}_x^+$$

证明: 一方面，我们容易注意到 $\theta_x \colon \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x^+$ 是一个单射，这是因为若 $s_x = t_x \in \mathscr{F}_x$，则存在 $W \ni x$ 使得

$$s|_W = t|_W$$

于是有

$$\theta(s)|_W = \theta(t)|_W$$

所以

$$\theta(s)_x = \theta(t)|_x$$

另外一方面，对任意的 $\mathscr{F}_x^+$ 中的元素，我们取一个代表元 $t \in \mathscr{F}^+(V)$，我们知道其局部是由 $\mathscr{F}(V)$ 中元素诱导的，所以存在 $x \in U \subseteq V$ 使得存在 $s \in \mathscr{F}(U)$ 满足

$$t(y) = s_y, \forall y \in U$$

所以我们有

$$\theta_U(s) = t$$

也就是

$$\theta_x(s_x) = \theta(s)_x = t_x$$

于是满射. □

命题 1.6.3: 层化的函子性

层化实际上定义了一个函子：

$$\begin{aligned} (\cdot)^+ \colon \mathbf{PreShv}(X) &\to \mathbf{Shv}(X) \\ \mathscr{F} &\mapsto \mathscr{F}^+ \end{aligned}$$

并且层化函子实际上是遗忘函子 Fgt 的左伴随：

$$\mathrm{Fgt} \colon \mathbf{Shv}(X) \to \mathbf{PreShv}(X)$$

证明: 由层化的泛性质我们立刻得到对于预层 $\mathscr{F}$ 和层 $\mathscr{G}$，有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PAb(X)}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab(X)}}(\mathscr{F}^+,\mathscr{G})$$

□

命题 1.6.4: 层化函子保持有限极限

层化函子保持有限极限，即

$$\left(\varprojlim \mathscr{F}_i\right)^+ \cong \varprojlim \mathscr{F}_i^+$$

证明: 由于层的极限还是层，所以 $\varprojlim \mathscr{F}_i^+$ 是层，于是利用 $\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_i^+$ 可以得到极限态射

$$\varphi_0 \colon \varprojlim \mathscr{F}_i \to \varprojlim \mathscr{F}_i^+$$

由层化泛性质我们唯一得到一个层的态射

$$\varphi \colon \left(\varprojlim \mathscr{F}_i\right)^+ \to \varprojlim \mathscr{F}_i^+$$

注意到茎函子是滤过余极限，与有限极限交换，从而我们有

$$\left(\varprojlim \mathscr{F}_i\right)_x^+ \cong \left(\varprojlim \mathscr{F}_i\right)_x \cong \varprojlim (\mathscr{F}_i)_x \cong \varprojlim (\mathscr{F}_i)_x^+ \cong \left(\varprojlim \mathscr{F}_i^+\right)_x$$

于是我们知道

$$\left(\varprojlim \mathscr{F}_i\right)^+ \cong \varprojlim \mathscr{F}_i^+$$

故 φ_x 是同构，从而知道层同构，所以保持有限极限. □

1.7 Cokernels and quotients

介绍层化的一个主要原因就是去介绍层的 cokernels 与 quotients.

定义 1.7.1: Cokernel and Quotient

给定层之间的态射 $\varphi \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，我们定义 **cokernel** 为预层

$$(\mathrm{Coker}\,\varphi)'(U) = \mathrm{Coker}\,\varphi_U = \mathscr{G}(U)/\,\mathrm{Im}\,\varphi(U)$$

的层化 $\mathrm{Coker}\,\varphi$. 若 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 为 subsheaf，则 **quotient** 为预层

$$(\mathscr{F}/\mathscr{G})'(U) = \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U)$$

的层化 $\mathscr{F}/\mathscr{G}$. 换句话说，quotient 就是含入映射 $\iota \colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ 的 cokernel.

现在给定一个层映射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，一个好问题是我们是否有

$$\operatorname{Coker}\varphi = \mathscr{G}/(\operatorname{Im}\varphi)$$

即如果我们先把 image 给层化了再做商能不能行？答案是可以的，因为商是余极限，而层化是左伴随，左伴随保持余极限，所以商的层化等价于层化的商. 具体我们可以通过茎来验证，首先有下面这个命题.

命题 1.7.1: 商的茎是茎的商

设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子层，则我们有同构

$$(\mathscr{F}/\mathscr{G})_x \cong \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x$$

证明: 因为层化保持茎，我们只需要对预层 $(\mathscr{F}/\mathscr{G})'(U) = \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U)$ 证明即可，构造映射

$$\varphi\colon (\mathscr{F}/\mathscr{G})'_x \to \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x, \quad [s]_x \mapsto [s_x]$$

这是良定义的，因为若 $[s_1]_x = [s_2]_x$，则我们知道 $[s_1 - s_2]_x = 0 \in (\mathscr{F}/\mathscr{G})'_x$，从而存在 $W \ni x$ 使得

$$[s_1 - s_2]|_W = 0 \in \mathscr{F}(W)/\mathscr{G}(W)$$

所以

$$s_1 - s_2 = s_0 \in \mathscr{G}(W)$$

于是

$$(s_1)_x - (s_2)_x = (s_0)_x \in \mathscr{G}_x \implies [(s_1)_x] = [(s_2)_x] \in \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x$$

满射是显然的，对任意的 $[s_x] \in \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x$，任取其代表元 $s \in \mathscr{F}(U)$，就有 $\varphi([s]_x) = [s_x]$，下面证明单射. 若 $[t_x] = [s_x]$，则有

$$s_x - t_x = g_x \in \mathscr{G}_x$$

于是存在一个包含 x 的邻域 W 使得

$$s|_W - t|_W = g|_W$$

于是自然有

$$[s] = [t] \in \mathscr{F}(W)/\mathscr{G}(W)$$

所以

$$[s]_x = [t]_x \in (\mathscr{F}/\mathscr{G})'_x$$

所以单射，所以同构. □

Remark 1.7.1

我们考虑 Abel 群的正合列

$$0 \to \mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U) \to 0$$

然后对滤过集 $\{U \ni x\}$ 取正向极限，得到正合列

$$0 \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{F}_x \to (\mathscr{F}/\mathscr{G})'_x \to 0$$

所以有

$$(\mathscr{F}/\mathscr{G})_x \cong (\mathscr{F}/\mathscr{G})'_x \cong \mathscr{F}_x/\mathscr{G}_x$$

现在我们可以通过茎来验证：

命题 1.7.2: 做法存疑

给定层映射 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，则有

$$\operatorname{Coker}\varphi = \mathscr{G}/(\operatorname{Im}\varphi)$$

证明: 我们只需要证明

$$(\operatorname{Coker}\varphi)_x = (\mathscr{G}/(\operatorname{Im}\varphi))_x, \forall x \in X$$

然后注意到层化保持茎，以及商保持茎，所以我们等价于证明

$$(U \mapsto \mathscr{G}(U)/\operatorname{Im}\varphi_U)_x = \mathscr{G}_x/(\operatorname{Im}\varphi)_x$$

更进一步，我们有

$$(\operatorname{Im}\varphi)_x = (U \mapsto \operatorname{Im}\varphi_U)_x$$

于是有

$$RHS = \mathscr{G}_x/(\operatorname{Im}\varphi)_x = \mathscr{G}_x/(U \mapsto \operatorname{Im}\varphi_U)_x = (\mathscr{G}/(U \mapsto \operatorname{Im}\varphi_U))_x = LHS$$

□

1.8 Direct image and inverse image

定义 1.8.1: direct image and inverse image

令 $f\colon X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射，对于任意的 $\mathscr{F} \in \mathbf{PreShv}(X)$，我们可以定义其 direct image(pushforward) $f_*\mathscr{F} \in \mathbf{PreShv}(Y)$，定义为

$$(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)), \quad \forall V \in \operatorname{Open}(Y)$$

对于 $\mathscr{G} \in \mathbf{PreShv}(Y)$，我们还可以定义其 inverse image presheaf $f^+\mathscr{G} \in \mathbf{PreShv}(X)$，定义为

$$f^+\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{\operatorname{Open}(Y) \ni V \supset f(U)} \mathscr{G}(V)$$

当 $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}(X), \mathscr{G} \in \mathbf{Shv}(Y)$ 时，有 $f_*\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}(Y)$，并且定义 inverse image preshaef $f^{-1}\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}(X)$ 为 $f^+\mathscr{G}$ 的层化.

Remark 1.8.1
当 $X=\{x\}$ 时，我们有

$$f^{+}\mathscr{G}=\mathscr{G}_x$$

Remark 1.8.2
容易观察到 pushforward 与 inverse image 都是具有函子性的.

Example 1.8.1
令 $\iota\colon\{x\}\to X$ 为含入映射，$\{x\}$ 是 X 的一个点，令 $\mathscr{A}$ 为 $\{x\}$ 上关于 Abel 群的常值层，则我们定义 x 的 **skyscraper sheaf**，记为 $A(x)$，为 $\iota_*\mathscr{A}$. 具体来说，满足

$$A(x)(U)=\begin{cases}A, & x\in U\\ 0, \text{otherwise}\end{cases}$$

命题 1.8.1: inverse image 保持茎

我们有

$$(f^{+}\mathscr{G})_x\cong\mathscr{G}_{f(x)},\quad (f^{-1}\mathscr{G})_x\cong\mathscr{G}_{f(x)}$$

证明: 只需要证明 f^{+} 保持茎即可，因为层化保持茎，所以如果 f^{+} 保持则 f^{-1} 自动保持. 而 $f^{+}\mathscr{G}$ 的茎的计算就自动变成了 $\mathscr{G}_{f(x)}$ 的计算，写出来即

$$\varinjlim_{U\ni x}\varinjlim_{V\supset f(U)}\mathscr{G}(V)\cong\varinjlim_{V\ni f(x)}\mathscr{G}(V)$$

□

命题 1.8.2: 逆像函子正合

若 $0\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''\to 0$ 是 Y 上层的正合列，$f\colon X\to Y$ 是连续的，则我们有

$$0\to f^{-1}\mathscr{G}'\to f^{-1}\mathscr{G}\to f^{-1}\mathscr{G}''\to 0$$

是 X 上层的正合列.

证明: 由于层的正合是局部性质，所以只需要在茎上验证，注意到

$$0\to(f^{-1}\mathscr{G}')_x\to(f^{-1}\mathscr{G})_x\to(f^{-1}\mathscr{G}'')_x\to 0$$

实际上就是

$$0\to\mathscr{G}'_{f(x)}\to\mathscr{G}_{f(x)}\to\mathscr{G}''_{f(x)}\to 0$$

由于所以正合. □

命题 1.8.3: f^+ 是 f_* 的左伴随

即存在 functorial isom

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PreShv}(X)}(f^+\mathscr{G},\mathscr{F})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{PreShv}(Y)}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F})$$

证明: 给定一个态射 $\alpha\colon\mathscr{G}\to f_*\mathscr{F}$，实际上就是对 $V\in\mathrm{Open}(Y)$ 给出

$$\alpha_V\colon\mathscr{G}(V)\to\mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

而对于任意的 $U\in\mathrm{Open}(X)$，对任意的 $V\supset f(U)$，我们都有自然的映射

$$\mathscr{G}(V)\to\mathscr{F}(f^{-1}(V))\to\mathscr{F}(U)$$

于是由余极限的泛性质立刻得到存在唯一的态射

$$f^+\mathscr{G}(U)\to\mathscr{F}(U)$$

从而同构. 自然性不再验证. □

命题 1.8.4: f^{-1} 是 f_* 的左伴随

当 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 都是层的时候，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(f^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(Y)}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F})$$

证明: 利用上一个命题和层化-遗忘伴随就有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(f^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}((f^+\mathscr{G})^+,\mathscr{F})\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{PreShv}(X)}(f^+\mathscr{G},\mathrm{Fgt}(\mathscr{F}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{PreShv}(Y)}(\mathscr{G},f_*(\mathrm{Fgt}(\mathscr{F})))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{PreShv}(Y)}(\mathscr{G},f_*(\mathscr{F}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(Y)}(\mathscr{G},f_*(\mathscr{F}))\end{aligned}$$

最后几个等式是因为层范畴是预层范畴的满子范畴，所以两个层作为预层的态射就自然是两个层作为层的态射，虽然遗忘到预层范畴里面，但是层与层之间的态射不会多也不会少，所以就可以把遗忘函子去掉，并且把预层范畴变成层范畴. □

定义 1.8.2: restriction

如果 Z 是拓扑空间的一个子集，我们可以赋予 Z 子空间拓扑，考虑含入映射 $i\colon Z\to X$，则如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个层，我们称 $i^{-1}\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 在 Z 上的**限制**，我们记为 $\mathscr{F}|_Z$.

Remark 1.8.3

注意对于任意的 $z \in Z$，stalk 保持为

$$(\mathscr{F}|_Z)_z = \mathscr{F}_z$$

1.9 Global and local sections as right adjoint

现在我们可以看到截面函子一个很好的性质，即他是右伴随，这也很好地解释了为什么他是左正合的. 考虑连续映射

$$f\colon X \to \{*\}$$

其中 $\{*\}$ 是单点空间，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(\{*\})}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

注意到单点集上的层范畴同构于 Abel 群范畴，于是有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(\{*\})}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathscr{G}(\{*\}), \mathscr{F}(X))$$

令

$$\mathscr{G}(\{*\}) = A$$

为单点集上的常值层，则我们知道

$$f^+\mathscr{G}(U) = \mathscr{G}(\{*\}) = A$$

为常值预层，层化后得到常值层

$$\underline{A} = f^{-1}\mathscr{G}$$

于是得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(\underline{A}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \Gamma(X, \mathscr{F}))$$

所以整体截面函子是右伴随.

命题 1.9.1: 整体截面函子是右伴随

对于 X 上的层 $\mathscr{F}$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(\underline{A}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \Gamma(X, \mathscr{F}))$$

现在考虑 $U \subset X$ 为子开集，设包含映射为

$$j\colon U \to X$$

对 X 上的层 $\mathscr{F}$ 而言，有

$$\Gamma(U, \mathscr{F}) = \Gamma(U, j^{-1}\mathscr{F})$$

于是局部截面函子 $\Gamma(U,-)$ 实际上可以写成

$$\Gamma(U,-)=\Gamma_U\circ j^{-1}$$

其中 Γ_U 是 U 上层的整体截面函子，现在我们考虑零延拓函子 $j_!$，定义为

$$(j_!\mathscr{G})(V):=\left\{s\in\mathscr{G}(V\cap U)\;\middle|\;\forall x\in V\setminus U,\ \exists\ \text{邻域}\ W\subseteq V\ \text{of}\ x,\ s|_{W\cap U}=0\right\}$$

容易看出来这样子的构造确实是一个层，现在我们对于 X 上的层 $\mathscr{F}$ 给定层态射

$$\alpha\colon j_!\mathscr{G}\to\mathscr{F}$$

将其限制到 U 上有

$$\alpha|_U\colon (j_!\mathscr{G})|_U\cong\mathscr{G}\to\mathscr{F}|_U=j^{-1}\mathscr{F}$$

反过来，如果给定层态射

$$\beta\colon\mathscr{G}\to j^{-1}\mathscr{F}=\mathscr{F}|_U$$

我们构造映射

$$j_!\mathscr{G}(V)\to\mathscr{F}(V)$$

对任意的 $s\in j_!\mathscr{G}(V)\subset\mathscr{G}(U\cap V)$，由于对任意的 $x\in V\setminus U$ 都存在 $W_x\subset U\cap V$ 使得 $s|_W=0$，因此我们得到 V 的开覆盖

$$V=(V\cap U)\cup(\bigcup_{x\in V\setminus U}W_x)$$

有 $\beta(s)\in\mathscr{F}(V\cap U)$ 与 $0\in\mathscr{F}(W_x)$，唯一粘成一个 $\mathscr{F}(V)$ 上的截面，得到了态射

$$j_!\mathscr{G}\to\mathscr{F}$$

容易验证这两种构造是互逆的，从而我们得到了

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(j_!\mathscr{G},\mathscr{F})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(U)}(\mathscr{G},j^{-1}\mathscr{F})$$

也即我们有

$$j_!\dashv j^{-1}\dashv j_*$$

命题 1.9.2: $j_!$ 是 j^{-1} 的左伴随

给定拓扑空间中开集的包含映射 $j\colon U\to X$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(j_!\mathscr{G},\mathscr{F})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(U)}(\mathscr{G},j^{-1}\mathscr{F})=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(U)}(\mathscr{G},\mathscr{F}|_U)$$

从而我们知道了 j^{-1} 不仅是左伴随，还是右伴随，这也解释了为什么 j^{-1} 是正合函子. 此时我们由于 j^{-1} 是右伴随，Γ_U 作为整体截面函子也是右伴随，所以知道局部截面函子

$$\Gamma(U,-)=\Gamma_U\circ j^{-1}$$

作为右伴随的复合仍然是右伴随，即我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(j_!\underline{A}_U,\mathscr{F})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,\Gamma(U,\mathscr{F}))$$

具体道理如下

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(j_!\underline{A}_U,\mathscr{F}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(U)}(\underline{A}_U,j^{-1}\mathscr{F})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,\Gamma(U,j^{-1}\mathscr{F}))=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,\Gamma(U,\mathscr{F}))\end{aligned}$$

所以最终我们得到了下面的命题：

命题 1.9.3: 局部截面函子是右伴随

对于 X 的开集 U，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(j_!\underline{A}_U,\mathscr{F})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,\Gamma(U,\mathscr{F}))$$

Remark 1.9.1
这也解释了为什么之前说截面函子是左正合的，因为它是右伴随.

1.10 The spectrum of a ring

所有环都默认是交换幺环，除非特别指出.

定义 1.10.1

令 A 是一个环，$\operatorname{Spec} A$ 定义为所有环同态 $A\to K$ 的集合，其中 K 是某些域，并且当存在下面这样的交换图时，两个同态 $A\to K$ 与 $A\to K'$ 我们认为是同一个

$$\begin{tikzcd} & K' \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & K \arrow[u] \end{tikzcd}$$

这个是 Grothendieck 的视角，此时我们还不知道 $\operatorname{Spec} A$ 是什么东西，但是下面的命题告诉我们此处的 $\operatorname{Spec} A$ 实际上和我们熟知的素谱并无二样.

命题 1.10.1

映射

$$\operatorname{Spec} A\to\{A\text{ 中的素理想}\},\quad (f\colon A\to K)\mapsto\operatorname{Ker} f$$

是一个良定义的双射.

证明: 显然当对于 $f\colon A\to K$，作为环同态，我们有

$$A/\operatorname{Ker} f\simeq \operatorname{Im} f$$

而 $\operatorname{Im} f$ 是域的子环，从而是整环，所以 $\operatorname{Ker} f$ 是一个素理想. 如果有交换图:

$$\begin{tikzcd} & K' \\ A \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & K \arrow[u] \end{tikzcd}$$

由于 $K\to K'$ 是嵌入，所以我们知道 $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f'$. 所以定义是良好的，不依赖于代表元的选取.

下面来验证双射性质，如果 $\mathfrak{p}\subset A$ 是素理想，则 $A/\mathfrak{p}$ 是一个整环，所以我们可以定义它的分式域 $k(\mathfrak{p}):=\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$，从而有含入

$$A/\mathfrak{p}\hookrightarrow k(\mathfrak{p})$$

因此我们有复合映射

$$f_{\mathfrak{p}}\colon A\to A/\mathfrak{p}\hookrightarrow k(\mathfrak{p})$$

这是一个从 A 到一个域的映射，并且有 $\operatorname{Ker} f_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}$，于是我们构造出了一个从 $\operatorname{Spec} A$ 到 A 的素理想的满射.

事实上，对于任意的映射 $f\colon A\to K$，我们都可以对其进行分解，考虑 $\operatorname{Ker} f=\mathfrak{p}$，与 $A/\mathfrak{p}\to K$ 的分式域的泛性质，我知道有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} & & k(\mathfrak{p}) \arrow[dd, dashed, "\exists!"] \\ A \arrow[urr, "f_{\mathfrak{p}}"] \arrow[r] \arrow[drr, "f"'] & A/\mathfrak{p} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

交换图告诉我们 $f_{\mathfrak{p}}$ 与 f 是等价的，在 $\operatorname{Spec} A$ 中是同一个，所以如果我们有两个映射 $f\colon A\to K$ 与 $f'\colon A\to K'$ 使得 $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f'=\mathfrak{p}$，则 $f\sim f_{\mathfrak{p}}\sim f'$. □

Remark 1.10.1

事实上，我们可以写成

$$\operatorname{Spec} A=\operatorname{colim}_{K\in\mathbf{FLD}}\operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A,K)$$

从上面的证明中我们知道两个态射 (f,K) 与 (f',K') 是相同的，如果 $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f'$. 于是我们可以定义另外一种等价关系，即 (f,K) 与 (f',K') 是等价的，当且仅当存在一个公共的扩

域 L 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r] & L \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & K' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

从而对 $K \subset K'$，我们有

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, K) \arrow[dl] \arrow[dd] \\ \operatorname{Spec} A & \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, K') \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

容易验证 $\operatorname{Spec} A$ 是一个 cone 的始对象，所以是 colim.

定义 1.10.2: spectrum

我们现在把 $\operatorname{Spec} A$ 定义成 A 中所有素理想的集合，称为 A 的 **spectrum**.

定义 1.10.3: residue field

对于 $x \in \operatorname{Spec} A$，存在 x 对应的素理想 $\mathfrak{p}_x$，则

$$\kappa(x) := \kappa(\mathfrak{p}_x) = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}_x)$$

为在 x 点处的 **residue field**.

定义 1.10.4

对 $x \in \operatorname{Spec} A$，我们存在一个自然的映射 $A \to \kappa(x)$ 将 g 映射为 $g(x)$，于是我们可以把 A 中的元素 g 看成是 $\operatorname{Spec} A$ 上的函数

$$g\colon \operatorname{Spec} A \to \coprod_{x \in \operatorname{Spec} A} \kappa(x)$$

Remark 1.10.2

我们利用之前的视角，一个 $x \in \operatorname{Spec} A$ 对应的映射

$$f\colon A \to K$$

而这个映射 factor through

$$A \to \kappa(x) \to K$$

于是 A 中元素 g 在 x 点处的取值可以理解为

$$g(x) = f(g) \in \kappa(x)$$

定义 1.10.5: maximal spectrum

给定一个环 A，则 $\mathrm{Spec}_{max}(A)$ 定义为 A 中所有极大理想构成的集合，称为 A 的 **maximal spectrum**.

1.11 Zariski topology

定义 1.11.1: vanishing locus

令 A 是一个环，对于任意的子集 $M \subset A$，定义

$$V(M) := \{\mathfrak{p} \subset A \mid M \subset \mathfrak{p}\} = \{x \in \mathrm{Spec}\, A \mid \forall g \in M, g(x) = 0\}$$

定义为 M 的 **vanishing locus**.

命题 1.11.1

对于环 A 与 $\mathrm{Spec}(A)$，有

(1) $M \subset A$，$I = (M)$，则 $V(M) = V(I) = V(\sqrt{I})$.

(2) $V(0) = X$，$V(1) = \emptyset$.

(3) E_i 为一族子集，则

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$$

(4) 对任意两个理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$，有 $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

定义 1.11.2: Zariski拓扑

这些结果指出 $V(E)$ 中这些集合适合拓扑空间中的闭集公理，所以称为一个 $\mathrm{Spec}\, A$ 上的拓扑，我们称之为 **Zariski拓扑**.

命题 1.11.2

对 A 的理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 有

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \iff \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$$

命题 1.11.3: quasi-compact

给定一个环 A，则 Spec A 是 **quasi-compact**[a]的.

[a]代数几何中的拟紧就是开覆盖必有有限子覆盖

证明: 令 $\operatorname{Spec} A = \bigcup U_i$，其中 $U_i = V(M_i)^c$ 是开集，则我们知道

$$\emptyset = \bigcap V(M_i) = V\left(\bigcup M_i\right)$$

令 $\mathfrak{a}$ 为 $\bigcup M_i$ 构成的理想，所以我们知道

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset$$

假设 $\mathfrak{a} \neq A$，则存在极大理想 $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$，于是 $V(\mathfrak{a})$ 不是空集，所以矛盾. 所以 $\mathfrak{a} = A$，所以存在 $f_1, \cdots, f_m \in \bigcup M_i$ 以及 $g_1, \cdots, g_m \in A$ 使得

$$1 = f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m$$

于是我们知道存在一个有限集 $J \subset I$ 使得 $f_1, \cdots, f_m \in \bigcup_{i \in J} M_j$，所以我们知道

$$V\left(\bigcup_{i \in J} M_i\right) = V(A) = \emptyset$$

也就是 $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i \in J} U_i$. □

命题 1.11.4: Zariski拓扑的开集

对于每个元素 $f \in A$，用 X_f 表示 $X = \operatorname{Spec}(A)$ 中 $V(f)$ 的补集，从而 X_f 是开集，则它们构成 Zariski 拓扑的一组基，并且满足

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
2. $X_f = \emptyset$ 当且仅当 f 幂零.
3. $X_f = X$ 当且仅当 f 可逆.
4. $X_f = X_g$ 当且仅当 $r(f) = r(g)$.
5. X_f 是拟紧的.
6. X 中的一个开子集是拟紧的，当且仅当它是有限个形如 X_f 的集合的并. 集合 X_f 叫做空间 X 的 **distinguished open set**.

Remark 1.11.1

X_f 可以看成是 A 中元素 f 取值在 $\operatorname{Spec} A$ 上不为 0 的点，即

$$X_f = \{x \in \operatorname{Spec} A \colon f(x) \neq 0\}$$

我们也常常把 X_f 记为 $D(f)$.

对于 $S \subset \operatorname{Spec} A$，我们可以定义理想

$$I(S) = \{f \in A \colon f(\mathfrak{p}) = 0, \forall \mathfrak{p} \in S\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}$$

命题 1.11.5: 闭包的刻画

对任意的子集 $S \subset \operatorname{Spec} A$，我们有

$$V(I(S)) = \overline{S}$$

证明: 显然 $S \subset V(I(S))$，反过来，若 $V(\mathfrak{b}) \supset S$，则对任意的 $\mathfrak{p} \in S$，都有

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$$

于是

$$I(S) \supset \mathfrak{b}$$

于是

$$V(I(S)) \subset V(\mathfrak{b})$$

所以是闭包. □

命题 1.11.6: 闭集与根理想的一一对应

A 是环，则映射 $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ 给出了 A 的根理想与 $\operatorname{Spec} A$ 中闭集的一一对应，其逆为 $W \mapsto I(W)$.

证明: 若 $\mathfrak{a}$ 是理想，则我们有

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

因此 $I(V(-))$ 在根理想上是恒等态射. 反过来，若 W 是闭集，则

$$V(I(W)) = \overline{W} = W$$

所以得证. □

推论 1.11.1

$\operatorname{Spec} A$ 中的点 $\mathfrak{p}$ 是闭点当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大理想.

定义 1.11.3: generic point

对拓扑空间 X 的闭子集 Z 而言，称 $x \in Z$ 是 Z 的 **generic point**，如果 $\overline{\{x\}} = Z$.

于是我们可以看到 $\mathfrak{p}$ 是 $V(\mathfrak{p})$ 的 generic point. 并且他还是 $V(\mathfrak{p})$ 的唯一 generic point，因为如果

$$V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q}) \implies \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$$

因为素理想都是根理想.

1.12 Maps between prime spectra

命题 1.12.1

对于给定的 $f\colon A \to B$，存在一个自然的 $\operatorname{Spec} f$ 使得

$$\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A, \quad \mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$$

是一个良定义的映射.

Remark 1.12.1
证明不必说，这里我们可以看到上面的观点，即 $B \to K$ 可以通过 f 自然变为 $A \to B \to K$，所以

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(B, K) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, K)$$

自然诱导出

$$\operatorname{Spec} B = \operatorname{colim} \operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(B, K) \to \operatorname{colim} \operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, K) = \operatorname{Spec} A$$

这个映射在 Zariski 拓扑之下是连续的，从下面的命题就可以看到：

命题 1.12.2

$\varphi\colon A \to B$ 是环态射，$f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 是诱导的素谱之间的映射，则

(1) $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})B)$.

(2) $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$.

(3) $\overline{f(V(\mathfrak{b}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

证明: (1) 令 $\mathfrak{a}$ 是理想，则有

$$f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = \{\mathfrak{p} \subset B\colon \mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} = \{\mathfrak{p} \subset B\colon \varphi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p}\} = V(\varphi(\mathfrak{a})B)$$

(2) 对 $g \in A$，我们有

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{p} \in B \colon g \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} = D(\varphi(g))$$

(3) 我们有

$$\overline{f(V(\mathfrak{b}))} = V\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in f(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p}\right) = V\left(\bigcap_{\mathfrak{q}\supset\mathfrak{b}} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\right) = V(\varphi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})) = V(\sqrt{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})})$$

□

命题 1.12.3

对于 $\mathfrak{a} \subset A$，商映射 $A \to A/\mathfrak{a}$ 诱导了一个同胚

$$f \colon \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$$

证明: 令 $\varphi \colon A \to A/\mathfrak{a}$ 是一个商映射，则诱导映射

$$\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

给出了 $A/\mathfrak{a}$ 中素理想与 A 中包含 $\mathfrak{a}$ 的素理想的一一对应. 于是我们知道 f 是从 $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ 到 $V(\mathfrak{a})$ 上的连续双射，所以为了证明是同胚，我们只需要证明是闭映射. 特别地，我们有

$$f(V(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \colon \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}/\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})\} = V(\mathfrak{b})$$

于是是闭映射，所以同胚. □

推论 1.12.1

若环态射 $\varphi \colon A \to B$ 是满射，则我们有 $\operatorname{Spec} B$ 与 $V(\operatorname{Ker}\varphi) \subset \operatorname{Spec} A$ 同胚.

推论 1.12.2

令 A 为环，$A_{\mathrm{red}} = A/\sqrt{(0)}$ 为 A 的 **reduction**，则商映射 $A \to A_{\mathrm{red}}$ 诱导了同胚

$$\operatorname{Spec}(A_{\mathrm{red}}) \cong \operatorname{Spec}(A)$$

证明: 注意到令 $\mathfrak{a} = \sqrt{(0)}$，则有 $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec} A$. □

下面我们观察局部化下素谱的关系.

命题 1.12.4: 局部化与素谱

(1) 对任意的 $f \in A$，存在一个典范的同胚

$$\iota\colon \operatorname{Spec}(A_f) \to D(f) \subset \operatorname{Spec} A$$

(2) 若 $S \subset A$ 是一个乘法子集，则局部化映射 $\ell\colon A \to S^{-1}A$ 诱导了一个同胚

$$\iota\colon \operatorname{Spec}(S^{-1}A) \to D \subset \operatorname{Spec}(A)$$

其中

$$D = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

证明: 只需要证明 (2)，首先我们知道 $S^{-1}A$ 中素理想与 A 中与 S 无交的素理想的一一对应，于是 ι 是一个连续双射，现在只需要证明是闭映射:

$$\begin{aligned}
\iota(V(\mathfrak{a})) &= \{\ell^{-1}(\mathfrak{q}) \colon \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \colon \mathfrak{p} \supset \ell^{-1}(\mathfrak{a}), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\
&= V(\ell^{-1}(\mathfrak{a})) \cap D
\end{aligned}$$

故同胚. □

1.13 Sheaves defined on basis

定义 1.13.1: $\mathscr{B}$-sheaf

X 是拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的一组拓扑基，一个 **$\mathscr{B}$-presheaf** F 由以下数据组成:

(1) 对每个 $U \in \mathscr{B}$，有一个 Abel 群 $F(U)$.

(2) 对任意的 $V \subset U$，$U, V \in \mathscr{B}$，我们有限制映射 $\rho_{UV}\colon F(U) \to F(V)$，并且满足 $\rho_{UU} = id_U$，并且 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ 对任意的 $\mathscr{B}$ 中 $W \subset V \subset U$ 成立.

一个 $\mathscr{B}$-presheaf 称为一个 **$\mathscr{B}$-sheaf**，如果对每个 $U \in \mathscr{B}$ 与任意的 U 的在 $\mathscr{B}$ 中开覆盖 $\{U_i\}$，有下面正合列成立

$$0 \to F(U) \to \prod_i F(U_i) \to \prod_{\mathscr{B} \ni V \subset U_i \cap U_j} F(V)$$

Remark 1.13.1

注意这里最后一项不似在层中是 $\prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$，这是因为 $U_i \cap U_j$ 不一定在 $\mathscr{B}$ 中，所以我们要写成上面的形式.

定理 1.13.1: $\mathscr{B}$-sheaf 与 sheaf 范畴等价

X 是拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是其一个拓扑基，则每一个 $\mathscr{B}$-sheaf F 都唯一对应了一个 sheaf $\mathscr{F}$. 并且如果给定 $\mathscr{B}$-sheaf 的态射

$$\varphi\colon F \to G$$

会唯一地延拓为层的态射

$$\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

并且任意层的态射 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 都可以用这种方式得到，即态射的对应是全忠实的. 如果我们用范畴论的语言说，就是给出了一个范畴等价，令 $\mathbf{Shv}(X)$ 是 X 上的层范畴，$\mathbf{BShv}(X)$ 是 X 上的 $\mathscr{B}$-层范畴，则

$$\mathbf{Shv}(X) \cong \mathbf{BShv}(X)$$

证明: 我们定义一个限制函子

$$R\colon \mathbf{Shv}(X) \to \mathbf{Shv}(\mathcal{B})$$

对于任意的 $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}(X)$，我们对开集 $U \in \mathcal{B}$，定义

$$R\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}(U)$$

由于 $\mathscr{F}$ 是 X 上的层，所以自动满足 $\mathcal{B}$ 上的唯一性与存在性条件，所以是 $\mathcal{B}$ 上的层

再对于 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，我们定义 $R\varphi$ 由所有 φ_U 其中 $U \in \mathcal{B}$ 组成. 于是可以验证 R 确实是一个函子.

下面再定义一个延拓函子

$$L\colon \mathbf{Shv}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Shv}(X)$$

定义为对于 $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}(\mathcal{B})$，以及任意的开集 $U \in X$，有

$$L\mathscr{G}(U) = \varprojlim_{V \subset U, V \in \mathcal{B}} \mathscr{G}(V)$$

这个想法就是对于 U 的一个拓扑基开覆盖，$L\mathscr{G}(U)$ 中的截面就是所有开覆盖上的截面粘起来，上面的逆向极限写成等价关系的语言就是 $(s_i, V_i) \sim (s_j, V_j)$，如果存在 $W \in \mathcal{B} \subset V_i \cap V_j$，有

$$s_i|_W = s_j|_W$$

所以 $L\mathscr{G}(U)$ 中的一个元素就是开覆盖上一族相容的截面 (s_i). 一旦我们定义了 $L\mathscr{F}(U)$ 与 $L\mathscr{G}(U)$，则对于 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是 $\mathbf{Shv}(\mathcal{B})$ 上的层的态射，我们就可以去定义 $L\varphi_U\colon L\mathscr{G}(U) \to L\mathscr{G}(U)$，把 (s_i) 送到 $(\varphi_{V_i}(s_i))$. 为了详细地描述这个想法，对于任意的开集 $U \subset X$，我们定义 $\mathcal{B}_U$ 为 $\mathcal{B}$ 中所有被 U 包含的元素的集合，则对 $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}(\mathcal{B})$，有

$$L\mathscr{G}(U) = \left\{ (s_V) \in \prod_{V \in \mathcal{B}_U} \mathscr{G}(V) \colon s_V|_W = s_W, \forall W \subset V, W, V \in \mathcal{B} \right\}$$

容易验证这个定义确实就是逆向极限. 如果 $U' \subset U$，我们显然知道 $\mathcal{B}_{U'} \subset \mathcal{B}_U$，于是投影映射给出了限制映射，即

$$\prod_{V \in \mathcal{B}_U} \mathscr{G}(V) \to \prod_{V \in \mathcal{B}_{U'}} \mathscr{G}(V)$$

从而我们得到了 $L\mathscr{G}(U) \to L\mathscr{G}(U')$ 的限制映射，所以 $L\mathscr{G}$ 首先成为一个预层.

由于限制映射就是投影映射，由定义我们显然知道，对于开集 U 与开覆盖 $U = \bigcup V_i$，如果 $L\mathscr{G}(U)$ 的两个截面在每一个 V_i 上的限制都相等，那么自然就是相等的. 所以唯一性得证. 黏合性证明是取出所有拓扑基，把行为限制在拓扑基上，利用 $\mathscr{G}$ 的层的性质来研究.

最后我们要说明 $R \circ L \cong id$，$L \circ R \cong id$:

取 $\mathcal{B}$ 上的任意一个层 $\mathscr{G}$. 我们应用 L 将其延拓为 X 上的层 $L(\mathscr{G})$，然后再用 R 将其限制回基 $\mathcal{B}$ 上，得到 $R(L(\mathscr{G}))$.

我们需要证明 $\mathscr{G}$ 和 $R(L(\mathscr{G}))$ 是自然同构的. 对于任意 $U \in \mathcal{B}$，根据定义：

$$(R(L(\mathscr{G})))(U) = (L(\mathscr{G}))(U) = \varprojlim_{W \in \mathcal{B}, W \subseteq U} \mathscr{G}(W)$$

在右侧的逆极限中，集合 $\{W \in \mathcal{B} \mid W \subseteq U\}$ 有一个终对象(final object)，就是 U 本身(因为 $U \in \mathcal{B}$). 一个带有终对象的范畴的逆极限就是该终对象上的值. 因此：

$$\varprojlim_{W \in \mathcal{B}, W \subseteq U} \mathscr{G}(W) \cong \mathscr{G}(U)$$

这个同构对于所有 $U \in \mathcal{B}$ 都成立，并且是自然的. 所以 $R \circ L \cong Id_{Shv(\mathcal{B})}$.

反过来，取 X 上的任意一个层 $\mathscr{F}$. 我们先用 R 将其限制到基 $\mathcal{B}$ 上得到 $R(\mathscr{F}) = \mathscr{F}|_{\mathcal{B}}$，然后再用 L 将其延拓回 X 上得到 $L(R(\mathscr{F}))$.

我们需要证明 $\mathscr{F}$ 和 $L(R(\mathscr{F}))$ 是自然同构的. 对于 X 中任意一个开集 V，根据定义：

$$(L(R(\mathscr{F})))(V) = \varprojlim_{U \in \mathcal{B}, U \subseteq V} (R(\mathscr{F}))(U) = \varprojlim_{U \in \mathcal{B}, U \subseteq V} \mathscr{F}(U)$$

另一方面，因为 $\mathscr{F}$ 本身是 X 上的一个层，它的一个基本性质就是其在任一开集 V 上的值，等于它在覆盖 V 的一个基的所有元素上的值的逆极限. 也就是说，一个在 V 上的截面，等价于在所有包含于 V 的基开集上的一族相容的截面. 这正是层公理的体现. 因此，我们有自然同构：

$$\mathscr{F}(V) \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{B}, U \subseteq V} \mathscr{F}(U)$$

结合两个等式，我们得到 $(L(R(\mathscr{F})))(V) \cong \mathscr{F}(V)$. 这个同构对所有开集 V 都成立，并且是自然的. 所以 $L \circ R \cong Id_{Shv(X)}$. □

1.14 The structure sheaf on the spectrum of a ring

我们现在来定义环 A 在 $X = \operatorname{Spec} A$ 上的结构层 $\mathscr{O}_X$，首先在主开集上考虑，任给 $f \in A$，我们思考 $\mathscr{O}_X(D(f))$ 是什么？注意到 $D(f)$ 就是 f 取值不为 0 的点，于是这个点处的函数意味着 f 可

逆，从而诱导我们定义

$$\mathscr{O}_X(D(f)) = A_f$$

定义 1.14.1

Spec A 中的主开集是形如 $U = D(f)$ 的开集，它们构成 Spec A 的一组拓扑基. 并且我们可以定义坐标环

$$\mathscr{O}_X(U) = A_f$$

Remark 1.14.1

这个定义是良定义的，即不依赖于 $U = D(f) = D(g)$ 的代表元的选取，这是因为 $D(f) = D(g)$，则代表着

$$f \in \sqrt{(g)}, \quad g \in \sqrt{(f)}$$

于是存在正整数 m, n 以及 $c, t \in A$ 使得

$$g^n = cf, \quad f^m = tg \implies f^{mn} = (tg)^n = t^n cf$$

于是我们可以有自然的映射

$$\varphi\colon A_f \to A_g, \quad \frac{a}{f} \mapsto \frac{ca}{g^n}$$

与自然的映射

$$\psi\colon A_g \to A_f, \quad \frac{b}{g} \mapsto \frac{tb}{f^m}$$

于是复合之下得到

$$\psi \circ \varphi\colon A_f \to A_f, \quad \frac{a}{f} \mapsto \frac{t^n ca}{f^{mn}}$$

我们注意到

$$t^n caf - f^{mn} a = a(t^n cf - f^{mn}) = 0$$

所以得到

$$\frac{a}{f} = \frac{t^n ca}{f^{mn}} \in A_f$$

所以我们得到

$$\varphi \circ \psi = 1, \quad \psi \circ \varphi = 1$$

于是

$$A_f = A_g$$

定理 1.14.1

A 是一个环，$\mathscr{B}$ 是其主开集基，则 $\mathscr{O}_X$ 是 $\mathscr{B}$ 上的一个层.

证明: 回忆，对于 $U=D(f)$，我们有

$$\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)=A[f^{-1}]$$

令 $U=D(f)=\bigcup_{i\in I}U_i$，其中 $U_i=D(f_i)$，我们下面只需要说明

$$A[f^{-1}]=\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)=\operatorname{Ker}\left(\prod_{i\in I}\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(U_i)\to\prod_{i,j\in I}\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(U_i\cap U_j)\right)$$

这个验证由下面的交换代数引理可证. □

引理 1.14.1

令 R 是一个环，$f_1,\cdots,f_r\in R$ 为单位理想的一组生成元，则对于任意的 R-模 M，下面序列正合

$$0\to M\to\prod_{i=1}^{r}M_{f_i}\to\prod_{i,j}M_{f_if_j}$$

定义 1.14.2: structure sheaf

$\operatorname{Spec} A$ 的 **structure sheaf** $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 是 $\mathscr{B}$-sheaf $\mathscr{O}_X$ 唯一延拓出来的 sheaf.

我们还可以以一种显式的方式去定义 $\operatorname{Spec} A$ 上的层：对于任意的 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A$，令 $A_{\mathfrak{p}}$ 为 $\mathfrak{p}$ 处的局部化，对于任意一个开集 $U\subset\operatorname{Spec} A$，我们可以定义 $\mathscr{O}(U)$ 为所有函数

$$s\colon U\to\coprod_{\mathfrak{p}\in U}A_{\mathfrak{p}}$$

使得对任意的 $\mathfrak{p}$，$s(\mathfrak{p})\in A_{\mathfrak{p}}$，并且 s 满足：对于任意的 $\mathfrak{p}\in U$，存在 $\mathfrak{p}$ 的一个开邻域 $V\subset U$ 与 $a,f\in A$ 使得对于任意的 $\mathfrak{q}\in V$，有 $f\notin\mathfrak{q}$ 并且 $s(\mathfrak{q})=a/f\in A_{\mathfrak{q}}$.

于是现在很显然满足条件的这些函数构成了一个含幺的交换环，所以 $\mathscr{O}(U)$ 是一个交换幺环，此时对于 $V\subset U$，我们可以自然地定义出函数的限制

$$\mathscr{O}(U)\to\mathscr{O}(V)$$

并且这是一个环同态，可以验证(好累啊我不验证了) $\mathscr{O}$ 就是一个 $\operatorname{Spec} A$ 上的层.

命题 1.14.1: 结构层的整体截面与茎

A 是一个环，$\mathscr{O}_X$ 是 $X=\operatorname{Spec} A$ 上的层，则

(1) 对于任意的 $x\in\operatorname{Spec} A$，有在 x 处的茎 $\mathscr{O}_{X,x}=(\mathscr{O}_X)_x\cong A_{\mathfrak{p}_x}$.

(2) 特别地，$\Gamma(X,\mathscr{O}_X)\cong A$.

证明: (1) 考虑 X 主开集基 $\mathscr{B}$，则我们可以知道

$$\mathscr{O}_{X,x} = \operatorname{colim}_{x\in U\in\mathscr{B}} \mathscr{O}_X(U) = \operatorname{colim}_{x\in U, U=D(f)} A[f^{-1}] =: B$$

回忆局部化实际上就是滤过余极限，所以这里的 B 就是 $A_{\mathfrak{p}_x}$.

(2) 取 $f = 1$ 得到

$$\Gamma(D(1), \mathscr{O}_X) = \mathscr{O}(X)(D(1)) = A_1 = A$$

□

在代数几何中，A_f 和 $A_{\mathfrak{p}}$ 有不同的作用，A_f 对应移除 hypersurface $V(f)$ 而 $A_{\mathfrak{p}}$ 刻画了在 $\mathfrak{p}$ 点有定义的正则函数.

1.15 Irreducibility and connectedness

定义 1.15.1: Irreducible

拓扑空间 X 的子集 Y 称为 **irreducible**，如果不能表示为两个真闭子集的并，即不能写为

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$

其中 $Y_1 \subsetneq Y, Y_2 \subsetneq Y$ 并且在 Y 中是闭集. 空集不认为是不可约的.

Remark 1.15.1

不可约空间的开集是不可约的，并且稠密. 这个我们可以考虑 X 是不可约空间，其中 U 是 X 的一个开集，由于 X 不可约，所以对任意的非空开集 V，我们有 $U\cap V$ 非空，否则 $V^c \cup U^c = X$，与 X 不可约矛盾. 下面假设 $U = A \cup B$，其中 A, B 是 U 的闭集，则存在 X 的闭集 F, G 使得 $A = F \cap U$，$B = G \cap U$. 于是我们知道

$$U \subset F \cup G$$

于是我们知道

$$X = \overline{U} \subset F \cup G$$

于是 $X = F \cup G$，结合 X 的不可约知道 $F = X$ 或者 $G = X$，所以 $A = U$ 或者 $B = U$.

Remark 1.15.2

Y 是 X 的不可约子集，则 $\overline{Y}$ 在 X 中也不可约. 设 $\overline{Y}$ 的闭子集 A, B 使得

$$\overline{Y} = A \cup B$$

注意此时有 A, B 也是 X 的闭子集，于是取

$$F = Y \cap A, \quad G = Y \cap B$$

为 Y 的闭子集，并且 $Y = F \cup G$，所以有 $F = Y$ 或者 $G = Y$. 这告诉我们 $Y \subset A$ 或者

$Y \subset B$. 于是 $\overline{Y} \subset A$ 或者 $\overline{Y} \subset B$. 所以 Y 不可约.

命题 1.15.1

A 是一个环，则

(1) $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集 Z 是不可约的当且仅当 $Z = V(\mathfrak{p})$，其中 $\mathfrak{p}$ 是素理想.

(2) 空间 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的当且仅当 A 只有一个极小素理想，或者等价地，$\sqrt{(0)}$ 是素理想.

证明: (1) 首先容易看到 $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$，而单点集的闭包是不可约的，所以一方面得证. 另外一方面，如果 $Z = V(\mathfrak{a})$ 是不可约的，若存在理想 I, J 使得

$$V(\mathfrak{a}) \subset V(I) \cup V(J) = V(IJ)$$

我们有

$$IJ \subseteq \sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$$

由于

$$V(\mathfrak{a}) = (V(I) \cap V(\mathfrak{a})) \cup (V(J) \cap V(\mathfrak{a}))$$

由 Z 的不可约性，我们不妨设 $V(I) \cap V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$，于是知道 $V(\mathfrak{a}) \subset V(I)$，也就是

$$I \subset \sqrt{I} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$$

所以得到 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 是素理想.

(2) 由于 $\operatorname{Spec} A = V(\sqrt{(0)})$，所以 $\operatorname{Spec} A$ 不可约当且仅当 $\sqrt{(0)}$ 是素理想. □

推论 1.15.1

若 A 是整环，则 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的.

下面我们讨论连通性的问题，首先看一个例子：假设 $A = A_1 \times A_2$ 是两个非平凡环 A_1 和 A_2 的直积. 在 A 中，我们有两个正交幂等元 $e_1 = (1, 0)$ 和 $e_2 = (0, 1)$；它们满足关系 $e_1^2 = e_1$，$e_1 e_2 = 0$，$e_2^2 = e_2$ 以及 $e_1 + e_2 = 1$.

谱 $\operatorname{Spec} A$ 分解为两个闭集 $V(e_i)$ 的不相交并集 $\operatorname{Spec} A = V(e_1) \cup V(e_2)$. 事实上，由于 $e_1 + e_2 = 1$，可知 $V(e_1) \cap V(e_2) = V(e_1, e_2) = \varnothing$. 由于 $e_1 e_2 = 0$，对于每个素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，要么 $e_1 \in \mathfrak{p}$，要么 $e_2 \in \mathfrak{p}$，因此 $V(e_i)$ 覆盖了 $\operatorname{Spec} A$. 于是我们得到了结论：

命题 1.15.2

非平凡直积环的素谱是不连通的.

其实我们还有进一步的结论：

命题 1.15.3: 连通性的刻画

$\operatorname{Spec} A$ 不连通当且仅当 A 同构于两个非平凡环的直积 $A_1 \times A_2$.

证明: 一个方向我们已经证明了，现在证明如果不连通则同构于直积. 令 $X = \operatorname{Spec} A$，若可以表示为不交开集之并 $X = U_1 \cup U_2$，则我们有正合列

$$0 \to \mathscr{O}_X(X) = A \to \mathscr{O}_X(U_1) \times \mathscr{O}_X(U_2) \to \mathscr{O}_X(U_1 \cap U_2) = 0$$

于是我们立刻得到

$$A \cong \mathscr{O}_X(U_1) \times \mathscr{O}_X(U_2)$$

□

1.16 Étalé spaces

定义 1.16.1: local homeomorphism

一个连续映射 $f\colon X \to Y$ 称为 **local homeomorphism** 如果存在 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得 $f|_{U_i}\colon U_i \to Y$ 是一个开拓扑嵌入(单射+连续+开映射).

定义 1.16.2: Étalé spaces

令 X 为一个拓扑空间，一个对 (E, π)，其中 E 是一个拓扑空间，$\pi\colon E \to X$ 是一个局部同胚，称为 X 上的 **Étalé space**. 令 (E_1, π_1) 与 (E_2, π_2) 都是 X 上的Étalé space，则他们之间的态射 $f\colon (E_1, \pi_1) \to (E_2, \pi_2)$ 为连续函数 $f\colon E_1 \to E_2$ 使得 $\pi_1 = \pi_2 \circ f$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

E 在 x 处的 **fiber** 定义为 $E_x = \pi^{-1}(x)$，映射 f 自然诱导了在 fiber 处的态射 $f_x\colon (E_1)_x \to (E_2)_x$.

我们下面将说明所谓的Étalé space over X 与 X 上的层实际上是一个范畴等价的关系，下面将 X 上的Étalé space 范畴记为 $\text{Ét}/X$. 我们将会定义两个函子

$$F\colon \text{Ét}/X \to \mathbf{Shv}(X), \quad G\colon \mathbf{PreShv}(X) \to \text{Ét}/X$$

然后说明 $G\circ F$ 同构于恒等函子，$F\circ G$ 同构于层化函子，从而 F 和 G 限制在 $\mathbf{Shv}(X)$ 上就说明了 $\text{Ét}/X$ 与 $\mathbf{Shv}(X)$ 的范畴等价.

令 (E,π) 为 X 上的一个Étalé space，则我们可以定义一个预层 $\mathscr{E}$ 如下：

$$\mathscr{E}(U) := \{s\colon U\to E\colon\ \text{section}\} = \{s\colon U\to E\colon \pi\circ s = \mathrm{id}_U\}$$

即给出所有 U 到 E 的截面. 事实上这是一个 sheaf of E-valued funtions，因为函数自然是满足层的要求的.

令 $f\colon (E_1,\pi_1)\to(E_2,\pi_2)$ 为Étalé space 之间的态射，$\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2$ 为对应的层，则对于 $U\subset X$ 与 $s\in\mathscr{E}_1(U)$，我们有

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, shift left, "\pi_1"] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& U\subset X \arrow[ul, shift left, "s"] &
\end{tikzcd}$$

从而有

$$\pi_2\circ(f\circ s) = (\pi_2\circ f)\circ s = \pi_1\circ s = \mathrm{id}_U$$

于是有 $f\circ s\in\mathscr{E}_2(U)$，从而我们定义了态射

$$\hat{f}\colon \mathscr{E}_1\to\mathscr{E}_2,\quad \hat{f}_U(s) = f\circ s$$

从而我们成功定义了一个函子

$$F\colon \text{Ét}/X\to\mathbf{Shv}(X)$$

引理 1.16.1

令 (E,π) 为 X 上的Étalé space，$\mathscr{E}=F(E,\pi)$，则

(1) 映射 $\tau_x\colon \mathscr{E}_x\to E_x,\quad s\mapsto s(x)$ 对于任意的 $x\in X$ 都是双射.

(2) E 的拓扑是使得对于任意的 $U\subset X$，$s\in\mathscr{E}(U)$ 连续的最细的拓扑.

证明: (1) 对于 $x\in X$，茎 $\mathcal{E}_x$ 是等价类对 (U,s) 的集合，其中 U 是 x 的开邻域，$s:U\to E$ 是 π 的一个截面. 这里，如果在 x 的某个开邻域 $W\subseteq U\cap V$ 上满足 $s|_W=t|_W$，则称 (U,s) 与 (V,t) 等价.

对于 $e\in E$，$x:=\pi(e)$（即 $e\in E_x$），存在一个开邻域 $e\in V\subseteq E$ 使得 $\pi|_V$ 是到其开像的同胚. 那么 $(\pi|_V)^{-1}$ 显然是 π 的一个截面，且满足 $(\pi|_V)^{-1}(x)=e$. 这说明对于每个 $x\in X$，映射 τ_x 是满射.

设 $s:U\to E$ 和 $s':U'\to E$ 是两个截面，且对于某点 $x\in U\cap U'$ 满足 $s(x)=s'(x)=:e$. 那么存在开集 $e\in V\subseteq E$ 使得 $\pi|_V:V\to\pi(V)$ 是到其开像的同胚. 我们令 $W:=\pi(V)\cap U\cap U'$，并用 $\pi|_V^{-1}(W)$ 替换 V. 此时 $\pi|_V:V\to W$ 依然是同胚，且 $x\in W\subseteq U\cap U'$ 是开集. 于是有 $s|_W\circ\pi|_V=\mathrm{id}_V=s'|_W\circ\pi|_V$，由此可得 $s|_W=s'|_W$. 因此，对于每个 $x\in X$，τ_x 是单射.

(2) 回想在 direct image topology 中，E 的子集 W 是开集当且仅当对于每个开集 $U \subseteq X$ 和截面 $s \in \mathcal{E}(U)$，$s^{-1}(W) \subseteq X$ 都是开集. 这对于 E 的拓扑是成立的，因为每个截面都是到其开像的同胚，且我们已经在证明的第一部分看到 E 允许一个由截面的像构成的开覆盖. □

现在我们来为每个预层附上一个Étalé space. 令 $\mathscr{E}$ 为 X 上的一个预层，令

$$E := \coprod_{x \in X} \mathscr{E}_x$$

给出映射

$$\pi \colon E \to X, \quad \mathscr{E}_x \ni e \mapsto x$$

对于 $s \in \mathscr{E}(U)$，我们可以定义映射

$$f_{U,s} \colon U \to E, \quad x \mapsto s_x$$

我们令 E 上的拓扑为使得这些映射连续的最细的拓扑. 下面我们来说明 (E, π) 是一个Étalé space.

首先 π 是连续的，对于 $U \subset X$，对任意的 $W \subset X$ 与 $s \in \mathscr{E}(W)$，我们有

$$f_{W,s}^{-1}(\pi^{-1}(U)) = f_{W,s}^{-1}\left(\coprod_{x \in U} \mathscr{E}_x\right) = W \cap U$$

是开集，所以 $\pi^{-1}(U)$ 由拓扑构造知道是开集.

令 $e \in E$，$x := \pi(E)$，则 $e \in \mathscr{E}_x$，于是存在 $x \in U \subset X$ 与 $s \in \mathscr{E}(U)$ 使得 $s_x = e$. 注意到

$$\pi \circ f_{U,s} = \mathrm{id}_U$$

令 $V = f_{U,s}(U)$，则我们知道

$$f_{U,s} \circ \pi_V = \mathrm{id}_V$$

因此 $\pi|_V$ 与 $f|_{U,s}$ 是互逆的. 我们还有

$$(f_{U',s'})^{-1}(V) = \{y \in U' \cap U \colon s'_y = s_y\} \subset X$$

芽相等说明在一个小邻域内相等，所以每个点都在这个集合内有小邻域，所以这个原像是开集，利用 E 上的拓扑构造，我们知道 V 是开集. 于是我们发现 π 就是一个局部同胚，于是是Étalé space.

Remark 1.16.1

E 的拓扑基可以由如下显示刻画

$$B_{U,s} = \{s_x \colon x \in U\}$$

这也在一方面解释了平展空间的名字，我们对其拓扑上水平切片.

现在令 $\hat{f} \colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ 为预层之间的态射，令 (E_1, π_1) 与 (E_2, π_2) 为对应的Étalé space，我们定义映射

$$f \colon E_1 \to E_2, \quad (\mathscr{E}_1)_x \ni e \mapsto \hat{f}_x(e) \in (\mathscr{E}_2)_x$$

容易验证

$$\pi_1 = \pi_2 \circ f$$

还有

$$(f \circ f_{U,s})(x) = f(s_x) = \hat{(f)}(s)_x = f_{U,\hat{(f)}_s}(x)$$

因此我们知道

$$f \circ f_{U,s} = f_{U,\hat{f}(s)}$$

是连续的，由 E 的拓扑构造，我们知道 f 是连续的，从而我们得到了函子

$$G\colon \mathbf{PreShv}(X) \to \text{Ét}/X$$

引理 1.16.2

存在一个从 $F \circ G$ 到层化 $(-)^+$ 的自然同构.

证明: 令 $\mathscr{E}$ 为 X 上的一个预层，令 $(E,\pi) = G(\mathscr{E})$，$\mathscr{E}' = F(E,\pi)$，我们知道 $f_{U,s}$ 是 (E,π) 的一个截面，因此是 $\mathscr{E}'(U)$ 中的一个元素. 所以我们定义了预层态射

$$\kappa\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}', \quad \mathscr{E}(U) \to \mathscr{E}'(U), \quad x \mapsto f_{U,s}$$

令 $x \in X$ 为任一点，由构造我们知道

$$E_x = \mathscr{E}_x$$

并且我们知道存在双射

$$\tau_x\colon \mathscr{E}'_x \to E_x = \mathscr{E}_x, \widetilde{s} \mapsto \widetilde{s}(x)$$

对 $U \subset X$，$s \in \mathscr{E}(U)$，我们有

$$\tau_x(\kappa_x(s_x)) = \tau_x((f_{U,s})_x) = f_{U,s}(x) = s_x$$

因此

$$\tau_x \circ \kappa_x = \mathrm{id}_{\mathscr{E}_x}$$

知道 κ_x 是一个双射，于是诱导了同构

$$\kappa_x\colon \mathscr{E}_x \to \mathscr{E}'_x$$

观察下图:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_x \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[dr, "\kappa_x"'] & \mathscr{E}_x^+ \arrow[d, dashed, "\varphi_x"] \\
 & \mathscr{E}'_x
\end{tikzcd}$$

层化泛性质告诉我们存在唯一的

$$\varphi_x \circ \theta_x = \kappa_x$$

由于 θ_x 和 κ_x 都是同构，所以 φ_x 也是同构，也就是说 $\varphi\colon \mathscr{E}^+ \to \mathscr{E}'$ 是同构，所以与层化同构. 自然性不再验证. □

引理 1.16.3

存在一个 $G \circ F$ 到恒等函子的自然同构.

证明: 令 (E,π) 是一个Étalé space over X，$\mathscr{E} = F(E,\pi)$，$(E',\pi') = G(\mathscr{E})$，我们有双射

$$\tau_x \colon \mathscr{E}_x \to E_x$$

根据构造，我们知道

$$E' = \coprod_{x\in X} \mathscr{E}_x$$

从而给出了一个双射

$$\tau \colon E' \to E$$

使得

$$\pi \circ \tau = \pi'$$

对于 $U \subset X$，$s \in \mathscr{E}(U)$，我们有

$$\tau(f_{U,s}(x)) = \tau(s_x) = s(x)$$

因此

$$\tau \circ f_{U,s} = s$$

回忆 E' 的拓扑构造，我们知道 τ 是一个同胚：

$$\begin{aligned} W \subset E \text{ is open} &\iff s^{-1}(W) \subset X \text{is open for every } s \colon U \to E \\ &\iff f_{U,s}^{-1}(\tau^{-1}(W)) \subset X \text{is open for every } s \colon U \to E \\ &\iff \tau^{-1}(W) \subset E' \text{ is open} \end{aligned}$$

自然性不再验证. $\square$

综合上面的两个引理，我们立刻得到：

定理 1.16.1: Étalé space 主定理

令 X 为拓扑空间，则 F 与 G 得到了 $\text{Ét}/X$ 到 $\mathbf{Shv}(X)$ 的范畴等价.

Chapter 2: Schemes

2.1 Locally ringed space

定义 2.1.1: ringed space

一个 **ringed space** 是一个对 $(X, \mathcal{O}_X)$，由一个拓扑空间 X 和其上的层组成. 环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 的一个**态射**是一个对 $(f, f^\sharp)$，其中 $f\colon X \to Y$ 是连续映射，$f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 是 $\mathbf{Shv}(Y)$ 上环层的态射.

定义 2.1.2: local map

一个关于局部环 A，B 的环同态 $\varphi\colon A \to B$ 称为 **local map**，如果 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Remark 2.1.1

一个局部环的环同态 φ 是局部映射当且仅当 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 将闭点送到闭点.

定义 2.1.3: locally ringed space

一个环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 被称为 **locally ringed space**，如果对于 $\forall x \in X$，都有 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是一个局部环. 局部环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 的一个 **morphism** 是一个环化空间的态射 $(f, f^\sharp)$，满足对于任意的 $x \in X$，诱导出的态射

$$f_x^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

是一个局部映射. 局部环化空间之间的同构是一个有双边逆的态射，也就是说如果 $(f, f^\sharp)$ 是一个同构，则 f 是一个同胚，$f^\sharp$ 是层之间的同构.

Remark 2.1.2

对于任意的 $V \subset Y$，由一族与限制映射相容的态射

$$f^\sharp(V)\colon \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

决定，并且对于 $V' \subset V$，有下图交换：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^\sharp(V)"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_Y(V') \arrow[r, "f^\sharp(V')"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V')) \end{tikzcd}$$

由 $f^{-1} \dashv f_*$ 的伴随我们知道

定理 2.1.1

对于两个环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 与 $(Y, \mathcal{O}_Y)$，如果有连续映射 $f\colon X \to Y$，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(X)}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(Y)}(\mathcal{O}_Y, f_*(\mathcal{O}_X))$$

于是我们有

$$\mathrm{Hom}((X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)) \cong \{f\colon X \to Y \text{ and } f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X\} \cong \{f\colon X \to Y \text{ and } f^\flat\colon f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X\}$$

于是我们知道环化空间的态射可以用两种方式刻画：

$$(f, f^\flat) \iff (f, f^\sharp)$$

2.2 Spec A as locally ringed space

如果 A 是一个环，则 $\operatorname{Spec} A$ 就是一个局部环化空间 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$.

命题 2.2.1

$\varphi\colon A \to B$ 是环的同态，则 φ 诱导了一个自然的环化空间的态射

$$(f, f^\sharp)\colon (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

证明: 给定一个同态

$$\varphi\colon A \to B$$

我们有一个自然的映射

$$f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A, \quad \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

对于任意的理想 $\mathfrak{a} \subset A$，我们立刻能得到

$$f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$$

所以 f 是连续函数，对于任意的开集 $V \subset \operatorname{Spec} A$，我们要构造一个环同态

$$f^\sharp\colon \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) \to \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(V))$$

我们先对基本开集构造出一个 $\mathscr{B}$-sheaf 之间的态射，然后就自然唯一对应一个层之间的态射. 给定 $D(g) \subset \operatorname{Spec} A$，则我们有

$$f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$$

所以我们有

$$\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) = A_g \to \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(\varphi(g))) = B_{\varphi(g)}$$

中间的映射由

$$\frac{a}{g^n} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n}$$

诱导，这个映射很显然定义了一个 $\mathscr{B}$-sheaves 之间的映射，任给 $D(h) \subset D(g)$，我们有

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(\varphi(g))) \arrow[d] & = & A_g \arrow[r] \arrow[d] & B_{\varphi(g)} \arrow[d] \\
\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(h)) \arrow[r] & \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(\varphi(h))) & & A_h \arrow[r] & B_{\varphi(h)}
\end{tikzcd}$$

这个交换图是自然的. 于是我们得到 $\mathscr{B}$-sheaves 之间的态射，从而唯一对应一个态射

$$f^{\#} \colon \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}$$

现在只需要证明对任意的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$，$f^{\#}_{\mathfrak{p}}$ 是局部映射即可. 我们回忆一下在茎上的态射是如何诱导的，如下交换图道尽一切

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(\varphi(g))) \arrow[d] & = & A_g \arrow[r] \arrow[d] & B_{\varphi(g)} \arrow[d] \\
\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A, \varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{p}} & & A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \arrow[r] & B_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

于是自然就是局部化之后的映射

$$f^{\#}_{\mathfrak{p}} = \varphi_{\mathfrak{p}} \colon A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$$

自然有

$$f^{\#}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q} A_{\mathfrak{q}}) \subseteq \mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

所以是局部映射. $\square$

2.3 Schemes

定义 2.3.1: Affine scheme

一个 **affine scheme** 是一个局部环化空间 $(X, \mathscr{O}_X)$ 使得存在某个环 A，满足

$$(X, \mathscr{O}_X) \cong (\operatorname{Spec} A, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

如果 X 是一个局部环化空间，$U \subset X$ 是一个开集，则自然有

$$(U, \mathscr{O}_X|_U)$$

是局部环化空间，但不一定变成仿射概形. 但是在局部上仍然是仿射的，因为有主开集构成的拓扑基，而主开集与限制在主开集上的层同构于局部化的结构层，所以局部是仿射的.

定义 2.3.2: Scheme

一个 **scheme** 是一个局部环化空间 $(X, \mathscr{O}_X)$ 使得存在一个开覆盖 $\{U_i\}$ 使得 $(U_i, \mathscr{O}_X|_{U_i})$ 是仿射概形. 换言之，概形即局部同构于仿射概形的局部环化空间.

因此，一个概形由一个拓扑空间 X 和一个开覆盖 $\{U_i \cong \operatorname{Spec} A_i\}$ 与层 $\mathscr{O}_X$ 构成，满足

$$\mathscr{O}_X|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A_i}$$

对于任意的 $x \in X$，我们可以通过 affine 的情况计算 stalk，即如果 $x \in U = \operatorname{Spec} A$，对应素理想 $\mathfrak{p}$，则有

$$\mathscr{O}_{X,x} = (\mathscr{O}_X|_U)_x = A_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, \quad \kappa(x) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$$

定义 2.3.3: morphism of schemes

两个概形 X 和 Y 之间的 **morphism** 就是他们作为局部环化空间的态射. 因此概形构成了一个范畴，记为 **Sch**，而仿射概形记为 **AffSch**，构成概形范畴的一个满子范畴.

现在我们来看一看如何将仿射概形 $\operatorname{Spec} A$ 中的主开集 $D(f)$ 推广到一般概形 X 上的开集. 对于仿射概形 $\operatorname{Spec} A$，$f \in A = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$，我们的定义是

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \colon f \notin \mathfrak{p}\}$$

我们从 stalk 的角度来看这个事情，对于 $x \in \operatorname{Spec} A$，对应一个素理想 $\mathfrak{p}_x \subset A$，该点的茎是局部环

$$\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A, x} = A_{\mathfrak{p}_x}$$

有唯一的极大理想

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x}$$

所谓的元素 $f \notin \mathfrak{p}_x$，就表示 f 在 $A_{\mathfrak{p}_x}$ 中是一个单位，从而不在极大理想中，也就是

$$x \in D(f) \iff f_x \notin \mathfrak{m}_x$$

几何直观大抵是如果 f 在 x 点取值不为 0，则 f 在 x 处对应的函数芽是可逆的，也就是不落在极大理想中. 受启发，我们可以做如下定义.

定义 2.3.4: 概形中的开集

给定概形 $(X, \mathscr{O}_X)$，任取 $s \in \mathscr{O}_X(X)$，我们定义集合

$$D(s) = \{x \in X : s_x \notin \mathfrak{m}_x\}$$

要说明我们定义出来的东西确实是一个开集，我们需要如下的引理：

引理 2.3.1: 可逆是局部性质

令 X 为概形，$s \in \mathscr{O}_X(U)$ 为截面.

(1) 如果存在 $x \in U$ 使得 s_x 在 $\mathscr{O}_{X,x}$，则存在开集 $U \supset V \ni x$ 使得 $s|_V$ 在 $\mathscr{O}_X(V)$ 中可逆.

(2) 如果对于任意的 $x \in U$，s_x 在 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中都是可逆的，则 s 在 $\mathscr{O}_X(U)$ 中可逆.

证明: (1) 令 $t_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ 为 s_x 的逆，则我们有

$$s_x \cdot t_x = 1 \in \mathscr{O}_{X,x}$$

由茎的定义，我们知道存在 x 的开邻域 V 使得存在 t_V 令

$$(t_V)_x \cdots s_x = 1$$

适当缩小 V 可以得到

$$t_V \cdot s_V = 1$$

即 s 在 $\mathscr{O}_X(V)$ 中可逆.

(2) 我们现在知道可以找到一个 U 的开覆盖 $\{V_i\}$ 与截面 $t_i \in \mathscr{O}_X(V_i)$ 使得

$$t_i \cdots s|_{V_i} = 1 \in \mathscr{O}_X(V_i)$$

由于逆的唯一性，有

$$t_i|_{V_i \cap V_j} = s|^{-1}_{V_i \cap V_j} = t_j|_{V_i \cap V_j}$$

因此 t_i 可以唯一地粘成 $t \in \mathscr{O}_X(U)$，并且知道

$$st = 1 \in \mathscr{O}_X(U)$$

因此 s 可逆. □

定理 2.3.1

如上定义的 $D(s)$ 是开集.

证明: 对于 $s \in D(s)$，有 $s_x \notin \mathfrak{m}_x$，所以知道 s_x 在 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中可逆，从而存在 x 的开邻域 V 使得 s 在 $\mathscr{O}_X(V)$ 中可逆，从而对于 V 中的任意一点 y，都有 s_y 可逆，从而 $V \subset D(s)$，所以 $D(s)$ 是开集. □

2.4 Maps into affine schemes

下面是概形论中的重要结果:

定理 2.4.1

令 X 是一个概形，A 是一个环，则存在一个典范双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, \mathscr{O}_X(X))$$

实际上，这是 Spec 函子与整体截面函子之间的伴随 $\Gamma \dashv \mathrm{Spec}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}^{\mathrm{op}}}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, \Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A)$$

证明: 记 $\operatorname{Spec} A = Y$，首先证明是单射，假设存在 $(f, f^{\#})$ 与 $(g, g^{\#})$ 两个不同的概形态射，并且 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}$ 诱导了相同的环态射

$$\varphi \colon A \to \mathscr{O}_X(X)$$

令 $x \in X$，$\mathfrak{p} \subset A$ 对应 $y = f(x)$，令 $\ell \colon A \to A_{\mathfrak{p}}$ 为局部化的典范映射，$\rho_x \colon \mathscr{O}_X(X) \to \mathscr{O}_{X,x}$ 为芽态射，则有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & = & \mathscr{O}_Y(Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{O}_X(X) \arrow[d, "\rho_x"] \\
A_{\mathfrak{p}} & = & \mathscr{O}_{Y,f(x)} \arrow[r, "f_x^{\#}"'] & \mathscr{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

于是我们知道

$$\mathfrak{p} = \ell^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \ell^{-1}((f_x^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_x)) = \varphi^{-1}(\rho_x^{-1}(\mathfrak{m}_x))$$

于是我们发现 $f(x)$ 仅与 ρ_x 与 φ 相关，所以 $f = g$.

现在我们要说明 $f^{\#} = g^{\#}$ 作为层态射 $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$，注意到 $Y = \operatorname{Spec} A$ 为仿射概形，于是我

们只需要在主开集上验证即可. 对 $h \in A$，考虑

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Y(Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{O}_X(X) \arrow[d] \\
\mathscr{O}_Y(D(h)) \arrow[r, "f^{\#}(D(h))"'] & \mathscr{O}_X(f^{-1}(D(h)))
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{O}_X(X) \arrow[d] \\
A_h \arrow[r, "f^{\#}_{D(h)}"'] & \mathscr{O}_X(f^{-1}(D(h)))
\end{tikzcd}
$$

由局部化的泛性质

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] & \\
A_h \arrow[r, dashed, "f^{\#}_{D(h)}=g^{\#}_{D(h)}"'] & \mathscr{O}_X(f^{-1}(D(h)))
\end{tikzcd}
$$

立刻得到

$$f^{\#} = g^{\#}$$

下面说明满射，令 $\varphi\colon A \to \mathscr{O}_X(X)$ 为一个环态射，我们将定义一个概形态射 $f\colon X \to Y$ 使得 $f^{\#}_Y = \varphi$. 考虑到之前通过整体截面确定拓扑映射的方法，我们可以定义如下：对 $x \in X$，考虑映射

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathscr{O}_X(X) \xrightarrow{\rho_x} \mathscr{O}_{X,x}$$

定义

$$f(x) = \varphi^{-1}(\rho_x^{-1}(\mathfrak{m}_x))$$

然后我们验证这样定义的 f 确实是连续的，对任意的开集 $D(g) \subset \operatorname{Spec} A$，我们有

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(D(g)) &= \{x \in X\colon f(x) \in D(g)\} \\
&= \{x \in X\colon g \notin (\rho_x \circ \varphi)^{-1}(\mathfrak{m}_x)\} \\
&= \{x \in X\colon \rho_x(\varphi(g)) \notin \mathfrak{m}_x\} \\
&= \{x \in X\colon (\varphi(g))_x \notin \mathfrak{m}_x\} \\
&= D(\varphi(g))
\end{aligned}
$$

由于 $D(\varphi(g))$ 我们前面已经证明了是开集，因此 f 是连续的.

最后，由于可逆是局部性质，$\varphi(g)|_{D(\varphi(g))}$ 在 $\mathscr{O}_X(D(\varphi(g)))$ 中是可逆的，因此由局部化的泛性质，我们立刻得到一个环态射

$$A_g \to \mathscr{O}_X(D(\varphi(g)))$$

过程如下：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathscr{O}_X(X) \arrow[d] \\
A_g \arrow[r, dashed] & \mathscr{O}_X(D(\varphi(g)))
\end{tikzcd}
$$

具体元素为

$$\frac{a}{g^n} \mapsto \frac{\varphi(a)|_{D(\varphi(g))}}{(\varphi(g)|_{D(\varphi(g))})^n}$$

对于 $D(h) \subset D(g)$，我们也有自然的交换图成立

$$\begin{tikzcd}
A_g \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_X(D(\varphi(g))) \arrow[d] \\
A_h \arrow[r] & \mathscr{O}_X(D(\varphi(h)))
\end{tikzcd}$$

因此我们成功定义了环态射 $f^{\#}_{D(g)}$，并且知道可以唯一得到一个层态射

$$f^{\#}\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$$

为了说明 $(f, f^{\#})$ 是环化空间的态射，我们需要说明在茎上的诱导态射是局部态射，即检查

$$f^{\#}_x(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{m}_x$$

其中 $\mathfrak{p}$ 对应 $f(x)$ 在 A 中的素理想，等式成立由下图立刻得到

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & = & \mathscr{O}_Y(Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{O}_X(X) \arrow[d, "\rho_x"] \\
A_{\mathfrak{p}} & = & \mathscr{O}_{Y,f(x)} \arrow[r, "f^{\#}_x"'] & \mathscr{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

最后，如果我们令 $g = 1$，则得到 $\varphi(g) = 1$，从而给出了原始的环态射

$$\varphi\colon A \to \mathscr{O}_X(X)$$

因此 φ 确实由 $(f, f^{\#})$ 诱导. 自然性不再验证. □

Remark 2.4.1
在上面的证明中，我们没有使用到 X 有一个仿射概形开覆盖，所以这个定理实际上对于任意的局部环化空间都成立.

推论 2.4.1

对于任意概形 X，存在一个典范态射 $\theta\colon X \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(X)$. 如果 $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ 为到仿射概形的态射，则 f 唯一地 factor through $h\colon \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(X) \to \operatorname{Spec} A$，使得 $f = h \circ \theta$.

证明: 交换图道尽一切：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(X) \arrow[d, "h"] \\
& \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X(X) & \mathscr{O}_X(X) \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \\
& A \arrow[ul, "\hat{h}\circ\mathrm{id}"] \arrow[u, "\hat{h}"']
\end{tikzcd}$$

□

Remark 2.4.2
考虑
$$\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[t]$$
与一个概形 X，则我们知道
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathbb{A}^1) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(\mathbb{Z}[t], \mathscr{O}_X(X)) \cong \mathscr{O}_X(X)$$
而如果考虑 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$，则有
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \operatorname{Spec}\mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(\mathbb{Z}, \mathscr{O}_X(X)) \cong \{*\}$$
即 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 为概形范畴中的终对象.

2.5 AffSch is dual to CRing

已知我们有函子
$$\operatorname{Spec}\colon \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AffSch}$$
对任意的 $\varphi\colon A \to B$，Spec 函子将其送到
$$(f, f^{\#})\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$
与整体截面函子
$$\Gamma\colon \mathbf{AffSch} \to \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}}$$
由上一节的定理我们知道
$$\Gamma \dashv \operatorname{Spec}$$
于是我们有单位和余单位
$$\varepsilon \mathrm{id}_{\mathbf{AffSch}} \to \operatorname{Spec}\circ\Gamma, \quad \eta\colon \Gamma\circ\operatorname{Spec} \to \mathrm{id}_{\mathbf{CRing}^{op}}$$
首先观察单位，即
$$\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}) = A$$
所以单位是自然同构，而对于余单位与给定的
$$(X, \mathscr{O}_X) \cong (\operatorname{Spec} A, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A})$$
我们有
$$\operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \cong \operatorname{Spec}(\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A})) \cong \operatorname{Spec} A$$
于是余单位也是自然同构，所以伴随对给出了范畴等价：

定理 2.5.1: Main theorem of affine shcemes

函子

$$\operatorname{Spec}\colon \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AffSch}, \quad \Gamma\colon \mathbf{AffSch} \to \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}}$$

给出了两个范畴间的等价：

$$\mathbf{AffSch} \simeq \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}}$$

于是我们知道仿射概形完全由其在整体截面上的信息刻画.

2.6 Schemes over a ring

在现代代数几何中，相较于绝对的版本，我们更喜欢相对的版本.

定义 2.6.1: A-schemes

所谓 **scheme over A** 或者说 **A-scheme** 是一个概形 X 与一个态射 $X \to \operatorname{Spec} A$，而 A-schemes 之间的态射是一个概形的态射 $f\colon X \to Y$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd}$$

我们把 schemes over A 范畴记为 $\mathbf{Sch}/A$，其由 affine schemes over A 构成的满子范畴记作 $\mathbf{AffSch}/A$.

Remark 2.6.1

回忆 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 是概形终对象，所以我们自然有

$$\mathbf{Sch}/\mathbb{Z} = \mathbf{Sch}$$

定理 2.6.1

A 是一个环，则 $\mathbf{AffSch}/A$ 是 A-代数范畴 $\mathbf{Alg}/A$ 的对偶，其函子为 $X \mapsto \mathscr{O}_X(X)$.

证明: 设 $X = \operatorname{Spec} B$，$Y = \operatorname{Spec} C$，则我们有下面交换图

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} B \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} C \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} B & & C \arrow[ll] \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

于是立刻知道. □

因此一个概形 $\operatorname{Spec} B$ 是 over A 的当且仅当 B 是一个 A-代数，而态射 $\operatorname{Spec} B' \to \operatorname{Spec} B$ 是一个 over A 的态射当且仅当 $B \to B$ 是一个 A-代数态射.

2.7 Open subschemes and open embeddings/immersions

若 X 是一个概形，$U \subset X$ 是一个开集，则我们知道 $\mathscr{O}_X|_U$ 是 U 上的层，使得 $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ 成为一个局部环化空间. 实际上这还是一个概形，考虑 X 被仿射概形 $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ 覆盖，由于 $U \cap V_i$ 在 V_i 中是开集，从而可以被主开集覆盖，于是我们可以用仿射概形覆盖 U.

定义 2.7.1: open subscheme

X 是概形，$U \subset X$ 是开集，则 $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ 是 X 的一个 **open subscheme**，并且称 U 上的概形结构为 **induced scheme structure**.

定义 2.7.2: open embeddings/immersions

概形之间的态射 $\iota \colon V \to X$ 被称为一个 **open embedding** 或者 **open immersion**，如果它是到 X 上一个开子概形的同构.

定义 2.7.3: 开浸入的等价定义

概形之间的态射 $\iota \colon (V, \mathscr{O}_V) \to (X, \mathscr{O}_X)$ 是开浸入，如果满足 (1) 拓扑空间的态射 $\iota \colon V \to X$ 是拓扑开嵌入，(2) 结构层的映射 $\iota^\# \colon \mathscr{O}_X \to \iota_* \mathscr{O}_V$ 是同构.

2.8 Closed embeddings/immersions and closed subschemes

定义 2.8.1: Closed embeddings and closed subschemes

一个态射 $\iota \colon Z \to X$ 被称为 **closed embedding** 或者 **closed immersion**，如果存在 X 的一个仿射开覆盖 $\{U_i\}$ 使得对任意 i，有

(1) $\iota^{-1}(U_i)$ 是仿射的. (2) $\iota^\# \colon \mathscr{O}_X(U_i) \to \iota_* \mathscr{O}_Z(U_i)$ 是满射.

在这种情况下，我们称 Z 是 X 的一个 **closed subscheme**. 两个 closed subschemes Z 和 Z' 被认为是 **equal**，如果存在同构 $\varphi \colon Z \to Z'$ 使得 $\iota = \iota' \circ \varphi$.

Remark 2.8.1

定义中的 $\iota^{-1}(U_i)$ 并不仅指一个集合，而是配备上其上的层变成一个概形，令 $V_i = \iota^{-1}(U_i)$，这里的环化空间实际上为

$$(V_i, \mathscr{O}_Z|_{V_i})$$

Remark 2.8.2

闭子概形并不像开子概形那样好定义. 直觉上来看，一个 X 的闭子概形 Z 首先要在拓扑上作为闭集嵌入，这时可能会有很多种结构层的选择方式. 一个有启发性的例子是 $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$，他自然地闭嵌入到 $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ 中. 而所谓的闭子概形就是局部上类似于 $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$ 的概形.

我们在上面的定义中并没有看到拓扑信息，实际上已经隐藏在其中了，我们先看一个简单的拓扑引理.

引理 2.8.1

如果一个集合在开覆盖的每一个局部里都是闭的，那么它在整体上就是闭的. 换句话说，设 $\{U_i\}$ 是 X 的开覆盖，如果 $W \cap U_i$ 是 U_i 中的闭集，则 W 是 X 中的闭集.

现在我们假设 $U_i = \operatorname{Spec} A_i$，由于 $\mathscr{O}_X(U_i) \to \mathscr{O}_Z(\iota^{-1}(U_i))$ 是满射，令

$$\mathfrak{a}_i = \operatorname{Ker}\left(\mathscr{O}_X(U_i) \to \mathscr{O}_Z(\iota^{-1}(U_i))\right)$$

因此我们知道

$$\mathscr{O}_Z(\iota^{-1}(U_i)) \cong A_i/\mathfrak{a}_i$$

因此我们可以把 $\iota^{-1}(U_i) \to U_i$ 看成是映射

$$\operatorname{Spec}(A_i/\mathfrak{a}_i) \to \operatorname{Spec} A$$

使得有

$$\iota(Z) \cap U_i = V(\mathfrak{a}_i) \subset U_i$$

从而 $\iota(Z)$ 在开覆盖的局部都是闭的，所以 $\iota(Z)$ 在 X 中是闭的，更多的，我们还看出来在每个局部上

$$\iota\colon \iota^{-1}(U_i) \to \iota(Z) \cap U_i$$

都是同胚，而同胚是 locally on the target 的，所以自然知道

$$\iota\colon Z \to \iota(Z) \subset X$$

是拓扑同胚. 于是我们可以把 Z 看成是 X 的一个闭子集 $V = \iota(Z)$，其上的层定义为 $\mathscr{O}_V = \iota_*\mathscr{O}_Z$.

Remark 2.8.3

为了简单起见，我们会用 $V(\mathfrak{a})$ 来表示闭集 $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ 以及对应的闭子概形. 具体是哪种情况可以从语境中判断出来.

定义 2.8.2: 闭浸入的等价定义

成概形态射 $\iota\colon Z\to X$ 为闭浸入，如果满足 (1) 拓扑空间上的态射 $\iota\colon Z\to X$ 为闭嵌入，(2) 结构层的映射 $\iota^{\#}\colon \mathscr{O}_X\to\iota_*\mathscr{O}_Z$ 是层满射.

定义 2.8.3: locally closed immersion

态射 $f\colon Z\to Y$ 如果可以分解为

$$Z\xrightarrow{i}U\xrightarrow{j}Y$$

其中 i 是一个闭浸入，j 是一个开浸入，则称 f 为 **locally closed immersion**.

命题 2.8.1: 局部闭浸入+像闭可以得到闭浸入

像集闭的局部闭浸入是闭浸入.

2.9 Points in schemes

在仿射空间 k^n 中的点就是普通的 n 元组，但是对于概形而言会更加复杂，这种简单的视角可能不足以描述. 一个自然的方法是通过剩余域来刻画，即把 $x\in X$ 视为映射

$$\operatorname{Spec}\kappa(x)\to X$$

的唯一的像. 为了显式地定义这个态射，取 $x\in U=\operatorname{Spec}A$，$\mathfrak{p}$ 是 x 对应的素理想，则态射 $\operatorname{Spec}\kappa(x)\to X$ 由下面的复合态射定义

$$\operatorname{Spec}\kappa(x)\to\operatorname{Spec}A_{\mathfrak{p}}\to\operatorname{Spec}A=U\to X$$

而复合态射由环态射

$$A\to A_{\mathfrak{p}}\to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$$

诱导. 这还可以推广，即考虑所谓的 R-值点.

定义 2.9.1: R-valued point

对于环 R，一个态射 $\operatorname{Spec}R\to X$ 被称为 **R-valued point** 或者是 **R-point**. 所有 R 值点被记为

$$X(R)=\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}R,X)$$

如果 X 还是 affine 的，记 $X=\operatorname{Spec}A$，则有

$$X(R)=\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}R,\operatorname{Spec}A)=\operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A,R)$$

Example 2.9.1
我们考虑单位圆
$$x^2+y^2=1$$
在概形的语言中，我们将这个几何体视为一个仿射概形 $X=\operatorname{Spec}A$，它的坐标环定义为
$$A=\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1)$$
于是我们知道一个所谓的 R 值点就是
$$X(R)=\operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A,R)$$
那么对于 $\varphi\colon A\to R$ 而言，我们需要知道的就是 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 的选择，注意到我们要把 0 送到 0，所以
$$\varphi(x^2+y^2-1)=\varphi(x)^2+\varphi(y)^2-1=0$$
于是我们知道
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A,R)\cong\{(a,b)\in R\times R\colon a^2+b^2=1\in R\}$$
取 R 为有理数，实数，有限域，复数域就对应着在其中的方程的解.

Example 2.9.2
对于仿射 n-space $\mathbb{A}^n=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]$，我们有
$$\mathbb{A}^n(R)=R^n$$
特别地，我们有
$$\mathbb{A}^n(k)=k^n$$
这就是所谓的域 k 上的仿射空间.

Example 2.9.3
更一般来说，我们把单位圆的情况推广，令
$$X=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]/(g_1,\cdots,g_r)$$
则有
$$X(R)=\{a\in R^n\colon g_1(a)=\cdots=g_r(a)=0\}$$

命题 2.9.1

令 X 为一个概形，K 为一个域，则有典范双射
$$X(K)=\{(x,\alpha)\colon x\in X,\alpha\colon\kappa(x)\to K\}$$

证明: 对 $x\in X$，取 $U=\operatorname{Spec}A$ 包含 x，则由于 $\operatorname{Spec}K$ 中只有一点，所以 K-point $f\colon\operatorname{Spec}K\to$

X 使得像为 x factor through

$$\operatorname{Spec} K \to U = \operatorname{Spec} A \to X$$

考虑 $\mathfrak{p} \subset A$ 对应 x，我们知道 $f\colon \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ 唯一对应一个 $\varphi\colon A \to K$，f 的像为 x 表示 $\varphi^{-1}(0) = \mathfrak{p}$，于是诱导出态射

$$A/\mathfrak{p} \to K$$

再由局部化的泛性质唯一得到域态射

$$\kappa(x) \to K$$

整个过程都是唯一的，并且可以被还原，所以得到一个典范双射. □

R-值点也有相对的版本.

定义 2.9.2: relative version of R-valued point

概形 X over A，R 是 A-代数，则

$$X(R) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}/A}(\operatorname{Spec} R, X)$$

当 X 还是一个 over k 的 scheme，则由

$$X \to \operatorname{Spec} k$$

自然得到局部环的态射

$$k \to \mathscr{O}_{X,x} \to \kappa(x)$$

于是得到域扩张

$$i_x\colon k \to \kappa(x)$$

而反过来，所谓的 over k 的 $X(k)$ 中的点就相当于

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & X \arrow[dl, "i"] \\
& \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}$$

于是诱导得到

$$\begin{tikzcd}
k & & \kappa(x) \arrow[ll, "f_x"'] \\
& k \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "i_x"'] &
\end{tikzcd}$$

所以是同构，于是我们知道 over k 时，

$$X(k) = \{x \in X\colon \text{induced morphism } k \to \kappa(x) \text{ is an isomorphism}\}$$

2.10 Affine varieties as schemes

在古典代数几何中，我们将仿射代数簇定义为不可约代数集，现在我们给出一个概形论的视角.

定义 2.10.1: affine variety over a field k

一个 affine variety over a field k 是一个 k-scheme 形如

$$X = \operatorname{Spec}\left(k[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{a}\right)$$

其中 $\mathfrak{a} \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个素理想，仿射代数簇的态射就是作为 k-scheme 的态射.

当 k 是代数闭域的时候，这个定义可以还原古典的情况，首先所有极大理想，也就是闭点就对应着古典情况的点，多出来的是那些素理想. 而在 Spec 上定义的 Zariski 拓扑限制到闭点集的时候就与古典情况的拓扑一致了.

令 $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ 为不可约代数集，即古典代数簇，则它的坐标环为

$$A[V] = k[x_1, \cdots, x_n]/I(V)$$

则

$$X = \operatorname{Spec} A[V]$$

就是概形视角的一个仿射代数簇，而映射

$$V \mapsto \operatorname{Spec} A[V]$$

是函子性的，古典代数簇之间的态射 $V \to W$ 与 $A(W) \to A(V)$ 之间的 k-代数映射是一一对应的，因此与 k-schemes 态射

$$X \to Y = \operatorname{Spec} A[W]$$

是一一对应的，因此古典代数簇范畴全忠实地嵌入了仿射 k-概形范畴中.

命题 2.10.1

X 是 over k 的一个仿射代数簇.

(1) $P \in X$ 是闭点当且仅当 $\kappa(P)$ 是 k 的有限扩张.

(2) X 的闭点集是稠密的.

(3) 若 $f\colon X \to Y$ 为 k 上代数簇的态射，$P \in X$ 是闭点，则 $Q = f(P)$ 是 Y 的闭点，并且 $\kappa(P)$ 是 $\kappa(Q)$ 的有限扩张.

证明: 设 $X = \operatorname{Spec} A$，其中 A 是 k 上的有限生成代数.

(1) P 对应着 A 中的极大理想 $\mathfrak{m}$，从而我们知道

$$\kappa(P) = A/\mathfrak{m}$$

是一个域，并且是有限生成 k-代数，从而由 Zariski 引理我们知道这个域一定是 k 的有限扩张.

(2) 我们只需要证明任何一个非空开集都包含一个闭点，取基本开集 $D(f)$，由于

$$D(f) \cong \operatorname{Spec} A_f$$

而 A 是有限生成 k-代数，所以 $A_f = A[1/f]$ 也是，而 A_f 存在极大理想 $\mathfrak{n}$，由于 $\kappa(\mathfrak{n}) = A_f/\mathfrak{n}$ 是 k 的有限扩张，令 $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cap A \in D(f)$，得到单射

$$A/\mathfrak{p} \to A_f/\mathfrak{n}$$

由于右边是 k 的有限扩张，所以左边也是 k 的有限维线性空间，对任意的 $\overline{a} \in A/\mathfrak{p}$，考虑映射

$$m_{\overline{a}} \colon A/\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{p}, \quad x \mapsto \overline{a}x$$

由于整环，无零因子，所以单射，有限维线性空间单射即满射，所以存在 $\overline{b}$ 使得

$$\overline{a}\overline{b} = 1$$

所以 $A/\mathfrak{p}$ 是域，也就是 $\mathfrak{p}$ 是闭点，所以闭点集是稠密的.

(3) 令 $X = \operatorname{Spec} B$，$Y = \operatorname{Spec} A$，其中 A, B 都是有限生成 k-代数，假设 f 由 k-代数同态 $\varphi \colon A \to B$ 诱导. P 点对于 B 的极大理想 $\mathfrak{m}$，我们知道

$$\kappa(P) = B/\mathfrak{m}$$

是 k 的一个有限扩张，令 $Q = f(P)$，则其对应的素理想为 $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$，于是 φ 诱导了单射

$$A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{m} = \kappa(P)$$

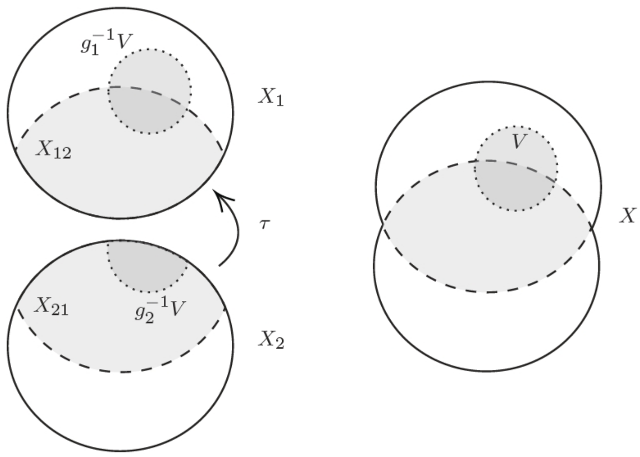
与 (2) 中证明同理，我们知道 $A/\mathfrak{p}$ 是域，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个极大理想，并且

$$[\kappa(P) : k] = [\kappa(P) : \kappa(Q)][\kappa(Q) : k]$$

所以 $\kappa(P)$ 是 $\kappa(Q)$ 的有限扩张. □

2.11 First step to gluing: gluing two schemes together

我们尝试通过一个公共的开集把两个概形 X_1 与 X_2 粘起来.



具体来说，我们需要给出一个 X_1 中的开集 X_{12} 与 X_2 中的开集 X_{21}，然后通过一个概形的同构

$$\tau\colon X_{21}\to X_{12}$$

把 X_{12} 与 X_{21} 中的点等同起来，则自然地，我们在拓扑上会得到一个商空间

$$X=\left(X_1\coprod X_2\right)/\sim$$

令 $q\colon X_1\coprod X_2\to X$ 为商映射，令

$$g_i=q|_{X_i}\colon X_i\to X$$

则 g_i 都是开映射，并且 $U_i=g_i(X_i)$ 为 X 中的开集.

为了让 X 成为一个概形，我们还需要定义其上的层 $\mathscr{O}_X$ ，我们由拓扑知识可以知道 $V\subset X$ 是开集当且仅当 $g_i^{-1}(V)$ 在 X_i 中是开集对 $i=1,2$ 成立.

给定开集 $V\subset X$，我们定义其上的截面为从 X_1 与 X_2 中继承下来的相容截面，相容性由 $\tau^\#$ 来定义，并且由商拓扑的构造，我们有

$$\tau^{-1}(g_2^{-1}(V)\cap X_{21})=g_1^{-1}(V)\cap X_{12}$$

于是 $\tau^\#$ 给出了同构

$$\tau^\#\colon \mathscr{O}_{X_2}(g_2^{-1}V\cap X_{21})\to\tau_*\mathscr{O}_{X_1}(g_2^{-1}V\cap X_{21})=\mathscr{O}_{X_1}(g_1^{-1}(V)\cap X_{12})$$

所以我们可以定义相容截面：

$$\mathscr{O}_X(V)=\left\{(s_1,s_2)\in\mathscr{O}_{X_1}(g_1^{-1}(V))\times\mathscr{O}_{X_2}(g_2^{-1}(V))\mid s_1|_{g_1^{-1}(V)\cap X_{12}}=\tau^\sharp(s_2|_{g_2^{-1}(V)\cap X_{21}})\right\}$$

对于 $V'\subset V$，限制映射就是把 (s_1,s_2) 送到 $(s_1|_{g_1^{-1}(V')},s_2|_{g_2^{-1}(V')})$，容易验证 $\mathscr{O}_X$ 确实是一个环层，下面说明 $(X,\mathscr{O}_X)$ 确实是一个局部环化空间.

注意到 $g_i\colon X_i\to U_i$ 诱导了拓扑上的同胚，我们下面要说明

$$(g_i)_*\mathscr{O}_{X_i}\cong\mathscr{O}_X|_{U_i}$$

不妨设 $i=1$，任取开集 $W\subset U_1$，则我们有

$$\mathscr{O}_X|_{U_1}(W)=\mathscr{O}_X(W)=\{(s_1,s_2)\in\mathscr{O}_{X_1}(g_1^{-1}(W))\times\mathscr{O}_{X_2}(g_2^{-1}(W))\colon s_1|_{g_1^{-1}W\cap X_{12}}=\tau^\#(s_2|_{g_2^{-1}W\cap X_{21}})\}$$

由于 $W\subset U_1$，所以我们知道

$$g_2^{-1}(W)\subset X_{21}$$

所以相容性条件变为

$$s_1|_{g_1^{-1}W\cap X_{12}}=\tau^\#(s_2|_{g_2^{-1}W})\implies s_2=(\tau^\#)^{-1}(s_1|_{g_1^{-1}W\cap X_{12}})$$

所以在这种情况下 s_2 由 s_1 完全决定，于是得到同构

$$\mathscr{O}_X|_{U_1}(W)\cong\mathscr{O}_{X_1}(g_1^{-1}(W))=(g_1)_*\mathscr{O}_{X_1}(W)$$

为了验证这个同构是自然的，我们给出具体构造：

$$\varphi_W\colon \mathscr{O}_X|_{U_1}(W)\to (g_1)_*\mathscr{O}_{X_1}(W),\quad (s_1,s_2)\mapsto s_1$$

容易验证这是环同态，并且单射和满射由前面的定义显然，与限制映射兼容也是自然的，从而我们确实给出了环化空间的同构

$$g_1\colon (X_1,\mathscr{O}_{X_1})\to (U_1,\mathscr{O}_X|_{U_1})$$

同理有

$$g_2\colon (X_2,\mathscr{O}_{X_2})\to (U_2,\mathscr{O}_X|_{U_2})$$

现在对于任意的 $x\in X$，我们知道存在某个 U_i 包含它，所以有

$$\mathscr{O}_{X,x}=(\mathscr{O}_X|_{U_i})_x\cong \mathscr{O}_{X_i,g_i^{-1}(x)}$$

是局部环，所以是局部环化空间. 并且我们得到了概形的覆盖 U_1,U_2，利用 X_1,X_2 的仿射概形覆盖我们就可以得到 X 的仿射概形覆盖，从而我们知道 X 确实是一个概形.

2.12 Gluing sheaves

为了处理一般情况下的粘贴概形，我们需要先处理一下层的粘贴问题. 令 X 是拓扑空间，$\{U_i\}$ 为 X 的开覆盖，为方便，我们令

$$U_{ij}=U_i\cap U_j,\quad U_{ijk}=U_i\cap U_j\cap U_k$$

命题 2.12.1: Gluing morphisms for sheaves

令 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 均为 X 上的层，给定一族态射

$$\varphi_i\colon \mathscr{F}|_{U_i}\to \mathscr{G}|_{U_i}$$

满足

$$\varphi_i|_{U_{ij}}=\varphi_j|_{U_{ij}}$$

对任意的 i,j 成立，则存在唯一的层的态射

$$\varphi\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$$

使得

$$\varphi|_{U_i}=\varphi_i$$

证明: 对任意的开集 V，我们令 $V_i=V\cap U_i$，则有对任意的 $s\in\mathscr{F}(V)$，都有 $\varphi_i(s|_{V_i})\in\mathscr{G}(V_i)$，在 V_{ij} 上，我们有

$$\varphi_i(s|_{V_i})|_{V_{ij}}=\varphi_i(s|_{V_{ij}})=\varphi_j(s|_{V_{ij}})=\varphi_j(s|_{V_j})|_{V_{ij}}$$

于是我们知道 $\{\varphi_i(s|_{V_i})\}$ 在 $\mathscr{G}(V)$ 中可以唯一粘出一个 $\varphi(s)$，剩下都容易验证. □

对于层的粘贴，假设我们在每一个开集 U_i 上有一个层 $\mathscr{F}_i$，我们的目的是构造一个 X 上的整体层 $\mathscr{F}$ 使得

$$\mathscr{F}|U_i = \mathscr{F}_i$$

或者说我们有一个层的同构

$$\nu_i\colon \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{F}_i$$

这个同构必须在交集上相容，即在 U_{ij} 上，我们有两个同构

$$\nu_i|_{U_{ij}}\colon \mathscr{F}|_{U_{ij}} \to \mathscr{F}_i|_{U_{ij}}, \quad \nu_j|_{U_{ij}}\colon \mathscr{F}|_{U_{ij}} \to \mathscr{F}_j|_{U_{ij}}$$

从而我们知道有同构 $\tau_{ij} = \nu_j \circ \nu_i^{-1}$:

$$\tau_{ij}\colon \mathscr{F}_i|_{U_{ij}} \to \mathscr{F}_j|_{U_{ij}}$$

这些同构自然地满足下面的关系：

$$\tau_{ii} = \mathrm{id}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}^{-1}, \quad \tau_{jk} \circ \tau_{ij} = \tau_{ik}$$

反过来，如果给定一组这样的数据，我们也可以粘出来一个层.

命题 2.12.2: Gluing sheaves

令 X 为一个拓扑空间，$\{U_i\}$ 为开覆盖，假设我们在 U_i 上有层 $\mathscr{F}_i$，有同构

$$\tau_{ij}\colon \mathscr{F}_i|_{U_{ij}} \to \mathscr{F}_j|_{U_{ij}}$$

满足

(1) $\tau_{ii} = \mathrm{id}$.

(2) $\tau_{ji} = \tau_{ij}^{-1}$ on U_{ij}.

(3) $\tau_{ik} = \tau_{jk} \circ \tau_{ij}$ on U_{ijk}.

则存在一个 X 上的层 $\mathscr{F}$ 使得有同构

$$\nu_i\colon \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{F}_i$$

使得下图交换

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}|_{U_{ij}} \arrow[dl, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\nu_j"] & \\ \mathscr{F}_i|_{U_{ij}} \arrow[rr, "\tau_{ij}"'] & & \mathscr{F}_j|_{U_{ij}} \end{tikzcd}$$

这样的层 $\mathscr{F}$ unique up to unique isomorphism. 数据 $(\mathscr{F}_i, \tau_{ij})$ 被称为 **gluing datum**，τ_{ij} 满足的三条性质被称为 **cocycle conditions**.

证明: 我们在 X 上定义层 $\mathscr{F}$ 如下：对于任意开集 $V \subseteq X$，令

$$\mathscr{F}(V) = \left\{ (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{F}_i(V\cap U_i) \;\middle|\; \tau_{ij}\big(s_i|_{V\cap U_{ij}}\big) = s_j|_{V\cap U_{ij}} \text{ 对所有 } i,j \right\}$$

对于包含关系 $W \subseteq V$，限制映射 $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$ 按分量定义：

$$(s_i)_i \longmapsto (s_i|_{W\cap U_i})_i.$$

这些映射使得 $\mathscr{F}$ 成为一个预层；下面验证它满足层公理.

局部性公理：设 $s = (s_i)_i$ 与 $t = (t_i)_i$ 是 $\mathscr{F}(V)$ 的元素，并且对于一个开覆盖

$$V = \bigcup_\alpha W_\alpha$$

有

$$s|_{W_\alpha} = t|_{W_\alpha}$$

那么对每个 i，其分量满足

$$s_i|_{W_\alpha\cap U_i} = t_i|_{W_\alpha\cap U_i}$$

由于每个 $\mathscr{F}_i$ 都是层，并且 $\{W_\alpha \cap U_i\}$ 覆盖 $V\cap U_i$，可知对每个 i 都有

$$s_i = t_i$$

从而

$$s = t$$

粘合公理：设

$$V = \bigcup_\alpha W_\alpha$$

并给定截面 $s^{(\alpha)} \in \mathscr{F}(W_\alpha)$，满足对所有 α, β，

$$s^{(\alpha)}|_{W_\alpha\cap W_\beta} = s^{(\beta)}|_{W_\alpha\cap W_\beta}$$

将

$$s^{(\alpha)} = (s_i^{(\alpha)})_i$$

写成分量形式. 固定一个指标 $i \in I$，则族 $\{s_i^{(\alpha)}\}_\alpha$ 在覆盖 $\{W_\alpha \cap U_i\}$ 上是相容的，因此由于 $\mathscr{F}_i$ 是层，存在唯一的截面

$$s_i \in \mathscr{F}_i(V\cap U_i)$$

使得对每个 α，

$$s_i|_{W_\alpha\cap U_i} = s_i^{(\alpha)}$$

我们必须检查元组 $(s_i)_i$ 满足定义 $\mathscr{F}(V)$ 的相容条件，在每个 $W_\alpha \cap U_{ij}$ 上，我们有

$$\tau_{ij}\big(s_i|_{W_\alpha\cap U_{ij}}\big) = \tau_{ij}\big(s_i^{(\alpha)}|_{W_\alpha\cap U_{ij}}\big) = s_j^{(\alpha)}|_{W_\alpha\cap U_{ij}} = s_j|_{W_\alpha\cap U_{ij}}$$

由于集合 $W_\alpha \cap U_{ij}$ 覆盖 $V \cap U_{ij}$，可得

$$\tau_{ij}\big(s_i|_{V\cap U_{ij}}\big) = s_j|_{V\cap U_{ij}}$$

因此

$$(s_i)_i \in \mathscr{F}(V)$$

并且按构造它在每个 W_α 上的限制恰为 $s^{(\alpha)}$.

对于每个 i，定义

$$\nu_i : \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{F}_i$$

为投影到第 i 个分量：若 $V \subseteq U_i$ 且

$$s = (s_j)_j \in \mathscr{F}(V)$$

则令

$$\nu_i(s) = s_i \in \mathscr{F}_i(V)$$

这是一个层态射. 它在 U_i 上的逆映射构造如下. 给定

$$t \in \mathscr{F}_i(V), \qquad V \subseteq U_i$$

对每个 j 定义

$$t_j = \tau_{ij}\big(t|_{V\cap U_{ij}}\big) \in \mathscr{F}_j(V \cap U_j)$$

关于 τ 的条件 (i)–(iii) 保证了族 $(t_j)_j$ 满足相容条件，因此定义了 $\mathscr{F}(V)$ 的一个元素. 投影到第 i 个分量便返回 t，所以 ν_i 是同构，其逆映射由

$$t \longmapsto (t_j)_j$$

给出. 按构造，图表对所有 i, j 都交换.

最后，$\mathscr{F}$ 在唯一同构意义下是唯一的. 若 $\mathscr{F}'$ 是 X 上另一个层，并且有同构

$$\nu_i' : \mathscr{F}'|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_i$$

满足同样的相容条件，定义

$$\beta_i = \nu_i'^{-1} \circ \nu_i : \mathscr{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{F}'|_{U_i}$$

在 U_{ij} 上，我们有

$$\nu_j \circ \nu_i^{-1} = \tau_{ij} = \nu_j' \circ \nu_i'^{-1}$$

因此

$$\nu_j'^{-1} \circ \nu_j = \nu_i'^{-1} \circ \nu_i \quad \text{在 } U_{ij} \text{ 上}$$

于是

$$\beta_j = \beta_i \quad \text{在 } U_{ij} \text{ 上}$$

因此这族 $\{\beta_i\}$ 可以粘合成唯一的态射

$$\beta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$$

并满足

$$\beta|_{U_i} = \beta_i$$

对逆映射 ν_i^{-1} 与 $\nu_i'^{-1}$ 施行同样的构造，可得一个逆态射

$$\mathscr{F}' \to \mathscr{F}$$

故 β 是同构. 此外，任何与这些识别相容的同构

$$\gamma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$$

在每个 U_i 上都必须限制为

$$\nu_i'^{-1} \circ \nu_i = \beta_i$$

而由态射粘合的唯一性可知，这些局部限制唯一决定 γ；因此

$$\gamma = \beta$$

□

2.13 Gluing schemes

命题 2.13.1: Gluing morphisms of schemes

X, Y 为概形，$\{U_i\}$ 为 X 的一个开覆盖，假设我们给定态射 $f_i \colon U_i \to Y$ 使得

$$f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$$

则存在唯一的态射

$$f \colon X \to Y$$

使得

$$f|_{U_i} = f_i$$

证明: 在底层拓扑空间上，定义

$$f(x) = f_i(x), \qquad x \in U_i$$

这是良定义的，因为当 $x \in U_{ij}$ 时有 $f_i(x) = f_j(x)$；又由于每个 f_i 都连续，所以 f 也是连续的.

下面构造层态射

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$$

设 $V \subseteq Y$ 为开集，并取 $s \in \mathcal{O}_Y(V)$，对每个 i，由态射 f_i 得到一个截面

$$t_i = f_i^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V) \cap U_i)$$

在重叠部分 U_{ij} 上，由假设

$$f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$$

可知

$$t_i|_{f^{-1}(V)\cap U_{ij}} = t_j|_{f^{-1}(V)\cap U_{ij}}$$

因此，截面族 $\{t_i\}_i$ 可以唯一地粘合成一个截面

$$t \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

于是定义 $f^{\#}(s) = t$，这个构造与限制映射相容，因此

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$$

是一个环层态射. 由于二元组 $(f, f^{\#})$ 在每个 U_i 上限制为 $(f_i, f_i^{\#})$，它便定义了一个局部环空间态射 $f : X \to Y$.

下面证明唯一性. 若 $g : X \to Y$ 是另一个满足 $g|_{U_i} = f_i$ 的态射，则 f 与 g 作为底层空间之间的映射，在开覆盖 $\{U_i\}$ 上一致，因此在整体上也一致. 对于层态射 $f^{\#}$ 与 $g^{\#}$ 也同样如此，因为两个在某个开覆盖上一致的层态射必然处处一致. 故 $f = g$. $\square$

下面我们讨论概形的黏合.

命题 2.13.2: Gluing sheaves

$\{X_i\}$ 为一族概形，对任意 i, j，有 $X_{ij} \subset X_i$ 为开子概形，令

$$\tau\colon X_{ij} \to X_{ji}$$

是同构，满足

(1) $\tau_{ii} = \mathrm{id}$.

(2) $\tau_{ij} = \tau_{ji}^{-1}$.

(3) 对任意的 i, j, k，都有 $\tau_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$，并且在 $X_{ij} \cap X_{ik}$ 上有

$$\tau_{ik} = \tau_{jk} \circ \tau_{ij}$$

则存在一个概形 X 与一族开浸入

$$g_i\colon X_i \to X$$

使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\tau_{ij}"'] & X_i \arrow[dr, "g_i"] & \\
& & X \\
X_{ji} \arrow[r, hook] & X_j \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

并且 X 具有泛性质：若存在概形 Y 与 $f_i\colon X_i \to Y$ 满足 $f_i|_{X_{ij}} = f_j \circ \tau_{ij}$，则存在唯一的态射 $f\colon X \to Y$ 使得 $f \circ g_i = f_i$.

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\tau_{ij}"'] & X_i \arrow[dr, "g_i"'] \arrow[drr, "f_i"] & & \\
& & X \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & Y \\
X_{ji} \arrow[r, hook] & X_i \arrow[ur, "g_j"] \arrow[urr, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

证明: 设 $\coprod_{i \in I} X_i$ 为拓扑空间 X_i 的不交并. 我们在这个集合上定义一个等价关系 $\sim$：对于 $x \in X_i$ 与 $y \in X_j$，规定

$$x \sim y \iff x \in X_{ij},\ y \in X_{ji},\ \text{且 } y = \tau_{ij}(x).$$

特别地，当 $i = j$ 时，$x \in X_i$ 只与其自身等价. 条件 (i)–(iii) 保证这确实是一个等价关系（自反性由 (i) 保证，对称性由 (ii) 保证，传递性由 (iii) 保证）.

令

$$X = \Big(\bigsqcup_{i\in I} X_i\Big)/\sim$$

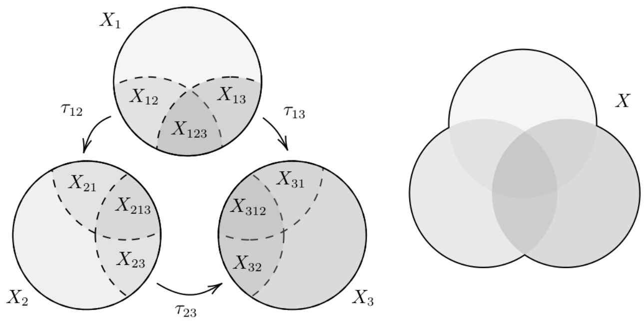
为带商拓扑的商空间，并记

$$\pi : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to X$$

为商映射. 对每个 i，记

$$g_i : X_i \to X$$

为 π 在 X_i 上的限制. 注意到 g_i 是单射，因为同一个 X_i 中两个不同的点不会被关系 $\sim$ 识别.



下面证明 g_i 是开映射，从而是到其像

$$U_i := g_i(X_i)$$

上的同胚. 若 $V \subseteq X_i$ 是开集，则由商拓扑的定义，$g_i(V) \subseteq X$ 开，当且仅当

$$\pi^{-1}(g_i(V))$$

在不交并中是开集. 而这个原像等于

$$\pi^{-1}(g_i(V)) = \bigsqcup_j \tau_{ij}(V \cap X_{ij}).$$

由于每个 τ_{ij} 都是到开子集上的同胚，右端是开集，因此 $\pi^{-1}(g_i(V))$ 是开集，从而 g_i 是开映射.

接着粘合结构层. 在每个开集 U_i 上，沿同胚 g_i 推前 X_i 的结构层，并定义

$$\mathcal{O}_{U_i} = (g_i)_*\mathcal{O}_{X_i}.$$

利用恒等

$$U_i \cap U_j = g_i(X_{ij}) = g_j(X_{ji}),$$

给定的概形同构

$$\tau_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$$

诱导出层同构

$$\tau_{ij}^{\#} : \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}|_{U_i\cap U_j}.$$

条件 (i)–(iii) 保证满足层粘合所需的相容条件，因此这些层 $\mathcal{O}_{U_i}$ 可以粘合成 X 上的一个环层 $\mathcal{O}_X$，并且它在每个 U_i 上的限制就是 $\mathcal{O}_{U_i}$.

对任意点 $x \in X_i$，层 $\mathcal{O}_X$ 在该点的茎自然同构于 $\mathcal{O}_{X_i,x}$，因此它是局部环. 故

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

是一个局部环空间. 进一步地，对任意点 $x \in X$，可取某个 i 使得 $x \in U_i$，再在对应的 X_i 中取该点的一个仿射开邻域 $V \subseteq X_i$. 由于

$$g_i(V) \subseteq U_i \subseteq X$$

是 x 的开邻域，且通过 g_i 与仿射概形 V 同构，所以 $g_i(V)$ 也是仿射的. 于是 X 有一个仿射开覆盖，从而 X 是概形.

最后证明泛性质. 若

$$f_i : X_i \to Y$$

是到某个概形 Y 的态射，并满足对所有 i, j 都有

$$f_i|_{X_{ij}} = f_j \circ \tau_{ij},$$

那么由商空间的泛性质，这些映射 f_i 可以拼成一个连续映射

$$f : X \to Y.$$

而结构层上的相容态射

$$f_i^{\#}$$

由层的粘合性质可粘成一个态射

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X,$$

于是二元组 $(f, f^{\#})$ 构成一个概形态射，并满足

$$f \circ g_i = f_i.$$

唯一性则由概形态射粘合的唯一性立即得到. □

2.14 Proj construction

令 $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ 为一个分次交换环，一个理想 I 称为 **homogeneous ideal** 如果它由齐次元素生成，这样的理想有很好的性质，即可以齐次分解，假设 $f \in I$，由于 I 由齐次元素生成，所以我们可以写成：

$$f = \sum a_i g_i$$

其中 g_i 是齐次生成元，但是 a_i 不一定齐次，不过注意到 $a_i \in S$ 是分次环，所以 a_i 本身可以拆分成齐次分量

$$a_i = \sum a_{ij}$$

于是

$$f = \sum a_{ij} g_j$$

就是一个齐次分解，再将同次数的放在一起就得到

$$f = \sum_n f_n, \quad f_n \in I \cap S_n$$

因此 f 的每个齐次分量都落在 I 中，于是

$$I \subset \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$$

反过来的包含关系是显然的，所以齐次理想等价于说

$$I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$$

这样 S/I 也是一个分次环，满足

$$(S/I)_d = S_d / I \cap S_d$$

令

$$S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$$

称之为 **irrelevant ideal**. 而对于一般的理想 I，我们定义其齐次化为

$$I^h = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$$

所以 I 齐次当且仅当 $I = I^h$.

定义 2.14.1: Proj construction

对于分次环 S，我们定义

$$\operatorname{Proj} S = \{S \text{ 的齐次素理想 } I \colon S_+ \subsetneq I\}$$

为什么不能包含 S_+ 呢，我们考虑 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 的情况，其中

$$S_+ = (x_1, \cdots, x_n)$$

对应的是仿射空间中的原点，而射影空间是要去掉原点的，所以要排除掉包含 S_+ 的情况.

我们的目的是构造 $(\operatorname{Proj} S, \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} S})$ 使其成为一个概形. 所以需要介绍在 $\operatorname{Proj} S$ 上的 Zariski 拓扑.

定义 2.14.2: Zariski拓扑

我们定义 $\operatorname{Proj} S$ 中的闭集形如

$$V_+(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \colon I \subset \mathfrak{p}\}$$

其中 I 是一个齐次理想. 容易验证

$$\bigcap V_+(I_\alpha) = V\left(\sum I_\alpha\right), \quad V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(I \cap J) = V_+(IJ)$$

于是满足闭集公理，构成 $\operatorname{Proj} S$ 上的拓扑，称为 **Zariski topology**.

我们也同样可以定义主开集，对于 $f \in S$ 为齐次元素，我们定义

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \colon f \notin \mathfrak{p}\}$$

由于

$$D_+(f) = \operatorname{Proj} S \backslash V_+((f))$$

所以是开集.

命题 2.14.1

定义如上，齐次元素对应的主开集 $\{D_+(f)\}$ 构成拓扑基. 事实上大于 0 次的齐次元素对应的主开集 $\{D_+(f) \colon \deg f > 0\}$ 也是拓扑基.

证明: 这与仿射情况完全是一样的，注意到 f, g 是齐次元素的话 fg 仍然是齐次元素，所以

$$D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$$

是成立的，同理可以证明是拓扑基. 而对于 $f \in S_0$，我们要说 $D_+(f)$ 可以被正次数元素的主开集覆盖，任取 $\mathfrak{p} \in D_+(f)$，由于 $S_+ \subsetneq \mathfrak{p}$，我们知道一定存在某个某个正次数齐次元素 h 不在 $\mathfrak{p}$ 中，所以

$$\mathfrak{p} \in D_+(h)$$

由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想，f, h 都不在 $\mathfrak{p}$ 中，所以 fh 也不在 $\mathfrak{p}$ 中，所以

$$\mathfrak{p} \in D_+(fh)$$

注意到 $\deg fg = \deg f + \deg h = \deg h > 0$，并且

$$D_+(fh) = D_+(f) \cap D_+(h) \subset D_+(f)$$

所以我们知道存在若干个正次数的 h 使得

$$D_+(f) = \bigcup_h D_+(fh)$$

于是正次数主开集也是拓扑基. □

Remark 2.14.1
如果
$$S_+ = (f_i)$$
则我们有
$$\operatorname{Proj} S = \bigcup D(f_i)$$
这是因为任何一个素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ 都不可能包含所有的 f_i，否则就包含 S_+ 了. 于是我们知道对于任意的 $f \in S_0$，有
$$D_+(f) = \operatorname{Proj} S \cap D_+(f) = \bigcup (D_+(f) \cap D_+(f_i)) = \bigcup D_+(ff_i)$$
从而也可以证明正次数主开集构成拓扑基.

Remark 2.14.2
事实上 $\operatorname{Proj} S$ 上的拓扑由 $\operatorname{Spec} S$ 上的拓扑诱导而来，对于 $f \in S$，齐次分解为
$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$$
则有
$$V(f) \cap \operatorname{Proj} S = \bigcap_{i=0}^{d} V_+(f_i)$$
$$D(f) \cap \operatorname{Proj} S = \bigcup_{i=0}^{d} D_+(f_i)$$

Remark 2.14.3
如果 S 还是由 1 次的齐次元素生成的 S_0 代数，则所有一次齐次元素对应的主开集 $D_+(f_i)$ 就构成了 $\operatorname{Proj} S$ 的一个开覆盖，因为
$$S_+ = (f_i \colon \deg f_i = 1)$$

现在我们来构造结构层 $\mathscr{O}_{\operatorname{Proj} S}$，后面简记为 $\mathscr{O}$，我们有如下期望：

(1) 对于齐次元素 $f \in S$，有 $\mathscr{O}(D_+(f)) = S_{(f)}$，其中 $S_{(f)}$ 表示 S_f 中的 0 次齐次元素. 展开来写就是
$$S_{(f)} = \left\{ \frac{a}{f^n} \colon a \text{ 是齐次元素}, \deg \frac{a}{f^n} = \deg a - n \deg f = 0 \right\}$$

(2) 对于 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$，都有
$$\mathscr{O}_{\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$$
令 T 为 $S \backslash \mathfrak{p}$ 中的齐次元素，$S_{(\mathfrak{p})} \subset T^{-1} S$ 为那些次数为 0 的齐次元素.

定理 2.14.1

S 是任意的分次环，S_+ 是无关理想，设 I, J 是 S 中的两个理想，则

(1) 若 I 是素理想，则 I^h 也是.

(2) 若 I, J 是齐次的，则有

$$V_+(I) \subset V_+(J) \iff J \cap S_+ \subset \sqrt{I}$$

(3) $\operatorname{Proj} S = \emptyset$ 当且仅当 S_+ 中都是幂零元.

证明: (1) 设 $ab \in I^h$，且 $a, b \notin I^h$，设齐次分解

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad b = \sum_{j=0}^{m} b_j$$

不断去掉在 I^h 中的齐次项可以不妨设 $a_n, b_m \notin I^h$，因为 $ab \in I^h$，故 $a_n b_m \in I^h \subset I$，所以 $a_n \in I$ 或者 $b_m \in I$，又因为它们是齐次的，所以导致 $a_n \in I^h$ 或者 $b_m \in I^h$，于是矛盾. 故 I^h 是素的.

(2) 一方面 $J \cap S_+ \subset \sqrt{I}$，则对任意 $\mathfrak{p} \in V_+(I)$，一定有

$$JS_+ \subset J \cap S_+ \subset \sqrt{I} \subset \mathfrak{p}$$

由于 $S_+ \subsetneq \mathfrak{p}$，由 $\mathfrak{p}$ 的素性知道 $J \subset \mathfrak{p}$，于是 $\mathfrak{p} \in V_+(J)$，故

$$V_+(I) \subset V_+(J)$$

反过来，若上面包含关系成立，对 $\mathfrak{p} \in V(I)$，有 $\mathfrak{p}^h$ 是素理想并且 $I \subset \mathfrak{p}^h$，如果 $\mathfrak{p}^h$ 不包含 S_+，则 $\mathfrak{p}^h \in V_+(J)$，从而

$$J \cap S_+ \subset \mathfrak{p}^h \subset \mathfrak{p}$$

当 $\mathfrak{p}^h$ 包含 S_+ 时仍然成立，所以有

$$J \cap S_+ \subset \sqrt{I}$$

(3) $\operatorname{Proj} S = \emptyset$ 当且仅当 $V_+(0) \subset V_+(S_+) \iff S_+ \subset \sqrt{(0)}$. □

引理 2.14.1

S 是分次环，f 是齐次元素，$\deg f = r > 0$，则

(1) $u_f \colon D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$ 是一个双射.

(2) 若 $g \in S$ 是一个正次数齐次元素，$D_+(g) \subset D_+(f)$，则存在一个典范的态射

$$S_{(f)} \to S_{(g)}$$

证明: (1) 首先验证 u_f 是良定义的，对于 $f \notin \mathfrak{p}$，我们知道 $\mathfrak{p}S_f$ 是 S_f 的素理想，然后由包含态射 $S_{(f)} \to S_f$ 诱导出 $S_{(f)}$ 的素理想 $\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$. 故良定义.

下面说明满射，取 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S_{(f)}$，我们知道 $\mathfrak{q}S_f$ 是 S_f 的一个齐次理想，从而 $\sqrt{\mathfrak{q}S_f}$ 也是齐次理想，令

$$\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f})$$

其中 $\rho\colon S \to S_f$ 为局部化态射，容易知道 $\mathfrak{p}$ 也是齐次理想，下面我们要说明 $\sqrt{\mathfrak{q}S_f}$ 是素理想，从而 $\mathfrak{p}$ 也是素理想. 若 $ab \in S_f$ 是齐次的，使得 $ab \in \sqrt{\mathfrak{q}S_f}$，则存在 $m > 0$ 使得

$$a^m b^m \in \mathfrak{q}S_f$$

于是有

$$(a^r f^{-\deg a})^m (b^r f^{-\deg b})^m \in \mathfrak{q}S_f \cap S_{(f)} = \mathfrak{q}$$

由 $\mathfrak{q}$ 是素理想不妨设

$$a^r f^{-\deg a} \in \mathfrak{q}$$

于是

$$a^r \in \mathfrak{q}S_f \implies a \in \sqrt{\mathfrak{q}S_f}$$

所以 $\sqrt{\mathfrak{q}S_f}$ 是素理想，从而 $\mathfrak{p}$ 是素理想，现在要证明

$$u_f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$$

注意到

$$u_f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \sqrt{\mathfrak{q}S_f} \cap S_{(f)} = \mathfrak{q}$$

所以是满射，下面证明是单射，对 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in D_+(f)$，我们要说明

$$\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \iff u_f(\mathfrak{p}') \subset u_f(\mathfrak{p})$$

向右是显然的，反过来，对任意的齐次元素 $x \in \mathfrak{p}'$，都有

$$x^r f^{-\deg x} \in u_f(\mathfrak{p}') \subset u_f(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}S_f$$

由于 f 是单位，知道

$$x^r \in \mathfrak{p}S_f \cap S = \mathfrak{p}$$

所以 $x \in \mathfrak{p}$，也就是 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$，于是单射得证.

(2) 注意 $D_+(g) \subset D_+(f)$，上面的定理告诉我们 $g^m = bf$ 对某个 m，则典范映射为

$$S_{(f)} \to S_{(g)}, \quad \frac{a}{f^n} \mapsto \frac{ab^n}{g^{mn}}$$

□

命题 2.14.2

S 是分次环，$f \in S$ 齐次元素，$\deg f > 0$，则

(1) $u_f\colon D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$ 是一个同胚，如果 $g \in S$ 也是齐次元素且满足 $D_+(g) \subset D_+(f)$，则我们有交换图

$$\begin{tikzcd} D_+(g) \arrow[r, "u_g"] \arrow[d] & \operatorname{Spec} S_{(g)} \arrow[d] \\ D_+(f) \arrow[r, "u_f"] & \operatorname{Spec} S_{(f)} \end{tikzcd}$$

(2) 由同胚我们可以给 $D_+(f)$ 上配备一个结构层 $\mathscr{O}_{D_+(f)}$ 使得

$$(D_+(f), \mathscr{O}_{D_+(f)}) \cong (\operatorname{Spec} S_{(f)}, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}})$$

而所有的层 $\{\mathscr{O}_{D_+(f)}\}$ 可以粘成 $\operatorname{Proj} S$ 上的结构层 $\mathscr{O} = \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} S}$，特别地，我们有 $(\operatorname{Proj} S, \mathscr{O})$ 是一个概形.

(3) 对于任意的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$，有 $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$.

证明: (1) 回忆 $\operatorname{Proj} S$ 上的拓扑是由 $\operatorname{Spec} S$ 上拓扑诱导的，我们从另外一个角度来得到 u_f，考虑包含态射

$$S_{(f)} \to S_f$$

对应的连续映射

$$D(f) \cong \operatorname{Spec} S_f \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

会发现 u_f 就是上面的映射在 $D_+(f) \subset D(f)$ 上的限制，立刻知道 u_f 是一个连续双射. 下面只需要说明是开映射，对于任意的齐次元素 h 使得 $D_+(h) \subset D_+(f)$，我们知道

$$\deg \frac{h^{\deg f}}{f^{\deg h}} = 0$$

于是令 $a = \dfrac{h^{\deg f}}{f^{\deg h}}$，知道 $a \in S_{(f)}$，下面我们说明

$$u_f(D_+(h)) = D(a)$$

对于任意的 $\mathfrak{p} \in D_+(f)$，我们知道

$$u_f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \left\{ \frac{x}{f^n} \in S_{(f)} : x \in \mathfrak{p} \right\}$$

于是

$$u_f(\mathfrak{p}) \in D(a) \iff a \notin u_f(\mathfrak{p})$$

这等价于

$$\frac{h^{\deg f}}{f^{\deg h}} \in u_f(\mathfrak{p}) \iff h^{\deg f} \notin \mathfrak{p} \iff h \notin \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in D_+(h)$$

因此我们得到了

$$u_f(D_+(h)) = D(a)$$

由 $D_+(h)$ 构成拓扑基，我们知道是开映射，从而同胚. 至于交换图

$$\begin{tikzcd} D_+(g) \arrow[r, "u_g"] \arrow[d] & \operatorname{Spec} S_{(g)} \arrow[d] \\ D_+(f) \arrow[r, "u_f"] & \operatorname{Spec} S_{(f)} \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{p} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \left\{ \dfrac{x}{g^n} \in S_{(g)} \colon x \in \mathfrak{p} \right\} \arrow[d, mapsto] \\ \mathfrak{p} \arrow[r, mapsto] & \left\{ \dfrac{x}{f^n} \in S_{(f)} \colon x \in \mathfrak{p} \right\} \end{tikzcd}$$

由包含关系我们知道 $cf = g^n$，从而典范映射给出的是

$$\varphi \colon S_{(f)} \to S_{(g)}, \quad \frac{x}{f^m} \mapsto \frac{c^m x}{g^{mn}}$$

要验证的事情无非是

$$\varphi^{-1}\left(\left\{ \frac{x}{g^n} \in S_{(g)} \colon x \in \mathfrak{p} \right\} \right) = \left\{ \frac{x}{f^n} \in S_{(f)} \colon x \in \mathfrak{p} \right\}$$

这无非是同一些零次齐次元素在不同写法下的不同表达，所以相等.

(2) 只需要验证满足黏合条件，我们在 $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$ 上考察，我们令

$$\mathscr{O}_f = \mathscr{O}_{D_+(f)} = u_f^{-1} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}}$$

为 $D_+(f)$ 上的结构层，由于是同胚，所以这里的逆像层不需要再取极限，并且限制映射可以直接由 $\operatorname{Spec} S_{(f)}$ 上的限制映射直接得到.

令 f, g 为正次数齐次元，设

$$\deg f = d, \quad \deg g = e$$

记

$$a_{fg} := \frac{g^d}{f^e} \in S_{(f)}, \quad a_{gf} := \frac{f^e}{g^d} \in S_{(g)}$$

前面已经验证过

$$u_f(D_+(f) \cap D_+(g)) = u_f(D_+(fg)) = D(a_{fg}) \subset \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

我们有典范的同构

$$(D_+(fg), \mathscr{O}_f|_{D_+(fg)}) \cong (D(a_{fg}), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}}|_{D(a_{fg})}) \cong (\operatorname{Spec}(S_{(f)})_{a_{fg}}, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(S_{(f)})_{a_{fg}}})$$

下面我们要说明有环同构

$$\theta \colon (S_{(f)})_{a_{fg}} \to (S_{(g)})_{a_{gf}}$$

实际上，由对称性，我们只需要证明有环同构

$$(S_{(f)})_{a_{fg}} \to S_{(fg)}, \quad \frac{x/f^n}{(g^d/f^e)^m} \mapsto \frac{x f^{dm+me} g^n}{(fg)^{n+dm}}$$

经过不懈的努力可以验证这确实是一个环同构，于是我们就有了典范的环同构 θ，诱导了仿射概形的同构

$$(\operatorname{Spec}(S_{(f)})_{a_{fg}}, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(S_{(f)})_{a_{fg}}}) \cong (\operatorname{Spec} S_{(fg)}, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(fg)}})$$

所以最后我们有

$$(D_+(fg), \mathscr{O}_f|_{D_+(fg)}) \cong (\operatorname{Spec} S_{(fg)}, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(fg)}})$$

同理有

$$(D_+(fg), \mathscr{O}_g|_{D_+(fg)}) \cong (\operatorname{Spec} S_{(fg)}, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(fg)}})$$

所以我们有概形的同构

$$\tau_{fg} \colon (D_+(fg), \mathscr{O}_f|_{D_+(fg)}) \to (D_+(fg), \mathscr{O}_g|_{D_+(fg)})$$

努力之下可以验证黏合条件，所以知道可以唯一地粘成 $\operatorname{Proj} S$ 上的结构层 $\mathscr{O}$. 并且注意到 $\operatorname{Proj} S$ 有开覆盖 $\{D_+(f)\}$，这些都是仿射概形，所以 $\operatorname{Proj} S$ 确实是一个概形.

(3) 对于任意的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$，设正齐次元素 f 使得 $D(f) \ni \mathfrak{p}$，则有

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{p}} = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}, \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}} = (S_{(f)})_{\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}}$$

我们经过一些机械性质的努力也可以证明有环同构

$$(S_{(f)})_{\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$$

于是得证. □

2.15 Projective schemes

定义 2.15.1: projective n-space over A

A 是一个环，我们定义 **projective n-space over A** 为一个概形

$$\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[x_0, \cdots, x_n]$$

Remark 2.15.1

特别地，当 $A = k$ 是一个代数闭域的时候，$\mathbb{P}^n_k$ 的所有闭点就自然地同胚于古典的射影代数簇.

现在我们来考虑在主开集 $D_+(x_i)$ 上的截面，我们注意到

$$\mathscr{O}(D_+(x_i)) = A[x_0, \cdots, x_n]_{(x_i)} = A\left[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right]$$

注意到 $\dfrac{x_j}{x_i}$ 是代数无关的，所以我们有典范的同构

$$A\left[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right] \cong A[T_1, \cdots, T_n]$$

于是我们有概形的典范同构

$$U_i := (D_+(x_i), \mathscr{O}|_{D_+(x_i)}) \cong \mathbb{A}^n_A$$

然后再注意到

$$S = A[x_0, \cdots, x_n]$$

有

$$S_+ = (x_0, \cdots, x_n)$$

所以 $D_+(x_0), \cdots, D_+(x_n)$ 构成了 $\mathbb{P}^n_A$ 的一个开覆盖，而每一个仿射开集作为概形都同构于仿射空间 $\mathbb{A}^n_A$，所以我们可以把 $\mathbb{P}^n_A$ 想象成 $n+1$ 个仿射空间 $U_0, \cdots, U_n$ 通过公共开集黏合起来的空间，这与古典情况的直觉一致. 由于

$$(S_{(x_i)})_{x_j/x_i} = S_{(x_i x_j)} = (S_{(x_j)})_{x_i/x_j}$$

所以我们可以通过这些公共开集把仿射空间粘起来，可以验证他们满足概形的黏合条件，所以从另外一种角度通过黏合也可以得到 $\mathbb{P}^n_A$.

对于其整体截面，我们有很好的性质：

定理 2.15.1

对任意环 A，我们有 $\Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_A}) = A$.

证明: 考虑正合列

$$0 \to \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_A}) \to \prod_{i=0}^n \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_A}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_A}(U_i \cap U_j)$$

考虑 $(s_i)_i \in \prod_{i=0}^n \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_A}(U_i)$，如果他落在 kernel 中，即

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

我们设

$$s_i = \frac{f_i}{x_i^{d_i}}$$

其中 f_i 是一次 d_i 次齐次多项式，则上面的式子告诉我们

$$\frac{f_i x_j^{d_i}}{(x_i x_j)^{d_i}} = \frac{f_j x_i^{d_j}}{(x_i x_j)^{d_j}}$$

这等价于

$$(x_i x_j)^m x_i^{d_j} x_j^{d_i} (f_i x_j^{d_j} - f_j x_i^{d_i}) = 0$$

这等价于在 $A[x_0, \cdots, x_n]$ 中有

$$f_i x_j^{d_j} = f_j x_i^{d_i}$$

因此我们知道

$$x_i^{d_i} \mid f_i$$

注意到 $\deg f_i = d_i$，于是立刻得到

$$f_i = c_i x_i^{d_i}$$

同理可以得到

$$f_j = c_j x_j^{d_j}$$

于是有

$$x_i^{d_i} x_j^{d_j}(c_1 - c_2) = 0$$

即 $c_1 = c_2$，记为 c，于是我们有

$$s_i = c_i = c$$

所以唯一地粘成一个整体截面 $c \in \Gamma(\mathbb{P}_A^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}_A^n})$，于是我们知道整体截面只能是常数，否则会出现问题，所以知道

$$\Gamma(\mathbb{P}_A^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}_A^n}) = A$$

故整体界面是常数，即 A. □

我们定义

$$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]$$

此时我们有 k-值点

$$\mathbb{P}^n(k) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{P}^n)$$

命题 2.15.1

定义如上，有

$$\mathbb{P}^n(k) = \left(k^{n+1} - \{0\}\right) / \sim$$

证明: 一个 k-点是一个态射

$$\iota\colon \operatorname{Spec} k \to \mathbb{P}^n$$

对应着 $\mathbb{P}^n$ 中的一个点，所以它必定包含在某个 U_i 中，概形态射不仅与拓扑上的态射相关，还需要有层上的态射，即

$$\iota^{\#}\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} k}$$

对于 $U \ni x$，这个态射即

$$\iota^{\#}\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(U) \to k$$

注意到这个态射完全由在茎上的态射决定，即

$$\iota_x^{\#}\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n,x} \to \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} k,*} = k$$

由于 $x \in U_i$，将 U_i 认定为 $\mathbb{A}^n$，于是等价于考虑态射

$$\iota_x^{\#}\colon \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,x} \to k$$

而这等价于态射

$$\iota\colon \operatorname{Spec} k \to \mathbb{A}^n$$

从而 ι 就相当于 $\mathbb{A}^n$ 的一个 k-值点，即 $\iota \in \mathbb{A}^n(k) \cong k^n$. 在这种等同下，我们可以定义

$$\tau\colon k^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(k), \quad (a_0, \cdots, a_n) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \cdots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \cdots, \frac{a_n}{a_i}\right) \in U_i(k), \text{ if } a_i \neq 0$$

经过一些努力可以说明 τ 是良定义的，并且会存在经典的等价关系，即得到典范的双射

$$\mathbb{P}^n(k) = \left(k^{n+1} - \{0\}\right) / \sim$$

$\square$

对于更加一般的情况，给定一个环 R，我们可以考虑 R-point，假设 $s_0, \cdots, s_n$ 生成了整个 R，我们有

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{i=0}^{n} D(s_i)$$

从而由态射的黏合定理我们知道会存在一些特别的 R-point

$$\iota\colon \operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n$$

与在相交处相容的态射

$$\iota_i\colon D(s_i) \cong \operatorname{Spec} R_{s_i} \to U_i \subset \mathbb{P}^n$$

对应，而我们可以定义

$$\mathbb{Z}[x_0/x_i, \cdots, x_n/x_i] \to R_{s_i}, \quad x_k/x_i \mapsto s_k/s_i$$

于是我们可以粘出

$$\operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n$$

但对于一般的环 R，存在一些难以用全局坐标来表示的 R-point，我们会在未来再次回到这个问题.

对于 A-scheme，我们也有射影版本，当 S 为A 上的有限生成分次环，可以对其使用 Proj 构造得到一个射影概形，定义如下.

定义 2.15.2: projective A-scheme

A-概形 X 称为 **projective A-scheme**，若存在某个齐次理想 $\mathfrak{a} \subset A[x_0, \cdots, x_n]$ 使得 X 同构于闭子概形 $V_+(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n_A$. A-概形 X 被称为 **quasi-projective A-scheme**，若它可以开浸入一个射影概形中，或者说可以局部闭浸入一个 $\mathbb{P}^n_A$.

有限生成分次环换句话说即

$$S = A[x_0, \cdots, x_n]/\mathfrak{a}$$

但是要注意 x_i 可能并不是标准分次，即他们可能拥有不同的正整数次数，这就引出了加权射影空间，即 weighted projective space.

对于一个域 k，$\mathbb{P}_k^n$ 的一个不可约超曲面表示那些被正次数不可约齐次多项式定义的子空间，这个子空间实际上是由上面的多项式 F 生成的理想定义的，即

$$X = \mathrm{Proj}(k[x_0, \cdots, x_n]/(F))$$

这是一个闭子概形，超曲面被称为是 **quadric**,**cubic** or **quartic** 如果是次数 $2, 3$ 或者 4 的多项式所定义的. 特别地，一个 **conic** 代表一个 1 维的 quadric，即在 $\mathbb{P}^2(k)$ 中由 2 次齐次不可约多项式所定义的曲线.

Chapter 3: First properties of schemes

性质有两个版本，一种是绝对的性质，即概形本身的性质，这又分为局部的性质和整体的性质，另外一种是相对的性质，即概形之间态射的性质.

3.1 Reduced schemes

定义 3.1.1: reduced schemes

我们称一个概形 X 是 **reduced**，如果对于任意的开集 $U \subset X$，环 $\mathscr{O}_X(U)$ 都是 reduced ring.

Remark 3.1.1

reduced 是一个局部性质，即可以在茎上检查.

引理 3.1.1: 约化是局部性质

一个概形 X 是约化的当且仅当对于任意的 $x \in X$，局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 是约化的.

证明: 若 X 是约化的，令 $x \in X$，取一个幂零元 $\sigma \in \mathscr{O}_{X,x}$，即对于某个 n，使得

$$\sigma^n = 0$$

取 σ 的一个局部表示 (s, U)，我们知道

$$s_x^n = 0 \implies s|_W^n = 0, \exists x \in W \subset U$$

于是 $(s|_W, W)$ 也是 σ 的局部表示，由 W 上的既约性，知道 $s|_W = 0$，于是知道

$$\sigma = (s|_W)_x = 0_x = 0$$

故 $\mathscr{O}_{X,x}$ 约化. 反过来，如果任意的茎是约化环，令 $s \in \mathscr{O}_X(U)$，如果 s 非零，则存在 $x \in U$ 使得 $s_x \neq 0$，若 s 幂零，则

$$s^n = 0 \implies s_x^n = 0 \iff s_x = 0$$

矛盾，故 s 不是幂零元. □

当 X 是仿射概形 $\operatorname{Spec} A$ 时，取 $U = X$，容易看出来

$$A = \mathscr{O}_X(X)$$

是约化的，反过来，如果 A 是约化环，我们也能得到 $X = \operatorname{Spec} A$ 是约化概形.

命题 3.1.1

仿射概形 $X = \operatorname{Spec} A$ 约化当且仅当 A 约化.

证明: 由引理，我们只需要在茎上检查，对任意的 $\mathfrak{p} \subset A$ 为素理想，事实上，对于环 A 的局部化 $S^{-1}A$，若 A 的幂零元根是 $\mathfrak{N}$，则 $S^{-1}A$ 的幂零元根是 $S^{-1}\mathfrak{N}$，这个的证明是直接的元素验证，略去不表. 若 A 是约化的，则 $\mathfrak{N} = (0)$，所以我们知道

$$\mathfrak{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathfrak{N} = (0)$$

故若 A 是既约的，则 A 的局部化都是既约的，特别地，对于任意素理想 $\mathfrak{p}$，知道 $A_{\mathfrak{p}}$ 是既约的. □

引入非既约的概形是有必要的，因为它包含着重数的信息，比如若 $X = \operatorname{Spec} A$，给定两个闭子概形 Y, Z，对应着根理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$，但是 $Y \cap Z$ 对应的理想是 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$，一般来说这不再是根理想，从而不再是既约的，从而出现了幂零元，幂零元刻画了代数重数，我们将在后面看到具体的表现.

3.2 Integral schemes

定义 3.2.1: integral schemes

一个概形 X 被称为是 **integral** 的，如果对于任意的<u>仿射开集</u> $U \subset X$，都有 $\mathscr{O}_X(U)$ 是整环.

引理 3.2.1

不交仿射开集的并仍然是仿射的.

证明: 不妨设 $U = \operatorname{Spec} A$ 与 $V = \operatorname{Spec} B$ 是仿射开集，在 $A \times B$ 中考虑

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

我们知道

$$D(e_1) = \operatorname{Spec} A, \quad D(e_2) = \operatorname{Spec} B$$

注意到

$$D(e_1) \cap D(e_2) = D(e_1 e_2) = D(0) = \emptyset, \quad D(e_1) \cup D(e_2) = V(e_1, e_2)^c = \operatorname{Spec}(A \times B)$$

所以我们知道

$$U \cup V = D(e_1) \cup D(e_2) = \operatorname{Spec}(A \times B)$$

是仿射的，另外，容易验证其截面环是相容的，所以作为概形也是仿射的. □

命题 3.2.1: 整性的刻画

概形 X 是整的当且仅当 X 是不可约且既约的.

证明: 若 X 是整的，为了说明 X 是约化的，只需要验证茎即可，对 $x \in X$，取一个仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A$ 包含 x，由整的定义我们知道 A 是一个整环，所以其局部环

$$\mathscr{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}_x}$$

仍然是一个整环，所以是既约的. 对于不可约，若存在开集 U, V 使得

$$U \cap V = \emptyset$$

层条件告诉我们有正合列

$$0 \to \mathscr{O}_X(U \cup V) \to \mathscr{O}_X(U) \times \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_X(U \cap V) = 0$$

从而知道

$$\mathscr{O}_X(U \cup V) \cong \mathscr{O}_X(U) \times \mathscr{O}_X(V)$$

这显然不是一个整环，我们可以把 U, V 变成其包含的仿射开集，再利用不交仿射开集的并仍然是仿射的，知道 $U \cup V$ 是仿射的，从而与 X 整矛盾. 反过来，如果 X 是不可约且既约的，令 $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ 为一个仿射开集，设 $f, g \in \mathscr{O}_X(U) = A$ 使得 $fg = 0$，我们知道

$$U = \operatorname{Spec} A = V(0) = V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

由 X 不可约，知道 U 不可约，不妨设

$$V(f) = U$$

这告诉我们 f 在 A 中是幂零的，但是 X 是既约的，所以 $f = 0$，故 A 是整环. □

推论 3.2.1: 在任意开集上整

事实上，概形 X 是整的当且仅当对于任意的开集(不要求仿射) $U \subset X$，都有 $\mathscr{O}_X(U)$ 是整环.

证明: 我们只需要证明如果 X 是不可约且既约，则 X 在任意开集上都是整环即可. 对任意的开集 W，我们找到它包含的一个仿射开集 U，自然有限制映射

$$\rho \colon \mathscr{O}_X(W) \to \mathscr{O}_X(U)$$

由于后者是整环，所以我们只需要证明 ρ 是单射，就可以说明 $\mathscr{O}_X(W)$ 作为整环的子环还是整环. 设 $s \in \mathscr{O}_X(W)$ 使得 $\rho(s) = 0$，任取仿射 $V \subset W$，由 X 的不可约性，我们知道 $U \cap V \neq \emptyset$，设 $V = \operatorname{Spec} A$，取 $x \in V \cap U$ 对应素理想 $\mathfrak{p}$，于是有

$$(s|_V)_{U \cap V} = \rho(s)|_{U \cap V} = 0$$

所以知道

$$s_x = 0 \in \mathscr{O}_{X,x} = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$$

注意到 $s|_V \in A$ 是整环，而整环到局部化的映射一定是单射，故由

$$(s|_V)_x = 0$$

可以得到

$$s|_V = 0$$

故取仿射开集覆盖知道 $s = 0$，即 $\mathscr{O}_X(W)$ 是 $\mathscr{O}_X(U)$ 的子环，从而是整环. □

整概形的一个重要性质是其存在函数域，在这里扮演了有理函数在仿射代数簇上的角色. 为了定义函数域 $K(X)$，我们要说明任何整概形都存在唯一的泛点 ξ. 事实上，对于任意的开集 $U = \operatorname{Spec} A$，存在唯一泛点，因为 A 是整环，所以 U 的泛点 ξ 必须满足

$$V(\xi) = \operatorname{Spec} A \implies \xi \subset \sqrt{(0)} = (0)$$

故 $\xi = (0)$ 为 U 的唯一泛点，再结合不可约空间开集稠密，有

$$\overline{U} = X$$

所以 ξ 也是 X 的泛点. 而 X 上泛点的唯一性可以如下证明：假设 η 是另外一个泛点，但是必定有 $\eta \in U$，否则

$$\overline{\{\eta\}} \subseteq X \backslash U$$

与泛点矛盾，所以 η 与 ξ 都是 U 的泛点，矛盾. 所以整概形具有唯一泛点.

定义 3.2.2: function field

对于一个整概形 X，我们定义它的 **function field** 和 **field of rational functions** 为在泛点 $\xi \in X$ 处的局部环

$$K(X) = \mathscr{O}_{X,\xi}$$

事实上，对整概形，任取仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A$，我们知道

$$\mathscr{O}_{X,\xi} = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A,\xi} = A_{(0)} = \operatorname{Frac}(A)$$

所以其函数域即仿射开集截面环的分式域. 特别地，我们可以看到一些简单的例子，如 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 的函数域是 $\mathbb{Q}$，$\mathbb{A}_k^n$ 的函数域是 $k(x_1, \cdots, x_n)$.

命题 3.2.2

X 是一个整概形，则

(1) 对任意开集 $U \subset X$，存在自然的包含关系 $\mathscr{O}_X(U) \subset K(X)$.

(2) 对于点 $x \in X$，有自然的包含关系 $\mathscr{O}_{X,x} \subset K(X)$.

(3) 在上述的包含关系下，我们有

$$\mathscr{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathscr{O}_{X,x} \subset K(X)$$

证明: (1) 我们在前面就已经证明了任意开集上的截面可以视为其包含的仿射开集上截面的子环，而函数域就是任意仿射开集上截面的分式域，所以自然可以把任意开集上的截面看成是分式域的子环.

(2) 取包含 x 的仿射开集 $V = \operatorname{Spec} A$，记 x 对应的素理想为 $\mathfrak{p}$，则我们知道

$$\mathscr{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \operatorname{Frac}(A) = K(X)$$

所以自然可以看做是子环.

(3) 很显然任意 $s \in \mathscr{O}_X(U)$ 取芽是单射，所以 $\mathscr{O}_X(U) \subset \mathscr{O}_{X,x}$，对任意 $x \in U$. 故一边的包含关系是显然的，反过来，如果 $f \in K(X)$ 落在每一个 $\mathscr{O}_{X,x}$ 中，我们对 x 选择一个仿射开集 V_x 与截面 h^x 使得

$$h^x_\xi = f$$

即在泛点处的芽为 f，利用

$$\mathscr{O}_X(V_x \cap V_y) \to \mathscr{O}_{X,\xi}$$

的单射，我们知道 $\{h^x\}$ 在相交处相容，从而可以唯一粘成一个 $\mathscr{O}_X(U)$ 上的截面，这个截面满足在每一点处的芽都等于 f，从而就是 f. 于是得证. □

$x \in X$ 是一个点，$f \in K(X)$ 是一个有理函数，我们成 f 在 x 处 **regular**，如果 $f \in \mathscr{O}_{X,x}$.

3.3 Affine communication technique

本节我们介绍所谓的仿射沟通技术，旨在处理一些非仿射开集上的问题.

引理 3.3.1: Doubly distinguished covers

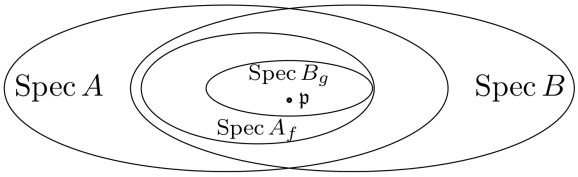
X 是一个概形，$U = \operatorname{Spec} A$ 与 $V = \operatorname{Spec} B$ 是 X 的两个开子概形，则 $U \cap V$ 是一系列同时在 U, V 中都是主开集的开集的并，换句话说，对任意的 $x \in U \cap V$，都存在 $W \subset U \cap V$ 使得 W 在 U, V 中都是主开集.

证明: 如图，考虑 $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A\cap \operatorname{Spec} B$，取 $f\in A$ 使得

$$\mathfrak{p}\in D_A(f)=\operatorname{Spec} A_f\subset \operatorname{Spec} A\cap \operatorname{Spec} B$$

再取 $g\in B$ 使得

$$\mathfrak{p}\in D_B(g)=\operatorname{Spec} B_g\subset D_A(f)$$



设 $\operatorname{Spec} B$ 的截面 g 限制到 $\operatorname{Spec} A_f$ 上成为 g'，则我们有

$$\operatorname{Spec} B_g=\{\mathfrak{q}\in \operatorname{Spec} A_f\colon g'\notin \mathfrak{q}\}=\operatorname{Spec}(A_f)_{g'}$$

设 $g'=g''/f^n$，于是有

$$\operatorname{Spec} B_g=\operatorname{Spec}(A_f)_{g'}=\operatorname{Spec} A_{fg''}$$

所以得证. □

命题 3.3.1: 仿射沟通引理

若 $\mathcal{P}$ 是概形的性质，若对概形 X 而言，满足

(1) 若 $\operatorname{Spec} A\subset X$ 满足 $\mathcal{P}$，则对任意的 $f\in A$，$\operatorname{Spec} A_f$ 也满足 $\mathcal{P}$.

(2) 若 $(f_1,\cdots,f_n)=A$，且 $\operatorname{Spec} A_{f_k}\subset X$ 满足 $\mathcal{P}$，则 $\operatorname{Spec} A\subset X$ 也满足 $\mathcal{P}$.

若 X 有一个满足 $\mathcal{P}$ 的仿射开覆盖 $\bigcup \operatorname{Spec} A_i$，则 X 的任意仿射开集满足 $\mathcal{P}$.

证明: 任取 X 的仿射开集 $\operatorname{Spec} A$，由于所有的 $\operatorname{Spec} A_i\cap \operatorname{Spec} A$ 可以用同时是二者的主开集的开集盖住，所以由 (1) 知道 $\operatorname{Spec} A$ 是一族满足 $\mathcal{P}$ 的主开集的并，再由仿射开集拟紧与条件 (2) 可以知道 $\operatorname{Spec} A$ 满足 $\mathcal{P}$. □

定义 3.3.1: 仿射局部性质

把同时满足上面 (1)(2) 的性质 $\mathcal{P}$ 称为 **affine local property**.

3.4 Schemes of finite type

回忆，一个 A-代数 B 称为是 **finitely generated** 或者 **of finite type**，如果存在有限个元素 $x_1,\cdots,x_r$ 使得

$$B\cong A[x_1,\cdots,x_r]$$

定义 3.4.1: finite type

一个 A-概形 X 称为 **finite type of A**，如果存在一个有限开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^r$ 使得 $U_i = \operatorname{Spec} B_i$，其中 B_i 是有限生成 A-代数.

命题 3.4.1

X 是 over A 的有限型概形，则对任意的仿射开集 $U \subset X$，环 $\mathscr{O}_X(U)$ 是有限生成 A-代数.

证明: 我们使用仿射沟通引理，只需要验证满足条件即可，首先若 $\operatorname{Spec} B \subset X$ 满足其截面环为有限生成 A-代数，而对任意的 $f \in B$，我们知道

$$\mathscr{O}_X(\operatorname{Spec} B_f) = B_f = B[f^{-1}]$$

所以还是有限生成 A-代数. 另外一方面，若有

$$(f_1, \cdots, f_n) = B$$

且对任意的 k，都有 $\operatorname{Spec} B_{f_k}$ 满足 B_{f_k} 是有限生成 A-代数，我们来说明 B 是有限生成 A-代数，注意到存在 $c_k \in B$ 使得

$$c_1 f_1 + \cdots c_n f_n = 1$$

由于 B_{f_k} 是有限生成的，则这些生成元可以写成 $\dfrac{b_{k,j}}{f_k^{m_{k,j}}}$ 的形式，构造集合 S 由所有的分子 $b_{k,j}$，分母 f_k，系数 c_k 组成，很显然这是一个有限集，现在我们来说明 S 生成的 A-子代数 $B' = A[S]$ 就是 B. 首先注意到

$$\sum c_k f_k = 1$$

在 B' 中也成立，所以 $(f_1, \cdots, f_n)$ 在 B' 中也生成单位理想，此外，由 B' 的构造可以知道对任意的 f_k，B_{f_k} 的生成元都落在 B'_{f_k} 中，所以自然有

$$B'_{f_k} = B_{f_k}$$

现在任取 $b \in B$，我们知道在局部环中有

$$\frac{b}{1} \in B_{f_k} = B'_{f_k}$$

这表示存在充分大的 N 使得对任意的 k 都有

$$f_k^N \cdot b \in B'$$

现在注意到

$$(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n)^{nN} = 1$$

由抽屉原理，左边可以看成是理想 $(f_1^N, \cdots, f_n^N)$ 中的一个元素，所以知道存在 $y_1, \cdots, y_n \in B'$ 使得

$$\sum y_k f_k^N = 1$$

所以知道

$$b = b \cdot 1 = b(\sum y_k f_k^N) = \sum y_k (f_k^N b) \in B'$$

所以

$$B \subset B' \implies B = B'$$

所以知道 B 是有限生成 A-代数. 于是再结合条件，知道存在满足条件的仿射开覆盖，由仿射沟通引理知道 X 的任意开集都满足命题. □

证明的中的技术可以总结为如下引理：

引理 3.4.1

R 是环，$g_1, \cdots, g_r \in R$ 生成单位理想，则

(1) 若 R 是 A-代数，且 R_{g_i} 是有限生成 A-代数，则 R 是有限生成 A-代数.

(2) 若 M 是 R-模，且 M_{g_i} 是有限生成 R_{g_i}-模，则 M 是有限生成 R-模.

定义 3.4.2: morphism of finite type

概形间的态射 $f\colon X \to S$ 是 **finite type** 的，如果对 S 的任意仿射开集 $V = \operatorname{Spec} A$，都有 $f^{-1}(V)$ 是 finite type over A 的.

尽管这个定义要求对于任意的仿射开集都成立，但是下面的命题告诉我们只需要对一个仿射开覆盖验证即可.

命题 3.4.2

令 $f\colon X \to S$ 为一个态射，若存在 S 的一个仿射开覆盖 $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ 使得对于任意的 i，概形态射 $f^{-1}(V_i) \to V_i$ 是有限型的，则 f 是有限型的.

证明: 我们对 S 的仿射开集 $V = \operatorname{Spec} A$ 定义性质 $\mathcal{P}$ 为

$$f^{-1}(V) \to V$$

是有限型的，只需要验证 $\mathcal{P}$ 是仿射局部的，就可以使用仿射沟通技术说明对任意的仿射开集成立.

首先，对于 $V = \operatorname{Spec} A$ 满足性质 $\mathcal{P}$，我们知道 $f^{-1}(V)$ 是有限个仿射开集的并，可以写成 $\bigcup_{i=1}^n \operatorname{Spec} B_i$，其中 B_i 是有限生成 A-代数. 对任意的 $g \in A$，我们要说明 $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_g)$ 也是有限型的. 我们把 f 限制在 $\operatorname{Spec} B_i$ 上得到

$$f_i = f|_{\operatorname{Spec} B_i}\colon \operatorname{Spec} B_i \to \operatorname{Spec} A$$

这对应着一个环态射

$$\varphi_i\colon A \to B_i$$

于是我们注意到

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A_g)\cap \operatorname{Spec} B_i = f^{-1}(D(g))\cap \operatorname{Spec} B_i = f_i^{-1}(D(g)) = D(\varphi_i(g)) = \operatorname{Spec}(B_i)_g \subset \operatorname{Spec} B_i$$

所以我们知道

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A_g) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec}(B_i)_g$$

这是一个有限覆盖，我们只需要说明 $(B_i)_g$ 是有限生成 A_g-代数即可，由于 B_i 是有限生成 A-代数，我们知道

$$(B_i)_g \cong B_i \otimes_A A_g \cong \frac{A[x_1,\cdots,x_m]}{I} \otimes_A A_g \cong \frac{A[x_1,\cdots,x_m]\otimes_A A_g}{I\otimes_A A_g} \cong \frac{A_g[x_1,\cdots,x_m]}{I_g}$$

所以 $(B_i)_g$ 是有限生成 A_g-代数. 故知道 $\operatorname{Spec} A_g$ 满足性质 $\mathcal{P}$. 现在我们要说明如果 $(g_1,\cdots,g_n)=A$，且 $\operatorname{Spec} A_{g_k}$ 满足 $\mathcal{P}$，则 $\operatorname{Spec} A$ 满足 $\mathcal{P}$. 由于 $\operatorname{Spec} A_{g_k}$ 满足性质，所以知道存在一个有限仿射开覆盖

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A_{g_k}) = \bigcup_{j=1}^{m_k} \operatorname{Spec} C_{k,j}$$

其中 $C_{k,j}$ 是有限生成 A_{g_k}-代数，由于生成单位理想，我们知道

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{Spec} A_{g_k}$$

于是有

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_k} \operatorname{Spec} C_{k,j}$$

为有限仿射开覆盖，注意到 $C_{k,j}$ 是有限生成 A_{g_k}-代数，而 $A_{g_k}=A[g_k^{-1}]$ 是有限生成 A-代数，所以知道 $C_{k,j}$ 是有限生成 A-代数，故有限型.

综上，利用仿射沟通引理可以得到结论对任意的仿射开集成立. □

3.5 Noetherian schemes

环的诺特性质有对应的几何描述，这是概形理论中最重要的有限性条件之一.

定义 3.5.1: Noetherian

一个概形 X 是 **Noetherian** 的，如果存在一个有限开覆盖 $\{U_i\}$ 使得 $U_i=\operatorname{Spec} A_i$，$A_i$ 为 Noether 环.

这个条件暗示了诺特概形是拟紧的，因为是有限个拟紧开集的并.

命题 3.5.1

X 是概形，TFAE:

(1) X is Noetherian.

(2) X 是拟紧的，并且对任意的仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A \subset X$，环 A 是 Noether 的.

证明: (2) 推 (1) 是显然的，利用拟紧可以得到满足条件的有限仿射开覆盖. 至于 (1) 推 (2)，我们只需要证明环的诺特性是仿射局部的.

首先，任给 $U = \operatorname{Spec} A$，$A$ 是 Noether 环，对任意的 $f \in A$，我们要说明 A_f 是 Noether 环，这是显然的，因为 Noether 环的局部化还是 Noether 的. 现在给定环 A 以及

$$(f_1, \cdots, f_n) = A$$

使得 A_{f_k} 是 Noether 的，我们来证明 A 是 Noether 的. 我们可以利用引理 3.4.1，取 M 为 A 的理想，从而立刻得到理想是有限生成的，故得证. 当然利用升链条件也可以说明，主要工具是零模是局部性质.

综上，利用仿射沟通技术可以得到 X 是 Noether 概形. □

于是我们立刻得到：

推论 3.5.1

$X = \operatorname{Spec} A$ 是 Noether 概形当且仅当 A 是 Noether 环.

由 Hilbert 基定理，我们知道 Noether 环上的有限生成代数仍然是 Noether 的，所以 Noether 概形往往与 finite type 相关.

命题 3.5.2

令 $f\colon X \to Y$ 为有限型概形的态射，并且 Y 是 Noether 概形，则 X 也是 Noether 的.

证明: 由于 Y 是 Noether 的，所以存在一个有限开覆盖，覆盖中开集形如 $V = \operatorname{Spec} A$，使得 A 为 Noether 环. 由于 f 是有限型的，我们知道 $f^{-1}(V)$ 被有限个有限生成 A-代数 B_i 的谱覆盖，由 Hilbert 基定理知道 B_i 也是 Noether 的，从而 X 是 Noether 的. □

实际上一个拓扑空间也有 Noether 性，我们定义如下：

定义 3.5.2: Noether空间

一个拓扑空间 X 称为 **Noetherian**，如果满足闭集的 descending chain condition: 对于闭集降链

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots$$

存在 $r > 0$ 使得 $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$.

Remark 3.5.1

注意到闭集的降链条件等价于开集的升链条件，所以 Noether 空间的等价定义是任意开集升链必停止.

对于 Noehter 拓扑空间，我们有不可约分支的分解，对应的交换代数里面就是所谓 Noether 环的准素分解.

命题 3.5.3

在 Noether 空间 X 中，所有非空闭集 Y 可以表示为有限个不可约闭集的并 $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$. 如果我们要求对于 $i \neq j$，有 $Y_i \not\supset Y_j$，则 Y_i 是被唯一确定的，称为 Y 的 **irreducible components**.

证明: 首先我们证明这种表示的存在性，令 $\mathfrak{S}$ 表示 X 中所有不能写成不可约闭集之并的非空闭集. 如果 $\mathfrak{S}$ 不是空集，由于 X 是 Noether 的，所以一定存在一个极小元(翻译到理想对应极大元)，记为 Y. 我们知道 Y 不是不可约的，所以 $Y = Y_1 \cup Y_2$. 其中 Y_1 与 Y_2 都是 Y 的真闭子集，从而也是 X 的闭子集. 由 Y 的极小性，我们知道 Y_1, Y_2 都可以表示为不可约闭集的并，于是 Y 也可以，矛盾. 所以所有闭集都可以表示.

现在我们知道 Y 存在不可约闭集的表示，通过扔掉一些冗余的，我们可以要求对于 $i \neq j$，有 $Y_i \not\supset Y_j$，$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$，其中 Y_i 都是不可约闭集.

现在假设

$$Y = Y_1' \cup \cdots \cup Y_s'$$

是另一个表示，则我们知道

$$Y_1' = \bigcup_{i=1}^{r} (Y_1' \cap Y_i)$$

但是由于 Y_1' 是不可约的，所以一定有某个 Y_i 使得 $Y_1' \subset Y_i$，不妨令这个 i 就是 1. 所以我们有 $Y_1' \subset Y_1$，同理有 $Y_1' \subset Y_1 \subset Y_j'$，所以 $j = 1$. 于是有 $Y_1 = Y_1'$.

考虑

$$Z = \overline{Y - Y_1} = \overline{Y - Y_1'}$$

则我们知道(由开集在不可约空间中的稠密性得到)

$$Y_2 \cup \cdots \cup Y_r = Y_2' \cup \cdots \cup Y_s'$$

继续下去我们可以得到唯一性. □

命题 3.5.4: Noether拓扑空间的性质

关于 Noether 拓扑空间我们有如下性质：

(1) Noether 拓扑空间是拟紧的.

(2) Noether 拓扑空间的任意子空间还是 Noether 拓扑空间.

(3) Noether 拓扑空间的任意子集是拟紧的.

证明: 很显然 (1) + (2) 得到 (3). 对于 (1)，我们假设 Noether 空间 X 不是拟紧的，则存在一个开覆盖 $\{U_i\}$ 没有有限子覆盖，则我们可以构造出有限步内无法稳定的开集升链，所以矛盾. 对于 (2)，我们只需要把子空间内的闭集或者开集提升到原空间中稳定，那再限制到子空间上也是稳定的. □

命题 3.5.5

X 是一个 Noether 概形，则 X 的任意开子概形和闭子概形都是 Noether 的.

证明: 令 $\{U_i\}$ 为一个有限仿射开覆盖，其中 $U_i = \operatorname{Spec} A_i$，$A_i$ 是 Noether 环，要说明 $Y \subset X$ 是一个开或闭的子概形是 Noether 的，只需要说明 $Y \cap U_i$ 是 Noether 的. 由于 $Y \cap U_i$ 是一个仿射概形的开或闭子概形，我们只需要对 $X = \operatorname{Spec} A$ 处理即可，其中 A 是 Noether 环.

当 Y 是开子概形的时候，由于我们知道存在 $g_1, \cdots, g_n \in A$，使得

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} A_{g_i}$$

这是因为 Y 是开集，则存在 $\mathfrak{a} \subset A$ 使得

$$Y = V(\mathfrak{a})^c = V((g_1, \cdots, g_n))^c = \left(\bigcap V(g_i)\right)^c = \bigcup D(g_i)$$

由于 A 是 Noether 环，所以 A_{g_i} 也是 Noether 环，故 Y 是 Noether 概形.

当 Y 是闭子概形的时候，由于 X 是仿射概形 $\operatorname{Spec} A$，我们在将来会证明仿射概形的闭子概形一定形如

$$Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$$

从而是 Noether 的. □

很自然的一件事是 Noether 概形的底空间是 Noether 的.

命题 3.5.6

X 是一个 Noether 概形，则 X 的拓扑空间是 Noether 的.

证明: 由于 X 存在一个有限仿射开覆盖，我们只需要证明覆盖里面的每个开集都是 Noether 的即可，设 $U = \operatorname{Spec} A$，其中 A 是开集，考虑 $\operatorname{Spec} A$ 中的闭集降链

$$V(\mathfrak{a}_1) \supset V(\mathfrak{a}_2) \supset \cdots$$

这等价于

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subset \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subset \cdots$$

由 A 的 Noether 性知道有限步内稳定，从而闭集也在有限步内稳定，故得证. □

3.6 Properties of morphisms: Like schemes, like morphisms

中国有句古话，叫做羊毛出在羊身上，实则概形态射的性质也出自概形之上，虽然我们目前只看到 finity type 这一种态射的性质，但是我们在后面还将看到许多按照同一种范式定义的性质.

粗略地讲，若 $\mathcal{P}$ 是概形的一个性质，我们称概形间的态射

$$\pi\colon X \to Y$$

满足性质 $\mathcal{P}$，若对 Y 的任意仿射开子集 U，有 X 的开子概型 $\pi^{-1}(U)$ 满足 $\mathcal{P}$.

我们会发现有限型态射就是如此定义的，此外我们称性质 $\mathcal{P}$ 是 **目标上仿射局部的**，指的是只要存在 Y 上一组仿射开覆盖 $\{U_i\}$ 使得 $\pi^{-1}(U_i) \subset X$ 皆满足 $\mathcal{P}$，就有 π 满足性质 $\mathcal{P}$.

从而根据仿射沟通引理，在目标上仿射局部当且仅当满足下面两个条件

(1) $\mathcal{P}$ 可以从 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ 上传递到主开集 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_f)$ 上.

(2) 存在主开集覆盖 $\operatorname{Spec} A = \bigcup \operatorname{Spec} A_f$，从 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_f)$ 满足 $\mathcal{P}$ 可以推出 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ 满足 $\mathcal{P}$.

在目标上仿射局部意味着这个性质可以通过在目标概形上选取任意一个仿射开覆盖来进行检验，代数几何中绝大多数我们在意的、表现良好的态射性质，都是目标上仿射局部的.

证明一个定理时，如果已知该定理涉及的态射性质是“目标上仿射局部的”，可以在证明的第一句话写上：“不失一般性，我们可以假设目标 Y 是一个仿射概形 $Y = \operatorname{Spec}(A)$.” 这样就直接剥离了目标 Y 的拓扑复杂性，把问题简化为了代数问题.

Chapter 4: Fiber products

4.1 Fiber products

之前我们定义过所谓的 A-scheme，即一个概形 X 配备上一个态射 $X \to \operatorname{Spec} A$，现在我们可以对这个概念进行推广，即把 $\operatorname{Spec} A$ 替换成任意一个概形.

定义 4.1.1: scheme over S

对于一个概形 S，我们定义 **scheme over S** 或者 **S-scheme** 是一个概形 X 配备上一个态射 $X \to S$. 我们把 S-概形构成的范畴记为 $\mathbf{Sch}/S$，其上的态射为使得下图交换的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

这个定义的威力在于把 X 看成由概形 S 参数化的一系列概形，即我们把 S-概形 X 看成是一个 over S 的空间，如图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$$

这种视角的具体作用会在后面看到.

纤维积在任意范畴中其实都有定义，令 A 为一个范畴，取对象和态射

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

则关于这个图像的 **pullback** 是一个对象 $P \in \mathscr{A}$ 与态射 $p_1 \colon P \to X$ 和 $p_2 \colon P \to Y$ 使得下图交

换

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

并且对任意使得下图交换的 A，唯一地 factor through P:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\exists!\overline{f}"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
& X \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

我们称图

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

为一个 **pullback square** 或者 **Cartesian square**. 拉回 P 的另外一个名字叫做**fiber product**，记为

$$X \times_Z Y$$

由泛性质知纤维积在同构意义下唯一. 给定两个 over S 的态射

$$\varphi\colon Z \to X, \quad \psi\colon W \to Y$$

我们由极限的泛性质知道

$$
\begin{tikzcd}
Z \times_S W \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed] & & Z \arrow[dr] \arrow[dddr] & \\
& X \times_S Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] \\
W \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & \\
& Y \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}
$$

存在态射的积

$$\varphi \times \psi\colon Z \times_S W \to X \times_S Y$$

对于集合而言，我们不难发现如果给定

$$f_X\colon X\to S,\quad f_Y\colon Y\to S$$

则有

$$X\times_S Y=\{(x,y)\colon f_X(x)=f_Y(y)\}=\coprod_{s\in S}f_X^{-1}(s)\times f_Y^{-1}(s)$$

这也解释了纤维积的名字由来.

4.2 Fiber products of schemes

虽然我们给出了泛性质的定义，但是我们仍然没有说明纤维积在概形范畴中的存在性. 我们将在这一节中来证明其存在性.

当基概形 $S=\operatorname{Spec}A$ 是仿射的时候，纤维积 $X\times_S Y$ 也被记为 $X\times_A Y$. 需要强调我们并不能通过对 X,Y 的底空间进行纤维积再赋予一个合适的层得到概型的纤维积. 事实告诉我们纤维积的底空间与底空间的纤维积往往存在很大的差异，一个需要牢记于心的例子即

$$\mathbb{A}^1_k\times_k\mathbb{A}^1_k=\mathbb{A}^2_k$$

后者有着比前者底空间纤维积多得多的点. 但是注意到纤维积是一个极限，而 Hom 函子是一个右伴随，于是保持极限，从而我们得到

$$(X\times_S Y)(R)=X(R)\times_{S(R)}Y(R)$$

现在我们来构造仿射概形的纤维积，一个重要观察是 $\mathbf{AffSch}=\mathbf{CRing}^{\mathrm{op}}$，并且代数的张量积的泛性质与纤维积的泛性质是对偶的，给定 A 代数 B_1,B_2，有下图泛性质

$$\begin{tikzcd}
C & & \\
& B_1\otimes_A B_2 \arrow[ul, dashed] & B_2 \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& B_1 \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

对其使用 Spec 函子，我们得到交换图

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(B_1\otimes_A B_2) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}B_2 \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}B_1 \arrow[r] & \operatorname{Spec}A
\end{tikzcd}$$

于是我们可以看到 $\operatorname{Spec}(B_1 \otimes_A B_2)$ 就是在 **AffSch** 中 $\operatorname{Spec} B_1$ 与 $\operatorname{Spec} B_2$ 的纤维积. 我们需要利用下面的命题说明它在 **Sch** 也仍然是纤维积.

命题 4.2.1

对于态射 $f_i\colon \operatorname{Spec} B_i \to \operatorname{Spec} A$，$i = 1, 2$，概形 $\operatorname{Spec}(B_1 \otimes_A B_2)$ 与两个投影 p_1, p_2 构成了 $\operatorname{Spec} B_1$ 与 $\operatorname{Spec} B_2$ 在 **Sch** 中的纤维积.

证明: 我们要说明对于任意的概形 T，有下图成立:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \operatorname{Spec}(B_1 \otimes_k B_2) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} B_2 \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec} B_1 \arrow[r] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

定理 2.4.1 告诉我们态射 $T \to \operatorname{Spec} B_i$ 等价于 A 代数同态 $B_i \to \mathscr{O}_T(T)$，于是我们利用代数张量积的泛性质

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_T(T) & & \\
& B_1 \otimes_k B_2 \arrow[ul, dashed] & B_2 \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& B_1 \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

我们知道存在唯一的代数同态 $B_1 \otimes_A B_1 \to \mathscr{O}_T(T)$，再利用定理 2.4.1 得到唯一的概形态射 $T \to \operatorname{Spec}(B_1 \otimes B_2)$，所以为概形纤维积. $\square$

引理 4.2.1: 像在开集中的态射

U 是 X 的一个开子概形，则对任意的 $f\colon T \to X$ 使得 $f(T) \subset U$，都存在唯一 f 分解经过 U 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, dashed, "\exists ! \overline{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
U \arrow[r, "\iota"'] & X
\end{tikzcd}$$

证明: 拓扑上就是 f 本身，在层上面的态射只需要注意到对任意开集 $V \subset U$，都有

$$\mathscr{O}_X(V) = \mathscr{O}_X|_U(V)$$

从而

$$\mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_T \iff \mathscr{O}_X|_U \to f_*\mathscr{O}_T$$

得证. 我们还可以得到上面实际上给出了一一对应. □

还有一种情况的纤维积较为容易理解.

命题 4.2.2

若 $f\colon X \to S$ 为概形态射，$\iota\colon V \to S$ 为开集的包含，则 $f^{-1}V$ 上存在一个典范概形，其结构层为 $\mathscr{O}_X|_{f^{-1}(V)}$. 则 $f^{-1}V \cong V \times_S X$.

证明: 对任意的取值在 $f^{-1}V$ 中的态射 $g\colon T \to X$ 都唯一分解经过 $T \to f^{-1}(V)$，即下图：

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& f^{-1}V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f|_{f^{-1}V}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& V \arrow[r, "\iota"'] & S
\end{tikzcd}$$

从而知道 $f^{-1}V$ 自然是 $V \times_S X$. □

引理 4.2.2

若 $X \times_S Y$ 存在，并且 $U \subset X$ 是一个开子概形，则开子概形 $p_X^{-1}U$ 与态射 $p_X|_{p_X^{-1}U}, p_Y|_{P_X^{-1}U}$ 为纤维积 $U \times_S Y$.

$$\begin{tikzcd}
p_X^{-1}U \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times_S Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "\iota"] \\
U \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

证明: 令 $\iota\colon U \to X$ 为开嵌入，给定任意概形 $g_U\colon T \to U$ 与 $g_Y\colon T \to Y$ 使得有复合

$$T \overset{g_U}{\to} U \hookrightarrow X \to S$$

与

$$T \overset{g_Y}{\to} Y \to S$$

满足 $X \times_S Y$ 的泛性质，从而存在唯一的 $g\colon X \times_S Y$ 使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\overline{g}"] \arrow[drr, dashed, "g"] \arrow[drrr, bend left, "g_Y"] \arrow[ddr, "g_U"'] \arrow[dddr, bend right, "g_X"'] & & & \\
& p_X^{-1}U \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times_S Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[ddl, bend left, "p_X"] & Y \arrow[dd] \\
& U \arrow[d, hook, "\iota"] & & \\
& X \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}
$$

再由 $p_X^{-1}U$ 的泛性质可以得到唯一的 $\overline{g}$ 使得上图交换，从而知道满足 $U \times_S Y$ 上的泛性质. □

下面的引理让我们可以通过粘贴来构造一般的纤维积.

引理 4.2.3

假设存在一个 X 的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 使得 $U_i \times_S Y$ 均存在，则 $X \times_S Y$ 也存在. 并且 $U_i \times_S Y$ 构成了 $X \times_S Y$ 的一个开覆盖，并且 $X \times_S Y$ 的投影限制上去就是 $U_i \times_S Y$ 的投影.

证明: 令 $U_{ij} = U_i \cap U_j$ 与 $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$，令

$$p_i\colon U_i \times_S Y \to U_i$$

为投影，由前面的引理我们知道 $p_i^{-1}(U_{ij})$ 就是纤维积 $U_{ij} \times_S Y$. 同理对 j 也成立，于是我们知道存在唯一的同构

$$\theta_{ij}\colon p_i^{-1}U_{ij} \to p_j^{-1}U_{ij}$$

使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
p_i^{-1}U_{ij} \arrow[rr, "\theta_{ij}"] \arrow[dr, "p_i"'] & & p_j^{-1}U_{ij} \arrow[dl, "p_j"] \\
& U_{ij} &
\end{tikzcd}
$$

我们要说明 θ_{ij} 满足概形的黏合条件，唯一需要验证的就是 cocycle 条件，注意到下图是成立的

$$
\begin{tikzcd}
p_i^{-1}U_{ijk} \arrow[r, "\theta_{ij}"] \arrow[dr, "p_i"'] & p_j^{-1}U_{ijk} \arrow[r, "\theta_{jk}"] \arrow[d, "p_j"] & p_k^{-1}U_{ijk} \arrow[dl, "p_k"] \\
& U_{ijk} &
\end{tikzcd}
$$

于是不难注意到在 $p_i^{-1}(U_{ijk})$ 上有 $\theta_{ik} = \theta_{jk} \circ \theta_{ij}$ 成立，从而我们知道 $p_i^{-1}U_i$ 可以粘成概形 $X \times_S Y$，并且由概形的黏合定理我们知道 p_i 也可以粘成一个态射 $p_X\colon X \times_S Y \to X$，而投影 $U_i \times_S Y \to Y$

也可见满足黏合条件：

$$\begin{tikzcd}
& p_i^{-1}U_{ij} \arrow[rr, "\theta_{ij}"] \arrow[dl, "\iota_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[ddr] & & p_j^{-1}U_{ij} \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "\iota_j"] \arrow[ddl] & \\
U_i \times_S Y \arrow[drr, "p_i^Y"'] & & U_{ij} \times_S Y \arrow[d, "q_Y"] & & U_j \times_S Y \arrow[dll, "p_j^Y"] \\
& & Y & &
\end{tikzcd}$$

所以也可以粘成一个整体的态射 $p_Y \colon X \times_S Y \to Y$.

最后，我们要检查 p_X 与 p_Y 满足纤维积的泛性质，令 T 为任一个 S-概形，有态射 $\varphi_X \colon T \to X$ 与 $\varphi_Y \colon T \to Y$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "\varphi_Y"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_X"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

对于任意的 $i \in I$，限制 $\varphi_X^{-1}(U_i) \to U_i$ 与 $\varphi_Y \colon T \to Y$ 诱导了一个唯一的同态

$$\varphi_i \colon \varphi_X^{-1}(U_i) \to U_i \times_S Y$$

其是由泛性质诱导的

$$\begin{tikzcd}
\varphi_X^{-1}(U_i) \arrow[drr, bend left, "\varphi_Y"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_X"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi_i"] & & \\
& U_i \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& U_i \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

在 $\varphi^{-1}(U_{ij})$ 上，由泛性质的唯一性我们知道 $\varphi_i = \varphi_j$，从而可以粘成唯一的 $\varphi \colon T \to X \times_S Y$ 使得

$$p_X \circ \varphi = \varphi_X, \quad p_Y \circ \varphi = \varphi_Y$$

故 $X \times_S Y$ 为纤维积. $\square$

引理 4.2.4

若 S 是仿射的，则 $X \times_S Y$ 存在.

证明: 若 Y 是仿射的，令 U_i 为 X 的仿射开覆盖，从而 $U_i \times_S Y$ 存在，从而可以粘成 $X \times_S Y$. 当 Y 不是仿射的时候，我们取 Y 的仿射开覆盖 V_j，知道存在 $X \times_S V_j$，可以粘成 $X \times_S Y$，故存在. □

引理 4.2.5

$U \subset X$ 是开子概形，令 $\iota\colon U \to X$ 为含入映射，令 $f, g\colon T \to U$ 为两个态射使得 $\iota \circ f = \iota \circ g$，则 $f = g$.

证明: 拓扑上是显然的，令 $f = g = h$ 为拓扑上的映射，我们知道 $f^\#$ 与 $g^\#$ 都是从 $\mathscr{O}_X|_U \to h_*\mathscr{O}_T$ 的层态射，而 $\iota^\#$ 在 $V \subset U$ 上就是从 $\mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_U(V)$ 的恒等态射，注意到我们有

$$(\iota \circ f)^\# = (\iota \circ g)^\#$$

这等价于

$$\iota_*(f^\#) \circ \iota^\# = \iota_*(g^\#) \circ \iota^\#$$

对任意开集 $V \subset U$，我们有 $\iota^\#(V)$ 是恒等映射，则我们知道有

$$\iota_*(f^\#)(V) \circ \iota^\#(V) = \iota_*(g^\#)(V) \circ \iota^\#(V)$$

也就是

$$f^\#(V) = g^\#(V)$$

所以 $f^\# = g^\#$，即 $f = g$. □

引理 4.2.6

令 $\iota\colon T \to S$ 为一个开嵌入，令 X, Y 为两个 T-概形，若 $X \times_T Y$ 存在，则 $X \times_S Y$ 存在，并且典范同构于 $X \times_T Y$.

证明: 有态射 $f_X\colon X \to T$ 与 $f_Y\colon Y \to T$，则 X, Y 都是 S-schemes，其结构态射为 $\iota \circ f_X$ 与 $\iota \circ f_Y$. 则对任意的概形 Z 与 $\varphi_X\colon Z \to X, \varphi_Y\colon Z \to Y$，使得

$$(\iota \circ f_X) \circ \varphi_X = (\iota \circ f_Y) \circ \varphi_Y$$

则由于 ι 是开嵌入，我们知道

$$f_X \circ \varphi_X = f_Y \circ \varphi_Y$$

所以由 $X\times_T Y$ 的泛性质，知道存在唯一的态射 $Z\to X\times_T Y$ 使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dr, "f_Y"] \arrow[drr, "\iota\circ f_Y"] & & \\
Z \arrow[r, dashed] \arrow[urr] \arrow[drr] & X\times_T Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \arrow[r, hook, "\iota"'] & S \\
 & & X \arrow[ur, "f_X"] \arrow[urr, "\iota\circ f_X"'] & &
\end{tikzcd}
$$

于是我们发现 $X\times_T Y$ 满足 $X\times_S Y$ 的泛性质，所以存在典范的同构. □

经过这许许多多引理，我们终于可以证明本节的主定理了.

定理 4.2.1: 纤维积的存在性

对于任意基概形 S 上的概形 $f_X\colon X\to S$ 与 $f_Y\colon Y\to S$，纤维积 $X\times_S Y$ 是存在的.

证明: 令 $\{S_i\}_{i\in I}$ 为 S 的一个仿射开覆盖，令 $U_i=f_X^{-1}(S_i)$ 与 $V_i=f_Y^{-1}(S_i)$. 由引理 4.2.4 知道纤维积 $U_i\times_{S_i}V_i$ 存在. 从而由引理 4.2.6 知道它们同时也是纤维积 $U_i\times_S V_i$. 事实上这就是纤维积 $U_i\times_S Y$，我们通过泛性质来验证，任给一个概型 T，满足交换图：

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
U_i \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

由于 $T\to U_i\to S$ 的像落在 S_i 中，所以由交换图知道 $T\to Y\to S$ 的像也在 S_i 中，于是知道上面的交换图等价于

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
U_i \arrow[r] & S_i
\end{tikzcd}
$$

同理，由于 $T\to Y\to S$ 的像在 S_i 中，我们知道 $T\to Y$ 的像落在 V_i 中，于是交换图等价于

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & V_i \arrow[d] \\
U_i \arrow[r] & S_i
\end{tikzcd}
$$

于是我们知道有下面的交换图成立

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& U_i \times_{S_i} V_i \arrow[r] \arrow[d] & V_i \arrow[d] \\
& U_i \arrow[r] & S_i
\end{tikzcd}$$

然后翻译回原本的交换图即

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& U_i \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& U_i \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

故 $U_i \times_{S_i} V_i$ 与 $U_i \times_S Y$ 是同构的，因此所有的 $U_i \times_S Y$ 都存在，再利用引理 4.2.3 知道可以粘成纤维积 $X \times_S Y$. □

4.3 First example in fiber products

来简单看一些例子. 首先对于任意的环 R，我们有典范的同构

$$R[x_1, \cdots, x_m] \otimes_R R[y_1, \cdots, y_n] \cong R[x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]$$

因此有

$$\mathbb{A}_R^m \times_R \mathbb{A}_R^n \cong \mathbb{A}_R^{m+n}$$

即使当 $R = \mathbb{C}$ 的时候，$\mathbb{A}_C^{m+n}$ 的底空间与 $\mathbb{A}_C^m \times \mathbb{A}_C^n$ 的底空间仍然是不一样的，所以再次阐释了为什么纤维积不能通过对底空间的纤维积赋予层结构而得到.

令 $X \subset \mathbb{A}_R^m = \operatorname{Spec} R[x_1, \cdots, x_m]$ 与 $Y \subset \mathbb{A}_R^n = \operatorname{Spec} R[y_1, \cdots, y_n]$ 为两个闭子概形，分别由理想 $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_r) \subset k[x_1, \cdots, x_m]$ 与 $\mathfrak{b} = (g_1, \cdots, g_s) \subset k[y_1, \cdots, y_n]$ 定义，则 $X \times_R Y$ 同构与 $\mathbb{A}_R^{m+n}$ 的闭子概形

$$\operatorname{Spec} R[x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]/(f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_s)$$

要说明这件事我们实际上就是要计算

$$\left(\frac{R[x_1, \cdots, x_m]}{(f_1, \cdots, f_r)}\right) \otimes_R \left(\frac{R[y_1, \cdots, y_n]}{(g_1, \cdots, g_s)}\right)$$

为了计算这个，我们需要引入一个交换代数的引理，即若 $I \lhd M, J \lhd N$，则有

$$(M/I) \otimes_R (N/J) \cong \frac{M \otimes_R N}{I \otimes N + M \otimes J}$$

由于张量积是右正合函子，注意到我们有

$$I \to M \to M/I \to 0$$

于是有

$$I \otimes_R N \to M \otimes_R N \to (M/I) \otimes_R N \to 0$$

所以有

$$(M/I) \otimes_R N \cong M \otimes_R N/I \otimes_R N$$

现在对

$$J \to N \to N/J \to 0$$

张量积上 M/I 得到

$$(M/I) \otimes_R J \to (M/I) \otimes_R N \to (M/I) \otimes_R (N/J) \to 0$$

故

$$(M/I) \otimes_R (N/J) \cong \frac{(M/I) \otimes_R N}{(M/I) \otimes_R J}$$

于是我们得到两个自然满射

$$f \colon M \otimes_R N \to (M/I) \otimes_R N, \quad g \colon (M/I) \otimes_R N \to (M/I) \otimes_R (N/J)$$

于是得到映射

$$F := g \circ f \colon M \otimes_R N \to (M/I) \otimes_R (N/J)$$

于是我们只要计算 $\operatorname{Ker} F$ 即可，注意到

$$\operatorname{Ker} F = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$$

而 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im}((M/I) \otimes_R J)$，注意到 $(M/I) \otimes_R J$ 的生成元的原像形如 $m \otimes_R n$，其中 $n \in J$，于是知道集合的原像为核+集合生成元的原像，即

$$\operatorname{Ker} F = f^{-1}(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Ker} f + M \otimes_R J = I \otimes_R N + M \otimes_R J$$

故引理得证，所以我们知道

$$(M/I) \otimes_R (N/J) \cong \frac{M \otimes_R N}{I \otimes N + M \otimes J} \cong \frac{R[x_1, \cdots, x_m] \otimes_R R[y_1, \cdots, y_n]}{(f_1, \cdots, f_r) \otimes_R R[y_1, \cdots, y_n] + R[x_1, \cdots, x_m] \otimes_R (g_1, \cdots, g_s)}$$

而在同构

$$R[x_1, \cdots, x_m] \otimes_R R[y_1, \cdots, y_n] \cong R[x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]$$

下，我们知道

$$(f_1,\cdots,f_r)\otimes_R R[y_1,\cdots,y_n]+R[x_1,\cdots,x_m]\otimes_R(g_1,\cdots,g_s)=(f_1,\cdots,f_r,g_1,\cdots,g_s)$$

故得证. 其集合上的直觉为 X 是在 m 维空间中由 $f_1=0,\ldots,f_r=0$ 定义的图形，Y 是在 n 维空间中由 $g_1=0,\ldots,g_s=0$ 定义的图形，当把这两个图形乘在一起时，实际上是在一个 $m+n$ 维的新空间里，要求所有的 f_i 为 0，同时所有的 g_j 为 0，所以，新图形的定义方程就是这两组方程的并集.

对于 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}\times_{\mathbb{R}}\operatorname{Spec}\mathbb{C}$，我们需要计算 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$，我们知道 $\mathbb{C}=\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$，于是有

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathbb{R}[t]/(t^2+1)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathbb{C}[t]/(t^2+1)=\mathbb{C}[t]/(t+i)(t-i)\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$$

最后的同构是中国剩余定理，故 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}\times_{\mathbb{R}}\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 就是两个分离的闭点.

Remark 4.3.1

我们会发现在处理一些代数的同构时，实际上只处理了模同构，其依据为一个定理：若 $\varphi\colon M\to N$ 为 R-模同构，且 M,N 都是 R-代数，如果 $\varphi(1_M)=1_N$，并且存在 M 的一组 R-生成元 $\{m_i\}$ 使得对任意 i,j 都有 $\varphi(m_im_j)=\varphi(m_i)\varphi(m_j)$，则 φ 自动是一个代数同构.

定理告诉我们如果给定一个代数同态，那么我们把这个代数同态给遗忘成模同态，在模范抽里面证明同构就足以说明代数同构，因为在代数同构里面，其一一对应往往比自然代数结构困难，一个典型的例子就是

$$A\otimes_R R[x]\cong A[x]$$

这件事情的证明是利用模同构证明的，但是其同构态射是代数同态，所以自然是代数同构.

Remark 4.3.2

在处理一些张量积问题时，我们经常会遇到一些标量延拓的问题，例如 B 是 A 代数，I 是 A 的理想，则有

$$B/IB\cong B\otimes_A(A/I)$$

这个等式本身由张量积函子的右正合性保证，但是其揭示了一个更加广泛的结构，即如果想在 B 上通过“某种规则”构造一个新的环，而这个“规则”在 A 上已经构造好了，那么直接把 B 和 A 的构造产物做张量积即可. 下面是常见的一些结构：

在 A 上的构造	A 端的产物	B 端的对应产物	张量积表示
取商	A/I	B/IB	$B\otimes_A(A/I)\cong B/IB$
局部化	$S^{-1}A$	$S^{-1}B$	$B\otimes_A S^{-1}A\cong S^{-1}B$
多项式	$A[t]$	$B[t]$	$B\otimes_A A[t]\cong B[t]$
剩余域	$\kappa(\mathfrak{p})$	纤维环	$B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})\cong(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{p}}$

4.4 Base change

纤维积让我们有能力去改变基概形，也就是所谓的基变换.

定义 4.4.1: base change

给定 S-概形 X，结构态射为 $\rho\colon X \to S$，若 $T \to S$ 为任一的态射，则我们可以得到纤维积 $X_T = X \times_S T$，其自然是一个 T-概形，我们成 X_T 从 X 通过 **base change** $T \to S$ 获得.

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r] \arrow[d, "p_T"'] & X \arrow[d, "p"] \\
T \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

虽然基变换是纤维积，但其创新视角在于我们不把 $X \times_S T$ 看成是对称的积，而是同一个几何对象 X 在不同环境下的体现. 可以把 $X \to S$ 看成由 S 参数化的一族对象，X_T 就是在新的参数空间 T 上重新定义的几何对象.

如我们可以对方程组的基域进行变换，令 $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$，对任意域扩张 $k \subset K$，基变换 X_K 由下式给出

$$X_K = X \times_k K \operatorname{Spec} K[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$$

于是 X_K 由与 X 相同的方程组定义，但是我们在扩域 K 中去解. 比如令 $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$，基变换到 $\mathbb{C}$ 上得到

$$X_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$$

其中 X 没有 $\mathbb{R}$-点，但是 $\mathbb{X}_{\mathbb{C}}$ 有无穷多个 $\mathbb{C}$-点.

一个重要例子如下，令 X 是一个 k-概形，给定 k 的一个域自同构 σ，则 σ 诱导了同态 $\iota\colon \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k$，从而我们可以得到基变换 σX:

$$\begin{tikzcd}
\sigma X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r, "\iota"'] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

先介绍一个命题.

命题 4.4.1

若基变换 $\rho\colon T \to S$ 是一个同构，则对任意 $f\colon X \to S$，沿 ρ 的基变换 $X \times_S T$ 总与 X 同构.

证明: 交换图道尽一切:

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[dr, "p_X"] \arrow[drrr, bend left, "p_X\circ g\circ p_X"] \arrow[dddrr, bend right, "p_T\circ g\circ p_X"'] & & & \\
& X \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\rho^{-1}\circ f"'] & & \\
& & X_T \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& & T \arrow[r, "\rho"'] & S
\end{tikzcd}$$

先不管最左上角的 X_T，我们利用得到的 g 知道 $p_X\circ g=\mathrm{id}$，现在要说明 $g\circ p_X=\mathrm{id}$，再看左上角的 X_T，有复合

$$p_X\circ g\circ p_X=(p_X\circ g)\circ p_X=\mathrm{id}\circ p_X=p_X$$

并且

$$p_T\circ g\circ p_X=\rho^{-1}\circ f\circ p_X=\rho^{-1}\circ\rho\circ p_T=p_T$$

于是我们知道有交换图

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[dr, "g\circ p_X"] \arrow[drr, bend left, "p_X"] \arrow[ddr, bend right, "p_T"'] & & \\
& X_T \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& T \arrow[r, "\rho"'] & S
\end{tikzcd}$$

由纤维积泛性质知道

$$g\circ p_X=\mathrm{id}$$

综上知道是同构. □

于是注意到 ι 是同构，所以 σX 与 X 作为抽象概形是同构的，但是其作为 k-概形一般来说不是同构. 例如我们取 $k=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 与自同构

$$\sigma(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$$

则我们有两个概形

$$X=\operatorname{Spec}k[x,y]/(x^2+\sqrt{2}y^2+1),\quad \sigma X=\operatorname{Spec}k[x,y]/(x^2-\sqrt{2}y^2+1)$$

第一个概型没有 k-值点，但是第二个有无穷多个.

Remark 4.4.1

计算 σX 的过程如下：若 X 是由 $k[x_1,\dots,x_n]$ 中的理想 $I=(f_1,\dots,f_m)$ 定义的仿射概型

Spec A，则 σX 定义为纤维积 $X \times_{\operatorname{Spec} k,\sigma} \operatorname{Spec} k$，其对应的坐标环为环的张量积

$$A \otimes_{k,\sigma} k \cong (k[x_1,\ldots,x_n]/I) \otimes_{k,\sigma} k$$

由于该张量积中的标量乘法满足规则

$$(c \cdot a) \otimes 1 = a \otimes \sigma(c)$$

对于任一给定的定义方程 $f_j = \sum a_I x^I$，其在张量积中对应的元素为

$$f_j \otimes 1 = \sum (a_I x^I \otimes 1) = \sum (x^I \otimes \sigma(a_I))$$

这表明在以张量积右侧的 k 作为系数域的新多项式环中，定义方程的系数由 a_I 变为了 $\sigma(a_I)$，因此 σX 的定义方程组即为将 X 的定义方程组中所有系数通过自同构 σ 变换后得到的结果.

4.5 Fibers

定义 4.5.1: Fiber

$f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 在 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ 处的 **fiber** 为 $f^{-1}(\mathfrak{p})$.

设 f 是环态射 $\varphi\colon A \to B$ 诱导的，对 $y \in \operatorname{Spec} A$，对应 A 中的素理想 $\mathfrak{p}$，则 $f^{-1}(y)$ 由 B 中所有满足 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ 的素理想 $\mathfrak{q}$ 构成.

当 $y \in \operatorname{Spec} A$ 是闭点的时候，$\mathfrak{p}$ 是极大理想，则 $\{y\} = \overline{\{y\}} = V(\mathfrak{p})$，所以我们知道

$$f^{-1}(V(\mathfrak{p})) = V(\varphi(\mathfrak{p})B)$$

特别地，纤维 $f^{-1}(y)$ 是一个闭集，同胚于 $\operatorname{Spec}(B/\varphi(\mathfrak{p})B)$.

但是当 y 不是闭点，纤维可能在 $\operatorname{Spec} B$ 中不再是闭集，虽然我们仍然有

$$f^{-1}(V(\mathfrak{p})) = V(\varphi(\mathfrak{p})B)$$

成立，但是这个闭集会包含一些落在 $\mathfrak{p}$ 闭包中的点，而不一定映射向 y. 所以这不是纤维，于是我们就想要排除那些多余的点.

我们令

$$S = \varphi(A \backslash \mathfrak{p})$$

为 B 中的乘性子集，考虑局部化

$$B_{\mathfrak{p}} := S^{-1}B$$

则我们会注意到 $V(\varphi(\mathfrak{p})B)$ 中那些不映射向 $\mathfrak{p}$ 的素理想一定与 $\varphi(A - \mathfrak{p})$ 相交，因为若

$$\mathfrak{q} \in V(\varphi(\mathfrak{p})B)$$

并且

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supsetneq \mathfrak{p}$$

则

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset$$

所以存在 $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \cap (A - \mathfrak{p})$，即存在 $\varphi(a) \in \mathfrak{q} \cap S$，从而 $\mathfrak{q}$ 在局部化下变为 (1).

现在我们考虑由环映射

$$B \to B_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}/\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}$$

诱导的素谱的映射

$$\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Spec}(B)$$

命题 4.5.1: 纤维的刻画

记号全部同上，则 $f\colon \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ 对 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$ 诱导的纤维有同胚：

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) \cong \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}})$$

若 $\mathfrak{p}$ 还是一个闭点，则 $f^{-1}(\mathfrak{p})$ 同胚于 $\mathrm{Spec}(B/\varphi(\mathfrak{p})B)$.

证明: 首先注意到

$$\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}) \cong V(\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}})$$

然后

$$\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) \cong D \subseteq \mathrm{Spec}B$$

其中 D 是 B 中与 S 无交的素理想构成的集合，所以我们就知道

$$\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}) \cong K$$

其中 K 满足

$$K = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}B\colon \mathfrak{q} \cap S = \emptyset, \mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}} \supseteq \varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}\}$$

其中 $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ 告诉我们 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$，而 $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}} \supseteq \varphi(\mathfrak{p})B_{\mathfrak{p}}$ 告诉我们 $\mathfrak{q} \supseteq \varphi(\mathfrak{p}) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{p}$，综合起来即

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$$

所以得证. □

4.6 Scheme theoretic fibers

纤维积的一大用处是给一点的原像赋予概形结构，令 $f\colon X \to Y$ 为概形的态射，$y \in Y$ 是一个点，我们可以考虑映射

$$\mathrm{Spec}\,\kappa(y) \to Y$$

对应 $y \to Y$ 的含入映射，注意 $\kappa(y) = \mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$，上面的映射实际上由下面的复合给出：

$$\operatorname{Spec} \kappa(y) \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{Y,y} \to Y$$

我们定义 **scheme theoretic fiber** 为

$$X_y = \operatorname{Spec} \kappa(y) \times_Y X$$

即如下交换图

$$\begin{tikzcd}
X_y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

注意 X_y 是 $\kappa(y)$-概形，泛性质告诉我们对任意的 $g\colon T \to X$ factors via X_y 当且仅当 $f \circ g$ factors through $\operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y$. 特别地，这表示 $f \circ g$ 把 T 送到 y.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X_y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
& \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

通俗来说，这意味着：如果一个方案 T 映射到 X 后，其整个图像在 Y 中都坍缩到了点 y上，那么 T 实际上是映射到了纤维 X_y 里. 这确立了 X_y 作为“落在 y 之上的所有东西” 的泛概形结构.

命题 4.6.1: 概形纤维是拓扑纤维

令 $f\colon X \to Y$ 为一个态射，$y \in Y$ 是一个点，则 $X_y \to X$ 是一个到拓扑纤维 $f^{-1}(y)$ 的同胚.

证明: 不妨设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的，先假设 $X = \operatorname{Spec} B$，都是仿射的，$f\colon X \to Y$ 由环同态 $\varphi\colon A \to B$ 诱导. 我们早在之前就已经说明了 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ 的纤维 $f^{-1}(\mathfrak{p})$ 同胚于素谱 $\operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$，而张量积告诉我们

$$\begin{aligned}
(B/\mathfrak{p}B)_\mathfrak{p} &\cong B/\mathfrak{p}B \otimes_A A_\mathfrak{p} \\
&\cong B \otimes_A A/\mathfrak{p} \otimes_A A_\mathfrak{p} \\
&\cong B \otimes (A/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \\
&\cong B \otimes_A A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \\
&\cong B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})
\end{aligned}$$

于是 $f^{-1}(\mathfrak{p})$ 的拓扑与 $\operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ 的拓扑相同，而后者与 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ 的拓扑相同，这就是概形 X_y. 所以当 X 仿射的时候立刻得到命题成立. 对于一般情况，令 U 为 X 的一个仿射开集，令

$\iota\colon X_y \to X$ 表示投影映射 $X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to X$，由引理 4.2.2 知道

$$U_y = U \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

就是 X_y 的开子概形 $\iota^{-1}(U)$. 由仿射情况，我们知道 U_y 与 $(f|_U^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap U$ 同胚. 由于同胚是 local on the target，所以 ι 在 $f^{-1}(y)$ 上同胚. □

Example 4.6.1
令 k 为一个域，考虑态射

$$f\colon X = \operatorname{Spec} k[x, y, t]/(y^2 - tx) \to \operatorname{Spec} k[t]$$

对 $a \in k$，闭点 $(t - a)$ 上的纤维由下式给出

$$X_a = \operatorname{Spec}\big(k[x, y, t]/(y^2 - tx) \otimes_{k[t]} k[t]/(t - a)\big) \cong \operatorname{Spec} k[x, y]/(y^2 - ax)$$

对任意的 $a \neq 0$，我们知道 $y^2 - ax$ 是不可约的，所以 X_a 是整的. 但当 $a = 0$ 时，其纤维为

$$X_0 = \operatorname{Spec} k[x, y]/(y^2)$$

这是一个非约化的概形.

纤维积也可以用在定义所谓概形的交上，令 U, V 是 S 的两个开子概形，则其纤维积 $U \times_S V$ 同构于 S 的开子概形 $U \cap V \subset S$. 闭子概型的交相对复杂，X 是一个概型，Y, Z 是两个闭子概形，我们定义它们的 **scheme-theoretic intersection** 为纤维积

$$Y \times_X Z$$

其结构态射为闭嵌入 $i\colon Y \to X, j\colon Z \to X$. 在 $X = \operatorname{Spec} A$ 的特殊情况下，Y, Z 形如 $\operatorname{Spec} A/I$ 与 $\operatorname{Spec} A/J$(见推论 6.1.1)，所以其纤维积为

$$\operatorname{Spec}(A/I \otimes_A A/J) = \operatorname{Spec} A/(I + J)$$

因此 $Y \times_X Z$ 为理想 $I + J$ 对应的闭子概型.

4.7 Segre embedding

本节中我们要说明两个射影概形的积仍然是射影的，其具体技术我们称之为 **Segre embedding**.

对于 k-点，Segre 嵌入定义为齐次坐标的逐点乘法：

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon \mathbb{P}^m(k) \times \mathbb{P}^n(k) & \to & \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}(k) \\ (a_0 : \cdots : a_m) \times (b_0 : \cdots : b_n) & \mapsto & (a_0 b_0 : a_0 b_1 : \cdots : a_i b_j : \cdots : a_m b_n) \end{array}$$

容易验证这个是良定义的，我们把 a_ib_j 记为 c_{ij}. 同时容易看出 σ 是单射，因为我们可以从 c_{ij} 恢复 a_i/a_j 与 b_i/b_j，即

$$a_i/a_p = c_{iq}/c_{pq}, \quad b_j/b_q = c_{pj}/c_{pq}$$

为了将 σ 定义为概形的态射，令 A 是一个环，我们要定义一个闭嵌入

$$\sigma\colon \mathbb{P}^m_A \times_A \mathbb{P}^n_A \to \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}_A$$

为了构造它，我们使用标准的仿射开覆盖，令

$$R_i = A\left[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_m}{x_i}\right], \quad S_j = \left[\frac{y_0}{y_j}, \cdots, \frac{y_n}{y_j}\right], \quad T_{ij} = A\left[\frac{t_{00}}{t_{ij}}, \cdots, \frac{t_{mn}}{t_{ij}}\right]$$

为 $\mathbb{P}^m_A, \mathbb{P}^n_A$ 与 $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}_A$ 的标准仿射开覆盖. 仿射概型

$$U_{ij} = \mathrm{Spec}(R_i \otimes_A S_j)$$

给出了 $\mathbb{P}^m_A \times_A \mathbb{P}^n_A$ 的开覆盖. 我们可以考虑态射

$$U_{ij} \to \mathrm{Spec}(T_{ij})$$

由环态射

$$\varphi_{ij}\colon T_{ij} \to R_i \otimes_A S_j, \quad \frac{t_{kl}}{t_{ij}} \mapsto \frac{x_k}{x_i} \otimes \frac{y_l}{y_j}$$

容易看出来这是一个满射，因此其诱导的概形态射是一个闭嵌入，为了看到怎么粘起来，我们需要知道

$$(R_i \otimes_A S_j)_{(x_p/x_i)\otimes(y_q/y_j)} = (R_p \otimes S_q)_{(x_i/x_p)\otimes(y_j/y_q)}, \quad (T_{ij})_{t_{pq}/t_{ij}} = (T_{pq})_{t_{ij}/t_{pq}}$$

于是不难看到

$$U_{ij} \to \mathrm{Spec}\, T_{ij}$$

在相交处是相容的，于是可以粘成一个整体的态射. 故结合闭嵌入的定义，我们立刻得到：

命题 4.7.1

Segre 嵌入 $\sigma\colon \mathbb{P}^m_A \times_A \mathbb{P}^n_A \to \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}_A$ 是一个闭嵌入.

于是我们知道两个射影 A-概形的乘积还是射影的，给定 $X \subset \mathbb{P}^m_A$ 与 $Y \subset \mathbb{P}^n_A$，则 $X \times_A Y$ 通过纤维积的泛性质

$$\begin{tikzcd}
X \times_A Y \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed] & & Y \arrow[d, hook] \\
& \mathbb{P}^m_A \times_A \mathbb{P}^n_A \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^n_A \arrow[d] \\
X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^m_A \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, A
\end{tikzcd}$$

我们知道有下面的复合嵌入射影空间

$$X \times_A Y \to \mathbb{P}^m_A \times_A \mathbb{P}^n_A \to \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}_A$$

4.8 Functor of points

回忆我们定义了 R-值点，对任意的概形 X，都有 $X(R)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}R,X)$，对任意的环态射 $\varphi\colon R\to S$，很自然诱导了一个态射

$$X(\varphi)\colon X(R)\to X(S)$$

因此 X 定义了一个函子

$$X\colon \mathbf{CRing}\to\mathbf{Set}$$

这个函子被称为 X 的 **functor of points**.

给定概形的态射 $f\colon X\to Y$，则对任意的环 R，我们都有集合的映射

$$f_R\colon X(R)\to Y(R)$$

使得这个映射对任意的环态射 $\varphi\colon R\to S$ 有

$$\begin{tikzcd} X(R) \arrow[r, "f_R"] \arrow[d, "X(\varphi)"'] & Y(R) \arrow[d, "Y(\varphi)"] \\ X(S) \arrow[r, "f_S"'] & Y(S) \end{tikzcd}$$

在范畴论的语境中，上图实际上在说 f 是一个自然变换：$f\colon X(-)\to Y(-)$.

我们可以把点函子延拓到概形上，即对任意的测试概形 T，有

$$X(-)\colon \mathbf{Sch}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set},\quad T\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T,X)$$

则 $X(-)$ 是一个概型范畴上的反变函子，对于 $f\colon X\to Y$，我们可以定义一个自然变换

$$\eta\colon X(-)\to Y(-)$$

这表示对于任意的态射 $\sigma\colon S\to T$，下图交换

$$\begin{tikzcd} X(T) \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[d, "X(\sigma)"'] & Y(T) \arrow[d, "Y(\sigma)"] \\ X(S) \arrow[r, "\eta_S"'] & Y(S) \end{tikzcd}$$

命题 4.8.1: 概形的米田引理

令 X 与 Y 为概形，则我们有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,Y)\cong \mathrm{Hom}_{[\mathbf{Sch}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]}(h_X,h_Y)\cong \mathrm{Hom}_{[\mathbf{CRing},\mathbf{Set}]}(h_X,h_Y)$$

其中 $h_X=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-,X)=X(-)$.

Remark 4.8.1

即概形范畴到其预层范畴的米田嵌入是全忠实的，并且由于仿射概型范畴是概型范畴的稠密子范畴，于是保持了全忠实性. 其稠密性在于概形是其仿射开子概型的余极限，粘合的过程就是计算余极限的过程. 所以

$$\mathrm{Hom}(X,Y)=\mathrm{Hom}(\mathrm{colim}\,A_i,Y)=\lim\mathrm{Hom}(A_i,Y)$$

而在 $A_i\to Y$ 完全由 $X\to Y$ 所决定，所以限制在稠密子范畴时仍然全忠实.

米田引理也有相对版本，对于 S 上的概形范畴 $\mathbf{Sch}/S$，对 S-概形 X，函子

$$X(T)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T,X)$$

定义了一个从 $\mathbf{Sch}/S$ 到 $\mathbf{Set}$ 的反变函子，米田引理说的是 S-概形的态射 $X\to Y$ 自然地一一对应到了自然变换 $X(-)\to Y(-)$. 当 $S=\mathrm{Spec}\,A$ 是仿射的时候，也可以将其视为 $\mathbf{Alg}/A\to\mathbf{Set}$.

我们称一个函子 $F\colon\mathbf{Sch}^{\mathrm{op}}\to \mathit{set}$ 是 **representable**，如果存在一个概形 X 使得 $F\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-,X)$. 米田引理的推论告诉我们如果 X 存在，则在同构意义下唯一.

比如函子 $F(T)=\mathscr{O}_T(T)$，则我们知道 F 是可表的，因为

$$F(T)=\mathscr{O}_T(T)=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[t],\mathscr{O}_T(T))\cong\mathrm{Hom}(T,\mathbb{A}^1)$$

更一般地，我们有

$$F(T)=\Gamma(T,\mathscr{O}_T)^n=\mathrm{Hom}(T,\mathbb{A}^n)$$

对于函子

$$F(T)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A,\mathscr{O}_T(T))=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T,\mathrm{Spec}\,A)$$

知道函子由 $\mathrm{Spec}\,A$ 代表.

由于协变 Hom 函子 $\mathrm{Hom}(T,-)$ 是右伴随，所以保持极限，故知道

$$\mathrm{Hom}(T,X\times_S Y)=X(T)\times_{S(T)}Y(T)$$

虽然 $X\times_S Y$ 的纤维积结构我们有时比较难以弄清，但是 $X(T)\times_{S(T)}Y(T)$ 作为集合纤维积的结构是清楚的，而米田嵌入的全忠实性告诉我们研究清楚点函子就能研究清楚概形，这将大大简化一些计算.

命题 4.8.2: 纤维积基本公式

X,Y,Z,T 为 S-概形，则存在唯一的与投影映射相容的典范同构：

(1) **Reflexivity** : $X\times_S S\cong X$.

(2) **Symmetry** : $X\times_S Y\cong Y\times_S X$.

(3) **Associativity** : $(X\times_S Y)\times_S Z\cong X\times_S(Y\times_S Z)$.

(4) **Transitivity** : 若 Y 是一个 T-概形，则

$$(X\times_S T)\times_T Y\cong X\times_S Y$$

证明: 米田引理告诉我们只需要对集合验证这些东西即可，而集合情况是显然的. □

命题 4.8.3: 还有性质

X, Y 是 S-概形，则

(1) 开浸入 $U \to X, V \to Y$ 诱导 $U \times_S V \cong p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \subset X \times_S Y$.

(2) S 概形态射 $X \to X', Y \to Y'$ 诱导 $X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ 使得两个纤维积图表之间交换.

(3) $T \to S$，则 $(X \times_S X) \times_S T \cong (X \times_S T) \times_S (X \times_S T) \cong X_T \times_S X_T$.

证明: 依旧 Yoneda. □

4.9 Group scheme

所谓群概形是概形中的群对象. 具体来说，在一个有终对象 Z(概形范畴为 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$)和有限乘积的范畴 $\mathscr{C}$ 中讨论的群对象包含如下资料，一个 $G \in \operatorname{ob}(\mathscr{C})$ 以及三个态射：

$$m\colon G \times G \to G, \quad i\colon G \to G, \quad e\colon Z \to G$$

分别编码了群乘法，取逆和单位元，并且满足群公理(结合律，幺元律，逆元). 若乘法满足交换律，则称为交换群概形，我们可以用交换图来刻画这些律，结合律：

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

逆元律：

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "(\mathrm{id},i)"'] \arrow[d] \arrow[dr, "(i,\mathrm{id})"] & \\
G \times G \arrow[dr, "m"'] & Z \arrow[d, "e"] & G \times G \arrow[dl, "m"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

幺元律：

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\cong"] & \\
Z \times G \arrow[dr, "m\circ(e\times\mathrm{id})"'] & & G \times Z \arrow[dl, "m\circ(\mathrm{id}\times e)"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

下面用点函子的观点简单介绍一下仿射群概形.

定义 4.9.1: Affine group scheme

一个 k 上的 **affine group scheme** 是一个由 k-代数 A 表示的可表函子

$$G\colon \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp}$$

即 $G(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, R)$. k-群概形之间的态射 $H \to G$ 就是函子之间的自然变换，并且满足对于任意的 k-代数 R，都有

$$H(R) \to G(R)$$

是一个群同态. 若对任意的 R 这个都是群同构，则我们称 $H \to G$ 是同构.

我们有非常经典的例子：**additive group** $\mathbb{G}_a$ 为一个函子，满足

$$\mathbb{G}_a(R) = (R, +)$$

其由 $k[x]$ 表示，即 $\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1_k$. 我们如果考虑 $k[x_{ij}]_{1\le i,j\le n}$，则其表示的仿射群概形 $\mathbb{G}_a^{n^2}$ 就是矩阵加法群，即

$$\mathbb{G}_a^{n^2}(R) = M_n(R)$$

下面定义 **multiplicative group** $\mathbb{G}_m$，满足

$$\mathbb{G}_m(R) = R^\times$$

其由 $k[x,y]/(xy-1)$ 代表. 进一步我们可以考虑一般线性群 $\mathrm{GL}_n(n \ge 2)$，其由 k-代数

$$k[x_{ij}\colon 1 \le i, j \le n][y]/(y \det(x_{ij}) - 1)$$

表示，特别地，我们有 $\mathbb{G}_m = \mathrm{GL}_1$. 如果希望内蕴的定义，我们可以考虑一个有限秩自由 k-模 V，定义

$$\mathrm{GL}_V(R) := \mathrm{Aut}_R(V \otimes_k R \to V \otimes_k R)$$

同理附加一些约束条件，我们可以定义出 SL_n 与 SO_n 等.

Chapter 5: Quasi-coherent sheaves

5.1 $\mathscr{O}_X$-modules

定义 5.1.1

一个 **$\mathscr{O}_X$-module** 是一个层 $\mathscr{F}$ 使得 $\mathscr{F}(U)$ 是一个 $\mathscr{O}_X(U)$-模，对任意的开集 $U \subset X$，并且对任意的 $V \subset U$，限制映射 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ 是 $\mathscr{O}_X(U)$-线性的，即对于任意的 $a \in \mathscr{O}_X(U)$ 与 $s \in \mathscr{F}(U)$，有

$$(a \cdot s)|_V = a|_V \cdot s|_V$$

我们可以将 $\mathscr{O}_X$-模的条件转化为交换图表，即给定一个标量乘法态射

$$\mu\colon \mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$$

使得以下图表交换，首先是结合律

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X \times \mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \arrow[r, "m\times \mathrm{id}_F"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{O}_X}\times\mu"'] & \mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \arrow[r, "\mu"'] & \mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

其中 $m\colon \mathscr{O}_X \times \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ 是环层 $\mathscr{O}_X$ 的环乘法. 其次是幺元律，设 $e\colon 1 \to \mathscr{O}_X$ 是选取单位元的态射(此处 1 是终对象，即单点上的层)：

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \times \mathscr{F} \arrow[r, "e\times \mathrm{id}_{\mathscr{F}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \arrow[d, "\mu"] \\
 & \mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

下面是对标量加法的分配律，令 $a\colon \mathscr{O}_X\times\mathscr{O}_X\to\mathscr{O}_X$ 为加法运算，有交换图：

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{O}_X\times\mathscr{O}_X)\times\mathscr{F} \arrow[r, "a_{\mathscr{O}_X}\times\mathrm{id}_{\mathscr{F}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\Delta_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{O}_X\times\mathscr{F} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathscr{O}_X\times\mathscr{O}_X\times\mathscr{F}\times\mathscr{F} \arrow[d, "\cong"'] & \mathscr{F} \\
(\mathscr{O}_X\times\mathscr{F})\times(\mathscr{O}_X\times\mathscr{F}) \arrow[r, "\mu\times\mu"'] & \mathscr{F}\times\mathscr{F} \arrow[u, "a_{\mathscr{F}}"']
\end{tikzcd}$$

最后是对模加法的分配律，即如下

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X\times(\mathscr{F}\times\mathscr{F}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathscr{O}_X}\times a_{\mathscr{F}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{O}_X}\times\mathrm{id}"'] & \mathscr{O}_X\times\mathscr{F} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathscr{O}_X\times\mathscr{O}_X\times\mathscr{F}\times\mathscr{F} \arrow[d, "\cong"'] & \mathscr{F} \\
(\mathscr{O}_X\times\mathscr{F})\times(\mathscr{O}_X\times\mathscr{F}) \arrow[r, "\mu\times\mu"'] & \mathscr{F}\times\mathscr{F} \arrow[u, "a_{\mathscr{F}}"']
\end{tikzcd}$$

于是如果我们要验证一个层是 $\mathscr{O}_X$-模，只需要验证上面的图都交换即可.

$\mathscr{O}_X$-模的态射，或者说 $\mathscr{O}_X$-线性映射是一个层之间的态射 $\varphi\colon\mathscr{F}\to\mathscr{G}$，其中 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 都是 $\mathscr{O}_X$-模，使得对于任意的开集 U，映射

$$\varphi_U\colon\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$$

是 $\mathscr{O}_X(U)$-模态射. 于是 X 上的所有 $\mathscr{O}_X$ 模构成了一个范畴，我们记为 $\mathbf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$，我们使用

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

来表示 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathscr{O}_X}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$，这是 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}(X)}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ 的加法子群.

如果 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模，$x\in X$ 是一个点，则茎 $\mathscr{F}_x$ 自然是一个 $\mathscr{O}_{X,x}$-模，并且可见 $\varphi_x\colon\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$-模态射. 我们也可以定义 **$\mathscr{O}_X$-submodule**，即一个子层 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}$ 使得 $\mathscr{G}(U)\subset\mathscr{F}(U)$ 是一个 $\mathscr{O}_X(U)$-子模，或者我们可以说含入态射 $\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模态射. 一个 **ideal sheaf** $\mathscr{I}\subset\mathscr{O}_X$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的一个子模，即 $\mathscr{I}(U)\subset\mathscr{O}_X(U)$ 是一个理想.

在一些构造中，我们有必要进行层化，比如考虑商层 $\mathscr{F}/\mathscr{G}$，我们要说明下面的命题：

命题 5.1.1

$\mathscr{F}$ 是一个预层，同时满足 $\mathscr{O}_X$-模的条件，则其层化 $\mathscr{F}^+$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模.

证明: 回忆层化函子保持有限极限，从而保持直积，所以对上述四个交换图层化仍然满足，所以层化还是 $\mathscr{O}_X$-模. □

所以我们可以考虑预层 $U \mapsto \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U)$ 的层化 $\mathscr{F}/\mathscr{G}$，仍然是 $\mathscr{O}_X$-模，同理我们可以谈论 $\mathscr{O}_X$-模态射的 kernel, image 与 cokernel，它们都有自然的 $\mathscr{O}_X$-模结构，从而我们还可以谈论 $\mathscr{O}_X$-模态射的单射，满射与正合，一切都与层情况类似.

同样我们会有推出，给定态射 $f\colon X \to Y$ 与 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$，推出 $f_*\mathscr{F}$ 自然是一个 $\mathscr{O}_Y$-模，利用

$$f^\#\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$$

对于 $s \in f_*\mathscr{F}(V)$ 与 $a \in \mathscr{O}_Y(V)$，我们定义

$$f_*\mathscr{F}(V) \ni a \cdot s = f^\#(a) \cdot s \in \mathscr{F}(f^{-1}V)$$

若 $\iota\colon Y \to X$ 是一个闭嵌入，则态射

$$\iota^\#\colon \mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Y$$

的核 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的理想层，并且存在 $\mathscr{O}_X$-模的正合列

$$0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Y \to 0$$

并且有层同构

$$\iota_*\mathscr{O}_Y \cong \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$$

黏合也是一样的，如果 $\mathscr{F}_i$ 是 $\mathscr{O}_{U_i}$-模，则若 $X = \bigcup U_i$，$\mathscr{F}_i$ 粘成 $\mathscr{F}$，则有 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{O}_X$-模.

5.2 Tilde construction

环的结构层的构造方法可以推广到模上.

定义 5.2.1: Tilde construction

对任意 A-模，我们定义一个 $\operatorname{Spec} A$ 上的预层 $\widetilde{M}$，满足其在主开集上的截面为

$$\widetilde{M}(D(f)) = M_f$$

对 $D(g) \subset D(f)$，就是自然的 $M_f \to M_g$. 我们可以看到 $\widetilde{M}$ 是一个 $\mathscr{B}$-sheaf，从而唯一决定了一个 $\operatorname{Spec} A$ 上的层，我们仍然记为 $\widetilde{M}$，称为关于 M 的 **tilde construction**.

命题 5.2.1

(1) $\widetilde{M}$ 的整体截面为

$$\Gamma(\operatorname{Spec} A, \widetilde{M}) = M$$

(2) 对 $P \in \operatorname{Spec} A$ 对应素理想 $\mathfrak{p}$，我们有

$$\widetilde{M}_P = M_{\mathfrak{p}}$$

Tilde construction 对于 M 是函子性的，任给模态射 $\varphi\colon M\to N$，则存在诱导的层态射

$$\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{M}\to\widetilde{N}$$

我们只需要在主开集 $D(f)$ 上定义

$$\widetilde{\varphi}_{D(f)}\colon \widetilde{M}(D(f))\to\widetilde{N}(D(f)),\quad \frac{m}{f^n}\mapsto\frac{\varphi(m)}{f^n}$$

容易验证这种构造是函子性的. Tilde 函子有很好的性质：

命题 5.2.2

令 $X=\operatorname{Spec}A$ 为一个仿射概形，对于一个 A-模 M 与一个 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$，存在一个自然同构

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M},\mathscr{F})\cong\operatorname{Hom}_A(M,\mathscr{F}(X))$$

其将 $\varphi\colon\widetilde{M}\to\mathscr{F}$ 送到 $\varphi_X\colon M\to\mathscr{F}(X)$.

证明: 对 $f\in A$，考虑交换图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d] & \mathscr{F}(X) \arrow[d] \\ M_f \arrow[r, "\varphi_{D(f)}"'] & \mathscr{F}(D(f)) \end{tikzcd}$$

给出了

$$\varphi_{D(f)}(m/f^n)=\varphi_X(m)_{D(f)}\cdot f^{-n}$$

这告诉我们 $\varphi_{D(f)}$ 完全由 φ_X 决定. 从而给出的映射是单射，至于满射，任给一个 $\alpha\colon M\to\mathscr{F}(X)$，容易去定义 $\widetilde{M}\to\mathscr{F}$ 使得整体截面态射就是 α. 自然性不再验证. □

于是我们知道：

推论 5.2.1

X 是仿射概形，对于任意的 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$，存在一个唯一的 $\mathscr{O}_X$-模同态

$$\beta\colon\widetilde{\mathscr{F}(X)}\to\mathscr{F}$$

由 $\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$ 的恒等映射诱导，这个映射对 $\mathscr{F}$ 是函子性的.

具体来说，给定主开集 $D(f)$，β 将 s/f^n 送到 $s|_{D(f)}/f^n$.

命题 5.2.3: Tilde 函子的正合性与全忠实性

A 是一个环，$X = \operatorname{Spec} A$，则

(1) Tilde 函子 $M \mapsto \widetilde{M}$ 是正合的.

(2) 若 M 与 N 是 A-模，则映射 $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ 给出了一个同构

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

其逆为 $\varphi \mapsto \varphi_X$.

证明: 考虑 A-模正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

取其层，我们得到 $\mathscr{O}_X$-模的序列

$$0 \to \widetilde{M'} \to \widetilde{M} \to \widetilde{M''} \to 0$$

为了说明它是正合的，只需要说明在茎处正合，即对于任意的 $\mathfrak{p}$，有

$$0 \to M'_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to M''_{\mathfrak{p}} \to 0$$

注意到局部化函子是正合函子，所以得证.

第二个叙述利用前面的自然同构是显然的. □

5.3 Quasi-coherent sheaves

定义 5.3.1

令 X 是一个概形，$\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模. 我们说 $\mathscr{F}$ 是 **quasi-coherent** 如果对于 X 的任意仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A$，都存在一个 A-模 M 使得 $\mathscr{F}|_U \cong \widetilde{M}$ 为 $\mathscr{O}_X$-模同构.

我们将拟凝聚层范畴记为 $\mathbf{QCoh}_X$，它是 $\mathbf{Mod}_X$ 的满子范畴. 要说明 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚的，我们实际上只需要说明 $\mathscr{F}$ 在局部上是形如 tilde 构造的.

定理 5.3.1: 拟凝聚层的判别

X 是概型，$\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模，若存在 X 的一个仿射开覆盖 $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i\}$ 使得存在 A_i-模 M_i，满足 $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$. 则 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚的.

证明: 根据仿射沟通引理，我们只需要在仿射开集上证明 $\mathscr{F}$ 可以限制和黏合就可以.

若在 $U = \operatorname{Spec} A$ 上，$\mathscr{F}|_U \cong \widetilde{M}$，则对任意的 $f \in A$，都有

$$\mathscr{F}|_{D(f)} \cong \widetilde{M_f}$$

从而满足限制，反过来，如果存在 $f_1, \cdots, f_r$ 使得

$$A = (f_1, \cdots, f_r)$$

并且在 $\operatorname{Spec} A_{f_i}$ 上 $\mathscr{F}|_{D(f_i)} \cong \widetilde{M_i}$. 由层公理，我们有如下正合列

$$0 \to \mathscr{F}(U) \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i)) \to \bigoplus_{i,j=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i f_j))$$

这是一个 A-模的正合列，由于局部化是正合函子，对于任意的 $k \in \{1, \ldots, r\}$，我们将上述正合列关于元素 $f_k \in A$ 进行局部化，得到如下正合列：

$$0 \to \mathscr{F}(U)_{f_k} \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i))_{f_k} \to \bigoplus_{i,j=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i f_j))_{f_k}$$

注意到，对于层 $\mathscr{F}|_{D(f_i)} \cong \widetilde{M_i}$ 而言，局部化就是主开集上截面的限制，具体来说：

$$\mathscr{F}(D(f_i))_{f_k} \cong \mathscr{F}(D(f_i) \cap D(f_k)) = \mathscr{F}(D(f_i f_k)), \quad \mathscr{F}(D(f_i f_j))_{f_k} \cong \mathscr{F}(D(f_i f_j f_k))$$

于是上述局部化后的正合列可以写成：

$$0 \to \mathscr{F}(U)_{f_k} \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i f_k)) \to \bigoplus_{i,j=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i f_j f_k))$$

另一方面，考虑 $\mathscr{F}$ 在开集 $D(f_k)$ 上的层公理. 由于 $\{D(f_i) \cap D(f_k)\}_{i=1}^{r}$ 构成了 $D(f_k)$ 的一个仿射开覆盖，根据层公理，我们同样有如下的正合列：

$$0 \to \mathscr{F}(D(f_k)) \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i f_k)) \to \bigoplus_{i,j=1}^{r} \mathscr{F}(D(f_i f_j f_k))$$

比较这两个正合列，根据正合序列中核的唯一性，我们得到同构：

$$\mathscr{F}(U)_{f_k} \cong \mathscr{F}(D(f_k))$$

令 $M = \mathscr{F}(U)$ 为 A-模. 我们可以构造一个自然态射 $\alpha : \widetilde{M} \to \mathscr{F}|_U$. 为了证明 α 是同构，只需证明它在 $U = \operatorname{Spec} A$ 的一族开覆盖上的诱导映射是同构. 我们选取开覆盖 $\{D(f_k)\}_{k=1}^{r}$. 在该覆盖的每个分量 $D(f_k)$ 上，态射对应于：

$$\alpha_{D(f_k)} : (\widetilde{M})(D(f_k)) = M_{f_k} = \mathscr{F}(U)_{f_k} \to \mathscr{F}(D(f_k))$$

根据前面的推导，这正是一个同构. 因此，$\alpha : \widetilde{M} \to \mathscr{F}|_U$ 是层的同构，即 $\mathscr{F}|_U \cong \widetilde{M}$.

综上，由仿射沟通引理立刻得到对任意仿射开集成立. □

对于一个仿射概型 $X = \operatorname{Spec} A$，$M \mapsto \widetilde{M}$ 定义了一个从 A-模到 $\mathbf{QCoh}_X$ 的函子，由上面的定理，我们知道任何仿射概型上的拟凝聚层都形如 $\widetilde{M}$，并且我们可以通过取整体截面 $\Gamma(X, \mathscr{F})$ 恢复模 M. 故我们得到了：

定理 5.3.2: 仿射概形上拟凝聚层与模范畴等价

$X = \operatorname{Spec} A$ 为一个仿射概形，则函子

$$\widetilde{(-)}\colon \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{QCoh}_X$$

是一个范畴等价，整体截面函子是其拟逆.

由于模的好性质，仿射概形上的拟凝聚层具有非常好的性质，比如整体截面函子在其上是正合的.

推论 5.3.1

令 $X = \operatorname{Spec} A$，令 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 为拟凝聚层的正合列，则其整体截面仍然正合：

$$0 \to \mathscr{F}'(X) \to \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X) \to 0$$

证明: 由于截面函子是左正合的，所以我们只需要说明 $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X)$ 是满射，令 $C = \operatorname{Coker}(\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X))$，则我们有正合列

$$\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X) \to C \to 0$$

使用 tilde 函子，得到

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to \widetilde{C} \to 0$$

由于 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ 是满射，我们知道 $\widetilde{C} = 0$，所以 $C = \Gamma(X, \widetilde{C}) = 0$. □

词语 ”coherence” 的意思是说如果 U 是一个仿射的开集，则其主开集上的截面完全就是对 U 上截面的局部化. 即整体决定局部，对于一般的模层这是不可能的，某些模层可能会表现地十分狂野.

事实上，一个 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚的当且仅当局部化映射($D(g) \subset U$)对任意的仿射开集 U 是一个同构.

命题 5.3.1: Quasi-coherence and localization

X 是概形，$\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-模预层，满足对于任意的开集 $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ 与任意的 $g \in A$，限制映射 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(D(g))$ 诱导了同构 $\mathscr{F}(U)_g \cong \mathscr{F}(D(g))$. 则其层化 $\mathscr{F}^+$ 是拟凝聚层，并且

$$\mathscr{F}^+(U) = \mathscr{F}(U)$$

对于任意的仿射开集 $U \subset X$ 成立.

证明: 令 $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ 为一个仿射开集，令 $M = \mathscr{F}(U)$，将其视为一个 A-模，对于主开集

$D(g)\subset U$，考虑复合映射

$$\widetilde{M}(D(g)) = M_g \to \mathscr{F}(D(g)) \to \mathscr{F}^+(D(g))$$

第一个箭头是同构，第二个箭头是层化的典范映射，这些映射与到更小的主开集的限制是同构的，故它们定义了一个 $\mathscr{B}$-层的态射，因此得到了一个唯一的层的态射

$$\widetilde{M} \to \mathscr{F}^+|_U$$

由于每一个 $M_g \to \mathscr{F}(D(g))$ 是同构，所以其滤过余极限也是同构

$$\widetilde{M}_x \to \mathscr{F}^+_x$$

故在茎上是同构，所以这个态射是同构. 特别地，我们有 $\mathscr{F}^+|_U \cong \widetilde{M}$，所以 $\mathscr{F}^+$ 是拟凝聚的. $\square$

若 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是拟凝聚层之间的态射，则 $\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ 与 $\operatorname{Coker}\varphi$ 都是拟凝聚层，为了看到这个，我们考虑仿射主开集 $U = \operatorname{Spec} A$，在 U 上，φ 的限制为某个 $\alpha\colon M \to N$ 对应的 $\widetilde{\alpha}$，由于 $\widetilde{-}$ 是一个正合函子，于是我们知道

$$\operatorname{Ker}\widetilde{\alpha} = \widetilde{\operatorname{Ker}\alpha}, \quad \operatorname{Im}\widetilde{\alpha} = \widetilde{\operatorname{Im}\alpha}, \quad \operatorname{Coker}\widetilde{\alpha} = \widetilde{\operatorname{Coker}\alpha}$$

特别地，在仿射开集上的整体截面可以计算如下：

$$\Gamma(U, \operatorname{Ker}\varphi) = \operatorname{Ker}\alpha_U, \quad \Gamma(U, \operatorname{Im}\varphi) = \operatorname{Im}\alpha_U, \quad \Gamma(U, \operatorname{Coker}\varphi) = \operatorname{Coker}\alpha_U$$

对商同理，若 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 都是拟凝聚层，则 $\mathscr{F}/\mathscr{G}$ 自然是一个 $\mathscr{O}_X$-模，并且是拟凝聚的，对于任意的仿射开集 $U \subset X$，我们有

$$\Gamma(U, \mathscr{F}/\mathscr{G}) = \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U)$$

但是请注意，对于一般的开集这并不成立.

5.4 Direct sums, products and tensor products

对于有限个层 $\mathscr{F}_1, \cdots, \mathscr{F}_n$，我们定义其 **direct sum** $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{F}_i$ 为

$$\Gamma\left(U, \bigoplus_{i=1}^n \mathscr{F}_i\right) = \bigoplus_{i=1}^r \mathscr{F}_i(U)$$

其运算都是逐分量的，而对于任意指标集的层 $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$，我们定义直和 $\bigoplus_{i\in I} \mathscr{F}_i$ 为预层

$$S(U) = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{F}_i(U)$$

的层化，若 $\mathscr{F}_i$ 都是 $\mathscr{O}_X$-模，则 $\bigoplus_{i\in I}\mathscr{F}_i$ 自然是一个 $\mathscr{O}_X$-模，其运算仍然是逐分量的，我们经常使用 $\mathscr{O}_X^n$ 来表示 n 个 $\mathscr{O}_X$ 的直和，即

$$\mathscr{O}_X^n = \underbrace{\mathscr{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_X}_{n}$$

命题 5.4.1

若 $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$ 是一族拟凝聚层，则其直和 $\bigoplus_{i\in I}\mathscr{F}_i$ 仍然是拟凝聚的. 若 $X=\operatorname{Spec} A$，则对所有的 A-模 M_i，我们有

$$\widetilde{\bigoplus_{i\in I} M_i} \cong \bigoplus_{i\in I}\widetilde{M_i}$$

证明: 由于拟凝聚可以在仿射开集上局部检查，所以我们只需要证明后面一个命题，令 $X=\operatorname{Spec} A$，由于直和与局部化交换，所以对于 $f\in A$，存在一个 A_f-模的自然同构

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)_f \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i)_f$$

考虑预层直和

$$S(U)=\bigoplus_{i\in I}\widetilde{M_i}(U)$$

所以 $S^+=\bigoplus_{i\in I}\mathscr{F}_i$，上面的同构诱导了态射

$$\widetilde{\bigoplus_{i\in I} M_i}(D(f)) = \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)_f \to \bigoplus_{i\in I}(M_i)_f = S(D(f)) \to S^+(D(f))$$

容易看到这个映射与到更小的主开集的限制相容，所以我们得到了一个层态射

$$\widetilde{\bigoplus_{i\in I} M_i} \to S^+$$

由于在茎上很自然是同构，所以是同构，综上得证. □

同样，给出一族层 $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$，我们定义 **direct product** $\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$ 为

$$\Gamma\left(U,\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)=\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i(U)$$

同样，其运算是逐分量的，如果 $\mathscr{F}_i$ 都是 $\mathscr{O}_X$-模，则其直积也很自然是一个 $\mathscr{O}_X$-模.

当 $\mathscr{F}_1,\cdots,\mathscr{F}_n$ 都是拟凝聚层的时候，其积 $\prod_{i=1}^n\mathscr{F}_i$ 也是拟凝聚的，事实上，由于模的有限直和与有限直积同构，所以我们事实上知道 $\prod_{i=1}^n\mathscr{F}_i\cong\bigoplus_{i=1}^n\mathscr{F}_i$. 特别地，当 $X=\operatorname{Spec} A$ 时，也有

$$\widetilde{\prod_{i=1}^n M_i}=\prod_{i=1}^n\widetilde{M_i}$$

但是对于无穷个拟凝聚层的直积，不一定还是拟凝聚层，其道理在于局部化是滤过余极限，只能与有限极限交换，而不能与任意极限交换，所以只有有限极限的情况是正确的.

现在我们来介绍张量积.

定义 5.4.1: $\mathscr{O}_X$-模层张量积

给定两个 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$，我们定义它们的 **tensor product** $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G}$ 为预层

$$T(U)=\mathscr{F}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}\mathscr{G}(U)$$

的层化. 当语境清楚时，我们直接记为 $\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}$.

同理我们可以定义有限个 $\mathscr{O}_X$-模的张量积，特别地，对于自然数 n，我们记

$$\mathscr{F}^{\otimes n}=\underbrace{\mathscr{F}\otimes\cdots\otimes\mathscr{F}}_{n}$$

张量积定义中的层化是必要的，预层 T 并不总能成为一个层，但是下面的命题告诉我们在特殊情况下有很好的性质.

命题 5.4.2

$\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 是拟凝聚层，则

(1) $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G}$ 是拟凝聚层.

(2) 对任意仿射开集 $U\subset X$，存在一个典范的同构

$$(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G})(U)=\mathscr{F}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}\mathscr{G}(U)$$

(3) 对于 $X=\operatorname{Spec}A$ 与 A-模 M,N，我们有

$$\widetilde{M\otimes_A N}\cong\widetilde{M}\otimes_{\mathscr{O}_X}\widetilde{N}$$

证明: 我们还是只需要证明 (3)，其要点在于张量积与局部化是交换的，对于任意的 $f\in A$，存在自然同构

$$M_f\otimes_{A_f}N_f\to\Gamma(D(f),\widetilde{M\otimes_A N})=(M\otimes_A N)_f$$

于是自然诱导了一个 $\mathscr{O}_X$-模同态

$$\varphi\colon\widetilde{M}\otimes_{\mathscr{O}_X}\widetilde{N}\to\widetilde{M\otimes_A N}$$

并且由于与局部化交换，从而在茎上同构，所以是同构. □

5.5 Hom sheaf

令 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{F}'$ 为两个 $\mathscr{O}_X$-模，如果 w_1, w_2 是两个 $\mathscr{O}_X$-模态射，则我们可以逐点地定义其加法

$$(w_1 + w_2)_U := w_{1,U} + w_{2,U} \colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U)$$

对任意的 $a \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$，我们可以定义 $aw \colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ 为

$$(aw)|_U := a|_U w_U$$

于是我们可以将 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$ 视为一个 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$-模. 我们有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$$

即态射完全由幺元的去处决定，更进一步，对任意指标集 I，有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^{\oplus I}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})^I \cong \Gamma(X, \mathscr{F})^I$$

与环类似，我们有

命题 5.5.1: Hom左正合

(1) $\mathscr{O}_X$-模序列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ 正合当且仅当对于任意的开集 $U \subset X$ 与任意的 $\mathscr{O}_X|_U$-模 $\mathscr{G}$，都有 $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$-模的正合列：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{G}, \mathscr{F}'|_U) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{G}, \mathscr{F}|_U) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{G}, \mathscr{F}''|_U)$$

(2) $\mathscr{O}_X$-模序列 $\mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 正合当且仅当对于任意的开集 $U \subset X$ 与任意的 $\mathscr{O}_X|_U$-模 $\mathscr{G}$，都有 $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$-模的正合列：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}''|_U, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}'|_U, \mathscr{G})$$

相信 $\mathscr{O}_X$-模是一个 Abel 范畴，从而这个性质是自然的.

定义 5.5.1: $\mathscr{O}_X$-module of homomorphisms

$\mathscr{F}, \mathscr{G}$ 是两个 $\mathscr{O}_X$-模，则我们可以定义预层

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

可以验证这是一个层，并且很明显是一个 $\mathscr{O}_X$-模，我们将其记为 $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

于是我们由模层面的同构，可以得到

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^{\oplus I}, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}^{\prod I}$$

定理 5.5.1: Tensor-Hom 伴随

对于 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H}$，我们有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G},\mathscr{H})\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G},\mathscr{H}))$$

证明: 注意到 $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G}\to\mathscr{H}$ 一一对应一个预层态射

$$(U\mapsto\mathscr{F}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}\mathscr{G}(U))\to\mathscr{H}(U)$$

这样一个预层态射就对应了一族与限制映射相容的模态射

$$\mathscr{F}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}\mathscr{G}(U)\to\mathscr{H}(U)$$

而由模范畴的 Tensor-Hom 伴随，我们知道一一对应了一族与限制相容的模态射

$$\mathscr{F}(U)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X(U)}(\mathscr{G}(U),\mathscr{H}(U))$$

后者唯一对应了一个从 $\mathscr{F}\to\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G},\mathscr{H})$ 的层态射，故得证. □

于是我们知道 $-\otimes_{\mathscr{O}_X}G$ 是 $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G},-)$ 的左伴随，于是张量积是右正合的，hom 是左正合的，并且自然有下面的结论.

命题 5.5.2

$\mathscr{F}_i$ 是一列 $\mathscr{O}_X$-模，则对任意的 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{G}$，都有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\operatorname{colim}\mathscr{F}_i,\mathscr{G})=\lim\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}_i,\mathscr{G})$$

与

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\operatorname{colim}\mathscr{F}_i,\mathscr{G})=\lim\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}_i,\mathscr{G})$$

5.6 Pushforwards

给定 $f\colon X\to Y$，若给定一个 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$，我们知道其推出层 $f_*\mathscr{F}$ 自然是一个 $\mathscr{O}_Y$-模. 那拟凝聚层的推出是否仍然保持是拟凝聚的呢？

首先考虑仿射情况，给定态射 $\varphi\colon A\to B$，诱导态射 $f\colon\operatorname{Spec}B\to\operatorname{Spec}A$，任何 B-模 M 都可以被视为 A-模，我们记为 M_A. 并且这个对于局部化是兼容的，即我们有

$$M_{\varphi(g)}=(M_A)_g$$

为 A_g 模.

命题 5.6.1

令 $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 态射，M 为 B-模，则有

$$f_*\widetilde{M} = \widetilde{M_A}$$

证明: 回忆，我们有

$$f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$$

于是我们有

$$(f_*\widetilde{M})(D(g)) = \widetilde{M}(f^{-1}D(g)) = \widetilde{M}(D(\varphi(g))) = M_{\varphi(g)} = (M_A)_g$$

于是可以得到 $f_*\widetilde{M} = \widetilde{M_A}$. □

我们要说明拟凝聚层的推出并不总是拟凝聚的，但是对于大部分态射是可以的.

命题 5.6.2: Quasi-coherence of pushforwards

令 $f\colon X \to Y$ 为一个态射，并且存在一个 Y 的仿射开覆盖 $\mathcal{V}$，使得 (1) 对于任意的 $V \in \mathcal{V}$，其原像 $f^{-1}V$ 是有限个仿射开集 $U_1, \cdots, U_r$ 的并，并且 (2) 任意交 $U_i \cap U_j$ 也是有限个仿射开集的并. 则对于任意的拟凝聚层 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$，其推出 $f_*\mathscr{F}$ 是 Y 上的拟凝聚层.

Remark 5.6.1

其中 (1) 在说 f 是拟紧的，(2) 在说 f 是拟分离的.

证明: 我们只需要局部验证，不妨设 $Y = \operatorname{Spec} A$. 令 $M = \Gamma(Y, f_*\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$，注意到 $f_*\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_Y$-模，故我们可以将 M 看成是一个 A-模，我们要说明自然映射

$$\widetilde{M} \to f_*\mathscr{F}$$

是一个同构. 这只需要在主开集上检验即可，假设告诉我们 X 可以被有限个仿射开集 $U_i = \operatorname{Spec} B_i$ 覆盖，并且其交集 $U_i \cap U_j$ 可以被有限个开集 $U_{ijk} = \operatorname{Spec} B_{ijk}$ 覆盖. 令 $\varphi_i\colon A \to B_i$ 与 $\varphi_{ijk}\colon A \to B_{ijk}$ 为 $U_i \to Y$ 与 $U_{ijk} \to Y$ 诱导的环态射，我们考虑主开集

$$U_{i,g} = D(\varphi_i(g)) \subset U_i, \quad U_{ijk,g} = D(\varphi_{ijk}(g)) \subset U_{ijk}$$

我们考虑正合列

$$0 \to \mathscr{F}(X) \to \prod_i \mathscr{F}(U_i) \to \prod_{i,j,k} \mathscr{F}(U_{ijk})$$

由于 $f^{-1}(D(g))$ 被有限个 $(f|_{U_i})^{-1}(D(g)) = D(\varphi_i(g)) = U_{i,g}$ 覆盖，于是有正合列

$$0 \to \mathscr{F}(f^{-1}D(g)) \to \prod_i \mathscr{F}(U_{i,g}) \to \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_{ijk,g})$$

由于 $\mathscr{F}$ 是 X 上的拟凝聚层，我们知道有自然同构

$$\mathscr{F}(U_{i,g}) = \mathscr{F}(D(\varphi_i(g))) \cong \mathscr{F}(U_i)_g, \quad \mathscr{F}(U_{ijk,g}) \cong \mathscr{F}(U_{ijk})_g$$

由于局部化是正合函子，并且与有限极限交换，则有

$$0 \to \mathscr{F}(X)_g \to \prod_i \mathscr{F}(U_i)_g \to \prod_{i,j,k} \mathscr{F}(U_{ijk})_g$$

也即

$$0 \to M_g \to \prod_i \mathscr{F}(U_i)_g \to \prod_{i,j,k} \mathscr{F}(U_{ijk})_g$$

于是我们自然有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{M}(D(g)) = M_g \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i \mathscr{F}(U_i)_g \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \prod_{i,j,k} \mathscr{F}(U_{ijk})_g \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & f_*\mathscr{F}(D(g)) = \mathscr{F}(f^{-1}D(g)) \arrow[r] & \prod_i \mathscr{F}(U_{i,g}) \arrow[r] & \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_{ijk,g})
\end{tikzcd}$$

由短五引理，我们知道在主开集 $D(g)$ 上有同构

$$\widetilde{M}(D(g)) \to f_*\mathscr{F}(D(g))$$

于是可以推出在茎上的同构，从而知道 $\mathscr{O}_X$-模同构，故拟凝聚. □

推论 5.6.1

令 $f\colon X \to Y$ 为概形态射，其中 X 是诺特的，$\mathscr{F}$ 是 X 上的拟凝聚层，则 $f_*\mathscr{F}$ 是 Y 上的拟凝聚层.

证明: 由于诺特概形的任意子集拟紧，所以由命题条件得证. □

5.7 Pullbacks

令 $f\colon X \to Y$ 是概形间的态射，给定 $\mathscr{O}_Y$-模 $\mathscr{G}$，会存在 $\mathscr{O}_X$-模 $f^*\mathscr{G}$. $f^*\mathscr{G}$ 满足 $f^{-1}\mathscr{G}$ 的类似的泛性质：

定理 5.7.1: 拉回推出伴随

令 $f\colon X \to Y$ 为概形之间的态射，令 $\mathscr{G}$ 为一个 $\mathscr{O}_Y$-模，我们可以定义唯一 $\mathscr{O}_X$-模 $f^*\mathscr{G}$ 使得对任意的 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$，满足：

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

并且 $f^*\mathscr{G}$ 在同构意义下唯一.

下面我们一点点来构造拉回 $f^*\mathscr{G}$. 先看仿射的情况，并且先看最重要的特殊情况，即拟凝聚层. 假设 $X = \operatorname{Spec} B$，$Y = \operatorname{Spec} A$ 与 $\varphi\colon A \to B$ 诱导的态射 $f\colon X \to Y$. 考虑 Y 上的拟凝聚层 $\mathscr{G} = \widetilde{N}$，其中 N 是 A-模. 由于 B 是 A-代数，张量积 $N \otimes_A B$ 自然是一个 B-模，我们定义 $\mathscr{G}$ 的拉回为：

$$f^*N = \widetilde{N \otimes_A B}$$

故定义了一个函子 $f^*\colon \mathbf{QCoh}_Y \to \mathbf{QCoh}_X$. 事实上任意由 A-模同态 $N \to N'$ 诱导的拟凝聚层态射 $\widetilde{N} \to \widetilde{N'}$ 都诱导了 B-模同态：

$$N \otimes_A B \to N' \otimes_A B$$

因此得到了 $\mathscr{O}_X$-模态射

$$f^*\widetilde{N} \to f^*\widetilde{N'}$$

于是我们可以验证拉回层的泛性质，利用 tensor-hom 伴随：

$$\operatorname{Hom}_B(N \otimes_A B, M) = \operatorname{Hom}_A(N, \operatorname{Hom}_B(B, M)) = \operatorname{Hom}_A(N, M_A)$$

于是我们由命题 5.2.2

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{\mathscr{G}(Y) \otimes_A B}, \mathscr{F}) \\
&= \operatorname{Hom}_A(\mathscr{G}(Y) \otimes_A B, \mathscr{F}(X)) \\
&= \operatorname{Hom}_A(\mathscr{G}(Y), \mathscr{F}(X)_A) \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\widetilde{\mathscr{G}(Y)}, f_*\mathscr{F}) \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})
\end{aligned}$$

容易验证这个同构是自然同构. 即确实有伴随关系. 下面我们要考虑一般情况下的拉回，现在考虑对任意的 $\mathscr{O}_Y$-模 $\mathscr{G}$ 拉回. 给定 $f\colon X \to Y$，任给 Y 上的层 $\mathscr{G}$，其逆像层 $f^{-1}\mathscr{G}$ 定义为预层

$$f_p^{-1}\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{G}(V)$$

的层化. 如果 $\mathscr{G}$ 是一个 $\mathscr{O}_Y$-模，很自然 $\mathscr{G}(V)$ 是一个 $\mathscr{O}_Y(V)$-模，这告诉我们 $f_p^{-1}\mathscr{G}(U)$ 继承为 $f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U)$-模. 并且我们知道 $\mathscr{O}_X(U)$ 也具有自然的 $f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U)$ 模结构，即利用态射

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Y(V_1) \arrow[rr, "f^{\#}"'] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathscr{O}_X(f^{-1}V_1) \arrow[dr] & \\
& f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U) \arrow[rr, dashed] & & \mathscr{O}_X(U) \\
\mathscr{O}_Y(V_2) \arrow[rr, "f^{\#}"] \arrow[ur] & & \mathscr{O}_X(f^{-1}V_2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

态射 $f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U) \to \mathscr{O}_X(U)$ 将 (a, V) 送到 $f^{\#}(a)|_U$，我们定义预层 $f_p^*\mathscr{G}$ 为

$$(f_p^*\mathscr{G})(U) = f_p^{-1}\mathscr{G}(U) \otimes_{f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U)} \mathscr{O}_X(U)$$

于是 $(f_p^*\mathscr{G})(U)$ 自然是一个 $\mathscr{O}_X(U)$-模，其 **pullback** $f^*\mathscr{G}$ 定义为 $f_p^*\mathscr{G}$ 的层化，由命题 5.1.1 这是一个 $\mathscr{O}_X$-模. 上面的定义虽然很自然，但是在计算上是极尽痛苦的，我们很难在实践中具体算出这些东西. 我们的下一步是说明 $f^*\mathscr{G}$ 确实满足上面提到的泛性质，从泛性质可以看到如果 $\mathscr{G}$ 是一个拟凝聚层，则在仿射的情况下就可以使用张量积来计算拉回层.

下面我们来证明定理 5.7.1：

证明: 首先由于层的伴随，我们有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PAb}(X)}(f_p^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}(Y)}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F})$$

在这个双射下，一个 $\mathscr{O}_Y$-线性映射 $\mathscr{G}\to f_*\mathscr{F}$ 对应着一个 $f_p^{-1}\mathscr{O}_Y$-线性映射 $f_p^{-1}\mathscr{G}\to\mathscr{F}$，这个方向是显然的. 反过来，一个 $f_p^{-1}\mathscr{O}_Y$-线性映射 $\beta\colon f_p^{-1}\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ 对应的态射 $\alpha\colon\mathscr{G}\to f_*\mathscr{F}$ 也一定是 $\mathscr{O}_Y$-线性的，我们计算具体的 α 的表达式，对于 $V\subset Y$，其态射由下图给出：

$$\mathscr{G}(V)\xrightarrow{\quad\iota_V\quad} f_p^{-1}\mathscr{G}(f^{-1}(V))\xrightarrow{\quad\beta_{f^{-1}V}\quad}\mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

所以对于 $a\in\mathscr{O}_Y(V)$，$s\in\mathscr{G}(V)$，我们有

$$\alpha_V(as)=\beta_{f^{-1}V}(a\cdot\iota_V(s))=a\cdot\beta_{f^{-1}V}(\iota_V(s))=a\cdot\alpha_V(s)$$

所以是 $\mathscr{O}_Y$-线性的. 故我们有自然双射

$$\mathrm{Hom}_{f_p^{-1}\mathscr{O}_Y}(f_p^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F})=\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F})$$

再由

$$\mathrm{Hom}_B(N\otimes_A B,M)=\mathrm{Hom}_A(N,M_A)$$

取 $A=f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U)$，$B=\mathscr{O}_X(U)$，$N=f_p^{-1}\mathscr{G}(U)$，$M=\mathscr{F}(U)$，我们知道

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X(U)}(f_p^{-1}\mathscr{G}(U)\otimes_{f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U)}\mathscr{O}_X(U),\mathscr{F}(U))=\mathrm{Hom}_{f_p^{-1}\mathscr{O}_Y(U)}(f_p^{-1}\mathscr{G}(U),\mathscr{F}(U))$$

也就是唯一对应一个 $\mathscr{O}_X$-线性态射

$$f_p^*\mathscr{G}\to\mathscr{F}$$

由层化泛性质，知道唯一对应一个

$$f^*\mathscr{G}\to\mathscr{F}$$

故得证. □

命题 5.7.1: 拉回的性质

令 $f\colon X \to Y$ 为概形态射，则

(1) $f^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$.

(2) f^* 是右正合函子.

(3) 若 $g\colon W \to X$ 是一个态射，则 $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(4) 对于两个 $\mathscr{O}_Y$-模 $\mathscr{G}, \mathscr{H}$，有

$$f^*(\mathscr{G} \oplus \mathscr{H}) = f^*\mathscr{G} \oplus f^*\mathscr{H}, \quad f^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}) = f^*\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{H}$$

(5) 对于 $x \in X$，则 $(f^*\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,f(x)}} \mathscr{O}_{X,x}$.

证明: (1) 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X) = f_*\mathscr{F}(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y, f_*\mathscr{F} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{O}, \mathscr{F}))$$

由米田引理立刻得到 $f^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$.

(2) 由于左伴随，所以右正合.

(3) 利用泛性质两层挨个转移过去立刻得到，细节见 (4).

(4) 注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{G} \oplus \mathscr{H}), \mathscr{K}) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G} \oplus \mathscr{H}, f_*\mathscr{K}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{K}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{H}, f_*\mathscr{K}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{K}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{H}, \mathscr{K}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G} \oplus f^*\mathscr{H}, \mathscr{K})
\end{aligned}$$

由米田引理立刻得到

$$f^*(\mathscr{G} \oplus \mathscr{H}) = f^*\mathscr{G} \oplus f^*\mathscr{H}$$

同理有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}), \mathscr{K}) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}, f_*\mathscr{K}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{H}, f_*\mathscr{K})) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{H}, \mathscr{K})) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{H}, \mathscr{K})) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{H}, \mathscr{K})
\end{aligned}$$

所以

$$f^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}) = f^*\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{H}$$

(5) 最后，拉回是左伴随保持余极限，故保持茎. 或者利用预层拉回保持茎和层化保持茎即可.

□

命题 5.7.2

$f\colon X\to Y$ 为概形之间的态射，$\mathscr{G}$ 是 Y 上的拟凝聚层，则 $f^*\mathscr{G}$ 是 X 上的拟凝聚层，并且对于任意的仿射开集 $U\subset X, V\subset Y$ 使得 $f(U)\subset V$，我们有

$$f^*\mathscr{G}|_U=\mathscr{G}(V)\widetilde{\otimes_{\mathscr{O}_Y(V)}}\mathscr{O}_X(U)$$

证明: 令 $i\colon U\to X$，$j\colon V\to Y$ 为含入映射，令 $g=f|_U$，则我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(g^*j^*\mathscr{G},\mathscr{F}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y|_V}(j^*\mathscr{G},g_*\mathscr{F})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G},j_*g_*\mathscr{F})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G},f_*i_*\mathscr{F})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G},i_*\mathscr{F})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X|_U}(i^*f^*\mathscr{G},\mathscr{F})
\end{aligned}$$

于是我们知道 $g^*j^*\mathscr{G}\cong i^*f^*\mathscr{G}$，这告诉我们

$$(f^*\mathscr{G})|_U\cong(f|_U)^*(\mathscr{G}|_V)$$

于是由仿射情况立刻得证. □

取含入 $V\to U$ 我们立刻得到：

推论 5.7.1

X 是概型，$V\subset U$ 是 X 的仿射开集，若 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚层，则有

$$\mathscr{F}(V)\cong\mathscr{F}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}\mathscr{O}_X(V)$$

5.8 Twisting sheaves

设 $S=\bigoplus_{d\geq 0}S_d$ 为一个分次环，假设它由 S_1 上的 S_0 代数生成. 令 $X=\operatorname{Proj}S$ 为其对应的射影概形. 我们可以对射影概形定义类似的 tilde 构造，对任意一个分次 S-模 $M=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}M_d$，令 M^h 为 M 中的齐次元素，定义

$$M_{(f)}=\left\{\frac{m}{f^k}\colon m\in M^h,\deg m-k\deg f=0\right\}$$

显然 $M_{(f)}$ 是一个 $S_{(f)}$-模，由于 $D_+(f)\cong\operatorname{Spec}S_{(f)}$ 为仿射概型，所以我们定义

$$\widetilde{M}|_{D_+(f)}:=\widetilde{M_{(f)}}$$

后者的 tilde 是仿射情况的 tilde 构造. 于是我们可以在所有的 $D_+(f)$ 上定义，并且容易看出来在交集上是相容的，所以可以粘成 X 上一个整体的层，记为 $\widetilde{M}$. 可以说明对于任何分次 S-模 M，$\widetilde{M}$ 是拟凝聚层，并且 $\widetilde{(-)}$ 函子是正合函子.

对任意一个分次 S-模 $M=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$，我们可以定义其 **twisting module** $M(n)$ 为

$$M(n)_d = M_{n+d}$$

在此基础上，我们可以定义 X 上的 **twisting sheaf** $\mathscr{O}(n)$ 为

$$\mathscr{O}(n) := \widetilde{S(n)}$$

特别地，当 $n=0$ 的时候 $\mathscr{O}(0)=\mathscr{O}_X$ 就是 X 上的结构层.

命题 5.8.1: 扭转层的整体截面是齐次多项式

令 $S=A[x_0,\cdots,x_n]$，则$\mathbb{P}^n_A=\operatorname{Proj} S$ 上扭转层的整体截面恰好对应齐次多项式，即

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_A,\mathscr{O}(m))=S_m$$

证明: 在 $U_i=D_+(i)$ 上，由构造知道有

$$\Gamma(U_i,\mathscr{O}(n))=S(m)_{(x_i)}=(S_{(x_i)})_m=A\left[\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}\right]x_i^m$$

现在利用

$$0\to\mathscr{O}(m)(\mathbb{P}^n_A)\to\prod_{i=0}^n\mathscr{O}(m)(U_i)\to\prod_{i,j}\mathscr{O}(m)(U_i\cap U_j)$$

我们来看相容的 $(s_i)_i$ 如何，其中

$$(S_{(x_i)})_m\ni s_i=g_i\left(\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}\right)x_i^m$$

相容的意思是

$$g_i\left(\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}\right)x_i^m=g_j\left(\frac{x_0}{x_j},\cdots,\frac{x_n}{x_j}\right)x_j^m$$

很容易发现若 $m<0$，则 $\mathscr{O}(m)=0$，下面设 $m\geq 0$，则很显然左右两边不能出现 x_i 或者 x_j 在分母的情况，否则不能再 U_j 或者 U_i 上良定义，故知道必须是多项式的形式，也就是 m 次齐次多项式. □

命题 5.8.2

$X=\operatorname{Proj} S$，$\mathscr{O}$ 是其结构层，M 是一个分次 S-模，我们有

$$\widetilde{M(m)}=\widetilde{M}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{O}(m)$$

证明: 在仿射开集 $D_+(f)$ 上，我们有

$$M(m)_{(f)}=M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}S(m)_{(f)}$$

于是在每个仿射开集上都有

$$\widetilde{M(m)}|_{D_+(f)} = \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{O}(m)|_{D_+(f)}$$

故得证. $\square$

Chapter 6: Second properties of schemes

6.1 Closed subschemes and closed embeddings

考虑一个闭嵌入 $\iota\colon Y \to X$，定义指出存在 X 的仿射开覆盖 $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ 使得 (1) $\iota^{-1}(U_i)$ 是仿射的，并且 (2) $\mathscr{O}_X(U_i) \to \mathscr{O}_Y(\iota^{-1}U_i)$ 是满射. 由命题 5.6.2 知 (1) 告诉我们 $\iota_*\mathscr{O}_Y$ 在 X 上是拟凝聚的. 而 (2) 告诉我们 $\iota^{\#}|_{U_i}$ 为 $\mathscr{O}_X(U_i) \to \mathscr{O}_Y(\iota^{-1}U_i)$ 的 tilde 构造，所以在茎上是满的，故 $\iota^{\#}$ 是满射. 因此令 $\mathscr{I} = \operatorname{Ker}(\iota^{\#})$，我们得到了 **ideal sheaf sequence**

$$0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Y \to 0$$

由于 $\iota_*\mathscr{O}_Y$ 是拟凝聚的，所以 $\mathscr{I}$ 作为拟凝聚层态射的 kernel 也是拟凝聚的，因此每一个闭子概型都对应了一个拟凝聚的理想层 $\mathscr{I}$.

在每一个仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A$ 上，我们有 $\mathscr{I}|_U = \widetilde{I}$，其中 $I = \mathscr{I}(U)$，于是上面的正合列限制在 U 上就是

$$0 \to \widetilde{I} \to \widetilde{A} \to \widetilde{A/I} \to 0$$

相反地，给定一个拟凝聚层 $\mathscr{I}$，我们可以构造一个概型 $Y = \mathbf{Spec}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})$ 与态射 $\iota\colon Y \to X$ 如下，在每个仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A$ 上，态射都形如

$$\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$$

其中 $I = \mathscr{I}(U)$. 即 Y 在仿射局部上的截面是商层 $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$ 的截面. 此即相对素谱的一个特殊情况，我们将在下节讨论. 下面先介绍本章的一个主定理：

定理 6.1.1: 闭嵌入与理想层

X 是一个概型，则态射

$$\{\text{closed subschemes } \iota\colon Y \to X\} \to \{\text{quasi-coherent ideal sheaves } \mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X\}$$

将 $\iota\colon Y \to X$ 送到 $\mathscr{I} = \operatorname{Ker}(\mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Y)$，是一个双射.

特别地，我们有

推论 6.1.1: 仿射概型的闭子概形

$I \to \operatorname{Spec}(A/I)$ 给出了 A 的理想 I 与 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子概形的一一对应.

换句话说，仿射概型 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子概型都形如 $\operatorname{Spec}(A/I)$.

在代数几何中，一个闭子集 $Z \subset X$ 本身只是一个拓扑空间，要让它成为一个闭子概形，我们需要给它定义一个理想层 $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$. 但是，对于同一个空间 Z，可能对应很多不同的理想层，但是如果要求这个概型是约化的就能保证唯一性了.

命题 6.1.1: 诱导约化概形

对于概形 X 的闭子集 Z，存在一个以 Z 为拓扑的约化闭子概型.

证明: 设 $Z \subset X$ 为一个闭子集. 对于每个开集 $U \subset X$, 定义

$$\mathscr{I}(U) = \{s \in \mathscr{O}_X(U) \mid \text{对于所有 } P \in Z \cap U, s(P) = 0\}$$

则 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{O}_X$ 的一个理想层. 我们声称 $\mathscr{I}$ 是拟凝聚的. 设 $U = \operatorname{Spec} A$ 为 X 的一个仿射开集, 并记 $Z \cap U = V(\mathfrak{a})$, 其中 $\mathfrak{a} \subset A$ 是根理想. 那么 $f \in A$ 满足 $f(\mathfrak{p}) = 0$ 当且仅当 $f \in \mathfrak{p}$, 因此

$$\mathscr{I}(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

同理, 对于 $g \in A$, 我们有 $Z \cap D(g) = V(\mathfrak{a}) \cap D(g) = V(\mathfrak{a}A_g) \subset A_g$, 因此

$$\mathscr{I}(D(g)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}A_g)} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}A_g} = \mathfrak{a}_g.$$

所以, $\mathscr{I}|_U \simeq \tilde{\mathfrak{a}}$, 且 $\mathscr{I}$ 是拟凝聚的. 注意, 每个理想 $\mathscr{I}(U)$ 都是根理想. 这意味着相应的子概形是约化的. 因此, 对于任何闭子集 $Z \subset X$, 都存在一个以 Z 为底层集合的约化闭子概形. $\square$

6.2 Relative Spec

X 是一个概形，$\mathscr{A}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$-代数拟凝聚层，即 $\mathscr{A}$ 是一个拟凝聚层并且对于任意的开集 $U \subset X$，都有 $\mathscr{A}(U)$ 是 $\mathscr{O}_X(U)$-代数，并且要求其代数结构与限制映射相容，即下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(U) \arrow[r] & \mathscr{A}(V) \\
\mathscr{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{O}_X(V) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

对于仿射开集 $U \subset X$，我们可以构造一个仿射概型 $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(U)$ 与由环态射 $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{A}(U)$ 诱导的态射

$$\pi_U \colon \operatorname{Spec} \mathscr{A}(U) \to U$$

我们的目标是把这些仿射概型粘成一个整体的概型 $\mathbf{Spec}\,\mathscr{A}$ 与态射

$$\pi\colon \mathbf{Spec}\,\mathscr{A} \to X$$

使得对于任意的仿射开集 $U \subset X$，都有 $\pi^{-1}(U) \cong \operatorname{Spec}\mathscr{A}(U)$，并且 $\pi^{-1}(U) \to U$ 与 π_U 相同. 概形 $\mathbf{Spec}\,\mathscr{A}$ 被称为 **relative spectrum** of $\mathscr{A}$.

下面我们来进行粘贴的操作. 令 $V \subset U$ 为两个仿射开集，限制映射 $\mathscr{A}(U) \to \mathscr{A}(V)$ 诱导了态射

$$\sigma_{V,U}\colon \operatorname{Spec}\mathscr{A}(V) \to \operatorname{Spec}\mathscr{A}(U)$$

使得下面图表交换

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\mathscr{A}(V) \arrow[r, "\sigma_{V,U}"] \arrow[d, "\pi_V"'] & \operatorname{Spec}\mathscr{A}(U) \arrow[d, "\pi_U"] \\
V \arrow[r, hook] & U
\end{tikzcd}$$

实际上，由于 $\mathscr{A}$ 是拟凝聚层，我们知道有限制映射诱导的同构

$$\mathscr{A}(V) \cong \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{O}_X(V)$$

即

$$\operatorname{Spec}\mathscr{A}(V) \cong \operatorname{Spec}\mathscr{A}(U) \times_U V$$

所以由纤维积的性质知道上面的图表交换. 同时由命题 4.2.2 注意到 $\pi_U^{-1}(V)$ 就是上述的纤维积，所以 $\sigma_{V,U}$ 诱导了从 $\operatorname{Spec}\mathscr{A}(V)$ 到 $\pi_U^{-1}(V)$ 的同构.

令 $\{U_i\}$ 为 X 的一个仿射开覆盖，对于任意的仿射开集 $W \subset U_i \cap U_j$，$\mathscr{A}$ 的拟凝聚性指出典范同构：

$$\mathscr{A}(U_j) \otimes_{\mathscr{O}_X(U_j)} \mathscr{O}(W) \to \mathscr{A}(W) \leftarrow \mathscr{A}(U_i) \otimes_{\mathscr{O}_X(U_i)} \mathscr{O}(W)$$

对其使用 Spec 函子得到了同构

$$\tau_{ij}^W : \pi_i^{-1}(W) \to \pi_j^{-1}(W)$$

并且若 $W' \subset W$，则可以看到 $\tau_{ij}^{W'}$ 正是 τ_{ij}^W 的限制，因此同构 τ_{ij}^W 可以粘成一个同构

$$\tau_{ij}\colon \pi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \pi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

可以验证这些同构满足概形的胶合条件，由构造知道 $\tau_{ii} = \mathrm{id}$ 与 $\tau_{ji} = \tau_{ij}^{-1}$. 为了验证满足 cocycle 条件，考虑仿射开集 $W \subset U_i \cap U_j \cap U_k$，我们利用下图可以证明 $\tau_{jk}^W \circ \tau_{ij}^W = \tau_{ik}^W$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{A}(U_j) \otimes_{\mathscr{O}_X(U_j)} \mathscr{O}_X(W) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathscr{A}(U_i) \otimes_{\mathscr{O}_X(U_i)} \mathscr{O}_X(W) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathscr{A}(U_k) \otimes_{\mathscr{O}_X(U_k)} \mathscr{O}_X(W) \arrow[dl] \\
& \mathscr{A}(W) &
\end{tikzcd}$$

由于这个对于任意的仿射开集都成立，所以在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上有 $\tau_{jk} \circ \tau_{ij} = \tau_{ik}$. 因此，概形 $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(U)$ 可以粘成概形 $\mathbf{Spec}\, \mathscr{A}$. 态射 $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(U_i) \to U_i$ 与胶合相容，可以被粘成态射 $\pi\colon \mathbf{Spec}\, \mathscr{A} \to X$.

在这个构造下，我们有一个典范的同构

$$\pi_* \mathscr{O}_{\mathbf{Spec}\, \mathscr{A}} = \mathscr{A}$$

因为我们有等式

$$\Gamma(U_i, \pi_* \mathscr{O}_{\mathbf{Spec}\, \mathscr{A}}) = \Gamma(\pi_i^{-1}(U_i), \mathscr{O}_{\mathbf{Spec}\, \mathscr{A}}) = \mathscr{A}(U_i)$$

若 $\varphi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 为两个 $\mathscr{O}_X$-algebra 的态射，则其诱导了态射 $\operatorname{Spec}(\mathscr{B}(U)) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{A}(U))$，可以粘成态射

$$\mathbf{Spec}\, \mathscr{B} \to \mathbf{Spec}\, \mathscr{A}$$

因此我们定义了一个从 $\mathscr{O}_X$-algebra 到 X-schemes 的函子.

Example 6.2.1

由定义我们立刻有 $\mathbf{Spec}\, \mathscr{O}_X = X$，实际上还有

$$\mathbf{Spec}\, \mathscr{O}_X[x_1, \cdots, x_n] = \mathbb{A}^n_X = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}^n$$

6.3 Affine morphisms

定义 6.3.1: affine morphism

态射 $f\colon X \to Y$ 是 **affine morphism**，若对任何的仿射开集 $U \subset Y$，$f^{-1}(U)$ 均仿射.

推论 6.3.1

由命题 5.6.2 知道如果 f 是仿射的，则其推出 $f_* \mathscr{O}_X$ 是拟凝聚的.

因此在 f 为仿射态射的情况下，我们可以考虑相对谱 $\mathbf{Spec}(f_* \mathscr{O}_X)$，存在一个典范的态射

$$X \to \mathbf{Spec}(f_* \mathscr{O}_X)$$

由仿射开集 $V \subset Y$ 上的典范态射(见推论 2.4.1)

$$f^{-1}V \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(f^{-1}V)$$

胶合而成.

命题 6.3.1: 仿射态射的刻画

令 $f\colon X \to Y$ 为概形态射，TFAE:

(1) f 是仿射的.

(2) 存在一个 Y 的仿射开覆盖 $\{V_i\}$ 使得 $f^{-1}(V_i)$ 是仿射的.

(3) $f_*\mathscr{O}_X$ 是拟凝聚的，并且典范映射 $X \to \mathbf{Spec}(f_*\mathscr{O}_X)$ 是同构.

证明: (1) 推 (2) 是显然的. (2) 推 (3): 令 $\mathscr{A} = f_*\mathscr{O}_X$，令 $V = \operatorname{Spec} A$ 为某个 V_i，由于 $f^{-1}V_i$ 是仿射的，设为 $\operatorname{Spec} B$，故 $f^{-1}V \to V$ 由某个环态射 $\varphi\colon A \to B$ 诱导. 则对于每一个 $g \in A$，都有 $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g)) \subset \operatorname{Spec} B$，因此

$$\mathscr{A}(D(g)) = \Gamma(f^{-1}D(g), \mathscr{O}_X) = \Gamma(D(\varphi(g)), \mathscr{O}_X) = B_{\varphi(g)} = \mathscr{A}(V)_g$$

由命题 5.3.1 可知 $\mathscr{A}$ 是拟凝聚的. 由于典范映射 $X \to \mathbf{Spec}(f_*\mathscr{O}_X)$ 限制在每个 V_i 上都是态射

$$f^{-1}V_i \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_X(f^{-1}V_i))$$

由于 $f^{-1}V_i$ 是仿射的，所以这是一个同构. 因此其整体态射是同构.

(3) 推 (1): 若 $X \cong \mathbf{Spec}(f_*\mathscr{O}_X)$ 是同构，考虑相对谱构造 $\pi\colon \mathbf{Spec}(f_*\mathscr{O}_X) \to Y$，则对任意仿射开集 $V \subset Y$，都有

$$f^{-1}(V) \cong \pi^{-1}(V) \cong \operatorname{Spec}(\Gamma(f^{-1}V, \mathscr{O}_X))$$

这就说明了 f 是仿射的. $\square$

Remark 6.3.1

实际上 (1)(2) 等价可以使用仿射沟通引理.

Example 6.3.1

任何态射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 都是仿射的.

现在我们可以证明前面的主定理 6.1.1.

证明: 我们定义的对应是把闭嵌入 $\iota\colon Y \to X$ 送到理想层 $\operatorname{Ker} \iota^{\#}$. 首先来证明是单射. 对于闭嵌入 $\iota\colon Y \to X$ 由闭浸入的性质与上面的命题知道 ι 是一个仿射态射，从而 $Y \to \mathbf{Spec}(\iota_*\mathscr{O}_Y)$ 是一个 X-概形同构. 但是注意到 $\iota_*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$，所以 X-概形 Y 由 $\mathscr{I}$ 唯一决定，故是单射.

反之，设 $\mathscr{I}$ 是任意一个拟凝聚理想层，令 $\pi\colon \mathbf{Spec}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}) \to X$ 为结构态射，则对任意的仿射开集 U，$\pi^{-1}(U) \to U$ 由相对谱的性质实际上就是

$$\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{I}(U)) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_X(U))$$

特别地，仿射开集的原像也是仿射的，并且有满射关系，从而 π 是闭浸入. 并且我们有 $\pi_*\mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})} = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$，我们知道

$$\operatorname{Ker}\left(\mathscr{O}_X \to \pi_*\mathscr{O}_{\mathbf{Spec}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})}\right) = \operatorname{Ker}\left(\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{I}\right) = \mathscr{I}$$

因此闭浸入 π 被送到 $\mathscr{I}$，故满射. □

6.4 Dominant morphisms

定义 6.4.1: dominant

我们称概形态射 $f\colon X\to Y$ 是 **dominant**，如果 $f(X)\subset Y$ 是稠密的.

Remark 6.4.1

注意到 dominant 是一个纯拓扑的性质.

命题 6.4.1

令 X 为一个拟紧概形，令 $f\colon X\to \operatorname{Spec} A$ 为一个对应态射 $\varphi\colon A\to \mathscr{O}_X(X)$ 的态射，则

$$\overline{f(X)}=V(\operatorname{Ker}\varphi)\subset \operatorname{Spec} A$$

特别地，f 是支配的当且仅当 $\operatorname{Ker}\varphi\subset\sqrt{(0)}$. 若 A 是约化的，这当且仅当 φ 是单射.

证明: 由于 X 是拟紧的，所以我们有一个有限的仿射开覆盖 $X=\bigcup_{i=1}^{m}U_i$，令 $f_i=f|_{U_i}$，$\varphi_i\colon A\to \mathscr{O}_X(X)\to\mathscr{O}_X(U_i)$ 被对应的环态射. 由命题 1.12.2 知道

$$\overline{f_i(U_i)}=V(\operatorname{Ker}\varphi_i)\subset \operatorname{Spec} A$$

因此

$$\overline{f(X)}=\overline{\bigcup_i \overline{f_i(U_i)}}=\overline{\bigcup_i V(\operatorname{Ker}\varphi_i)}=\overline{V\left(\bigcap_i \operatorname{Ker}\varphi_i\right)}=V\left(\bigcap_i \operatorname{Ker}\varphi_i\right)$$

而注意到态射

$$\mathscr{O}_X(X)\to\prod_{i=1}^{m}\mathscr{O}_X(U_i)$$

是单射，因此知道

$$\operatorname{Ker}\varphi=\bigcap_{i=1}^{m}\operatorname{Ker}\varphi_i$$

故得证. □

命题 6.4.2: 支配态射的刻画

$f\colon X \to Y$ 为整概形的态射，TFAE：

(1) f 是支配的.

(2) 对于所有非空仿射开集 $U \subset X$ 与 $V \subset Y$ 使得 $f(U) \subset V$，诱导的环态射 $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(U)$ 都是单射.

(3) f 将 X 的泛点送到 Y 的泛点.

证明: (1) 推 (2)：X,Y 都是不可约的，所以 U,V 都是稠密的，因此限制映射

$$f|_U\colon U \to V$$

是支配的，这是因为

$$f(X) = f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)} \implies Y = \overline{f(U)}$$

故 $f(U)$ 在 Y 中稠密，故 $f(U)$ 在 V 中的闭包为 $V \cap \overline{f(U)} = V$，故在 V 中稠密，所以 f 是支配的. 由于 V 还是约化的，因为 $\varphi\colon \mathscr{O}_Y(V) = A \to \mathscr{O}_X(U) = B$ 由态射 $f|_U\colon U \to V$，我们有

$$V = \overline{f|_U(U)} = V(\operatorname{Ker}\varphi)$$

故 $\operatorname{Ker}\varphi \subset \sqrt{(0)} = (0)$，即 φ 是单射.

(2) 推 (3)：令 $\xi \in X$，$\eta \in Y$ 为泛点，我们有

$$f(X) = f(\overline{\xi}) \subset \overline{f(\xi)} \implies Y = \overline{(}f(\xi))$$

故知 $f(\xi)$ 也是泛点，但整概形的泛点唯一，故 $f(\xi) = \eta$.

(3) 推 (1)：注意到 $\overline{f(X)} \supset \overline{f(\xi)} = \overline{\eta} = Y$. □

支配态射的一个重要性质就是他诱导了函数域的拉回，具体来说，若 X,Y 是两个整概形，ξ 与 η 分别为它们的泛点，$f\colon X \to Y$ 是支配的，则由上面的命题我们知道

$$f(\xi) = \eta$$

所以 $f^\#$ 诱导了茎上的态射

$$\mathscr{O}_{Y,\eta} \to \varinjlim_{V \ni \eta} \mathscr{O}_X(f^{-1}V) = \varinjlim_{f^{-1}V \ni \xi} \mathscr{O}_X(f^{-1}V) \hookrightarrow \mathscr{O}_{X,\xi}$$

即

$$f^\#\colon K(Y) \to K(X)$$

6.5 Integral and finite morphisms

一个 A-模 B 被称为是 **finite**，即有限生成的，当且仅当存在有限个 B 中元素 $b_1, \cdots, b_r$ 使得

$$B = Ab_1 + \cdots + Ab_r$$

定义 6.5.1: integral morphism

态射 $f\colon X \to Y$ 被称为是 **integral**，如果对任意 Y 的仿射开集 $V = \operatorname{Spec} A$，其原像 $f^{-1}V = \operatorname{Spec} B$ 是仿射的，并且其诱导的环态射 $A \to B$ 是整的.

定义 6.5.2: finite morphism

态射 $f\colon X \to Y$ 被称为是 **finite**，如果对于任意 Y 的仿射开集 $V = \operatorname{Spec} A$，其原像 $f^{-1}V = \operatorname{Spec} B$ 是仿射的，并且其诱导的环态射 $A \to B$ 使 B 称为一个有限生成 A-模.

Remark 6.5.1
可以立刻看出整态射与有限态射都是仿射的.

finite type 与 finite 这俩词虽然很像，但是完全不一样，我们可以看到其实都是形容一个 A-代数的，其中 finite type 是指这个 A-代数是有限生成的，而 finite 是指这个 A-代数作为 A-模是有限生成的，即有限代数. finite 的约束要比 finite type 强得多，比如 $A[x]$ 就是一个有限型的代数，但是作为 A-模很显然不是有限生成的.

命题 6.5.1: 有限态射的刻画

令 $f\colon X \to Y$ 为态射，并假设存在 Y 的仿射开覆盖 $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ 使得 $f^{-1}V_i = \operatorname{Spec} B_i$ 并且其环态射 $A_i \to B_i$ 使得 B_i 为有限生成 A_i-模. 则 f 是一个有限态射.

证明: 首先由命题 6.3.1 知道 f 是仿射态射. 我们验证仿射沟通引理的条件. (1) 若对 $V = \operatorname{Spec} A$，有 $f^{-1}V = \operatorname{Spec} B$，设其上的 f 由环态射 $\varphi\colon A \to B$ 诱导，B 是有限生成 A-模，则对任意的 $g \in A$，都有

$$f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g)) = \operatorname{Spec} B_{\varphi(g)}$$

注意到

$$B_{\varphi(g)} \cong B \otimes_A A_g \cong (Ab_1 + \cdots + Ab_k) \otimes_A A_g \cong A_g(b_1 \otimes 1) + \cdots + A_g(b_k \otimes 1)$$

从而 $B_{\varphi(g)}$ 是有限生成 A_g-模.

(2) 若 $A = (g_1, \cdots, g_r)$，有 $f^{-1}(D(g_i)) = \operatorname{Spec} B_i$ 都使得 B_i 是有限生成 A_{g_i}-模，由 f 的仿射性，知道 $f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \operatorname{Spec} B$，现在我们要说明 B 是有限生成 A-模. 实际上由引理 3.4.1 立刻得到. 故由仿射沟通引理得证. □

推论 6.5.1: 闭浸入是有限态射

若 $\iota\colon Y \to X$ 是闭浸入，则 ι 是有限态射.

证明: 闭浸入首先由定义可以知道是仿射态射，其次在任意仿射开集 $U = \operatorname{Spec} A$ 上，我们有 $\iota^{-1}U = \operatorname{Spec} B$ 也是仿射的，并且

$$A \to B$$

是一个满射，也就是说 $B \cong A/\mathfrak{a}$，故 B 是有限生成 A-模，即 $B = A \cdot (1 + \mathfrak{a})$. □

有限态射的一个重要性质就是其纤维有限，故代数上的模有限生成就与几何上的纤维有限联系起来. 快速介绍几个交换代数的引理：

命题 6.5.2

$A \subset B$ 是整环，B 在 A 上整，那么 B 是域当且仅当 A 是域.

证明: 若 A 是域，令 $y \in B$，$y \neq 0$，令 y 的最低次的零化首一多项式为

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A)$$

由于 B 是整环，所以我们有 $a_n \neq 0$. 否则 y 有零因子，于是有

$$y^{-1} = -a_n^{-1}\left(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right) \in B$$

因此 B 是域，反之若 B 是域，设 $x \in A$，则 $x^{-1} \in B$ 在 A 上整，我们有方程

$$x^{-m} + a_1' x^{-m+1} + \cdots + a_m' = 0 \quad (a_i' \in A)$$

因此 $x^{-1} = -(a_1' + a_2' x + \cdots + a_m' x^{m-1}) \in A$. 因此 A 是域. □

推论 6.5.2: Incomparability Theorem

令 $A \subset B$ 是环，B 在 A 上整. 令 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ 是 B 的素理想使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$，并且 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}$. 那么 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

证明: 由于局部化保持整性，我们知道 $B_\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 上整. 令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 中的扩理想，$\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{n}'$ 为 $\mathfrak{q}$ 与 $\mathfrak{q}'$ 在 $B_\mathfrak{p}$ 中的扩理想，知还是素理想. 则知道 $\mathfrak{m}$ 是 $A_\mathfrak{p}$ 的极大理想，并且有 $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}'$，由于有 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^c$，再结合 $\mathfrak{m}$ 的极大性，我们知道 $\mathfrak{n}^c = \mathfrak{n}'^c = \mathfrak{m}$. 我们考虑

$$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$$

由于 $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ 是整扩张，所以上面的商环还是整环的整扩张，由于 $\mathfrak{m}$ 是极大理想，所以 $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ 是域，从而 $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ 也是域，所以 $\mathfrak{n}$ 是极大理想，同理 $\mathfrak{n}'$ 也是极大理想. 从而 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$，由局部化素理想的一一对应，得到 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. □

Remark 6.5.2

这个命题叫做不可比较定理，也就是说只要 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$ 都在 $\mathfrak{p}$ 的上方，就没法比较他们的大小，除非他们相等. 其几何视角的含义是 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 的同一根纤维上不能发生包含关系，如果两个点投影到同一个点，那么要么完全一样，要么毫无关系(没有包含关系).

首先看到一个重要的定理.

定理 6.5.1: Lying-Over and Going-Up

$A \subset B$ 是整扩张，$f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 是对应态射，则

(1) (Lying-Over) f 是满射，并且纤维都是离散的.

(2) (Going-Up) f 是闭映射.

证明: (1) 令 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，若 $A \subset B$ 是整扩张，由于局部化保持整扩张，我们有 $A_\mathfrak{p} \subset B_\mathfrak{p}$ 也是整扩张，我们要说明的是

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$$

是非空的，即 $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ 不是零环，即 $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \neq B_\mathfrak{p}$，反之若 $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p}$，则存在 $x \in \mathfrak{p}$ 在 $B_\mathfrak{p}$ 中是可逆的，取 $y \in B_\mathfrak{p}$ 使得 $xy = 1 \in B_\mathfrak{p}$. 由于 $A_\mathfrak{p} \subset B_\mathfrak{p}$ 是整扩张，所以其逆实际上也在 $A_\mathfrak{p}$ 中，因为会存在 $a_1, \cdots, a_n \in A_\mathfrak{p}$ 使得

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \implies y = -(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1})$$

故 x 是 $A_\mathfrak{p}$ 中的单位，与 $x \in \mathfrak{p}$ 矛盾. 故得证.

对于离散[1]，我们需要证明 $f^{-1}(\mathfrak{p})$ 的每个点都是闭点，即对 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in f^{-1}(\mathfrak{p})$，并且 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q} \implies \mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. 此即不可比较定理，得证.

(2) 对 B 的任意理想 $\mathfrak{b}$，我们要说明 $f(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b} \cap A)$，一方面肯定有 $f(V(\mathfrak{b})) \subset V(\mathfrak{b} \cap A)$，另一方面由于 $A \subset B$ 是整扩张，所以 $A/(\mathfrak{b} \cap A) \to B/\mathfrak{b}$ 也是整扩张，由 Lying-Over 知道 $V(\mathfrak{b}) = \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{b}) \to \operatorname{Spec}(A/(\mathfrak{b} \cap A)) = V(\mathfrak{b} \cap A)$ 是满射，故得证. □

Remark 6.5.3

$A \subset B$ 是整扩张，Lying-Over 的意思是 A 中的素理想$\mathfrak{p}$ 总能在其上找到 B 中的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$，画成图即任意 $\operatorname{Spec} A$ 中的点都有 $\operatorname{Spec} B$ 中的点落在其纤维上. 此外不可比较定理告诉我们同一纤维上的点是彼此无关的，是互不包含的关系. Going-Up 的意思是我们可以把 A 中的素理想升链关系提升到 B 中，我们取 $\mathfrak{b} \cap A = \mathfrak{p}$ 就得到了交换代数中的 Going-Up.

[1]代数几何语境中的离散即点与点之间没有黏连，即若一个点落在另外一个点的闭包中，则这两个点是相等的，也即纤维的维数是 0.

命题 6.5.3: 有限态射的性质

$f\colon X\to Y$ 是一个有限态射，则

(1) f 是闭映射.

(2) 若 f 是支配的，则是满射.

(3) 任意纤维 $f^{-1}(y)$ 都是一个有限离散集.

证明: (1) 由于 f 是一个仿射态射，并且闭映射可以在目标上局部检验. 我们只需要考虑 Y 是仿射的情况，结合 f 是仿射的，所以 $X=f^{-1}(Y)$ 也是仿射的，此时 f 对应一个环态射 $\varphi\colon A\to B$. 我们要说明

$$f(V(\mathfrak{b}))=V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

一方面 $f(V(\mathfrak{b}))\supset V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ 是显然的，另外一方面，诱导的态射 $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})\to B/\mathfrak{p}$ 是单射且是有限态射，因此是一个环的整扩张. 故由 Lying-Over 知道

$$f\colon V(\mathfrak{b})=\operatorname{Spec}B/\mathfrak{b}\to\operatorname{Spec}(A/(\mathfrak{b}\cap A))=V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

是满射，故 $f(V(\mathfrak{b}))=V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$，即 f 是闭映射.

(2) f 支配且闭，则 $f(X)$ 是 Y 的稠密闭集，即 $f(X)=\overline{f(X)}=Y$.

(3) 由于每个 $y\in Y$ 都落在一个仿射开集中，结合 f 的仿射性质，立刻归结到 $X=\operatorname{Spec}B$, $Y=\operatorname{Spec}A$ 的情况，f 对应的环态射为 $\varphi\colon A\to B$. 令 $\mathfrak{p}\subset A$ 为一个素理想，现在我们知道

$$f^{-1}(y)=\operatorname{Spec}(B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p}))$$

由于 B 是一个有限生成 A-模，所以 $B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$ 是一个有限维 $\kappa(\mathfrak{p})$-线性空间，由于域上有限维代数是 Artin 环，故只有有限个素理想，从而纤维是有限集，由 Artin 环是零维的知每个点都是闭点，所以是有限离散集. $\square$

6.6 Separated morphisms

概形上的拓扑与常见的欧式拓扑有明显的不同，Zariski 拓扑往往不是 Hausdorff 的，但是 Hausdorff 的性质还是比较重要的，比如极限的唯一性. 在代数几何中我们使用分离性来替代 Hausdorff.

命题 6.6.1: 分离性的启发

X 是 Hausdorff 空间当且仅当 $\Delta=\{(x,x)\colon x\in X\}$ 在 $X\times X$ 中是闭集.

这个命题让我们可以从对角映射的角度去思考分离性，在概形范畴中，我们将乘积拓扑中的对角集替换为纤维积 $X\times_{\mathbb{Z}}X$ 上的 Zariski 拓扑.

现在令 X 是一个 S-概形，则 **diagonal morphism** 是态射

$$\Delta_{X/S}\colon X \to X \times_S X$$

由下图与纤维积的泛性质诱导：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Delta_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& X \times_S X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

引理 6.6.1

态射 $f\colon Z \to X \times_S X$ factors through 对角态射当且仅当 $p_1 \circ f = p_2 \circ f$.

证明: 设 $g = p_1 \circ f = p_2 \circ f$，则考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "g"] \arrow[drrr, bend left, "g=p_1\circ f"] \arrow[ddrr, bend right, "g=p_2\circ f"'] & & & \\
& X \arrow[dr, dashed, "\Delta_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& & X \times_S X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d] \\
& & X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

由泛性质给出的唯一性知道 $f = \Delta_{X/S} \circ g$. □

特别地，若 K 是一个域，$x_1, x_2 \in X(K)$ 为两个 K-点，则诱导的 K-点

$$x_1 \times x_2\colon \operatorname{Spec} K \to X \times_S X$$

factor via 对角映射当且仅当 $x_1 = x_2$.

当 $X = \operatorname{Spec} B$ 与 $S = \operatorname{Spec} A$ 都是仿射概形，对角映射的代数版本即

$$\mu\colon B \otimes_A B, \quad b \otimes b' \mapsto bb'$$

考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Delta_{X/S}"] & & \\
& X \times_S X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
B & & \\
& B \otimes_A B \arrow[ul, dashed, "\mu"'] & B \arrow[l, "\beta_1"'] \\
& B \arrow[u, "\beta_2"] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

满足

$$\beta_1(b) = b \otimes 1, \quad \beta_2(b) = 1 \otimes b$$

由于 μ 是满射，所以在仿射情况下可以看到这里的对角映射 $\Delta_{X/S}$ 是闭映射，于是立刻得到下面的命题：

命题 6.6.2

S 是仿射概型，X 是仿射 S-概形，则对角映射 $\Delta_{X/S}\colon X \to X \times_S X$ 是一个闭浸入.

对于一般的情况，对角映射不一定是闭浸入，但是仿射情况告诉我们总是局部闭的.

命题 6.6.3: 对角态射是局部闭浸入

$f\colon X \to S$ 是 S-概形，则对角映射 $\Delta_{X/S}$ 是一个局部闭浸入.

证明: 用 S 的仿射开集 S_i 覆盖 S，用仿射开集 U_{ij} 覆盖 $f^{-1}(S_i)$. 则由引理 4.2.6 有

$$U_{ij} \times_{S_i} U_{ij} = U_{ij} \times_S U_{ij}$$

为 $X \times_S X$ 的仿射开集，并且其覆盖覆盖了对角态射的像. 由于对角态射限制在 $U_i \times_{S_i} U_i$ 的上为 $U_i \to U_i \times_{S_i} U_i$，由仿射情况知道是闭浸入，从而是局部闭浸入. □

定义 6.6.1: separated

一个 S-概形 X 被定义为 **separated**，如果对角态射 $\Delta_{X/S}\colon X \to X \times_S X$ 是一个闭浸入. 概形 X 被称为是 **separated** 如果是 separated over $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. 态射 $f\colon X \to Y$ 是 **separated** 如果 $\Delta_{X/Y}\colon X \to X \times_Y X$ 是闭浸入.

命题 6.6.4: separated可以在目标上局部检验

态射 $f\colon X \to S$ 分离，当且仅当存在 S 的开覆盖 $\{S_i\}$ 使得 $f^{-1}(S_i) \to S_i$ 是可分离的.

证明: 首先记 $X_i = f^{-1}(S_i) = X \times_S S_i$，于是知道每个 $\Delta_{X_i/S_i}\colon X_i \to X_i \times_{S_i} X_i$ 是闭浸入，我们要证明全局是闭浸入. 考虑 S 的开覆盖 $\{S_i\}$，我们考虑复合映射 $p\colon X \times_S X \to S$，知到 $V_i = p^{-1}(S_i)$ 构成 $X \times_S X$ 的开覆盖，注意到

$$V_i = p^{-1}(S_i) = (X \times_S X) \times_S S_i = (X \times_S S_i) \times_{S_i} (X \times_S S_i) = X_i \times_{S_i} X_i$$

所以有由交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\Delta_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\ & X \times_S X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "p"] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

有

$$\Delta_{X/S}^{-1}(V_i) = \Delta_{X/S}^{-1}(p^{-1}(S_i)) = (p \circ \Delta_{X/S})^{-1}(S_i) = f^{-1}(S_i) = X_i$$

所以知道

$$\Delta_{X/S}|_{X_i} = \Delta_{X_i/S_i}$$

是闭浸入，结合闭浸入是在目标上局部的，从而知道 $\Delta_{X/S}$ 是闭浸入，故分离. 另外一个方向只需要注意到下图

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(S_i) = X_{S_i} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ S_i \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

由后文基变换保持分离立刻得到. □

命题 6.6.5

$f\colon X \to S$ 是分离的当且仅当 $\Delta_{X/S}(X)$ 在 $X \times_S X$ 中是闭集.

证明: 由于 $\Delta_{X/S}$ 总是局部闭浸入，所以如果还有整体拓扑闭，就可以得到闭浸入. □

定理 6.6.1: 概形范畴中的单态射都是分离的

$f\colon X \to S$ 是概形范畴的 monomorphism，则其对角态射是同构，从而是闭浸入，故分离.

证明: 设 $f\colon X \to S$ 是 monomorphism，即对任意的 $g_1, g_2\colon Z \to X$，有

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies g_1 = g_2$$

考虑纤维积

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Delta_f"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_S X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}
$$

由对角态射的性质，我们天然有

$$p_1 \circ \Delta_f = \mathrm{id}_X$$

由于 f monic 并且 $f \circ p_1 = f \circ p_2$，所以 $p_1 = p_2$. 我们注意到

$$p_1 \circ (\Delta \circ p_1) = (p_1 \circ \Delta) \circ p_1 = \mathrm{id}_X \circ p_1 = p_1$$

$$p_2 \circ (\Delta \circ p_1) = (p_2 \circ \Delta) \circ p_1 = \mathrm{id}_X \circ p_1 = p_1 = p_2$$

这告诉我们

$$p_1 \circ (\Delta \circ p_1) = p_1 \circ \mathrm{id}_{X \times_S X}, \quad p_2 \circ (\Delta \circ p_1) = p_2 \circ \mathrm{id}_{X \times_S X}$$

由纤维积泛性质可以得到

$$\Delta_f \circ p_1 = \mathrm{id}_{X \times_S X}$$

所以 Δ_f 是同构，从而自然是闭浸入. □

推论 6.6.1

由于开浸入，闭浸入，局部闭浸入都是概形单态射，从而是分离的.

分离性有很好的性质，尽管我们可以通过粘贴仿射概型来得到非分离的概型，但是实际上我们在实践中遇到的很多概形都是分离的，特别地，仿射概型与射影概型都是分离的.

命题 6.6.6: 分离与仿射开集的交

X 为 A-概形，TFAE:

(1) X 在 $\operatorname{Spec} A$ 上分离.

(2) 对任意两个仿射开子概型 U 与 V，其交 $U \cap V$ 也是仿射的，并且自然的乘积映射

$$\mathscr{O}_X(U) \otimes_A \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_X(U \cap V)$$

是满射.

(3) 存在一个仿射开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ 使得所有的交 $U_i \cap U_j$ 是仿射的，并且 $\mathscr{O}_X(U_i) \otimes_A \mathscr{O}_X(U_j) \to \mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)$ 是满射.

证明: (1) $\implies$ (2)：设 U, V 是 X 的两个仿射开子概形. 则纤维积

$$U \times_S V$$

是 $X \times_S X$ 的一个仿射开子概形，并且

$$U \cap V = \Delta_{X/S}^{-1}(U \times_S V)$$

若 X 在 $S = \operatorname{Spec} A$ 上分离，则对角态射

$$\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$$

是闭浸入. 因此 $U \cap V$ 是仿射概形 $U \times_S V$ 的闭子概形，从而 $U \cap V$ 也是仿射的. 此外，由仿射概形纤维积的构造可知，

$$\Gamma(U \times_S V, \mathcal{O}_{U \times_S V}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \otimes_A \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

又因为 $U \cap V$ 是 $U \times_S V$ 的闭子概形，故限制映射

$$\Gamma(U \times_S V, \mathcal{O}_{U \times_S V}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{U \cap V})$$

是满射. 于是得到自然映射

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \otimes_A \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{U \cap V})$$

是满射，即得 (2). 命题 (2)$\Rightarrow$(3) 是显然的. 下面证 (3)$\Rightarrow$(1). 设

$$p_1, p_2 : X \times_A X \to X$$

为两个投影，且记

$$\Delta : X \to X \times_A X$$

为对角态射. 取覆盖 $\{U_i\}$ 中两个仿射开子概形

$$U_i = \operatorname{Spec} B_i, \qquad U_j = \operatorname{Spec} B_j$$

则有

$$\Delta^{-1}\big(p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j)\big) = \Delta^{-1}\big(p_1^{-1}(U_i)\big) \cap \Delta^{-1}\big(p_2^{-1}(U_j)\big) = U_i \cap U_j$$

另一方面，由纤维积的泛性质可知

$$p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j) = U_i \times_A U_j \subseteq X \times_A X$$

由于闭浸入是关于目标的局部性质，所以只需证明对每一对 i, j，对角态射的限制

$$\Delta_{ij} : U_i \cap U_j \to U_i \times_A U_j$$

是闭浸入. 由假设，$U_i \cap U_j$ 是仿射的，设

$$U_i \cap U_j = \operatorname{Spec} C_{ij}.$$

又假设环同态

$$B_i \otimes_A B_j \to C_{ij}$$

是满射. 注意到

$$U_i \times_A U_j = \mathrm{Spec}(B_i \otimes_A B_j)$$

因此态射

$$\Delta_{ij} : U_i \cap U_j \to U_i \times_A U_j$$

对应于一个满射的环同态，所以 Δ_{ij} 是闭浸入. 于是 Δ 在开覆盖 $\{U_i \times_A U_j\}_{i,j}$ 上的每个限制都是闭浸入，从而 Δ 本身是闭浸入. 故 X 在 $\mathrm{Spec}\, A$ 上分离，即得 (1). □

Example 6.6.1

上面的命题为检验一个概形是否分离提供了一个方便的判别准则. 例如，射影空间 $\mathbb{P}^n_A$ 在 A 上是分离的. 事实上，$\mathbb{P}^n_A$ 可以被标准仿射开覆盖所覆盖，在这个覆盖中任意两个成员的交都是仿射的，并且乘法映射

$$A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \otimes_A A\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right] \longrightarrow A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}, \frac{x_i}{x_j}\right]$$

是满射的（因为右边的所有单项式都可以写成左边单项式的乘积）.

对于仿射空间 $\mathbb{A}^n_A$ 和射影空间 $\mathbb{P}^n_A$，也可以直接看出对角线是闭的. 在

$$\mathbb{A}^n_A \times_A \mathbb{A}^n_A \simeq \mathrm{Spec}\, A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$$

中，对角线是闭子概形

$$\Delta = V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n).$$

类似地，在 $\mathbb{P}^n_A \times_A \mathbb{P}^n_A$ 中，对角线是由下述矩阵的所有 2×2 子式生成的双齐次理想所定义的闭子概形：

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

6.7 Morphisms into separated schemes

命题 6.7.1

X, Y, S 为概形，X 是约化的，$Y \to S$ 是分离的，假设 $f, g\colon X \to Y$ 是 S-态射，并且在 X 的一个稠密开集 U 上相同，则 $f = g$.

证明: 注意两个态射 $f, g\colon X \to Y$ 相等当且仅当对于任何概形 T，其在 T-值点上的态射

$$f_T, g_T\colon X(T) \to Y(T)$$

相等. 由于 $Y \to S$ 是分离的，其对角映射 $\Delta_{X/S}\colon Y \to Y \times_S Y$ 是闭浸入，态射 f, g 定义了一个态射

$$(f, g)\colon X \to Y \times_S Y$$

考虑 $\Delta_{Y/S}$ 的基变换：

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, hook, "\Delta_{Y/S}"] \\ X \arrow[r, "(f,g)"'] & Y \times_S Y \end{tikzcd}$$

由于闭浸入在基变换下稳定，从而 $X' \to X$ 是一个闭浸入，所以可以看成 $X' \subset X$ 是一个闭子概形，由构造，X' 是态射 f 与 g 相同的那些点，即对于任意态射 T，都有

$$X'(T) = \{x \in X(T) \mid f_T(x) = g_T(x) \in Y(T)\}$$

由于 $f|_U = g|_U$，因此 $U \subset X'$，而 X' 是闭的，所以 $X = X'$，因此 $f = g$. □

Remark 6.7.1

其中点函子的计算如下：

$$X' = X \times_{Y \times_S Y} Y$$

而点函子保持极限，即

$$X'(T) = X(T) \times_{(Y \times_S Y)(T)} Y(T)$$

而 $Y(T) \to (Y \times_S Y)(T)$ 为 $y \mapsto (y, y)$，所以这等价于要求

$$(f_T(x), g_T(x)) = (y, y)$$

即 $f_T(x) = g_T(x)$，所以得到 $X'(T)$. 于是我们实际上可以看到 X' 是 f, g 的等化子，所以由于 $U \to X$ 使 f, g 相等，故由等化子的性质可以分解为

$$U \to X' \to X$$

所以可以看成 $U \subset X'$.

6.8 Proper morphisms

定义 6.8.1: 泛闭与Proper

态射 $f\colon X \to S$ 称为是 **universally closed** 如果它是闭映射[a]并且在基变换下保持闭. 即对任意态射 $T \to S$，诱导态射 $f_T\colon X \times_S T \to T$ 是闭的.

$$\begin{array}{ccc} X \times_S T & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

态射 f 称为 **proper**，如果是分离，泛闭且有限型的. 若 X 是 A-概形，称 X **proper over A** 如果 $X \to \operatorname{Spec} A$ 是 proper 的.

[a]拓扑闭映射

紧合态射是代数几何对于拓扑中紧合态射的模拟，在拓扑中，一个映射 f 被称为是紧合的，如果对任意紧子集 $K \subset Y$，都有 $f^{-1}(K)$ 是紧的. 在点集拓扑中存在定理：一个连续映射 $f\colon X \to Y$ 是紧合的，当且仅当对任意映射 $g\colon Z \to Y$，诱导的映射 $X \times_Y Z \to Z$ 是闭映射. 在概型论中，由于纤维积的拓扑并不等于拓扑的纤维积，所以概形的紧合并不能推出拓扑空间也是紧合的.

定理 6.8.1

A 是环，X 为 over $\operatorname{Spec} A$ 的紧合整概形，则 $\mathscr{O}_X(X)$ 在 A 上整.

证明: 设 $f \in \mathscr{O}_X(X)$ 是一个非零截面. 我们证明 f 满足一个系数在 A 中的首一多项式. 令 $U = D(f)$. 因为 $f \neq 0$ 且 X 是整的，故知 f 在泛点处的芽 $f_\eta \in K(X)$ 不为 0，所以知道 $U \neq \varnothing$ 且 $f|_U$ 是可逆的. 我们将其逆记为 $f^{-1} \in \mathscr{O}_X(U)$. 考虑闭子概形

$$Z = V(tf - 1) \subset X \times_A \mathbb{A}^1_A,$$

其中 $\mathbb{A}^1_A = \operatorname{Spec} A[t]$. 令 π_1, π_2 表示到 X 和 $\mathbb{A}^1_A$ 的投影.

我们断言态射 $\pi_1|_Z : Z \to X$ 诱导了 Z 和 U 之间的同构. 通过观察 R-取值点可以看出这一点: $Z(R)$ 由满足在 R 中 $\lambda f(x) = 1$ 的对 $(x, \lambda) \in X(R) \times R$ 组成[2]. 这个方程意味着 $f(x) \in R^\times$，因此 $x \in U(R)$，并且 $\lambda = f(x)^{-1}$ 由 x 唯一确定. 反之，给定 $x \in U(R)$，对 $(x, f(x)^{-1})$ 定义了 Z 的一个 R-点. 因此映射 $(x, \lambda) \to x$ 是到 $U(R)$ 上的双射. 特别地，我们得到 A-代数的同构

$$\mathscr{O}_Z(Z) \simeq \mathscr{O}_X(U) \quad \text{映射 } t \mapsto f^{-1}.$$

现在考虑投影 $\pi_2 : X \times_A \mathbb{A}^1_A \to \mathbb{A}^1_A$. 由于 $X \to \operatorname{Spec} A$ 是紧合的，它的基变换 π_2 也是紧合的，因而是闭的. 所以 $\pi_2(Z) \subset \mathbb{A}^1_A$ 是一个闭子集. 在 Z 上关系式 $tf = 1$ 成立，因此 t 在 Z 上可逆且 $\pi_2(Z) \subset D(t) \subset \mathbb{A}^1_A$.

[2]注意，这里 $f(x)$ 实际上是一种符号滥用，其定义为 $f(x) = x^\#(f) \in R$.

由于 $\pi_2(Z)$ 是闭的，我们有 $\pi_2(Z)=V(\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}=\operatorname{Ker}(A[t]\to\mathscr{O}_Z(Z))$. 现在，包含关系 $\pi_2(Z)\subset D(t)$ 意味着 t 在 $A[t]/\mathfrak{a}$ 中可逆. 因此，存在 $P(t)\in A[t]$ 使得

$$1-tP(t)\in\mathfrak{a}$$

应用映射 $A[t]\to\mathscr{O}_Z(Z)\simeq\mathscr{O}_X(U)$ 可知，在 $\mathscr{O}_X(U)$ 中 $f^{-1}P(f^{-1})=1$. 将 $P(t)$ 写为 $P(t)=\sum_{i=0}^m a_it^i$，其中 $a_i\in A$，并乘以 f^{m+1} 可知

$$f^{m+1}-\sum_{i=0}^m a_if^{m-i}=0 \quad \text{在 } \mathscr{O}_X(U) \text{ 中}.$$

由于 X 是整的，限制映射 $\mathscr{O}_X(X)\to\mathscr{O}_X(U)$ 是单射，所以同样的等式在 $\mathscr{O}_X(X)$ 中也成立. 这证明了 f 满足一个系数在 A 中的首一多项式，从而 $\mathscr{O}_X(X)$ 在 A 上整. □

我们取 $A=k$ 立刻得到：

推论 6.8.1

X 为 k 上的紧合簇，则 $\mathscr{O}_X(X)$ 是 k 的一个有限扩张，特别地，若 k 代数闭，则 $\mathscr{O}_X(X)=k$.

Remark 6.8.1

可以将其视为 Liouville 定理在代数几何中的推广.

推论 6.8.2

令 $f\colon X\to Y$ 为整概形之间的态射，TFAE：

(1) f 是 finite 的.

(2) f 是 affine 且 proper 的.

证明: 有限态射自然是有限型且仿射的，而仿射必然分离. 此外注意有限态射是闭映射，并且在基变换下稳定，所以有限态射是泛闭的. 从而可见有限态射自然是仿射且紧合的.

反之，若 $f\colon X\to Y$ 是仿射的，令 $V=\operatorname{Spec}A\subset Y$，$f^{-1}V=\operatorname{Spec}B\subset X$. 由定理 6.8.1 可知 $A\to B$ 是环的整扩张，从而由于 B 是有限生成 A-代数，知 B 是有限 A-代数，故 f finite. □

注意到 (1) 推 (2) 并没有用到整，所以对任意概形成立.

推论 6.8.3: 有限推紧合

对任意概形态射 $f\colon X\to Y$，若 f finite，则 f proper.

推论 6.8.4: 闭浸入紧合

闭浸入都是紧合的.

证明: 闭浸入在局部上 $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec} A$，而 $A/\mathfrak{a}$ 是有限生成 A-模，故 finite，知 proper. □

6.9 Constructable Sets

定义 6.9.1: 可构造集

拓扑空间 X 中的 **constructable sets** 是 X 的一个最小的子集族，包含全体的拟紧开集，且满足对取补和有限交封闭.

> Remark 6.9.1
> 注意若 X 是 Noether 拓扑空间，则全体开集都拟紧.

可构造集这一名字的来源可以这样解释, 考虑 Noether 环的谱为例, 开集都是有限个主开集的并. 因此对一个可构造集, 总可以描述为有限长的由 “包含 (resp. 不包含) 某个元素”, “合取 (resp. 析取)” 这样的句子构成的命题确定出的素理想集.

定理 6.9.1: Chevalley 定理

$\pi\colon X \to Y$ 是两个 Noether 概形见的有限型态射，则 X 中任意可构造集在 π 下的像都是 Y 中的可构造集. 特别地，$\pi(X)$ 是可构造集.

6.10 Valuative Criterion

定义 6.10.1: 赋值判别图表

概形态射 $f\colon X \to Y$，R 为赋值环，$K = Frac\, R$，则**赋值判别图表**为

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\leq 1"] & Y
\end{tikzcd}$$

这样一个交换图表，我们说 f **满足赋值判别的存在性(resp. 唯一性)**，指对任意赋值环 R，使得图表交换的虚线箭头存在(resp. 至多有一个).

我们可以检查赋值判别法的存在性与唯一性都在基变换下保持，考虑交换图：

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \times_Y T \arrow[r] \arrow[d, "f_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] & T \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

从而得到：

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

于是唯一诱导：

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R \arrow[dr, dashed, "\overline{g}"'] \arrow[drr, dashed, "g"] \arrow[ddr] & & \\
& X \times_Y T \arrow[r] \arrow[d, "f_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& T \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

也就是

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \times_Y T \arrow[d, "f_T"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"'] & T
\end{tikzcd}$$

所以可以看出来是 g 与 $\overline{g}$ 是一一对应的，故存在性与唯一性都被基变换保持.

定义 6.10.2: 拟紧与拟分离

概形态射 $f\colon X \to Y$ 称为 **quasi-compact**，如果对 Y 的任意拟紧开集 V，都有 $f^{-1}V$ 拟紧. 态射 $X \to Y$ 称为 **quasi-separated**，如果 $\Delta_{X/Y}X \to X \times_Y X$ 是拟紧的.

Remark 6.10.1

可见如果 f 是拟紧的，则对 Y 的任意仿射开集 V，都有 $f^{-1}V$ 是有限个仿射开集的并. 若 f 是拟分离的，则 $\Delta_{X/Y}$ 是拟紧的，考虑 $X \times_Y X$ 的仿射开集 $U \times_Y V$，其中 U, V 都是 X 的仿射开集，则其原像为

$$\Delta_{X/Y}^{-1}(U \times_Y V) = U \cap V$$

所以 $U \cap V$ 是拟紧的，也即为有限个仿射开集的并. 于是我们理解了命题 5.6.2 下的 remark. 于是拟紧的直观是仿射原像为有限个仿射开集的并，而拟分离的直观为仿射开集的交为有限个仿射开集的并.

Remark 6.10.2

任何闭浸入都是拟紧的，因为拟紧可以局部检验，而闭浸入在仿射局部上的原像形如 $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$，从而拟紧. 可知分离能推拟分离.

命题 6.10.1: 泛闭的赋值判别法

$f\colon X \to Y$ 为拟紧态射，则 f 泛闭当且仅当满足赋值判别存在性.

证明: 首先若 f 泛闭，注意到泛闭与赋值判别法都在基变换下保持，所以我们不妨沿 $\operatorname{Spec} R \to Y$ 基变换，从而可设 $Y = \operatorname{Spec} R$. 记 $\operatorname{Spec} K = \{\eta\}$，$\eta$ 在 X 中的闭包记为 Z，取其上的层使得得到的概型是约化概形(见命题 6.1.1)，因为复合闭浸入 $Z \hookrightarrow X$ 不改变泛闭，故不妨设 $X = Z$，现在有

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K = \{\eta\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd}$$

X 不可约，η 的像 ξ 是 X 的泛点，f 是泛闭映射，要寻找 $\operatorname{Spec} R \to X$ 使得图表交换. 由于这里 $X = Z$ 是不可约的约化概形，从而是整概形，我们可以考虑其函数域 $K(X) = \mathscr{O}_{X,\xi}$，我们现在考虑映射

$$\operatorname{Spec} K \to X \to \operatorname{Spec} R$$

取其在泛点上的茎态射得到

$$R_{(0)} \to \mathscr{O}_{X,\xi} \to K \iff K \to K(X) \to K$$

由于域态射且非平凡，所以都是单射，故

$$K(X) = K$$

取 X 的包含 ξ 的稠密开集 $\operatorname{Spec} A$，我们自然有 $f\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$ 对应环态射 $\varphi\colon R \to A$，由于整概形的局部截面是函数域的子环，所以我们有

$$R \to A \hookrightarrow K(X) = K$$

而这个复合映射也即 $R \hookrightarrow K$，所以 $R \to A$ 是一个单射，从而 $f(\xi) = \varphi^{-1}(0) = (0)$ 为 $\operatorname{Spec} R$ 的泛点，从而我们知道这个图表总是将泛点送到泛点. 再由于 f 是闭映射，所以 $f(X) = \operatorname{Spec} R$，于是取闭点 $y \in \operatorname{Spec} R$，$x \in f^{-1}(y)$，由于 R 是赋值环，所以有

$$f_x\colon R_y = R \to \mathscr{O}_{X,x}$$

是局部同态，由于将泛点打到泛点，所以 f_x 是单射，于是有

$$R \subset \mathscr{O}_{X,x} \subset K$$

而 R 是赋值环[3]，所以知道 $R=\mathscr{O}_{X,x}$，于是 $\mathscr{O}_{X,x}\to R$ 的同构就诱导了 $\operatorname{Spec} R\to\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{X,x}\subset X$. 故赋值判别存在.

反设赋值判别存在，由于赋值判别在基变换下保持，所以我们只需要证明 f 是闭的. 设 $Z\subset X$ 是闭子概型，只需要证 $f(Z)$ 在特殊化下封闭，设 $z\in Z$ 映到 $y\in Y$，设 y 特殊化到 y'，需证明 z 特殊化得到 z' 使得 z' 映到 y'. 现有环同态

$$\mathscr{O}_{Y,y'}\to k(y)\to k(z)$$

设分式域 $k(z)$ 中的赋值环 R 使得 $\mathscr{O}_{Y,y'}\to R$ 穿过 $\mathscr{O}_{Y,y'}\to k(z)$. 赋值判别法中取赋值环为 R，其分式域为 $\operatorname{Spec} k(z)$，现在 $\operatorname{Spec} k(z)\to X$ 打到 z，$\operatorname{Spec} R$ 一般点打到 y，$\operatorname{Spec} R$ 闭点打到 y'，根据 R 的构造，也能将 $\operatorname{Spec} R$ 一般点打到 z，闭点的像取作 z' 即可. □

定理 6.10.1: 赋值判别法

$f\colon X\to Y$ 是概形的态射，则

(1) <u>分离的赋值判别法</u>：f 拟分离，则 f 分离当且仅当满足赋值判别法的唯一性.

(2) <u>紧合的赋值判别法</u>：f 有限型拟分离，则 f 紧合当且仅当满足赋值判别法的存在唯一性.

证明: (1) f 满足赋值判别法的唯一性当且仅当若

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed, shift left, "h_1"] \arrow[ur, dashed, shift right, "h_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

则 $h_1=h_2$，注意到纤维积的泛性质告诉我们若 $f\circ h_1=f\circ h_2$，则诱导出态射 $\operatorname{Spec} R\to X\times_Y X$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R \arrow[dr, "h"] \arrow[drrr, dashed, bend left, "h_1"] \arrow[ddrr, dashed, bend right, "h_2"'] & & & \\
& X \arrow[dr, "\Delta_f"] & & \\
& & X\times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
& & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

而 $h_1=h_2$ 告诉我们这个映射穿过 $\Delta_f\colon X\to X\times_Y X$，从而也就当且仅当 $\Delta_{X/Y}$ 满足赋值判别法的存在性，而 f 拟分离告诉我们 $\Delta_{X/Y}$ 拟紧，从而由泛闭的赋值判别法知道 $\Delta_{X/Y}$ 是泛闭的，从而是闭映射，故 f 分离.

[3]赋值环在支配下极大.

(2) f 有限型，拟分离，由分离的赋值判别法知道 f 是分离的，此外由存在性的赋值判别法知道 f 是泛闭的，从而紧合. □

推论 6.10.1: 射影空间紧合

射影空间紧合，即 $\mathbb{P}^n \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 是紧合态射.

证明: 我们只需要证明虚线箭头存在唯一：

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^n \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Spec}\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

上方水平箭头相当于给出一个齐次坐标 $[a_0, \cdots, a_n]$ 使得 $a_i \in K$，利用赋值我们可以将其一起除掉一个赋值最小的，从而得到 $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n$，这就给出了唯一的映射，从而紧合. □

于是利用基变换保持紧合与复合保持紧合立刻得到：

推论 6.10.2: 射影概形是紧合的

$\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ 是紧合的，进一步任何射影概形都是紧合的.

引理 6.10.1

X 在 A 上分离(resp. 紧合)，Y 在 A 上分离，则任意 A-态射 $f\colon X \to Y$ 分离(resp. 紧合).

证明: 如图构造 Γ_f：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Gamma_f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "\pi_Y"'] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

可以得到 $f = \pi_Y \circ \Gamma_f$，观察下图：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h=(h_1,h_2)"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Gamma_f"'] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/A}"] \\
& X \times_A Y \arrow[r, "(f,\mathrm{id}_Y)"'] & Y \times_A Y
\end{tikzcd}$$

不难发现 $\Gamma_f\colon X\to X\times_A Y$ 就是 $\Delta_{Y/A}$ 的基变换，从而由闭浸入在基变换下保持，知道 Γ_f 是闭浸入，从而紧合. 而 $\pi_Y\colon X\times_A Y\to Y$ 是 $X\to\operatorname{Spec}A$ 的基变换，所以若 $X\to\operatorname{Spec}A$ 是分离(resp. 紧合)，则 π_Y 是分离(resp. 紧合)的，现在由于分离与紧合都在复合下保持，所以 f 满足条件. □

推论 6.10.3

k 是域，$f\colon X\to Y$ 为 k 上射影概形的态射，则 f 是紧合的. 特别地，$f(X)\subset Y$ 是闭的.

证明: 注意 X,Y 为射影概形，从而在 k 上 proper，由上面引理知道 $f\colon X\to Y$ 是紧合的. □

推论 6.10.4

令 X 为 k-拟射影概形，则 X 在 k 上紧合当且仅当 X 在 $\mathbb{P}^n_k$ 中是闭集.

证明: 若 X 紧合，结合 $\mathbb{P}^n_k\to\operatorname{Spec}k$ 是紧合从而知道 $X\to\mathbb{P}^n_k$ 紧合，故 X 在 $\mathbb{P}^n_k$ 中闭. 反过来由于 $X\to\mathbb{P}^n_k$ 是一个局部闭浸入，若整体像是闭的，则为闭浸入，从而为射影概形，从而紧合. □

6.11 Formal properties of morphisms

定义 6.11.1: 态射的性质

$\mathcal{P}$ 是概型态射的性质，则称 $\mathcal{P}$ 是

(1) **Stable under composition** 若任何两个 $f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$ 满足 $\mathcal{P}$，则 $g\circ f\colon X\to Z$ 满足 $\mathcal{P}$.

(2) **Stable under base change** 若任何态射 $f\colon X\to S$ 满足 $\mathcal{P}$，给定任何态射 $g\colon T\to S$，都有 $f_T\colon X\times_S T\to T$ 满足 $\mathcal{P}$.

(3) **Stable under products** 若对任何态射 $f\colon X\to Y$ 与 $f'\colon X'\to Y'$ 满足 $\mathcal{P}$，其乘积 $f\times f'\colon X\times_{\mathbb{Z}} X'\to Y\times_{\mathbb{Z}} Y'$ 满足 $\mathcal{P}$.

(4) **Local on the target** 若态射 $f\colon X\to S$ 满足 $\mathcal{P}$ 当且仅当存在一个 S 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得基变换 $f_{U_i}\colon X\times_S U_i\to U_i$ 满足 $\mathcal{P}$.

(5) **Local on the source** 若 $f\colon X\to S$ 满足 $\mathcal{P}$ 当且仅当存在一个 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得限制 $f|_{U_i}\colon U_i\to S$ 满足 $\mathcal{P}$.

实际上 local on the target/source 对于拓扑上的性质也可以定义，总结如下：

定理 6.11.1: 拓扑上局部性质

对于拓扑空间上的映射 $f\colon X \to Y$，以下性质仅在靶上局部：

(1) 闭映射. (2) 满射. (3) 商映射.

以下性质既是靶局部又是源局部：

(1) 开映射. (2) 局部同胚. (3) 连续性.

定理 6.11.2: 概形态射的性质阶段性总结

下面的性质在复合，基变换，乘积下保持稳定，并且是在靶上局部的：

(1) Affine. (2) Closed immersion. (3) Open immersion. (4) Finite. (5) Integral.

(6) Finite type. (7) Separated. (8) Proper. (9) Quasi-compact. (10) Quasi-separated.

其中 Finite type 还是在源上局部的.

定义 6.11.2: 几何性质

$\mathcal{P}$ 是一个描述概形的性质，若 k-概形 X 满足 $\mathcal{P}$，且对任意扩域 K/k，$X_K = X \times_k \operatorname{Spec} K$ 仍然满足 $\mathcal{P}$，则称 X 满足**几何 $\mathcal{P}$** 性质.

Chapter 7: Varieties

7.1 Varieties

定义 7.1.1: Variety

域 k 上的 **variety** 定义为一个 **integral, separated scheme of finite type over k.** 簇之间的态射就是 $f: X \to Y$ 作为 k-概形的态射，即

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

在此意义下，k 上的簇构成了 $\mathbf{Sch}/k$ 的一个满子范畴 $\mathbf{Var}/k$.

虽然还没定义维数，但可以先定义所谓 **curve** 是一个 1 维的簇，**surface** 是一个 2 维的簇.

簇上有自然的 **open subvariety** 结构，设 X 是一个 k 上的簇，则所有的开子概形 $U \subset X$ 都是簇，原因在于整概形的开子概形还是整概形(命题 3.2.1)，而开浸入都是分离的(6.6.1)，并且由于有限型是在源上局部的，所以自然 U 也是 k-有限型的，因此由定义知道 U 是 k 上的簇.

同理会有 **closed subvariety**，若 $Z \to X$ 是一个闭浸入，并且 Z 是整概形，则 Z 也是一个簇，因为闭浸入本身是有限态射，从而有限型，而有限型复合有限型还是有限型，所以 Z 是 k 上有限型，闭浸入还是分离的，分离复合分离仍然分离，所以知道是一个簇.

Remark 7.1.1

需要注意的是簇结构并不被基变换所保持，例如考虑 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2)$ 是 R 上的簇，但是若基变换到 $\mathbb{C}$ 上就变成了

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/(x+iy)(x-iy)$$

这是可约的，从而不是整概形. 由此也可见两个簇的纤维积没有道理还是一个簇.

但是下面的定理告诉我们如果在一个代数闭域上做纤维积，那就很好了.

定理 7.1.1

令 X, Y 为代数闭域 k 上的有限型概形，则

(1) $X \times_k Y$ 在 k 上有限型.

(2) $X \times_k Y$ 的闭点为所有 k-点 $(X \times_k Y)(k) = X(k) \times Y(k)$.

(3) 若 X, Y 是约化的，则 $X \times_k Y$ 也是约化的.

(4) 若 X, Y 是整概形，则 $X \times_k Y$ 也是整概形.