Functional Analysis

Muke

2026 年 1 月 11 日

目录

1 算子与Banach空间 **3**

2 Hahn-Banach 定理 **5**

3 半范数与 Minkowski 泛函 **9**

4 Hahn-Banach 几何形式——超平面定理/凸集分离定理 **12**

5 有界线性泛函的核 **14**

6 K 是 K-赋范线性空间的内射对象 **17**

7 对偶/共轭空间与对偶/共轭算子 **19**

8 二次对偶与自反——正合列视角 **21**

9 有界算子三大定理及其推论 **24**

10 闭值域定理 **30**

11 Hilbert 空间 **33**

12 Hilbert 空间的正交系 **36**

13 Hilbert 空间的投影定理 **39**

14 Hilbert 空间的对偶 **41**

15 预解集与谱集 **43**

16 谱半径公式 **47**

17 紧算子 **51**

18 拓扑线性空间 **54**

19 Banach代数 **60**

20 拾遗 **60**

21 常见赋范空间 **61**

22 常见 Hilbert 空间 **64**

23 题目选解 **64**

1 算子与Banach空间

所谓 Banach 空间就是完备的赋范线性空间，泛函分析中有著名的连续算子定理，即

Theorem 1.1. *X 与 Y 为赋范线性空间，$T\colon X \to Y$ 是线性算子，则 T 连续当且仅当 T 有界.*

证明. In linear space, a linear map is continuous if and only if it is continuous at any single point. So if T is bounded, i.e. there exists $M > 0$ such that

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leqslant M$$

So given any x_0 and $\varepsilon > 0$, we have $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ such that

$$||Tx_0 - Tx|| = ||T(x_0 - x)|| \leqslant M||x_0 - x|| \leqslant \varepsilon, \quad \forall ||x - x_0|| \leqslant \delta$$

For the only if part, we need to show that any continuous map is bounded. If T is continuous, we suppose T is unbounded. Then for any $n \in \mathbb{N}$, exists $x_n \in X$ such that

$$||Tx_n|| \geqslant n||x_n||$$

let

$$y_n = \frac{x_n}{n||x_n||}$$

we have

$$||Ty_n|| \geqslant 1$$

but $y_n \to 0$, so it is a contradiction. □

下面我们称 $\mathscr{B}(X, Y)$ 为从 X 到 Y 的有界线性算子空间. 我们也可以讨论在有界算子空间上的范数与收敛.

Theorem 1.2. *在 $\mathscr{B}(X, Y)$ 中按范数收敛当且仅当在 X 的单位球上一致收敛.*

即然有界算子空间是一个赋范线性空间，那么我们自然也很好奇什么时候它是完备的.

Theorem 1.3. *若 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(X, Y)$ 是 Banach 空间.*

这个东西其实很好理解，因为值域在 Y 上面，所以我们需要的是值域上的完备来得到算子空间上的完备.

证明. 取算子在范数意义下的 Cauchy 列，然后利用 Y 上的完备性逐点构造出算子的极限，容易说明是线性算子，有界来自 Cauchy 列一致有界. □

在很多时候我们讨论的实际上是算子族的行为，我们先定义一些不同的收敛范式.

Definition 1.4. 给定算子列 $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(X, Y)$，定义

(1) $\{T_n\}$ **一致收敛** 为按范数收敛.

(2) $\{T_n\}$ **强收敛** 为逐点收敛.

可以明显看出来一致收敛可以推出强收敛.

Theorem 1.5 (Banach-Steinhaus). *X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathscr{B}(X, Y)$，如果对于任意的 $x \in X$，有 $\sup\limits_{\alpha \in I} ||T_\alpha x|| < \infty$，则 $\{||T_\alpha||\}_{\alpha \in I}$ 有界.*

这个定理实际上在说如果每个轨道有界(不要求对不同轨道是一致的界)，则算子族一致有界. 会发现此处突然要求定义域空间是完备的而非值域空间，这里的哲学是我们并不需要算子族的收敛行为，但是需要在某一个开集上的一致行为，而这个行为是由 Baire 纲定理保证的，Baire 纲定理需要在完备度量空间上面使用，所以我们要求了定义域上的完备行为.

证明. 我们取

$$M_k := \bigcap_{\alpha \in I} \{x \in X \mid ||T_\alpha x|| \leqslant k\}$$

明显是一个闭集，并且有

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

由 Baire 纲定理我们知道存在 k_0 使得 $M_{k_0}^\circ$ 非空. 所以得到某个开球上面的一致有界，容易推广到全空间，得证. □

Theorem 1.6. *X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，$\{T_n\} \subset \mathscr{B}(X, Y)$，若*

(1) $\{||T_n||\}$ 有界.

(2) 存在 X 的一个稠子集 G，有 $\{T_n\}$ 在 G 上强收敛.

则 $\{T_n\}$ 强收敛于一个有界线性算子 T，并且有 $||T|| \leqslant \varliminf\limits_{n \to \infty} ||T_n||$.

Theorem 1.7. *Banach 空间之间的有界线性算子在强收敛意义下是完备的.*

Definition 1.8 (商空间). X 是赋范线性空间，M 是其闭子空间，我们可以定义**商空间** X/M，其上范数定义为

$$||[x]|| = \inf_{m \in [x]} ||m||$$

Theorem 1.9. *X 是 Banach 空间，M 是其闭子空间，则 X/M 是 Banach 空间.*

证明. 把 Cauchy 提升到 X 中再拉下来即可. □

2 Hahn-Banach 定理

Theorem 2.1 (Hahn-Banach)**.** 设 p 是定义在实线性空间 L 上的次线性函数，即满足

$$p(tx) = tp(x), t \geqslant 0, \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$

L_0 是 L 的线性子空间，如果 f_0 是 L_0 上的线性泛函，满足

$$f_0(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in L_0$$

则 f_0 可以延拓到整个 L 上变成线性泛函 f，并且使得

$$f(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in L$$

证明. 证明就是说明可以加入单个向量进行线性延拓，然后利用 Zorn 引理拓展到全空间上. 单个向量延拓的过程实际上就是在解方程，说明存在解即可. □

Theorem 2.2 (复版本 Hahn-Banach)**.** 设 p 是定义在复线性空间 L 上的半范数，L_0 是 L 的线性子空间，如果 f_0 是 L_0 上的线性泛函，满足

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in L_0$$

则 f_0 可以延拓到整个 L 上变成线性泛函 f，并且使得

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in L$$

证明. 复版本可以直接由实数版本得到，因为一个重要的观察是

$$i \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(x) = i \cdot f(x) = f(ix) = \operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix)$$

于是

$$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Im} f(ix), \quad \operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$$

也就是 f 的虚部可以完全由实部决定，所以一旦给定了实部的延拓，就立刻可以得到虚部的延拓，即

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix)$$

然后利用实版本的 Hahn-Banach 定理立刻得到结果. □

Hahn-Banach 定理告诉我们存在充分多的线性泛函，我们可以根据需要来构造很多种特殊的泛函，下面介绍几个常用的构造例子：

Proposition 2.3 (子空间上的保范延拓). L_0 是实线性空间 L 的线性子空间，如果 $f_0 \in L_0^*$，则存在 $f \in L^*$，使得

$$f|_{L_0} = f_0, \quad ||f||_L = ||f_0||_{L_0}$$

证明. 我们只需要构造合适的次线性函数 $p(x)$，注意到我们需要保持范数，而由于是延拓范数不会变小，所以只需要保证范数不会大于原本的范数即可，也就是说我们需要

$$||f|| = \sup \frac{|f(x)|}{||x||} \overset{\text{如果 } p(x) \text{ 取得比较好的话}}{\leqslant} \sup \frac{|p(x)|}{||x||} \overset{\text{HOPE}}{\leqslant} ||f_0||$$

于是我们可以直接令

$$p(x) = ||f_0|| \cdot ||x||$$

这很显然是一个次线性函数，于是利用 Hahn-Banach 定理立刻得证. □

Proposition 2.4 (单点的处的 1-范数泛函). X 是赋范线性空间，x_0 是非零元素，则存在 $f \in X^*$ 使得 $||f|| = 1$ 并且 $f(x_0) = ||x_0||$.

证明. 在 x_0 张成的一维线性子空间上定义

$$f_0(ax_0) = a||x_0||$$

然后利用保范延拓立刻得到结果. □

Proposition 2.5 (X^* 区分 X 中的点). 线性赋范空间 X 中两个不同元素 x_1, x_2，存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

证明. 要说明 $f(x_1) \neq f(x_2)$，实际上就是

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \neq 0$$

取 $x_1 - x_2 \neq 0$ 处的单点 1-范数泛函即可. □

Proposition 2.6 (X^* 分离闭线性子空间与点). M 是赋范线性空间 X 的闭线性子空间，$x \notin M$，则存在 $f \in X^*$ 使得 $||f|| = 1$，$f(M) = 0$ 且 $f(x) = d(x, M)$.

证明. 考虑 M 与 x 张成空间

$$X_0 = \mathrm{Span}\{M, x\}$$

对于 $y = m + \lambda x \in X_0$，我们定义

$$f(y) = \lambda d(x, M)$$

有

$$||f|| = \sup \frac{|\lambda d(x, M)|}{||m + \lambda x||} = \sup \frac{d(x, M)}{||m + x||} = \frac{d(x, M)}{\inf ||m + x||} = 1$$

对 f 保范延拓即可. □

Corollary 2.7. *M 是赋范线性空间 X 的一个子集，则元素 $x \in \overline{\mathrm{Span}\{M\}}$ 当且仅当对于任意满足 $f(M) = 0$ 的线性泛函 $f \in X^*$，都有 $f(x) = 0$.*

我们可以利用线性泛函来定义零化子和预零化子的概念：

Definition 2.8 (零化子与预零化子)**.** 对线性赋范空间 X 的子集 M，我们可以定义 M 的**零化子**为

$$M^{\perp} = \{f \in X^* \colon f(M) = 0\}$$

对于 X^* 的子集 N，我们可以定义 N 的**预零化子**为

$$^{\perp}N = \{x \in X \colon x(N) = 0\}$$

零化子和预零化子是正交补空间在 Banach 空间中的推广.

Theorem 2.9. *$M^{\perp}$ 是 X^* 的闭线性子空间，$^{\perp}N$ 是 X 的闭线性子空间.*

证明. 设 $\{f_n\} \subset M^{\perp}$，使得有极限 $f \in X^*$，我们证明 $f \in M^{\perp}$. 假设存在 $x \in M$ 使得 $f(x) \neq 0$，则我们有

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| = |(f - f_n)(x)| \leqslant ||f - f_n|| \cdot ||x|| \to 0$$

于是矛盾，所以 $f \in M^{\perp}$. 对偶情况同理. □

Theorem 2.10. *X 是赋范线性空间，则对于 X 的线性子空间 M，我们有*

$$^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}$$

证明. 很显然 $\overline{M} \subseteq {}^{\perp}(M^{\perp})$，我们只需要证明反方向的包含关系.

假设 $x_0 \in {}^{\perp}(M^{\perp})$，但 $x_0 \notin \overline{M}$，因为 M 是线性子空间，所以 $\overline{M}$ 是 X 中的闭线性子空间. 既然 $x_0 \notin \overline{M}$ 且 $\overline{M}$ 是闭的，那么 x_0 到 $\overline{M}$ 的距离 $d = \inf\limits_{y \in \overline{M}} \|x_0 - y\| > 0$，根据 Hahn-Banach 定理的推论：存在 $f \in X^*$，使得 f 在 $\overline{M}$ 上为 0，但是 $f(x_0) \neq 0$，这与我们的假设前提 $x_0 \in {}^{\perp}(M^{\perp})$ 矛盾. □

关于零化子，我们还需要知道：

Theorem 2.11. *集合的(预)零化子等于其闭包的(预)零化子.*

证明. (1) 我们要证明 $M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$，只需要证明 $M^{\perp} \subseteq (\overline{M})^{\perp}$，假设 $f \in M^{\perp}$. 现在，任取一个闭包中的点 $x \in \overline{M}$，根据闭包的定义，存在一个序列 $\{x_n\} \subseteq M$，使得 $x_n \to x$

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

所以 $f \in (\overline{M})^{\perp}$.

(2) 设 $G \subseteq X^*$，我们要证明 ${}^{\perp}G = {}^{\perp}(\overline{G})$，只需要证明反向的包含，设 $x \in {}^{\perp}G$. 意思是对于所有的 $g \in G$，都有 $g(x) = 0$. 取 $f \in \overline{G}$，存在序列 $g_n \in G$ 使得 $\|g_n - f\| \to 0$.

$$|f(x)| = |f(x) - 0| = |f(x) - g_n(x)| = |(f - g_n)(x)| \leqslant \|f - g_n\| \cdot \|x\|$$

当 $n \to \infty$ 时，$\|f - g_n\| \to 0$，所以 $|f(x)| \leqslant 0 \cdot \|x\| = 0$，即 $f(x) = 0$. $\square$

3 半范数与 Minkowski 泛函

Definition 3.1 (凸集). 是 V 是线性空间，M 是 V 的一个子集，如果对于任意的 $x, y \in M$，都有

$$\{ax + (1-a)y \mid a \in [0,1]\} \subseteq M$$

我们就称 M 是一个**凸集**.

一个常用结论是：

Theorem 3.2. 线性空间中任意多个凸集的交还是凸集.

证明几乎是显然的，利用这个结论，我们可以定义

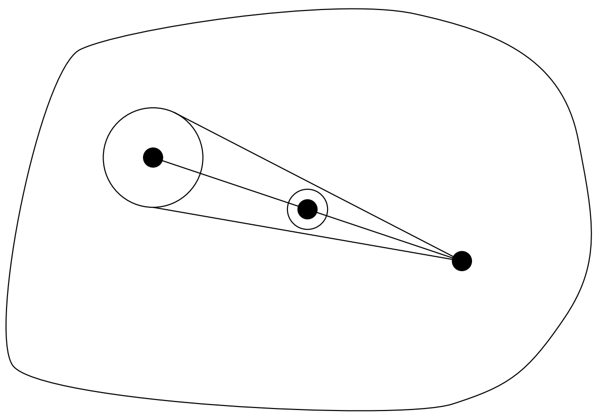
Definition 3.3. 包含子集 A 的最小凸集称为 A 的**凸包**，定义为：

$$\mathrm{co}(A) := \left\{ \sum a_i x_i \colon x_i \in A, a_i \geqslant 0, \sum a_i = 1, \#\{a_i \neq 0\} < \infty \right\}$$

我们还知道一个结论：

Proposition 3.4. 如果 M 是凸集，有非空内部，则 M° 也是凸集.

证明. 命题的证明想象一下几何直观就立刻得到.



线段上任何一点的开邻域可以由端点的开邻域通过凸性得到. □

半范数(所谓半范数就是把范数的正定性变成半正定性)与 Minkowski 泛函在拓扑线性空间中具有根本性的重要性.

Proposition 3.5. 设 $p(x)$ 是线性空间 V 上的半范数，则

$$M = \{x \in V \colon p(x) \leqslant 1\}$$

具有以下性质：

(1) $0 \in M$.

(2) M 是凸的.

(3) M 是**均衡**的：若 $x \in M$，且 $|\alpha| = 1$，则 $\alpha x \in M$.

(4) M 是**吸收**的：对任何 $x \in X$，总存在 $\alpha > 0$ 使得 $\alpha^{-1}x \in M$.

(5) $p(x) = \inf\limits_{\alpha>0, \alpha^{-1}x\in M} \alpha$.

命题是显然的，我们下面可以在这个命题的基础上定义：

Definition 3.6 (Minkowski 泛函). M 是线性空间 V 中吸收的凸集，则对于任意的 $x \in V$，定义

$$p_M(x) = \inf_{\alpha>0, \alpha^{-1}x\in M} \alpha$$

称 p_M 为 M 的 ***Minkowski 泛函***.

Proposition 3.7. *M 是线性空间 V 中的一个吸收凸子集，则 M 的 Minkowski 泛函是 V 上的一个次线性函数，并且满足*

$$\{x \colon p_M(x) < 1\} \subset M \subset \{x \colon p_M(x) \leqslant 1\}$$

如果 M 还是均衡的，那么 $p_M(x)$ 是 V 上的一个半范数.

证明. 首先说明是次线性的，我们的目的是说明任意的 x, y，有

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$

等价于说明对于任意的 $\varepsilon > 0$，都成立不等式：

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$$

这相当于说明存在 $p(x) + p(y) + \delta_1 + \delta_2 \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ 使得

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+\delta_1+\delta_2} \in M$$

利用凸性就是希望

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+\delta_1+\delta_2} = \frac{p(x)+\delta_1}{p(x)+p(y)+\delta_1+\delta_2} \cdot \frac{x}{p(x)+\delta_1} + \frac{p(y)+\delta_2}{p(x)+p(y)+\delta_1+\delta_2} \cdot \frac{y}{p(y)+\delta_2} \in M$$

也就是希望

$$\frac{x}{p(x)+\delta_1} \in M, \quad \frac{y}{p(y)+\delta_2} \in M$$

这由 $p(x), p(y)$ 的定义立刻知道是存在的，于是次线性得证. 命题中的包含关系是显然的，下面假设 M 是均衡的，我们要说明

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

其正齐次性很容易满足，下面要说明对于任意的数都满足齐次性质，这一点是通过均衡来说明的. 由于对于任意的 $|\lambda| = 1, x \in M$，都有 $\lambda x \in M$. 我们有

$$p(|\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|} x) = |\lambda| p(\frac{\lambda}{|\lambda|} x) = |\lambda| p(x)$$

最后一个等号是均衡性导致的. □

于是我们现在就在半范数与均衡吸收凸集之间建立了一个对应关系，下面来看在赋范线性空间中 Minkowski 泛函的连续性.

Theorem 3.8. *如果 L 是赋范线性空间，M 是 L 中的一个吸收凸子集，则 $p_M(x)$ 是连续函数当且仅当 0 是 M 的内点.*

证明. 若 $p_M(x)$ 是连续函数，则

$$\{x \in L \colon p_M(x) < 1\} \subset M$$

是 M 中包含 0 的开集，故 0 是 M 的内点. 反之若 0 是 M 的内点，则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(0, \varepsilon) \subset M$，对 L 中的任意点 x，都有

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{||x||} \in B(0, \varepsilon) \subset M$$

所以有

$$p_M(x) \leqslant \frac{2}{\varepsilon} ||x||$$

于是对于任意的 $x, y \in L$，有

$$|p_M(x) - p_M(y)| \leqslant \max\{p_M(x-y), p_M(y-x)\} \leqslant \frac{2}{\varepsilon} ||x-y||$$

于是连续. □

4 Hahn-Banach 几何形式——超平面定理/凸集分离定理

本节旨在说明这样一种观点：

$\boxed{\text{如果两个凸集不相交，那么我们总能找到一个超平面，把它们分隔在两边}}$

Definition 4.1. *设 V 是实线性空间，M, N 是其子集，f 是 V 上的线性泛函*

(1) 若存在常数 c 使得

$$M \subseteq f^{-1}((-\infty, c]), \quad N \subseteq f^{-1}([c, +\infty))$$

则称 f ***分离集合 M 与 N****.*

(2) 如果线性泛函 f 满足存在常数 c 使得

$$M \subseteq f^{-1}((-\infty, c)), \quad N \subseteq f^{-1}((c, +\infty))$$

则称 f ***严格分离集合 M 与 N****.*

我们可以把分离理解为存在一个由泛函的水平集构成的超平面

$$H_c = \{x \colon f(x) = c\}$$

使得 M, N 分别落在这个超平面的两边，严格分离就是这个超平面与 M, N 都不交.

Remark 4.2. *我们还可以看出来 f 分离 M, N 当且仅当 f 分离 $M - N$ 与 0，当且仅当 f 区分 $M - x$ 与 $N - x$，$\forall x \in V$.*

Lemma 4.3. *分离凸集与点 A 是是线性赋范空间 L 中的凸子集，如果 A 的内部 A° 是非空的，并且 $y_0 \notin A^\circ$，则存在非零线性泛函 $f \in L^*$ 分离 A 与 $\{y_0\}$.*

证明. 不妨设 0 为 A 的内点，则存在 0 的一个邻域 $B(0, \delta) \subset A$，从而我们知道 A 是吸收的，于是由定理 3.8 知道 p_A 是 L 上的连续次线性函数，并且对于任意的 $x \in A$，有 $p_A(x) \leqslant 1$，又由于 y_0 不是 A 的内点，所以 $p_A(y_0) \geqslant 1$.

现在令 $L_0 = \text{Span}\{y_0\}$ 是 y_0 张成的子空间，容易验证

$$f_0(ty_0) = tp_A(y_0)$$

是从属于 p_A 的线性泛函，由 Hahn-Banach 定理知道存在 L 上的线性泛函 f 是 f_0 的延拓，并且满足

$$f(x) \leqslant p_A(x), \quad \forall x \in L$$

由 $p_A(x)$ 的连续性我们可以得到 $f(x)$ 的连续性(f 在 0 处连续则连续，利用 $p_A(x)$ 在 0 处连续立刻得到)，并且对于任意的 $x \in A$，我们有

$$f(x) \leqslant p_A(x) \leqslant 1 \leqslant p_A(y_0) = f(y_0)$$

所以 f 分离 A 和 y_0. □

Theorem 4.4 (分离凸集与凸集). *设 M, N 是实赋范线性空间 L 中的凸集，如果 M 的内部 M° 非空，并且 $M^\circ \cap N = \varnothing$，则存在非零的 $f \in L^*$ 分离 M 与 N.*

证明. 首先由 M 凸知道 M° 是凸集，令

$$A = M^\circ - N = \{x - y \colon x \in M^\circ, y \in N\}$$

显然 A 是非空的开凸子集，因为 A 为若干开集的并：

$$A = \bigcup_{y \in N} (M^\circ - y)$$

并且 $0 \notin A$，由前面的引理，我们知道存在 $f \in L^*$ 分离 A 与 $\{0\}$. 从而可以得到这个 f 分离 M° 与 N，由连续性可以得到 f 分离 M 与 N. □

Theorem 4.5 (超平面定理). *M, N 是实线性赋范空间 L 中的闭凸集，满足 $d(M, N) > 0$，则存在 $f \in L^*$ 严格分离 M, N.*

证明. 我们可以取

$$\widetilde{N} = \left\{x \in V \colon d(x, N) < \frac{d(M, N)}{3}\right\}$$

然后对 M 和 $\widetilde{N}$ 使用凸集分离定理，得到连续线性泛函 f 和常数 c 使得

$$f(x) \leqslant c \leqslant f(y), \forall x \in M, y \in \widetilde{N}$$

于是对于任意的 $y \in N, ||z|| < \dfrac{d(M, N)}{3}$，有 $y - z \in \widetilde{N}$，从而

$$f(y) \geqslant c + f(z), \forall ||z|| < \frac{d(M, N)}{3}$$

也就是

$$f(y) \geqslant c + \sup_{||z|| < \frac{d(M, N)}{3}} f(z) = c + \frac{d(M, N)||f||}{3} > c$$

于是严格分离. □

5 有界线性泛函的核

Theorem 5.1. $0 \neq f \in V^*$，则 $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

证明. 任取 $x_0 \in V$，$f(x_0) \neq 0$，则对于任意的 $x \in V$，有

$$f\left(x - \frac{f(x)x_0}{f(x_0)}\right) = 0$$

从而

$$x - \frac{f(x)x_0}{f(x_0)} \in \operatorname{Ker} f$$

从而

$$[x] = \frac{f(x)}{f(x_0)}[x_0]$$

也即

$$\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = \dim V / \operatorname{Ker} f = 1$$

□

另一方面，任给一个余维数为 1 的线性子空间 V_0，我们都可以构造一个 $f \in V^*$ 使得 $\operatorname{Ker} f = V_0$. 要看出这一点，我们任取 $x_0 \in V - V_0$，则任意的 $y \in V$，都可以唯一地写成

$$y = ax_0 + x, \quad a \in \mathbb{R}, x \in V_0$$

的形式，我们定义

$$f(y) = a$$

即可.

Theorem 5.2. f 为线性泛函，则 f 有界当且仅当 $\operatorname{Ker} f$ 是闭的.

证明. 若 f 有界，我们只需要证明 $V - \operatorname{Ker} f$ 开，利用有界很容易就能搞出来一个开邻域从而开. 反之如果 $\operatorname{Ker} f$ 是闭的，我们假设 f 无界，则存在

$$||x_n|| = 1, \quad |f(x_n)| > n$$

令

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x_1}{f(x_1)}$$

有

$$f(y_n) = 0 \implies y_n \in \operatorname{Ker} f$$

但是

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\frac{x_1}{f(x_1)} \notin \operatorname{Ker} f$$

与条件矛盾，所以有界. □

下面我们来看一个定理：

Theorem 5.3. V 是实线性赋范空间，$f_1, \cdots, f_n, f \in V^*$，如果满足

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$$

则 f 可以写成 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合.

证明. 我们利用超平面定理来证明. 让我们考虑一个 $n+1$ 维的线性空间 $\mathbb{R}^{n+1}$，我们定义

$$W = \{(f_1(v), f_2(v), \cdots, f_n(v), f(v)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in V\}$$

换句话说，W 是映射

$$T : V \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad T(v) = (f_1(v), \cdots, f_n(v), f(v))$$

的像，因为 W 是有限维线性空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个线性子空间，所以它是一个闭的非空的凸集.

条件 $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f$ 翻译过来就是：如果一个向量 v 使得 $f_1(v) = 0, f_2(v) = 0, \cdots, f_n(v) = 0$，那么必然有 $f(v) = 0$. 现在我们考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个特定点：

$$p = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

很显然 $p \notin W$.

我们现在有了一个闭凸集 W 和一个不在其中的点 p(也是闭凸集). 根据超平面分离定理，存在一个超平面可以严格地将 p 和 W 分开.

一个超平面由一个非零的线性泛函定义，任何在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的线性泛函都可以表示为与一个固定向量的点积，这意味着存在一个非零向量 $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和一个 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得：

$$a \cdot p > \alpha \geqslant a \cdot w, \forall w \in W$$

第一个不等式告诉我们

$$a \cdot p = a_1(0) + \cdots + a_n(0) + a_{n+1}(1) = a_{n+1} > \alpha$$

有 $a_{n+1} > \alpha$. 第二个不等式对 W 中的所有向量都成立，但 W 是一个线性子空间，它对数乘是封闭的，对任意 $w \in W$，向量 kw 也属于 W，因此必须有：

$$a \cdot (kw) \leqslant \alpha \quad \text{对于所有标量 } k$$

$$k(a \cdot w) \leqslant \alpha$$

如果 $a \cdot w$ 是一个非零的数，比如说 $c \neq 0$，那么我们可以通过选择一个非常大或非常小的 k (例如符号与 c 相同的 $k \to \infty$，或符号与 c 相反的 $k \to -\infty$) 来使得 $k(a \cdot w)$ 可以任意大或任意小，从而与不等式矛盾，因此，唯一的可能性是 $a \cdot w$ 必须为零。

$$a \cdot w = 0 \quad \text{对于所有 } w \in W$$

所以我们得到

$$0 \leqslant \alpha < a_{n+1}$$

现在给定任意的 $v \in V$，我们代入

$$w = (f_1(v), \cdots, f_n(v), f_v)$$

有

$$a \cdot w = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(v) + a_{n+1} f(v) = 0$$

从而

$$f(v) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{n+1}} f_i(v)$$

结论得证. □

Remark 5.4. 我是小丑，这个直接用线性代数应该就能秒. 考虑 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射

$$\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x))$$

令 $V = \varphi(X)$，我们构造从 V 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$\psi\colon (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \mapsto f(x)$$

由于

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$$

我们知道这是一个良定义，并且是线性映射，所以

$$f = (f_1, \cdots, f_n) \cdot (a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$$

6　K 是 K-赋范线性空间的内射对象

我们可以以同调代数的角度来考虑 Hahn-Banach 定理，首先我们考虑 $(-)^*$ 算子，我们记域 $K(K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$ 上的赋范线性空间范畴为 $\mathscr{A}$，其间态射为连续线性算子，于是我们有

$$X^*:=\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,K)$$

这是一个反变的 Hom 函子，来自代数的直觉告诉我们它应该是左正合[1]的，我们不妨验证一下，考虑正合列：

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\to 0$$

作用函子之后得到：

$$0\to Z^*\xrightarrow{g^*}Y^*\xrightarrow{f^*}X^*$$

先看 g^* 是不是单射，任取 $\varphi\in Z^*$，如果

$$g^*(\varphi)=\varphi\circ g=0$$

也就是说对于任意的 $y\in Y$，都有

$$\varphi(g(y))=0$$

由 g 是满射立刻得到 $\varphi=0$，于是 g^* 是单射. 下面再验证 $\mathrm{Im}\,g^*=\mathrm{Ker}\,f^*$，由于 $g\circ f=0$，所以 $\mathrm{Im}\,g^*\subseteq\mathrm{Ker}\,f^*$ 是自动的，下面证明反方向：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

任取 $\psi\in\mathrm{Ker}\,f^*$，有 $\psi\circ f=0$，也就是说

$$\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Im}\,f\subseteq\mathrm{Ker}\,\psi$$

我们定义

$$\widetilde{\psi}(g(y))=\psi(y)$$

[1]在这里的正合我们要求不仅是代数正合，还是拓扑/度量正合，即要求单射是等距嵌入，满射诱导商范数，这样子才可以实现范数商的联系，从而去得到更好的性质.

容易验证这是良定义的映射，我们剩下的问题是说明所构造的 $\widetilde{\psi}$ 是一个有界的线性泛函，由于 g 是满射，从而诱导了商范数，我们考虑 $[y]=g(y)$，在 Z 上定义的范数为

$$||[y]||_Z = \inf_{x\in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g} ||x+y||_Y$$

我们有

$$\widetilde{\psi}([y]) = \psi(y+x), \forall x \in \operatorname{Im} f$$

于是

$$|\widetilde{\psi}([y])| = |\psi(y+x)| \leqslant ||\psi|| \cdot ||y+x||_Y, \forall x \in \operatorname{Im} f \implies ||\widetilde{\psi}|| \leqslant ||\psi||$$

于是有界，所以左正合得证. 一个自然的问题是是否有右正合性？我们考察正合列

$$0 \longrightarrow X \xhookrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

作用反变函子得到：

$$Z^* \xrightarrow{g^*} Y^* \xrightarrow{f^*} X^* \longrightarrow 0$$

首先看 f 是不是满射，任意给一个 $\varphi \in X^*$，是否存在 $\psi \in Y^*$ 使得

$$f^*(\psi) = \psi \circ f = \varphi$$

由于 $f\colon X \to Y$ 是嵌入，所以可以把 X 通过 f 视为 Y 的子空间，于是利用 Hahn-Banach 定理，可以把 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ 保范延拓到 Y 上，此时 f^* 相当于限制，于是满射得证. 类似过程可以论证右正合，所以实际上 $(-)^*$ 是一个正合函子.

Theorem 6.1. *在赋范线性空间中，取对偶空间函子 $(-)^* = \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-,K)$ 是反变正合函子.*

于是我们大概可以看出 K 作为 K-赋范线性空间范畴上的对象实际上是一个内射对象，这就是由 Hahn-Banach 定理保证的，即任意子空间上的态射可以延拓到全空间上，即下图：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

于是 Hahn-Banach 定理可以重新表述为：

Theorem 6.2 (K 上的 Hahn-Banach 定理). *K 是 K-赋范线性空间上的内射对象.*

7 对偶/共轭空间与对偶/共轭算子

设 X, Y 是赋范线性空间，对于 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$，我们可以定义

$$T^*: Y^* \to X^*, \quad f \mapsto (x \mapsto f(Tx))$$

称 T^* 是 T 的对偶/共轭算子.

很显然我们有

$$|(T^*f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant ||f|| \cdot ||Tx|| \leqslant ||f|| \cdot ||T|| \cdot ||x||$$

于是

$$||T^*f|| \leqslant ||T|| \cdot ||f|| \implies ||T^*|| \leqslant ||T||$$

即 T^* 是有界算子，实际上我们有更强的结论：

Theorem 7.1. *对于 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$，我们有 $||T^*|| = ||T||$.*

证明. 我们只需要证明 $||T|| \leqslant ||T^*||$，由 Hahn-Banach 定理，对于任意使得 $Tx \neq 0$ 的 x，存在 $f \in X^*$，使得

$$||f|| = 1, \quad f(Tx) = ||Tx||$$

于是我们有

$$||Tx|| = ||f(Tx)|| = |T^*f(x)| \leqslant ||T^*f|| \cdot ||x|| \leqslant ||T^*|| \cdot ||f|| \cdot ||x|| = ||T^*|| \cdot ||x||$$

于是

$$||T|| \leqslant ||T^*||$$

从而

$$||T|| = ||T^*||$$

□

容易验证我们有以下性质：

Proposition 7.2. *T 是有界线性算子，则*

(1) $(aT_1 + bT_2)^* = aT_1^* + bT_2^*$.

(2) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

(3) *T 有有界逆算子，则 T^* 也有有界逆算子：$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

算子 T 与其共轭算子之间也有某种对偶关系：

Theorem 7.3. *X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$，则*

(1) 如果 T 同构线性嵌入($A||x|| \leqslant ||Tx|| \leqslant B||x||$)，则 T^* 是满射.

(2) 如果 T 是满射，则 T^* 是同构线性嵌入.

证明. 两个命题分别对应了Hahn-Banach定理与开映射定理：

(1) 考虑交换图：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

由 $\mathbb{R}$ 是内射对象立刻得到 T^* 是满射.

(2) T 是满射，由开映射定理(后面会提到)知道 T 是开映射，并且注意到

$$\begin{aligned} ||T^*(f)|| &= \sup_{||x|| \leqslant 1} |T^*(f)(x)|| \\ &= \sup_{||x|| \leqslant 1} |f(Tx)| \\ &= \sup_{y \in T(B_X(0,1))} |f(y)| \end{aligned}$$

由于是开映射，知道存在 $\delta > 0$ 使得 $B_Y(0,\delta) \subseteq T(B_X(0,1))$，于是

$$||T^* f|| \geqslant \sup_{||y|| \leqslant \delta} ||f(y)|| = \delta ||f||$$

□

Corollary 7.4. *X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ 是可逆算子，则 T^* 也可逆.*

8 二次对偶与自反——正合列视角

考虑 $x \in X$，则对 $f \in X^*$，我们可以定义

$$x^{**}(f) := f(x)$$

有

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant ||f|| \cdot ||x|| \implies ||x^{**}|| \leqslant ||x||$$

于是 $x^{**} \in X^{**}$，由此我们得到一个映射

$$J \colon X \to X^{**}, \quad x \mapsto x^{**}$$

称这个映射为 X 的典范/典则映射.

Theorem 8.1. *X 是赋范线性空间，典范映射 $J \colon X \to X^{**}$ 是保距线性算子.*

证明. 线性是显然的，保距是因为 Hahn-Banach 定理保证了存在 $||f|| = 1$，$f(x) = ||x||$ 这样的有界线性泛函，从而

$$||x^{**}|| = ||x^{**}|| \cdot ||f|| \geqslant ||x^{**}(f)|| = ||f(x)|| = ||x||$$

所以有 $||x^{**}|| = ||x||$. □

Definition 8.2. *X 是赋范线性空间，如果典范映射 $J \colon X \to X^{**}$ 是满射，则称 X 是自反的.*

我们注意到 J 是一个等距嵌入，所以 J 是单射，从而如果 J 是一个满射，则 J 就是从 X 到 X^{**} 的同构.

关于自反，我们有一个著名的定理：

Theorem 8.3 (二分定理). *X 是赋范线性空间，E 是 X 的闭子空间，则 X 自反当且仅当 E 与 X/E 均自反.*

证明. 首先我们有正合列

$$0 \to E \to X \to X/E \to 0$$

利用 $(-)^*$ 的正合性，我们有如下正合列：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "(-)^*"] & X \arrow[r] \arrow[d, "(-)^*"] & X/E \arrow[r] \arrow[d, "(-)^*"] & 0 \\
0 & E^* \arrow[l] \arrow[d, "(-)^*"] & X^* \arrow[l] \arrow[d, "(-)^*"] & (X/E)^* \arrow[l] \arrow[d, "(-)^*"] & 0 \arrow[l] \\
0 \arrow[r] & E^{**} \arrow[r] & X^{**} \arrow[r] & (X/E)^{**} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由第一行正合知道最后一行正合，再考虑典范映射：

$$\begin{CD}
0 @>>> E @>>> X @>>> X/E @>>> 0 \\
@. @VJ_EVV @VJ_XVV @VJ_{X/E}VV @. \\
0 @>>> E^{**} @>>> X^{**} @>>> (X/E)^{**} @>>> 0
\end{CD}$$

由于映射是典范的，容易验证垂直映射使得上图交换，对这个图使用蛇引理，我们得到长正合列：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, J_E \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, J_X \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, J_{X/E} \arrow[dll] & \\
& \mathrm{Coker}\, J_E \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, J_X \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, J_{X/E} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则知道 X 自反当且仅当 $\mathrm{Ker}\, J_X = \mathrm{Coker}\, J_X = 0$ 当且仅当 $\mathrm{Ker}\, J_E = \mathrm{Ker}\, J_{X/E} = \mathrm{Coker}\, J_E = \mathrm{Coker}\, J_{X/E} = 0$ 当且仅当 E 与 X/E 自反. □

我们有一些简单的手段来判断一个赋范线性空间不是自反的：

Theorem 8.4. *X 是赋范线性空间，如果 X^* 可分，则 X 可分.*

证明. 由 X^* 可分，知道 X^* 的单位球面可分，从而存在 $\{f_n\}$ 在单位球面上稠密，由于 $||f_n|| = 1$，从而存在 $x_n \in X$，使得 $||x_n|| = 1$ 且 $|f_n(x_n)| > \dfrac{1}{2}$. 下面我们令

$$X_0 = \overline{\mathrm{Span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}}$$

如果 $X_0 \neq X$，则存在 $f \in X^*$ 使得

$$||f|| = 1, \quad f(X_0) = 0$$

从而对任意的 n，我们有

$$||f_n - f|| = ||f_n(x_n) - f(x_n)|| = ||f_n(x_n)|| > \frac{1}{2}$$

与稠密矛盾. 所以 $X_0 = X$，即 X 稠密. □

Theorem 8.5. *Banach 空间 X 自反当且仅当 X^* 自反.*

证明. 我们有交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "J_X"] \arrow[d, "(-)^*"] & X^{**} \arrow[r] \arrow[d, "(-)^*"] & 0 \\
0 & X^* \arrow[l] & X^{***} \arrow[l, "J_X^*"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

如果 X 自反，则第一行正合，我们约定 X, X^*, X^{**}, X^{***} 中的元素分别以 $x, f, F, \mathscr{F}$ 来记，则有对任意的 $x \in X$，有

$$J_X^* \circ J_{X^*}(f)(x) = J_X^*(J_{X^*}(f))(x) = J_X^*\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(J_X(x)) = \mathscr{F}(x^{**}) = x^{**}(f) = f(x)$$

于是

$$J_X^* \circ J_{X^*}(f) = f \implies J_X^* \circ J_{X^*} = 1_{X^*}$$

由于 J_X 可逆，从而其对偶 J_X^* 也可逆，上面已经说明了 J_{X^*} 是 J_X^* 的右逆，从而是逆. 而 J_X^* 是同构，于是其逆也是同构，故 J_{X^*} 满射，故 X^* 自反.

另一方面如果 X^* 自反，我们有对任意的 $G \in X^{**}$ 可以表为 $J_X(x)$

$$J_{X^*} \circ J_X^*(\mathscr{F})(G) = J_{X^*}(J_X^*\mathscr{F})(G) = G(J_X^*\mathscr{F}) = (J_Xx)(J_X^*\mathscr{F}) = (J_X^*(\mathscr{F}))(x) = \mathscr{F}(J_Xx) = \mathscr{F}(G)$$

于是

$$J_{X^*} \circ J_X^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \implies J_{X^*} \circ J_X^* = 1_{X^{***}}$$

所以有

$$J_X^* = J_{X^*}^{-1}$$

于是由 J_X^* 可逆知道 J_X 可逆(推论 10.5)，即 J_X 是满射，即 X 自反. □

关于自反空间，我们有一个定理 2.10 的对偶形式：

Theorem 8.6. *X 是自反空间，G 是 X^* 的线性子空间，则 $({}^\perp G)^\perp = \overline{G}$.*

证明. 显然 $\overline{G} \subseteq ({}^\perp G)^\perp$，下证反方向. 若存在 $x^* \in ({}^\perp G)^\perp - \overline{G}$，由 Hahn-Banach 定理知道存在 $f \in X^{**}$ 使得 $f(\overline{G}) = 0$，$f(x^*) \neq 0$. 由于 X 自反，知道存在 x 使得 $Jx = f$，则对任意的 $y^* \in G$，有

$$y^*(x) = Jx(y^*) = f(y^*) = 0 \implies x \in {}^\perp G$$

但是

$$x^*(x) = f(x^*) \neq 0$$

与 $x^* \in ({}^\perp G)^\perp$ 矛盾. □

9 有界算子三大定理及其推论

三大定理一般指的是开映射定理，闭图像定理和共鸣定理.

Definition 9.1. *X, Y 是赋范线性空间，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$，则我们定义*

*(1) 如果 $\operatorname{Ker} T = 0$，则称 T 为**单射**.*

*(2) 如果 $\operatorname{Coker} T = Y/\operatorname{Im} T = 0 \iff \operatorname{Im} T = Y$，则称 T 为**满射**.*

*(3) 如果 T 既是单射又是满射，并且 $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$，则称 T **可逆算子**.*

一个容易验证的引理是：

Lemma 9.2. *X, Y 是赋范线性空间，$Y \in \mathscr{B}(X,Y)$，T 可逆的充分必要条件是存在 $C \in \mathscr{B}(Y,X)$ 使得 $CT = 1_X, TC = 1_Y$.*

Theorem 9.3 (开映射定理)**.** *设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$，如果 T 是满射，则 T 是开映射.*

证明. 由于

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B_X(0,k)}$$

所以

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} T\overline{B_X(0,k)}$$

由于 Y 是 Banach 空间，所以由 Baire 纲定理，知道存在 k_0 使得

$$\overline{T\overline{B_X(0,k_0)}}$$

有非空内部，不妨设

$$B_Y(y_0,r_0) \subseteq \overline{T\overline{B_X(0,k_0)}}$$

我们先证明对于任意的 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得

$$B_Y(0,\varepsilon\delta) \subseteq \overline{T\overline{B_X(0,\varepsilon)}}$$

我们取 $\delta = \dfrac{r_0}{k_0}$，则对任意的 $y \in B_Y(0,\varepsilon\delta)$，都有

$$y_0 \pm \frac{k_0}{\varepsilon} y \in B_Y(y_0,r_0)$$

从而存在 $\overline{B_X(0,k_0)}$ 中的点列 $\{x_k\}$ 与 $\{x_k'\}$ 使得

$$Tx_k \to y_0 - \frac{k_0}{\varepsilon} y, \quad Tx_k' \to y_0 + \frac{k_0}{\varepsilon} y$$

于是

$$T\left(\frac{\varepsilon}{2k_0}(x_k' - x_k)\right) \to y$$

于是有

$$\frac{\varepsilon}{2k_0}(x_k' - x_k) \in \overline{B_X(0,\varepsilon)} \implies B_Y(0,\varepsilon\delta) \subseteq \overline{T\overline{B_X(0,\varepsilon)}}$$

其次对于任意的 $y_0 \in B_Y(0, \dfrac{\delta}{2})$，都有

$$B_Y(0,\frac{\delta}{2}) \subseteq \overline{T\overline{B_X(0,\frac{1}{2})}} \implies \exists x_1 \in \overline{B_X(0,\frac{1}{2})}\,\mathrm{s.\,t.}\ ||y_0 - Tx_1|| \leqslant \frac{\delta}{2^2}$$

因此 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B_Y(0, \dfrac{\delta}{2^2})$，同理知道存在 $x_2 \in \overline{B_X(0,\dfrac{1}{2^2})}$ 使得

$$||y_1 - Tx_2|| \leqslant \frac{\delta}{2^3}$$

以此类推，我们得到一列点列 $x_n \in \overline{B_X(0,\dfrac{1}{2^n})}$ 使得

$$||y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)|| \leqslant \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

由 X 是 Banach 空间，及 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \leqslant 1$ 知道存在 $x_0 \in X$ 使得

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad ||x|| \leqslant 1$$

于是知道

$$y_0 = Tx_0$$

这告诉我们

$$B_Y(0,\frac{\delta}{2}) \subseteq T\overline{B_X(0,1)}$$

从而对于任意的 $r > 0$，都有

$$B_Y(0,\frac{r\delta}{2}) \subseteq T\overline{B_X(0,r)}$$

这已经足以说明 T 是开映射，因为任给开集 G，任取 $Tx \in TG$，都存在 x 的邻域

$$\overline{B_X(x,r_2)} \subseteq B_X(x,r_1) \subseteq G$$

于是知道

$$B_Y(Tx,\frac{r_2\delta}{2}) \subseteq T\overline{B_X(x,r_2)} \subseteq TB_X(x,r_1) \subseteq TG$$

于是 TG 是开集. □

Remark 9.4. 线性赋范空间的拓扑具有某种齐性，于是我们只要在零点附近做到，就可以在全空间上都做到，零点附近的样貌决定了全体空间的样貌.

Remark 9.5. 注意到非零的连续线性泛函都是满射，从而都是开映射.

Corollary 9.6 (Banach逆算子定理)**.** 设 X, Y 都是 *Banach* 空间，T 是 X 到 Y 的双射有界线性算子，则逆算子 $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X)$.

证明. 开连续双射是同胚，所以 T^{-1} 连续，故有界. □

Corollary 9.7. 设 X, Y 是两个 *Banach* 空间，$T \in \mathscr{B}(X, Y)$，若 T 为单射，则 T 的值域 TX 是闭的当且仅当 T 是有下界的，即 $\inf \dfrac{||Tx||}{||x||} > 0$

证明. 若值域是闭的，则 TX 是 Banach 空间，从而知道 T 是两个 Banach 空间之间的双射，由逆算子定理知道 $T^{-1}\colon TX \to X$ 是有界的，从而可得 T 有下界.

反之如果 T 有下界，则对 TX 中的任一柯西列 Tx_n，有

$$||x_n - x_m|| \leqslant \frac{1}{c}||Tx_n - Tx_m|| \to 0$$

从而知道 $x_n \to x$，即 $Tx_n \to Tx \in TX$，即 TX 是闭的. □

逆算子定理可以在范数等价的问题上提供作用：

Definition 9.8. X 是线性空间，在 X 上赋予两个范数 $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$.

(1) 若存在正数 c，使得 $||x|_1 \leqslant c||x||_2, \forall x \in X$. 称范数 $||\cdot||_1$ **弱于** $||\cdot||_2$ 或 $||\cdot||_2$ **强于** $||\cdot||_1$.

(2) 如果 $||\cdot||_1$ 既弱于 $||\cdot||_2$ 又强于 $||\cdot||_2$，则称 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ **等价**.

Theorem 9.9 (范数等价定理)**.** 设 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 是 X 上的两个范数，如果 X 按照这两个范数都成为一个 *Banach* 空间，并且 $||\cdot||_2$ 弱于 $||\cdot||_1$，则 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 等价.

证明. 考虑 X 上的恒等算子

$$I\colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2), \quad x \mapsto x$$

很显然 I 是一个有界的双射算子，有界是因为

$$||I|| = \sup \frac{||Ix||_2}{||x||_1} = \sup \frac{||x||_2}{||x||_1} \leqslant c$$

于是由逆算子定理知道 I^{-1} 也有界，于是可以得到 $||\cdot||_1$ 弱于 $||\cdot||_2$，即等价. □

下面我们介绍闭图像定理，首先需要定义图像.

Definition 9.10. 给定两个集合之间的态射 $f\colon X \to Y$，我们称 f 的**图像**为 $X \times Y$ 的一个子集

$$\mathfrak{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

Definition 9.11. 设 $(X, d_1), (Y, d_2)$ 是两个度量空间，T 是 X 到 Y 的算子，如果 T 的图像

$$\mathfrak{G}(T) \subset (X \times Y, d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2})$$

是闭集，则称 T 是**闭算子**.

有一个简单的lem来帮我判断一个算子是不是闭的：

Lemma 9.12. X, Y 是两个度量空间，T 是从 X 到 Y 的算子，则 T 是闭算子当且仅当对于任意的 $x_n \to x_0$，$y_n = Tx_n \to y_0$ 则 $y_0 \in TX$，并且 $Tx_0 = y_0$.

证明很简单，直接验证就可以了，利用这个引理我们可以立刻得到一个简单判断闭算子的引理：

Lemma 9.13. 定义域是闭集的连续算子是闭算子.

现在我们来证明闭图像定理：

Theorem 9.14 (闭图像定理). X, Y 是两个 *Banach* 空间，T 是 X 到 Y 的闭线性算子，则 T 是连续的.

证明. 显然 $X \times Y$ 配备上范数

$$||(x, y)|| = \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$$

之后成为 Banach 空间，结合条件很显然 T 的图像 $\mathfrak{G}(T)$ 是 $X \times Y$ 的线性闭子空间. 所以 $\mathfrak{G}(T)$ 本身就是一个 Banach 空间，于是我们可以考虑投影算子

$$P\colon \mathfrak{G}(T) \to X, \quad (x, Tx) \mapsto x$$

这是一个线性算子，并且有

$$||P(x, Tx)|| = ||x|| \leqslant ||(x, Tx)||$$

所以 P 是有界，并且容易发现 P 是一个从 $\mathfrak{G}(T)$ 到 X 的双射，从而由逆算子定理我们立刻知道

$$||(x, Tx)|| = ||P^{-1}x|| \leqslant ||P^{-1}|| \cdot ||x||$$

因此我们有

$$||Tx|| \leqslant ||(x, Tx)|| \leqslant ||P^{-1}|| \cdot ||x||$$

于是 T 有界，故连续. $\square$

最后是共鸣定理，也称为 Banach-Steinhaus 定理.

Theorem 9.15 (共鸣定理, 一致有界原理, Banach-Steinhaus 定理). *设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}\subseteq\mathscr{B}(X,Y)$. 如果对每个 $x\in X$，我们都有*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}||T_\lambda x||<\infty$$

则 $\{||T_\lambda||\colon \lambda\in\Lambda\}$ 是有界的.

Remark 9.16. *可以理解为每个轨道都有界则算子族范数有界.*

证明. 想法是利用定理 9.9 来说明. 对于任意 $x\in X$，定义

$$||x||_1=\max\left\{||x||,\sup_{\lambda\in\Lambda}||T_\lambda x||\right\},\quad \forall x\in X$$

由条件良定义，并且容易验证这是一个范数. 下面我们只需要说明 $(X,||\cdot||_1)$ 是一个 Banach 空间：如果 $\{x_n\}$ 是 $||\cdot||_1$ 范数的基本列，由于 $||x||\leqslant||x||_1$，知道 $\{x_n\}$ 也是 $||\cdot||$ 下的基本列. 因此存在 $x_0\in X$ 使得 $||x_n-x_0||\to 0$.

下面我们来说明 $||x_n-x_0||_1\to 0$. 对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得 $m,n>N$ 时，有

$$||x_n-x_m||_1<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而知道对于任意的 $\lambda\in\Lambda$，有

$$||T_\lambda(x_n-x_m)||<\frac{\varepsilon}{2},\quad ||x_n-x_m||<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $m\to\infty$ 有

$$||T_\lambda(x_n-x_0)||\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad ||x_n-x_0||\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

这告诉我们当 $n>N$ 时

$$||x_n-x_0||_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$||x_n-x_0||_1\to 0$$

故 $(X,||\cdot||_1)$ 完备，由定理 9.9 我们知道 $||\cdot||,||\cdot||_1$ 等价，从而存在 $c>0$ 使得

$$||x||_1\leqslant c||x||,\quad \forall x\in X$$

于是得到

$$||T_\lambda x||\leqslant||x||_1\leqslant c||x||\implies ||T_\lambda||\leqslant c$$

□

Remark 9.17. *上面定理还有一个 Baire 纲定理的形式，这里不再列出，可以参考 101 计划的泛函.*

利用共鸣定理我们可以得到下面的定理：

Theorem 9.18. *X 是 Banach 空间，Y 是线性赋范空间，$\{T_n\} \subseteq \mathscr{B}(X,Y)$，若对任意的 $x \in X$，$\{T_n x\}$ 都在 Y 中收敛，则存在 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ 使得*

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to\infty} ||T_n x - Tx|| = 0$$

并且

$$||T|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||T_n||$$

证明. 我们直接定义

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

很显然 T 是线性的，并且由共鸣定理立刻得到 $\sup ||T_n||$ 有限，于是利用 $T_n x$ 收敛，得到

$$||Tx|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n x|| = \varliminf_{n\to\infty} ||T_n x|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||T_n|| \cdot ||x||$$

于是

$$||T|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||T_n|| < \infty$$

□

10 闭值域定理

本小节的主定理为：

Theorem 10.1 (闭值域定理)**.** *X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X, Y)$，TFAE*:

(1) $\operatorname{Im} T$ *是闭的.*

(2) $\operatorname{Im} T^*$ *是闭的.*

(3) $\operatorname{Im} T = {}^{\perp}(\operatorname{Ker} T^*)$*.*

(4) $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$*.*

我们先介绍两个引理：

Lemma 10.2. *X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X, Y)$，则我们有*

$$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}, \quad \operatorname{Ker} T = {}^{\perp}(\operatorname{Im} T^*)$$

从而

$$\overline{\operatorname{Im} T} = {}^{\perp} \operatorname{Ker} T^*$$

证明. 我们直接验证：

$$\begin{aligned} y^* \in \operatorname{Ker} T^* &\iff T^* y^* = 0 \\ &\iff 0 = T^* y^*(x) = y^*(Tx), \forall x \in X \\ &\iff y \in (\operatorname{Im} T)^{\perp} \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} T^* &\iff Tx = 0 \\ &\iff 0 = y^*(Tx) = T^* y^*(x), \forall y^* \in Y^* \\ &\iff x \in {}^{\perp}(\operatorname{Im} T^*) \end{aligned}$$

最后我们有

$$\overline{\operatorname{Im} T} = {}^{\perp}((\operatorname{Im} T)^{\perp}) = {}^{\perp} \operatorname{Ker} T^*$$

□

Remark 10.3. *由定理 2.10 知道如果 $\operatorname{Im} T$ 在 Y 中稠密，由于则*

$$Y = \overline{\operatorname{Im} T} = {}^{\perp}((\operatorname{Im} T)^{\perp}) = {}^{\perp}(\operatorname{Ker} T^*)$$

所以

$$\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$$

于是 T^* 单射，同理，如果 T^* 是稠值域的，有 T 是单射，因为

$$\operatorname{Ker} T = {}^{\perp}(\operatorname{Im} T^*) = {}^{\perp}(\overline{\operatorname{Im} T^*}) = {}^{\perp}(X^*) = \{0\}$$

Lemma 10.4. *X, Y 都是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X, Y)$. 若 T^* 是单射，并且 $\operatorname{Im} T^*$ 是闭的，则 T 是满射.*

证明. 若值域是闭的，则

$$T^* \colon Y \to \operatorname{Im} T^*$$

是 Banach 空间之间的双射，由逆算子定理知道存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 $y^* \in Y$，有

$$||T^* y^*|| \geqslant \delta ||y^*||$$

我们断言

$$B_Y(0, \delta) \subset \overline{TB_X(0,1)}$$

再由开映射定理后半段一模一样的手段可以说明有

$$B_Y(0, \frac{\delta}{2}) \subset TB_X(0,1)$$

于是很显然 T 是满射.

现在我们来证明断言，假设断言不成立，则存在 $||y_0|| < \delta$，但是 $y_0 \notin \overline{TB_X(0,1)}$，由于后者是凸集，所以由凸集分离定理知道存在泛函 f 使得

$$f(y_0) > 1, \quad f\left(\overline{TB_X(0,1)}\right) \subset (-\infty, 1)$$

于是对于任意的 $x \in B_X(0,1)$，我们有

$$|f(Tx)| = |(T^* f)(x)| \leqslant 1$$

所以得到

$$||T^* f|| \leqslant 1$$

但是

$$||f|| \geqslant \frac{|f(y_0)|}{||y_0||} > \frac{1}{\delta}$$

所以

$$||T^* f|| \geqslant \delta ||f|| > 1 \geqslant ||T^* f||$$

矛盾. □

现在我们来证明闭值域定理：

证明. 我们按照如下链条证明：

$$\begin{array}{ccc} (1) & \Longleftrightarrow & (3) \\ \Downarrow & \nwarrow & \\ (4) & \Longrightarrow & (2) \end{array}$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) 与 (4) $\Longrightarrow$ (2) 都是平凡的，因为预零化子和零化子总是闭的.

(1) $\Longrightarrow$ (3)：$\operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T} = {}^{\perp}\operatorname{Ker} T^*$.

(1) $\Longrightarrow$ (4)：我们将 T 如下分解：

$$X \xrightarrow{\quad\pi\quad} X/\operatorname{Ker} T \xrightarrow{\quad\widetilde{T}\quad} \overline{\operatorname{Im} T} \xhookrightarrow{\quad i\quad} Y$$

每一个态射意义都是自明的，并且很自然地诱导了 T^* 的分解.

$$X^* \xleftarrow{\quad\pi^*\quad} (X/\operatorname{Ker} T)^* \xleftarrow{\quad\widetilde{T}^*\quad} (\overline{\operatorname{Im} T})^* \xleftarrow{\quad i^*\quad} Y^*$$

显然 $\widetilde{T}$ 是 Banach 空间之间的一个双射，由逆算子定理知道 $\widetilde{T}$ 可逆，于是知道 $\widetilde{T}^*$ 可逆，特别地知道满射. 由于 i 是同构嵌入，我们知道 i^* 是满射. 由于 π 是满射，我们知道 π^* 是同构嵌入. 于是结合商空间的性质，得到

$$\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} \pi^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1)：注意到

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} \widetilde{T}$$

由于 $\widetilde{T}$ 是一个稠值域的映射，所以 $\widetilde{T}^*$ 是单射. 由条件 $\operatorname{Im} T^*$ 是闭的，由 π^* 是等距嵌入，i^* 是满射，知道 $\operatorname{Im} \widetilde{T}^*$ 是闭的，于是由上面第二个引理知道 $\widetilde{T}$ 是满射，从而 $\widetilde{T}$ 是闭的，于是 T 是闭的. □

Corollary 10.5. *X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X, Y)$，则 T 可逆当且仅当 T^* 可逆.*

证明. T 可逆 $\Longrightarrow$ $\operatorname{Im} T = Y, \operatorname{Ker} T = 0$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = Y, \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp} = 0$ $\Longrightarrow$ T^* 可逆.

T^* 可逆 $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker} T^* = 0, \operatorname{Im} T^* = X^*$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Im} T = {}^{\perp}\operatorname{Ker} T^* = Y, \operatorname{Ker} T = {}^{\perp}\operatorname{Im} T^* = 0$ $\Longrightarrow$ T 可逆. □

11 Hilbert 空间

Definition 11.1. 记 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，对于 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 H，若 H 上存在一个二元运算 $\langle -,-\rangle\colon H\times H\to\mathbb{R}$，满足

(1) (复共轭对称)：$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

(2) (第一变元线性)：$\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$.

(3) (正定性)：$\langle x,x\rangle\geqslant 0$，并且取等当且仅当 $x=0$.

则称 $\langle -,-\rangle$ 为 H 上的一个**内积**，称 H 是 $\mathbb{K}$-**内积空间**.

内积空间上有我们熟悉的 Schwarz 不等式：

Theorem 11.2 (Schwarz). H 是内积空间，则有

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y)$$

证明. 实数情况是经典老番：取 $\lambda\in\mathbb{R}$，则

$$(x+\lambda y,x+\lambda y)\geqslant 0$$

展开之后计算关于 λ 的二次函数的判别式就立刻得到. 一般情况的话我们还是计算上面的式子 $\lambda\in\mathbb{C}$，

$$(x,x)+\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y)\geqslant 0$$

若 $y\neq 0$，我们直接取 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$，化简就立刻得到

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y)$$

□

利用这个不等式我们可以用内积来诱导范数.

Theorem 11.3. $x\in H$，定义 $||x||=\sqrt{(x,x)}$，则 $||\cdot||$ 是 H 上的一个范数.

证明. 只需要满足三角不等式即可：

$$||x+y||^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2\,\mathrm{Re}(x,y)+(y,y)\leqslant(||x||+||y||)^2$$

即

$$||x+y||\leqslant||x||+||y||$$

□

反之如果给定范数，也可以用范数来诱导内积，此时需要一个内积空间的常见引理：

Lemma 11.4 (平行四边形公式)**.** *设 H 是内积空间，$||\cdot||$ 是由内积决定的范数，则对任何 $x, y \in H$，有* **平行四边形公式**：

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

证明. 展开就可以了. □

现在我们可以断言：

Theorem 11.5. *若 $(X, ||\cdot||)$ 是赋范线性空间，并且满足平行四边形公式，则可以在 X 定义内积 $(-,-)$ 使得 $||x||^2 = (x, x)$.*

证明. 我们考虑**极化恒等式**：当是实内积空间时：

$$(x, y) := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$$

当是复内积空间时：

$$(x, y) := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 + i||x+iy||^2 - ||x-y||^2 - i||x-iy||^2\right)$$

可以说明如此定义的就是所需要的内积. □

Definition 11.6. *若 H 上内积所导出的度量拓扑是完备的，则称 H 为* ***Hilbert 空间****.*

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们知道

$$\frac{|(x, y)|}{||x|| \cdot ||y||} \leqslant 1$$

因此，存在唯一的 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 使得

$$\cos\theta = \frac{|(x, y)|}{||x|| \cdot ||y||}$$

称 θ 为 x 和 y 的 **Hermite 夹角**. θ 为 $\frac{\pi}{2}$ 时为最要紧的垂直情况.

Definition 11.7. *如果内积空间 H 中两个向量满足 $(x, y) = 0$，我们就称 x 与 y* **正交**，*记为 $x \perp y$.*

Theorem 11.8 (勾股定理)**.** *内积空间 H 中，如果 $x \perp y$，则*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

证明. 展开立刻得到. □

最后我们需要指出内积是一个连续的函数.

Theorem 11.9. H 是内积空间，则内积关于两个变元是连续的，即 $x_n \to x$，$y_n \to y$，则有 $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

证明. 我们直接放缩：

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leqslant |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\ &\leqslant ||x_n - x|| \cdot ||y_n|| + ||x|| \cdot ||y_n - y|| \to 0 \end{aligned}$$

□

12 Hilbert 空间的正交系

Definition 12.1. *设 $\mathfrak{F}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一族非零向量,*

(1) 若 $\mathfrak{F}$ 中任何两个不同的向量都正交，则称 $\mathfrak{F}$ 是 H 的正交系.

(2) 若正交系 $\mathfrak{F}$ 中每个向量的范数都是 1，则称 $\mathfrak{F}$ 是标准正交系.

类似于 Fourier 分析，我们可以利用正交系对元素进行展开.

Definition 12.2. *设 $\mathfrak{F}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组标准正交系，则对 $x \in H$，数集*

$$\{(x, e) \colon e \in \mathfrak{F}\}$$

*称为 x 关于 $\mathfrak{F}$ 的 **Fourier 系数集**，(x, e) 称为 x 关于 e 的 **Fourier 系数**.*

在此意义下的展开会存在不等式：

Theorem 12.3 (Bessel不等式)**.** *设 $\mathfrak{F} = \{e_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系. 那么对于每一个 $x \in H$，它的 Fourier 系数最多只有可列个不为 0，并且成立：*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 \leqslant ||x||^2$$

证明. 很显然对于任意有限个 $e_k \in \mathfrak{F}$，我们有

$$x - \sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k \perp \sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k$$

所以由勾股定理我们知道

$$||x||^2 = ||x - \sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k||^2 + ||\sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k||^2 \geqslant ||\sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k||^2 = \sum_{k=1}^{m}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

于是我们如果令

$$\mathfrak{F}_n = \left\{e \in \mathfrak{F} \colon |\langle x, e\rangle| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

很显然能看出来

$$\#\mathfrak{F}_n \leqslant n^2||x||^2 < \infty$$

于是

$$\{e \in \mathfrak{F} \colon \langle x, e\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_n$$

至多可数，并且这时有：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{e_\lambda\in\mathfrak{F}_n} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 \leqslant ||x||^2$$

$\square$

简单的推论:

Corollary 12.4. $\{e_n\}$ 是 H 中的标准正交系，则对于任意的 $x \in H$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, e_n \rangle = 0$$

我们取 $H = L^2([0, 2\pi])$，立刻得到：

Corollary 12.5 (Riemann-Lebesgue)**.** 对任意的 $f \in L^2([0, 2\pi])$，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = 0$$

一个很自然的问题是 Bessel 不等式什么时候取等？为了研究这个问题，我们引入下面的定义：

Definition 12.6. $\mathfrak{F} = \{e_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 的标准正交系，对于 $x \in H$，称级数

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$$

为 x 关于 $\mathfrak{F}$ 的 ***Fourier* 级数**，当 $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$，我们就称 x 关于 $\mathfrak{F}$ 可以展开成 *Fourier* 级数.

Remark 12.7. 注意到这里 $\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 实际上是一个至多可数的序列和，而不是一个任意指标和. 于是若极限确实存在，则我们可以写：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k}$$

所以有

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda\right\|^2 = \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||\langle x, e_{\lambda_k} \rangle||^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} ||\langle x, e_\lambda \rangle||^2$$

于是 Bessel 不等式的另外一个推论是：

Corollary 12.8. 若 $\mathfrak{F} = \{e_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 的一个标准正交系，则对于任意的 $x \in H$，都有级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 是收敛的.

证明. 首先这是一个可列和，那我们只需要检查是否是 Cauchy 列即可(H 是完备的)，再由于 Bessel 不等式，知道其范数是绝对收敛的，结合正交性有尾项的范数就是范数的尾项，于是知道是 Cauchy 列，故收敛. $\square$

Theorem 12.9. *记 $\mathfrak{F} = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系，TFAE:*

(1) H 中任何元素 x 都满足 $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$.

(2) 正交系张成的线性子空间在 H 中稠密：$\overline{\mathrm{Span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}} = H$.

*(3) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是**完全**的，即：若 $x \in H$ 并且满足 $x \perp e_\lambda (\forall \lambda \in \Lambda)$，则 $x = 0$.*

*(4) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是**完备**的，即：对 H 中任意元素 x，**Parseval 等式** $||x||^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2$ 成立.*

*我们称满足上述条件之一的标准正交系为 Hilbert 空间 H 的一组**标准正交基**.*

证明. 我们按照 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1) 的顺序来证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2)：由前面的 Remark，我们可以把 $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$ 看成是极限点 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_{\lambda_k}\rangle e_{\lambda_k}$，于是知道成立.

(2) $\Longrightarrow$ (3)：若 $x \perp e_\lambda$，则对于 $\{e_\lambda\}$ 的任意有限线性组合 y，都有 $\langle x, y\rangle = 0$. 现在由于正交系张成的子空间是稠密的，所以知道存在 $\{x_n\} \subseteq \mathrm{Span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$，使得 $x_n \to x$，于是我们由内积的连续性有

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, x_n\rangle = 0$$

故 $x = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (4)：对 $x \in H$，令 $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$，于是对于任意的 $\lambda \in \Lambda$，都有

$$\langle x - y, e_\lambda\rangle = \langle x, e_\lambda\rangle - \langle y, e_\lambda\rangle = 0$$

即

$$x - y \perp e_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

于是 $x = y$. 故

$$||x|| = ||y|| = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2$$

(4) $\Longrightarrow$ (1)：对 $x \in H$，令 $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$，显然有 $x - y \perp y$，于是

$$||x - y||^2 = ||x||^2 - ||y||^2 = 0 \Longrightarrow x = y = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$$

□

那一个自然想法就是是否每一个 Hilbert 空间上都存在标准正交基呢？

Theorem 12.10. *设 A 是 Hilbert 空间 H 上的标准正交系，则 A 可以扩张为 H 上的一组标准正交基.*

证明. 利用 Zorn 引理立刻得到. □

13 Hilbert 空间的投影定理

Theorem 13.1 (投影定理). *M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，那么对于任何 $x \in H$，存在唯一的 $x_0 \in M$，$x_1 \perp M$，使得 $x = x_0 + x_1$. 这种分解称为正交分解，x_0 为 x 在 M 上的正交投影.*

证明. 存在性：M 配上内积很显然也称为一个 Hilbert 空间，于是存在正交基，我们设 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ 是 M 的正交基，将其延拓为 H 上的正交基 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$，其中 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$. 于是对于任意的 $x \in H$，有

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda_2} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda_1} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda + \sum_{\lambda\in\Lambda_2-\Lambda_1} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$$

很显然

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_1} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda \in M, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda_2-\Lambda_1} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda \in M^\perp$$

唯一性：假设存在另外一组分解 $x = y_0 + y_1$，其中 $y_0 \in M, y_1 \perp M^\perp$. 则很显然有

$$x_0 - y_0 = y_1 - x_1$$

于是

$$||x_0 - y_0||^2 = \langle x_0 - y_0, y_1 - x_1\rangle = 0$$

所以得到唯一性. □

我们把闭子空间 M 在 H 中的正交补空间记为 $M^\perp$[2]，于是可以写成

$$H = M \oplus M^\perp$$

对于一般的线性子空间 V，我们有

$$H = \overline{V} \oplus V^\perp$$

实际上投影定理还能用度量的角度来解决并稍微加强一点：

Theorem 13.2. *M 是 Hilbert 空间 H 的闭凸子集，则对任意 $x \in H$，存在唯一的 $x_0 \in M$ 使得 $||x - x_0|| = d(x, M) = \inf_{y\in M} ||x - y||$.*

证明. 存在性：取 $\{x_n\} \subseteq M$ 使得 $||x - x_n|| \to d(x, M)$. 我们说明 $\{x_n\}$ 收敛. 由平行四边形法则：

$$||x_n - x_m||^2 + 4||x - \frac{x_n + x_m}{2}||^2 = 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2)$$

[2]这和零化子的符号是一样的，但是这并不存在混淆，我们后面会说明这完全就是同一回事; 也有地方把 $M^\perp$ 写成 $H \ominus M$.

移项放缩可以得到

$$||x_n - x_m||^2 = 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2) - 4||x - \frac{x_n + x_m}{2}||^2 \leqslant 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2) - 4d^2$$

于是知道 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，故存在 $x_0 \in M$ 使得 $x_n \to x_0$，故 $||x - x_0|| = d(x, M)$.

唯一性：假设还存在 $x_1 \in M$ 使得 $||x - x_1|| = d(x, M)$，我们有

$$||x_0 - x_1||^2 = 2(||x - x_0||^2 + ||x - x_1||^2) - 4||x - \frac{x_0 + x_1}{2}||^2 \leqslant 2(||x - x_0||^2 + ||x - x_1||^2) - 4d^2 = 0$$

所以 $x_0 = x_1$，唯一性得证. □

当取 M 为 H 的闭子空间时，仍然是凸的，所以仍然满足定理，我们来说明如果 $x_0 \in M$ 满足 $||x - x_0|| = d(x, M)$，则 x_0 就是到 M 上的投影. 取 $z \in M$，则 $x_0 + tz \in M$，我们有

$$d^2 \leqslant ||x - x_0 - tz||^2 = ||x - x_0||^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x - x_0, tz\rangle + |t|^2||z||^2$$

即

$$0 \leqslant -2\,\mathrm{Re}(\bar{t}\langle x - x_0, z\rangle) + |t|^2||z||^2$$

恒成立，所以只能 $\langle x - x_0, z\rangle = 0$，即 $x - x_0 \perp M$.

Theorem 13.3 (投影定理plus). *M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭线性子空间，则对于任意的 $x \in H$，存在唯一的 $x_0 \in M$，使得 $||x - x_0|| = d(x, M)$，并且 $x - x_0 \perp M$.*

这说明在 Hilbert 空间中，投影就是最佳逼近点！利用两个版本的投影定理，可以立刻得到：

Corollary 13.4 (逼近定理). *$\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系，当且仅当 $a_i = (x, e_i)$ 时，*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k||$$

取最小值.

14 Hilbert 空间的对偶

Theorem 14.1 (F. Riesz)**.** *H 是 Hilbert 空间，$f \in H^*$，则存在唯一的向量 $y \in H$，使得*

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H$$

并且 $||f|| = ||y||$.

证明. 如果 $f = 0$，取 $y = 0$，下面设 $f \neq 0$，此时 $\operatorname{Ker} f$ 是 H 的真线性闭子空间，由投影定理知道存在 $z_0 \in H$ 使得 $z_0 \perp \operatorname{Ker} f$，$f(z_0) = 1$. 于是对于任意的 $x \in H$，有

$$f(x - f(x)z_0) = f(x) - f(x)f(z_0) = 0 \implies x - f(x)z_0 \in \operatorname{Ker} f$$

于是

$$\langle x - f(x)z_0, z_0 \rangle = 0$$

于是

$$f(x) = \frac{\langle x, z_0 \rangle}{\langle z_0, z_0 \rangle}$$

取 $y = \dfrac{z_0}{||z_0||^2}$ 立刻得到. □

Riesz-表示定理告诉我们对于 Hilbert 空间 H，$H \cong H^*$，同构是通过

$$\Phi \colon x \mapsto \langle -, x \rangle$$

得到的，于是我们可以将 H 与 H^* 认同成同一个(注意 Φ 是共轭线性的).

于是如果给定 $A \in \mathscr{B}(H)$，则知道

$$(A-, y)$$

给出了一个连续线性泛函，于是知道存在 z_y 使得

$$(A-, y) = (-, z_y)$$

我们定义

$$A^* y := z_y$$

容易验证 A^* 是一个线性算子，并且

$$||A^*y||^2 = (A^*y, A^*y) = (AA^*y, y) \leqslant ||AA^*y|| \cdot ||y|| \leqslant ||A|| \cdot ||A^*y|| \cdot ||y||$$

故

$$||A^*y|| \leqslant ||A|| \cdot ||y||$$

所以 A^* 是有界线性算子，即 $A^* \in \mathscr{B}(H)$. 称 A^* 为 A 的伴随算子. 由对称性不难发现：

$$(A^*)^* = A$$

于是反过来有

$$||A|| \leqslant ||A^*||$$

所以

$$||A|| = ||A^*||$$

注意这里并不能与一般的共轭算子理论等同起来，因为对于一般的赋范空间，有

$$(aT)^* = aT^*$$

但是在这里，伴随算子满足

$$(aA)^* = \overline{a}A^*$$

伴随算子类似于共轭算子，容易知道满足：

Theorem 14.2. *H, G 为 Hilbert 空间，$T \in \mathscr{B}(H, G)$，那么*

$$\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}, \quad \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$$

$$\overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}, \quad \overline{\operatorname{Im} T^*} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$$

Definition 14.3. *设 H 是 Hilbert 空间，A 是 H 上的有界线性算子，如果 $A^* = A$，则称 A 是自伴随算子，简称自伴算子.*

自伴随算子类似于对称矩阵或者 Hermite 矩阵，容易证明(此处略去)有很多很好的性质：

Proposition 14.4. *A 是 Hilbert 空间 H 上的有界自伴随算子，则有*

(1) 对任意 $x \in H$，$(Ax, x) \in \mathbb{R}$.

(2) $||A|| = \sup\limits_{||x||=1} |(Ax, x)|$.

(3) A 的特征值都是实数.

(4) A 的不同特征值对应的特征向量是正交的.

15 预解集与谱集

在XX，XX，XX章节中，若没有特别说明，默认所涉及的赋范线性空间是复线性且完备的.

Definition 15.1. 设 X 是赋范线性空间，$\lambda \in \mathbb{C}$，$Y \in \mathscr{B}(X, X)$.

(1) 如果存在 X 中非零向量使得 $Tx = \lambda x$，则称 λ 是 T 的**特征值**，而称 x 为 T 相对于特征值 λ 的**特征向量**.

(2) 记 $E_\lambda = \{x \colon Tx = \lambda x\}$ 为算子 T 对应特征值 λ 的特征向量全体再加入零向量，称为对应特征值 λ 的**特征向量空间**，E_λ 是闭子空间.

(3) 称 E_λ 的维数 $\dim E_\lambda$ 是特征值 λ 的**重复度**.

Remark 15.2. E_λ 是闭子空间：设 x 是 $\{x_n\} \subset E_\lambda$ 的极限点，则有

$$(T - \lambda I)x = \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)x_n = 0$$

于是

$$Tx = \lambda x$$

所以是闭子空间.

我们可以定义算子的谱：

Definition 15.3. X 是复线性赋范空间，$T \in \mathscr{B}(X)$，$\lambda \in \mathbb{C}$.

(1) 如果 $\lambda I - T$ 是 X 上的可逆算子，则称 λ 是 T 的**正则点**，并称 $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ 是 T 的**预解算子**.

(2) 不是正则点的复数 λ 称为 T 的**谱点**.

(3) 复平面上正则点的全体称为 T 的**预解集**，记为 $\rho(T)$.

(4) 谱点的全体称为 T 的**谱**，记为 $\sigma(T)$.

容易发现 $\rho(T) \cup \sigma(T) = \mathbb{C}$.

Lemma 15.4. T 是复赋范线性空间 X 上的有界线性算子.

(1) λ 是 T 的正则点的充分必要条件是

$$(\lambda I - T)x = y$$

对任何 y 都有解，并且存在正的常数 m 使得 $||x|| \leqslant m||y||$.

(2) λ 不是 T 的特征值的充分必要条件是 $\lambda I - T$ 是 X 到 X 的单射.

证明. (1) 很容易知道双射，然后由 m 知道其逆是有界线性算子，故可逆.

(2) 显然. □

Proposition 15.5. *T 是 Banach 空间 X 上的有界线性算子，则*

(1) 对于 $a \neq 0, b \in \mathbb{C}$，有 $\rho(aT+b) = a\rho(T)+b$，$\sigma(aT+b) = a\sigma(T)+b$.

(2) $\rho(T) = \rho(T^*)$，$\sigma(T) = \sigma$.

(3) 若 X 还是 Hilbert 空间，则进一步有 $\rho(T) = \overline{\rho(T^*)}$，$\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$，注意这里上面横线表示共轭而不是闭包.

(4) T 可逆，则 $\sigma(T^{-1}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \dfrac{1}{\lambda} \in \sigma(T)\right\}$.

证明. (1) 我们发现 $\lambda I - (aT+b)$ 可逆当且仅当 $\dfrac{\lambda - b}{a}I - T$ 可逆，所以立刻得到.

(2) 利用推论 10.5 我们知道 $\lambda I_X - T$ 可逆当且仅当 $(\lambda I_X - T)^* = \lambda I_{X^*} - T^*$ 可逆，所以我们得到结论.

(3) 注意到 $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$.

(4) T 可逆，所以 0 不是谱点，当 $\lambda \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} T^{-1} - \lambda I &= T^{-1} - \lambda T^{-1}T \\ &= T^{-1}(I - \lambda T) \\ &= T^{-1}(-\lambda)(T - \frac{1}{\lambda}I) \\ &= (-\lambda T^{-1})(T - \frac{1}{\lambda}I) \end{aligned}$$

所以可以得到 $T^{-1} - \lambda I$ 可逆当且仅当 $T - \dfrac{1}{\lambda}I$ 可逆，于是得到结论. □

对于无限维线性算子而言，其谱点并不仅局限于特征值，还有其他不同的情况.

Definition 15.6. *X 是复 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X)$，$\lambda \in \sigma(T)$. 由逆算子定理我们知道 $\lambda I - T$ 不是单射或满射.*

*(1) $\lambda I - T$ 不是单射，当且仅当 λ 是特征值，特征值的全体称为算子的**点谱**，记为 $\sigma_p(T)$.*

*(2) $\lambda I - T$ 是单射，不是满射，不过满足 $\overline{\mathfrak{R}(\lambda I - T)} = X$，则称 λ 为 T 的**连续谱点**，即像稠密，其全体记为 $\sigma_c(T)$.*

*(3) $\lambda I - T$ 是单射，不是满射，且像不稠密，即 $\overline{\mathfrak{R}(\lambda I - T)} \neq X$，称 λ 为 T 的**剩余谱点**，其全体记为 $\sigma_r(T)$.*

Remark 15.7. 注意当 $\lambda \in \sigma_r(T)$ 时，我们有

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - T)^* = \overline{\mathfrak{R}(\lambda I - T)}^{\perp} \neq \{0\}$$

所以其对偶算子不是单射.

Remark 15.8. 当 $\lambda \in \sigma_c(T)$ 为连续谱的时候，可以说明 $\lambda I - T$ 不是下有界的，这是因为我们可以构造逆算子：

$$(\lambda I - T)^{-1} : \mathfrak{R}(\lambda I - T) \to X$$

这很显然是一个线性算子，如果这是有界的线性算子，则可以保范延拓到整个 X 上，变成算子 B，我们来说明 B 就是 $\lambda I - T$ 的逆，从而导致其是满射：首先任给 $x \in X$，肯定有 $BR_T(x) = 0$，因为 B 限制在值域上就是逆，而反过来，任给 $y \in X$，其中 $y_n \in \mathfrak{R}(T)$ 有 $y_n \to y$，于是

$$y = \lim y_n = \lim R_T B(y_n) = R_T B(y)$$

所以是逆，这矛盾，也就是说其限制在值域上的逆算子是无界的. 反过来就是说明 R_T 是无下界的. 于是存在 $||x_n|| = 1$，满足

$$\lim(\lambda I - T)(x_n) = 0$$

也就是存在一列逼近于特征向量的近似特征向量，这也说明了连续谱虽然不是特征值，但是近似特征值.

给定一个具体算子，往往很难确定出它的谱，哪怕在有限维空间里面也不是那么容易就能把一个大矩阵的所有特征值都算出来，所以我们可以来处理一般性的方法缩小谱的范围.

Lemma 15.9. X 为 *Banach* 空间，$T \in \mathscr{B}(X)$，如果 $||T|| < 1$，则 $I - T$ 可逆，并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

证明. 由定理 1.3，知道 $\mathscr{B}(X)$ 完备，结合 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||T||^n < \infty$，我们知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ 在 $\mathscr{B}(X)$ 中收敛，记极限为 S，则容易验证

$$S(I - T) = (I - T)S = I$$

□

Corollary 15.10. X 为 *Banach* 空间，$T \in \mathscr{B}(X)$ 可逆，若 $S \in \mathscr{B}(X)$，并且满足

$$||S - T|| \leqslant \frac{1}{2||T^{-1}||}$$

则 S 也可逆，并且

$$||S^{-1}-T^{-1}|| \leqslant 2||T^{-1}|| \cdot ||T-S||$$

证明. 由题设知道

$$||I-T^{-1}S|| = ||T^{-1}(T-S)|| \leqslant ||T^{-1}|| \cdot ||T-S|| \leqslant \frac{1}{2}$$

从而 $T^{-1}S$ 可逆，于是 $S = TT^{-1}S$ 可逆，并且

$$||S^{-1}|| \leqslant ||T^{-1}|| \cdot ||(T^{-1}S)^{-1}|| \leqslant ||T^{-1}|| \sum_{n=0}^{\infty} ||I-T^{-1}S||^n \leqslant 2||T^{-1}||$$

所以

$$||S^{-1}-T^{-1}|| = ||S^{-1}(T-S)T^{-1}|| \leqslant 2||T^{-1}||^2||T-S||$$

□

由此可见 $\mathscr{B}(X)$ 的可逆元全体 $\mathscr{B}(X)^{\times}$ 是 $\mathscr{B}(X)$ 中的开集，并且映射 $T \mapsto T^{-1}$ 在 $\mathscr{B}(X)^{\times}$ 上连续.

Theorem 15.11. *X 为 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X)$，则*

(1) $|\lambda| > ||T||$ 时，$\lambda \in \rho(T)$.

(2) $\rho(T)$ 是开集.

(3) $\sigma(T)$ 是一个紧集.

证明. (1) 当 $|\lambda| > ||T||$ 时，有 $\left|\left|\dfrac{T}{\lambda}\right|\right| < 1$，于是 $\lambda I - T$ 可逆，所以 $\lambda \in \rho(T)$.

(2) 我们定义 $R\colon \mathbb{C} \to \mathscr{B}(X)$，$R(\lambda) = \lambda I - T$，显然 R 为连续映射，于是

$$\rho(T) = R^{-1}(\mathscr{B}(X)^{\times})$$

而 $\mathscr{B}(X)^{\times}$ 为 $\mathscr{B}(X)$ 中开集，于是 $\rho(T)$ 为 $\mathbb{C}$ 中开集.

(3) 有界闭集，从而紧. □

Definition 15.12. 设 *X 为 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X)$，定义 T 的*谱半径 $r(T) = \sup\limits_{x \in \sigma(T)} |x|$.

由前面的定理我们知道

$$r(T) \leqslant ||T||$$

16 谱半径公式

Definition 16.1. *设 A 是复 Banach 空间，如果 A 还是一个 $\mathbb{C}$-代数，并且满足*

$$||TS|| \leqslant ||T|| \cdot ||S||, \forall T, S \in A$$

则称 A 是一个 ***Banach 代数****.*

很显然，给定 Banach 空间 X，$\mathscr{B}(X)$ 就是一个 Banach 代数.

Theorem 16.2. *A 是具有单位元的 Banach 代数，那么对于任意的 $T \in A$，都有*

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} ||T^n||^{1/n}$$

证明. 令 $a = \inf\limits_{n\geqslant 1} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}$，那么 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} \geqslant a$. 由下确界的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $m \geqslant 1$，满足 $\left\|T^m\right\|^{\frac{1}{m}} < a+\varepsilon$. 对于任意的正整数 n，我们可以将它唯一地表示成 $n = k_n m + l_n, k_n \geqslant 0, 0 \leqslant l_n < m$，这时我们有

$$\begin{aligned} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} &\leqslant \left(\left\|T^{k_n m}\right\| \left\|T^{l_n}\right\|\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \left(\left\|T^m\right\|^{k_n} \| T\|^{l_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \| T\|^{\frac{l_n}{n}} (a+\varepsilon)^{\frac{k_n m}{n}} \end{aligned}$$

因此，$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a+\varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$，我们就得到

$$a \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}$ 存在，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\geqslant 1} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}$. □

Theorem 16.3. *设 A 是 Banach 代数，e 是幺元，$T \in A$，令 $a = \lim\limits_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}$. 则*

(1) $|\lambda| > a$ 时，$\lambda \in \rho(T)$.

(2) $|\lambda| > a$ 时，有 $(\lambda e - T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.

(3) 当 $|\lambda| > ||T||$ 时，有 $||(\lambda e - T)^{-1}|| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda| - ||T||}$.

证明. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{\left\|T^n\right\|}{|\lambda|^{n+1}}\right]^{1/n} = \dfrac{a}{|\lambda|} < 1$，由 Cauchy 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left\|T^n\right\|}{|\lambda|^{n+1}}$ 收敛. 因此，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ 依范数收敛，记之为 S. 容易验证 $S(e\lambda - T) = (e\lambda - T) S = e$，即 $\lambda \in \rho(T)$. (3) 显然. □

于是我们就说明了谱半径

$$r(T) \leqslant \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}$$

Theorem 16.4. 设 A 是 *Banach* 代数，$T \in A$，若 f 是 A 上的连续线性泛函，那么 $f((\lambda e - T)^{-1})$ 是 $\rho(T)$ 上的解析函数.

证明. 对于 $\lambda, \mu \in \rho(T)$，我们有

$$\begin{aligned}(\lambda e - T)^{-1} - (\mu e - T)^{-1} &= (\lambda e - T)^{-1}((\mu e - T) - (\lambda e - T))(\mu e - T)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(\lambda e - T)^{-1}(\mu e - T)^{-1}\end{aligned}$$

因此，对于 $f \in A^*$，$\lambda_0 \in \rho(T)$，有

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f((\lambda e - T)^{-1}) - f((\lambda_0 e - T)^{-1})}{\lambda - \lambda_0} &= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f((\lambda_0 - \lambda)(\lambda e - T)^{-1}(\lambda_0 - T)^{-1})}{\lambda - \lambda_0} \\ &= -f([(\lambda_0 e - T)^{-1}]^2)\end{aligned}$$

所以是解析的. □

Definition 16.5. 设 Ω 是复平面中的开集，X 是复赋范线性空间，对于函数 $\varphi\colon \Omega \to X$，如果对于任意 $f \in X^*$，$f \circ \varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 都是 Ω 上的解析函数，则称 φ 在 Ω 上是**弱解析**的.

于是前面的定理实际上在说

$$\lambda \mapsto (\lambda e - T)^{-1}$$

实际上是 $\rho(T)$ 上的弱解析函数. 弱解析函数具有很多解析函数的特征.

Corollary 16.6 (谱非空)**.** *A 是 Banach 代数，$T \in A$，则 $\sigma(T)$ 非空.*

证明. 如果 $\sigma(T) = \varnothing$，则 $\rho(T) = \mathbb{C}$，则对于任意的 $f \in A^*$，都有

$$\lambda \mapsto f((\lambda e - T)^{-1})$$

是一个整函数，并且当 $|\lambda| > ||T||$ 时，有

$$|f((\lambda e - T)^{-1}) \leqslant \frac{||f||}{|\lambda| - ||T||}$$

因此有界，从而由 Liouville 定理知道为常数，并且令 $\lambda \to \infty$ 知道这个常数就是 0，但这以 f 的任意性与 Hahn-Banach 定理知道 $(\lambda e - T)^{-1} = 0$，矛盾. 所以谱非空. □

Definition 16.7. 对于 *Banach* 空间 X 上的有界线性算子 T，若 $\lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = 0$，则称 T 是**广义幂零算子**.

于是我们立刻知道广义幂零算子的谱半径为 0，所以谱就是 $\{0\}$.

Theorem 16.8 (Gel'fand 谱半径公式)**.** *设 A 是 Banach 代数，$T \in A$，那么*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}$$

证明. 一方面，我们已经知道

$$r(T) \leqslant \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}$$

另一方面，对任意 $f \in \mathcal{A}^*$，函数 $\lambda \to f\left((\lambda e - T)^{-1}\right)$ 在区域 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda > r(T)\}$ 上是解析的. 并且当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}$ 时

$$(\lambda e - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

从而在 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}}$ 时的 Laurent 展开为

$$f\left((\lambda e - T)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

由 Laurent 展开的唯一性可知

$$f\left((\lambda e - T)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(T)\}$ 上也是成立的，特别地，等式右侧级数在此区域上收敛. 故对 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(T^n)|}{(r(T) + \varepsilon)^{n+1}} < \infty$$

记 $y_n = \dfrac{T^n}{(r(T) + \varepsilon)^{n+1}}$，上式说明：$\sup\limits_{n\geqslant 1} |f(y_n)| < \infty$ 对任意 $f \in \mathcal{A}^*$ 都成立. 由共鸣定理知道存在常数 M 使得 $\left\|y_n\right\| \leqslant M$. 因此 $\left\|T^n\right\| \leqslant M(r(T) + \varepsilon)^{n+1}$,从而可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(T) + \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$ 就得到所要的结果. □

Corollary 16.9 (Gel'fand-Mazur)**.** *设 A 是 Banach 代数，如果 A 的每个非零元都是可逆的，那么 A 等距同构于 $\mathbb{C}$.*

证明. 设 $T \in \mathcal{A}$，由于 $\sigma(T)$ 非空，因此它至少包含一个点 $\lambda(T)$. 又因为每个非零元都是可逆的，所以 $T - \lambda(T)e = 0$，即 $T = \lambda(T)e$. 因此， $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$，显然它等距同构于 $\mathbb{C}$. □

最后，我们可以介绍谱映射定理. 设 T 是带单位元的 Banach 代数 $\mathcal{A}$ 中元素. 若 p 是一个多项式，则有

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

并且这一结果对更多的解析函数也是成立的，通常称之为谱映射定理.

设 Ω 是包含 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r(T)\}$ 的区域，f 在 Ω 上解析，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 f 在点 0 处的 Taylor 展开. 那么可取某个严格大于 $r(T)$ 的正数 R 使得 $\sum a_nz^n$ 在 $|z|\leqslant R$ 时收敛，因此 $M=\sup\limits_n|a_n|R^n<+\infty$. 由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|a_nT^n\right\|\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left\|T^n\right\|}{R^n}=M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left\|T^n\right\|}{r(T)^n}\left(\frac{r(T)}{R}\right)^n<+\infty$$

从而算子 T 关于函数 f 的函数演算 $f(T)=\sum\limits^{\infty}a_nT^n$ 是良定义的.

Theorem 16.10 (谱映射定理)**.** *设 T 是带单位元的 Banach 代数 A 中元素，Ω 是包含 $\{z\in\mathbb{C}\colon|z|\leqslant r(T)\}$ 的区域，f 在 Ω 上解析，那么*

$$\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$$

证明. 先证 $\sigma(f(T))\supset f(\sigma(T))$. 对于 $\lambda\in f(\sigma(T))$，存在 $z_0\in\sigma(T)$ 使得 $f(z_0)=\lambda$. 由复变函数知识，存在 Ω 上解析函数 g 使得 $\lambda-f(z)=(z-z_0)g(z)$. 比较点 0 处的展开系数，可知 $\lambda-f(T)=(T-z_0)g(T)$. 再由 $T-z_0$ 不可逆得 $\lambda-f(T)$ 也是不可逆的，也即 $\lambda\in\sigma(f(T))$.

再说明 $\sigma(f(T))\subset f(\sigma(T))$ 即可. 设 $\lambda\notin f(\sigma(T))$，等价于 $\lambda-f(z)=0$ 在 $\sigma(T)$ 上无零点. 取某个严格大于 $r(T)$ 的正数 R，使得 $A=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant R\}\subset\Omega$. 注意到 $\lambda-f(z)=0$ 在 A 上只有有限个零点 $\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$，故存在 A 的某个邻域上恒不取零值的解析函数 g 使得

$$\lambda-f(z)=(z-t_1)(z-t_2)\cdots(z-t_m)g(z),\ \forall z\in A$$

又对每个 $t_i\notin\sigma(T),t_i-T$ 可逆 $(\forall i=1,2,\cdots,m)$，而 $g(T)^{-1}=\left(\frac{1}{g}\right)(T)$，所以

$$\lambda-f(T)=(T-t_1)(T-t_2)\cdots(T-t_m)g(T)$$

也可逆. 也即 $\lambda\notin\sigma(f(T))$. □

17 紧算子

Definition 17.1. 设 T 是线性空间 X 到线性空间 Y 的线性算子，如果 TX 是 Y 中有限维子控件，就称 T 为有限秩算子.

Definition 17.2. 设 T 是赋范线性空间 X 映射到赋范线性空间 Y 的线性算子，如果 T 把 X 中任何有界集映为 Y 中的预列紧集，则称 T 是紧算子. 我们使用 $\mathscr{K}(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的紧算子全体.

Theorem 17.3. 设 X,Y 是两个赋范线性空间，那么

(1) $\mathscr{K}(X,Y)$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的线性子空间.

(2) $T \in \mathscr{K}(X,Y)$，如果 Z 是线性赋范空间，并且 $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$，$S' \in \mathscr{B}(Z,X)$，那么 $ST \in \mathscr{K}(X,Z)$，$TS' \in \mathscr{K}(Z,Y)$.

(3) 如果 Y 是 *Banach* 空间，那么 $\mathscr{K}(X,Y)$ 是 *Banach* 空间 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的闭子空间.

证明. (1) 设 $S,T \in \mathscr{K}(X,Y)$，今证 $S+T \in \mathscr{K}(X,Y)$. 任取 X 中的有界集 A，对 $(S+T)A$ 中任何一个点列 $\{(S+T)x_n\}\,(x_n \in A)$，由于 SA 是相对列紧集,所以点列 $\{Sx_n\}$ 中有收敛的子列 $\{Sx_{n_k}\}$. 又由于 TA 是相对列紧的，所以点列 $\{Tx_{n_k}\}$ 中又有收敛子列 $\{Tx_{n_k'}\}$. 从而 $\{(S+T)x_n\}$ 的子列 $\left\{(S+T)\left(x_{n_k'}\right)\right\}$ 是收敛的. 所以 $(S+T)A$ 是相对列紧集，因而 $S+T$ 是紧的.

类似地可以证明，对任何数 $\alpha, \alpha T$ 也是紧的. 这样便得到 $\mathscr{K}(X,Y)$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的线性子空间.

(2) 设 A 是 X 的一个有界集，TA 便是 Y 的相对列紧集. 由于 S 是从 Y 到 Z 的有界算子，是连续的，它把相对列紧集 TA 映射成相对列紧集 STA，所以 ST 是紧的. 同样，如果 B 是 Z 中有界集，所以 $S'B$ 是 X 中的有界集，因而 $T(S'B)$ 是 Y 中相对列紧集，即 TS' 是紧的.

(3) 当 Y 是 Banach 空间时，$\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间. 要证明 $\mathscr{K}(X,Y)$ 是闭子空间，就是要证明: 当 $T_n \in \mathscr{K}(X,Y), n=1,2,\cdots, T \in \mathscr{B}(X,Y)$，而且 $\left\|T_n - T\right\| \to 0\,(n\to\infty)$ 时，有 $T \in \mathscr{K}(X,Y)$.

设 A 是 X 的有界集，令 $L = \sup\{\|x\| : x \in A\}$. 由 $\left\|T_n - T\right\| \to 0\,(n\to\infty)$，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，

$$\left\|T_n - T\right\| < \frac{\varepsilon}{3L}$$

由于 $T_N A$ 是相对列紧的，所以在 $T_N A$ 中存在有限个点 $y_1, y_2, \cdots, y_k$，它们构成集 $T_N A$ 的一个 $\frac{\varepsilon}{3}$-网. 因为 $y_i \in T_N A$，所以有 $x_i \in A$，使得 $y_i = T_N x_i\,(i=1,2,\cdots,k)$. 今证 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_k$ 是 TA 的 ε-网.

事实上，对任何 $y \in TA$，有 $x \in A$，使得 $y = Tx$. 因为 $T_N x \in T_N A$，所以有 $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$，使得 $\left\|T_N x - y_i\right\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$，于是

$$\begin{aligned}\left\|y - Tx_i\right\| &\leqslant \left\|Tx - T_N x\right\| + \left\|T_N x - T_N x_i\right\| + \left\|T_N x_i - Tx_i\right\| \\ &< L\left\|T - T_N\right\| + \frac{\varepsilon}{3} + L\left\|T_N - T\right\| < \varepsilon\end{aligned}$$

即 TA 是完全有界集，它是相对列紧集. 因而 $T \in \mathscr{K}(X, Y)$. □

Remark 17.4. *定理的内容表明 Banach 空间 X 上的紧算子全体 $\mathscr{K}(X)$ 是 $\mathscr{B}(X)$ 的一个闭理想.*

Lemma 17.5. *X, Y 是赋范线性空间，$T \in \mathscr{K}(X, Y)$，则 TX 是 Y 中的可分子集.*

证明. 显然有

$$TX = \bigcup_{n=1}^{\infty} TB_X(0, n)$$

由于 T 是紧算子，于是 $TB_X(0, n)$ 是相对列紧，从而由紧度量空间可分知道 $TB_X(0, n)$ 可分，所以 TX 可分. □

Theorem 17.6. *X, Y 是赋范线性空间，$T \in \mathscr{B}(X, Y)$，若 T 是紧算子，那么 T^* 也是紧算子. 如果 Y 还是 Banach 空间，则逆命题也正确.*

证明. 必要性. 设 $\{\varphi_n\}$ 为 Y^* 中一有界点列，$\left\|\varphi_n\right\| \leqslant M$. 今证存在 $\{\varphi_n\}$ 的子序列$\{\varphi_{n_k}\}$，使得 $\{T^*\varphi_{n_k}\}$ 在 X^* 中按范数收敛.

(a) 设 Y_0 是 TX 在 Y 中的闭包，那么 Y_0 是 Y 中可分的、闭线性子空间. 这时如果将 T 看作从 X 到 Y_0 中的线性有界算子 T_0，即 $T_0 x = Tx\,(\forall x \in X)$，则 T_0 是从 X 到 Y_0 的紧算子. 如果将任意的 $\varphi \in Y^*$ 限制在 Y_0 上，看作 Y_0 上的有界线性泛函，则 $T_0^*\varphi = T^*\varphi$. 反过来，对于 $\varphi \in Y_0^*$，利用 Hahn-Banach 延拓定理，可以保范延拓成 Y 上的有界线性泛函 φ，这时同样有 $T_0^*\varphi = T^*\varphi$. 我们要证明对于 Y^* 中的任何有界点列 $\{\varphi_n\}$ 都存在子列 $\{\varphi_{n_k}\}$，使得 $\{T^*\varphi_{n_k}\}$ 在 X^* 中收敛，只要将 $\{\varphi_n\}$ 看作 Y_0 上的有界点列，证明存在子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 使得 $T_0^*\varphi_{n_k} = T^*\varphi_{n_k}$ 在 X^* 中收敛. 所以不妨设 Y 是一个可分的空间.

(b) 设 Y 是可分的赋范线性空间，$\{\varphi_n\}$ 是 Y^* 中的有界点列，由 Banach-Alaoglu 定理，存在子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 弱 * 收敛. 即对任何 $y \in Y$，

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(y) = \varphi(y)$$

我们利用 Arzelà-Ascoli 定理来证明. 设 S 是 X 的单位球面，则 TS是 Y 中的相对列紧集，于是 $K = \overline{TS}$ 是 Y 中的紧集. 将 $\{\varphi_n\}$ 看作紧集 K 上的函数列，则它们是一致有界和等度连续的，由 Arzelà-Ascoli 定理，$\{\varphi_n\}$ 是 $C(K)$ 中的相对列紧集，则存在子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 在 K 中一致收敛. 于是 $\{T^*\varphi_{n_k}\}$ 是 X^* 中的基本点列，是收敛的.

充分性. 因为 $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$，由必要性得到 $T^{**} \in \mathcal{K}(X^{**}, Y^{**})$. 设 B 是 X 的单位球，将 B 看作 X^{**} 包含在 X^{**} 的单位球中的子集，它是有界集，所以 $T^{**}B$ 是 Y^{**} 中的相对列紧集. 由共轭算子性质定理得，$TB = T^{**}B$ 是 Y^{**} 中的完全有界集. 这也说明, TB 在 Y 中是完全有界集，而 Y 是 Banach 空间，它也是 Y 中的相对列紧集. $\square$

18 拓扑线性空间

Definition 18.1. 设 X 是域 K 上的一个线性空间，τ 是 X 上一个拓扑，满足 X 中单点集是闭的，并且线性运算是连续的，则称 (X, τ) 为一个**拓扑线性空间**.

对于任意 $a \in X$，$\lambda \in K(\lambda \neq 0)$，我们称

$$T_a(x) = a + x, \quad M_\lambda(x) = \lambda x$$

分别为**平移算子**和**数乘算子**. 由定义我们知道平移算子和数乘算子都是 X 的自同胚映射. 从而由平移映射我们知道 X 的拓扑完全由某一点附近的邻域基决定，所以今后凡是提到拓扑线性空间的局部基的时候都是取 0 点附近的局部基 $\mathcal{B}$，于是 X 中的每一个开集都是 $\mathcal{B}$ 中元素的平移.

拓扑线性空间很显然是一个拓扑加法 Abel 群，所以拓扑群的性质自然也满足：

Theorem 18.2. 设 W 是 0 的任一邻域，则存在 0 的对称邻域 U(对称即 $U = -U$)使得 $U + U \subset W$.

证明. 由加法的连续性，我们知道 $0 + 0 = 0$，所以存在 0 的邻域 V_1, V_2 使得

$$V_1 + V_2 \subseteq W$$

令

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$$

得证. □

很显然这个操作可以一直进行下去，所以我们有推论：

Corollary 18.3. 对于 0 的邻域 W，存在对称邻域 U 满足：

$$\underbrace{U + \cdots + U}_{n\ times} \subseteq W$$

Theorem 18.4. 设 K, C 是拓扑线性空间 X 的子集，其中 K 是紧集，C 是闭集，并且 $K \cap C = \varnothing$，则存在 0 的邻域 V 使得

$$(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$$

证明. K 为空集是显然的，现在假设 K 不是空集，任取 $x \in K$，则 $x \notin C$，于是有

$$x \in X \backslash C$$

从而存在 0 的邻域 W 使得

$$x + W \subset X \backslash C$$

等价于

$$W \subset X \backslash C - x = X \backslash (C - x)$$

则存在 0 的对称邻域 V_x 使得

$$V_x + V_x + V_x + V_x \subset W \subseteq T_x^{-1}(X \backslash C)$$

即

$$T_x(V_x + V_x + V_x + V_x) \subset X \backslash C$$

即

$$(x + V_x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \varnothing$$

即

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap (C - V_x) = (x + V_x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing$$

因此由 V_x 的对称性得到 $(x + V_x + V_x) \subset (x + V_x + V_x + V_x)$，所以

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing$$

另一方面，K 是紧的，从而存在有限个点 $x_1, \cdots, x_n \in K$，使得

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V_{x_n})$$

令

$$V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

我们有

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i})$$

从而我们容易得到

$$(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$$

□

由于 $K + V = \bigcup (x + V)$，所以 $K + V$ 是开集，同理 $C + V$ 也是开集(事实上任何集合加上一个开厚度 V 之后都是开集)，于是有以下推论：

Corollary 18.5 (紧集与闭集的分离性). *K 是紧集，C 是闭集，$K \cap C = \varnothing$，则存在不相交的开集分离 K, C.*

特别地，如果取 K,C 都是单点集，就得到

Theorem 18.6. *拓扑线性空间是 Hausdorff 空间.*

并且由于 $C+V$ 是开集，于是我们实际上有

$$\overline{K+V}\cap(C+V)=\varnothing$$

于是得到下面的定理：

Theorem 18.7. *$\mathcal{B}$ 是拓扑线性空间 X 的局部基，则 $\mathcal{B}$ 中的任意元素包含某一个元素的闭包.*

证明. 设 $U\in\mathcal{B}$，则 U^c 是闭集且不包含 0，取 $K=\{0\}$，存在 $V\in\mathcal{B}$ 使得

$$\overline{\{0\}+V}\cap(U^c+V)=\varnothing$$

从而

$$U^c\cap\overline{V}=\varnothing\implies\overline{V}\subset U$$

$\square$

Definition 18.8. *X 是拓扑线性空间，B 是 X 的一个子集，如果对任意的 $\alpha\in K$，当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，都有*

$$\alpha B\subset B$$

称 B 是平衡的.

Theorem 18.9. *X 是拓扑线性空间，则*

(1) 每一个 0 点的邻域包含 0 的一个平衡邻域.

(2) 每一个 0 点的凸邻域包含 0 的一个平衡凸邻域.

证明. (1) 设 U 是 0 的任意邻域，由乘法连续性的定义，存在 $\delta>0$ 和 X 中 0 的邻域 W，使得当 $|\lambda|<\delta$ 且 $x\in W$ 时，有

$$\lambda x\in U$$

现在，我们需要构造一个满足条件的平衡邻域 V。令

$$V=\bigcup_{|\alpha|<\delta}\alpha W$$

容易验证 V 即为包含在 U 中的平衡邻域.

(2) 设 U 是 0 的一个凸邻域，根据结论 (1)，存在 0 的一个平衡邻域 W 使得 $W\subseteq U$. 注意此时 W 未必是凸的，令 $V=\mathrm{co}(W)$ 为 W 的凸包. 只需要验证 V 是平衡的，我们需要证

明平衡集的凸包依然是平衡的. 任取 $y \in V$，由凸包定义，y 可以表示为 W 中元素的有限凸组合：

$$y = \sum_{i=1}^{n} t_i w_i, \quad \text{其中 } w_i \in W, t_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$$

任取标量 λ 满足 $|\lambda| \leqslant 1$，则

$$\lambda y = \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i w_i = \sum_{i=1}^{n} t_i (\lambda w_i)$$

由于 W 是平衡的，且 $|\lambda| \leqslant 1$，所以对每个 i 都有 $\lambda w_i \in W$，令 $w_i' = \lambda w_i$，则 $\lambda y = \sum t_i w_i'$，这说明 λy 也是 W 中元素的凸组合，因此 $\lambda y \in \mathrm{co}(W) = V$.

因此，V 是包含在 U 中的平衡凸邻域. □

Definition 18.10. *设 $\mathcal{B}$ 是拓扑线性空间 X 的局部基，如果 $\mathcal{B}$ 中每一个元素都是平衡的，则称 $\mathcal{B}$ 是**平衡局部基**；如果 $\mathcal{B}$ 中每一个元素都是凸的，则称 $\mathcal{B}$ 是**凸局部基**. 如果拓扑线性空间 X 有一个凸局部基，则称 X 是**局部凸**的.*

Corollary 18.11. *每一个拓扑线性空间都有一个平衡的局部基，每一个局部凸空间都有一个平衡的凸局部基.*

Definition 18.12. *设 E 是拓扑线性空间 X 的子集，如果对 0 的每一个邻域 V，存在 $s > 0$ 使得当 $t > s$ 时，有 $E \subset tV$，则称 E 是**有界集**.*

容易看出来当 X 是赋范线性空间的时候，有界集的概念与原本的概念一致.

Theorem 18.13. *E 是拓扑线性空间 X 的子集，则 E 有界当且仅当对任意的 $\{x_n\} \subset E$，$\{\alpha_n\} \subset K$，$\alpha_n \to 0$，有 $\alpha_n x_n \to 0$.*

证明. 若 E 有界，设 V 是 0 的任意一个平衡邻域，则存在 $t > 0$ 使得

$$E \subset tV$$

于是存在 N，使得 $n > N$ 时有

$$\alpha_n t < 1$$

从而

$$\alpha_n x_n \in \alpha_n E \subset \alpha_n tV \subset V$$

所以收敛，反之如果 E 无界，则存在 0 的邻域 V 以及 $r_n \to \infty$，对于每一个 n，都存在 $x_n \in E \backslash r_n V$，取 $\alpha_n = \dfrac{1}{r_n}$ 就得到矛盾. □

Theorem 18.14. *设 X 是拓扑线性空间，V 是 0 的任意一邻域，则*

(1) 如果 r_n 是一个严格递增到正无穷的正实数列，则有 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.

(2) X 中的紧子集有界.

(3) 如果 δ_n 是一个严格递减到 0 的正实数列，V 有界，则 $\{\delta_n V\}$ 是 X 的一个局部基.

证明. (1) 有 $\frac{1}{r_n} \to 0$，对于每一个固定的 $x \in X$，由于 $\alpha \mapsto \alpha x$ 是 K 到 X 的连续映射，于是 V 的原像是开集，并且很显然包含 0，所以 V 的原像是包含 0 的一个开集，所以对充分大的 n 有 $\frac{1}{r_n}$ 落在原像中，从而

$$\frac{1}{r_n} x \in V$$

即

$$x \in r_n V$$

(2) 取 V 的一个平衡邻域 W，然后利用有限覆盖就得到.

(3) 利用有界性立刻得到. □

若 (X, τ) 可度量化，则每个点存在可数局部基，对于拓扑线性空间而言，我们可以证明，若每个点存在可数局部基，则可以度量化.

Theorem 18.15. 设 (X, τ) 是拓扑线性空间且具有可数局部基，则在 X 上存在度量 d，使得：

(1) d 与 τ 相容.

(2) 任意中心在 0 点的开球是平衡的.

(3) d 是平移不变的，即对任意 $x, y, z \in X$，都有 $d(x, y) = d(x+z, y+z)$.

此外，如果 X 是局部凸的，则可以额外满足：

(4) 所有开球都是凸的.

Definition 18.16. 设 (X, τ) 是拓扑线性空间，如果 τ 是由一个完备的平移不变度量产生的，称 (X, τ) 为 ***F* 空间**.

Theorem 18.17. 设 Y 是拓扑线性空间 X 的子空间，且 Y 在 X 的子空间拓扑下是一个 F 空间，则 Y 是 X 的闭子空间.

Theorem 18.18. X, Y 是拓扑线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，则对下面的命题：

(1) T 在 0 点连续.

(2) T 连续.

(3) T 有界.

(4) 若 $x_n \to 0$，则 $\{Tx_n\}$ 有界.

(5) 若 $x_n \to 0$，则 $Tx_n \to 0$.

有蕴含关系：

$$(1) \iff (2) \implies (3) \implies (4)$$

如果 X 可度量化，则额外有

$$(4) \implies (5) \implies (1)$$

即全部等价.

Theorem 18.19. *f 是拓扑线性空间 X 上的非零线性泛函，TFAE:*

(1) f 连续.

(2) $\operatorname{Ker} f$ 是闭集.

(3) $\overline{\operatorname{Ker} f} \neq X$.

(4) f 在 0 的某个邻域内有界.

19 Banach代数

20 拾遗

Theorem 20.1 (Mazur-Ulam).

21 常见赋范空间

Example 21.1. 有限维欧式空间赋予欧式范数. 容易验证是完备的，从而还是 *Banach* 空间.

Example 21.2. 连续函数空间 $C[a,b]$，其上的范数定义为

$$||x|| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

它是完备的，并且可分，所以是一个可分的 *Banach* 空间.

可分是因为 *Weierstrass* 逼近定理，有理系数多项式就是可数稠密集，完备是一致的逐点收敛.

Example 21.3. 连续函数空间 $C[a,b]$ 还可以定义范数：

$$||x||_1 = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t$$

这个空间不完备，所以不是 *Banach* 空间. 比如取 $[0,1]$ 上 x^n 的极限就不是一个连续函数.

Example 21.4. 有界数列空间 l^∞，对于 $x = \{\xi_k\}$，我们定义

$$||x|| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$$

这是一个不可分的 *Banach* 空间. 完备是显然的，每一个分量都是收敛的. 不可分是因为我们可以考虑 l^∞ 的子集

$$S = \{(x_n) \mid x_n \in \{0,1\}\}$$

这很显然是一个拥有连续统势的子集，并且任何两个量之间的距离为 1，于是存在一个不可数的一致分离集，所以不可分.

Example 21.5. 有界变差函数空间 $V[a,b]$，我们令

$$||x|| = |x(a)| + V_a^b(x)$$

这是一个 *Banach* 空间.

Example 21.6. $\mathcal{L}^p(E)$ 空间，当 $p \geqslant 1$ 时，存在 *Minkowski* 不等式，其上的范数定义为

$$||f||_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

这是一个 *Banach* 空间，利用 *Fatou* 引理即证明. 并且有理系数多项式全体构成了 $\mathcal{L}^p[a,b](p \geqslant 1)$ 的可数稠密子集，从而 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 是可分的.

此外当 E 是有限测度集的时候，对于 $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$，有

$$\mathcal{L}^{\infty}(E) \subset \mathcal{L}^{p_2}(E) \subset \mathcal{L}^{p_1}(E) \subset \mathcal{L}(E)$$

Example 21.7. 我们研究 $\mathcal{L}^{\infty}(E)$ 空间，我们用 $\mathcal{L}^{\infty}(E)$ 表示 E 上的**本质有界**函数，定义为

$$||x|| = \inf_{E_0 \subset E, m(E_0)=0} \sup_{x \in E \setminus E_0} |x(t)| < 0$$

其本性界也记为

$$||x|| = \text{ess} \ \sup |x(t)|$$

这是一个不可分的 *Banach* 空间. 如在 $\mathcal{L}^{\infty}[0,1]$ 上，我们取

$$f_t(x) = \chi_{[0,t]}(x)$$

容易验证对于任意不同的 t_1, t_2，都有

$$||f_{t_1} - f_{t_2}|| = 1$$

从而存在不可数一致分离集.

Example 21.8. 考虑 $\mathcal{L}^p$ 的离散形式 l^p，其中 $p \geqslant 1$，定义为满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leqslant \infty$$

的数列 $x = \{\xi_k\}$ 全体，其范数定义为

$$||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

这是一个可分的 *Banach* 空间，用有理数截断数列逼近即可.

Example 21.9. 考虑收敛数列的全体 c，其上范数定义为

$$||x|| = \sup_n |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\}$$

这是一个 *Banach* 空间，实际上 c 是 l^{∞} 的闭子空间，从而是 *Banach* 空间. 同理令 c_0 为全体收敛到 0 的数列，这是 c 的闭子空间，从而是 *Banach* 空间.

Example 21.10. 以下是一些伴随空间：

(1) 连续函数空间的伴随：$(C[a,b])^* = V_0[a,b]$.

(2) 对于 $1 \leqslant p < \infty$，q 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 空间的伴随：$(\mathcal{L}^p[a,b])^* = \mathcal{L}^q[a,b]$.

(3) 对于 $1 \leqslant p < \infty$，q 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则 $(l^p)^* = l^q$.

(4) 收敛数列空间的伴随 $c^* = l^1$.

22 常见 Hilbert 空间

23 题目选解

索引

Banach 代数, 47
Banach 空间, 3

F 空间, 58
Fourier 系数, 36
Fourier 系数集, 36
Fourier 级数, 37

Hermite 夹角, 34
Hilbert 空间, 34

Minkowski 泛函, 10

Parseval 等式, 38

一致收敛, 4
严格分离集合 M 与 N, 12
伴随算子, 42

典范/典则映射, 21
内积, 33
内积空间, 33
凸包, 9
凸局部基, 57
凸集, 9
分离集合 M 与 N, 12
剩余谱点, 44
单射, 24
可逆算子, 24
吸收, 10
商空间, 4
图像, 27
均衡, 10
完全, 38
完备, 38
对偶/共轭算子, 19
局部凸, 57
平移算子, 54
平行四边形公式, 34
平衡, 56
平衡局部基, 57
广义幂零算子, 48
弱于, 26
弱解析, 48
强于, 26
强收敛, 4

拓扑线性空间, 54
数乘算子, 54
有界集, 57
有限秩算子, 51
本质有界, 62
极化恒等式, 34
标准正交基, 38
标准正交系, 36
正交, 34
正交分解, 39
正交投影, 39
正交系, 36
正交补空间, 39
正则点, 43
满射, 24

点谱, 44
特征值, 43
特征向量, 43
特征向量空间, 43
等价, 26
紧算子, 51

自伴算子, 42
自伴随算子, 42
自反, 21
谱, 43
谱半径, 46
谱点, 43

连续谱点, 44

重复度, 43
闭算子, 27
零化子, 7
预解算子, 43
预解集, 43
预零化子, 7