交换代数笔记

慕可

April 12, 2026

Contents

Chapter 1: 环与模基础

1.1 素理想，根理想与Zariski拓扑

定义 1.1.1: 素理想与极大理想

一个理想 $\mathfrak{p} \subset A$ 是素理想，如果对于任意的 $xy \in \mathfrak{p}$，有 $x \in \mathfrak{p}$ 或者 $y \in \mathfrak{p}$.
一个理想 $\mathfrak{m} \subset A$ 是极大理想，如果 $\mathfrak{m}$ 是真理想，并且对于任意理想 $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}$，都有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$.

Remark 1.1.1

- $\mathfrak{p}$ 是素理想当且仅当 $A/\mathfrak{p}$ 是整环.
- $\mathfrak{m}$ 是极大理想当且仅当 $A/\mathfrak{m}$ 是域.
- 极大理想都是素理想.
- (0) 是素理想当且仅当 A 是整环.

引理 1.1.1

任何环 A 都存在极大理想.

证明: 对偏序集 $(\Sigma, \subset)$ 使用 Zorn 引理即可，其中 $\Sigma := \{\text{ideal} \subsetneq A\}$. $\square$

推论 1.1.1

$\mathfrak{a} \subsetneq A$ 为理想，存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. 特别地，任意非单位都包含在某个极大理想中.

引理 1.1.2

$f\colon A \to B$ 为环同态，$\mathfrak{q} \subset B$ 为素理想，则 $f^{-1}(\mathfrak{q})$ 为 A 的素理想.

证明: 考虑同态的复合

$$A \to B \to B/\mathfrak{q}$$

诱导了单射

$$A/f^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$$

从而 $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ 是整环，即 $f^{-1}(\mathfrak{q})$ 是素理想. $\square$

Remark 1.1.2
极大理想的原像不一定是极大理想.

定义 1.1.2: 素谱

A 是一个环，定义 $\operatorname{Spec}(A)$ 是 A 的所有素理想构成的集合.

Remark 1.1.3
$A \neq 0$ 当且仅当 $\operatorname{Spec}(A) \neq \emptyset$.

已知 $f\colon A \to B$ 是环同态，诱导了一个素谱上的映射

$$f^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A), \quad \mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$$

下面我们的目标是找到一个 $\operatorname{Spec}(A)$ 上合适的拓扑使得 f^* 是连续的.

定义 1.1.3

A 是一个环，A 的幂零元根为 $\mathfrak{N} := \{a \in A\colon \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}$. 若 $\mathfrak{N} = 0$，称 A 是 *reduced*.
若 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，称 $r(\mathfrak{a}) = \{x \in A\colon \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in \mathfrak{a}\}$ 为 $\mathfrak{a}$ 的根理想.

Remark 1.1.4

- $r(0) = \operatorname{Nilrad}(A)$.
- $f\colon A \to A/I$，则 $r(I) = f^{-1}(\operatorname{Nilrad}(A/I))$.
- 令 $A_{\text{red}} = A/\operatorname{Nilrad}(A)$，则 $\operatorname{Nilrad}(A_{\text{red}}) = 0$.

命题 1.1.1

I 为 A 的理想，则

(1) $I \subset r(I)$.

(2) $r(I) = A$ 当且仅当 $I = A$.

(3) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$，则 $r(\mathfrak{p}^n) = r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

(4) $\operatorname{Nilrad}(A) = \displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \mathfrak{p}$.

(5) $r(I) = \displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$.

证明: 只需要证明 (4)：设 $\mathfrak{N}'$ 为 A 中所有素理想的交，若 $f \in A$，f 幂零，我们容易知道 $f \in \mathfrak{N}'$.
反过来，如果 f 不是幂零元，我们令

$$\Sigma := \{\mathfrak{a}\colon \forall n > 0, f^n \notin \mathfrak{a}(\text{ideal})\}$$

由于 $(0) \in \Sigma$，我们知道不是空集，对于任意包含关系下的全序子集 $\{\mathfrak{b}_t\}_{t \in T}$，我们令 $\mathfrak{a}_T = \bigcup_{t \in T} \mathfrak{b}_T$，有 $\mathfrak{a}_T$ 为

上界，由 Zorn 引理知道存在极大元 $\mathfrak{p}$，假设 $x,y\notin\mathfrak{p}$，则

$$\mathfrak{p}+(x),\mathfrak{p}+(y)\notin\Sigma$$

存在 m,n 使得 $f^m\in\mathfrak{p}+(x)$，$f^n\in\mathfrak{p}+(y)$，从而存在 $f^{m+n}\in\mathfrak{p}+(xy)$，从而 $xy\notin\mathfrak{p}$，也即 $\mathfrak{p}$ 是素理想，也就是说 $f\notin\mathfrak{N}'$.

综上我们知道 $\mathrm{Nilrad}(A)=\mathfrak{N}$.

(5) 考虑 $\mathrm{Nilrad}(A/I)=\bigcap\limits_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(A/I)}\mathfrak{q}$ 即可. □

Remark 1.1.5

- $r(IJ)=r(I\cap J)=r(I)\cap r(J)$.
- $r(I+J)=r(r(I)+r(J))$.

定义 1.1.4

对于 $M\subset A$，定义

$$V(M):=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)\colon M\subset\mathfrak{p}\}\subset\mathrm{Spec}(A)$$

我们有

命题 1.1.2

对于环 A 与 $X=\mathrm{Spec}(A)$，有

1. $M\subset A$，$I=(M)$，则 $V(M)=V(I)=V(r(I))$.
2. $V(0)=X$，$V(1)=\emptyset$.
3. E_i 为一族子集，则
$$V\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)=\bigcap_{i\in I}V(E_i)$$
4. 对任意两个理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$，有 $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$.

这些结果指出 $V(E)$ 中这些集合适合拓扑空间中的闭集公理，所以称为一个 X 上的拓扑，我们称之为 ***Zariski*拓扑**，我们称拓扑空间 X 为环 A 的**素谱**，并且记为 $\mathrm{Spec}(A)$.

证明:

1. 如果 a 是 E 生成的理想，则我们显然知道如果素理想 p 包含 E，自然有 $a\subset p$，所以显然有 $V(E)=V(a)$. 对于包含 a 的素理想 p，如果 $x\in r(a)$，意味着 $x^n\in a\subset p$，从而由素理想的性质我们知道 $x\in p$，所以 p 包含 $r(a)$，所以 $V(a)\subset V(r(a))$. 反过来，如果 $p\in V(r(a))$，则 $a\subset r(a)\subset p$，所以 $p\in V(a)$，所以 $V(a)=V(r(a))$.
2. 由于每一个素理想都包含 0 理想，所以自然有 $V(0)=X$，而 $p\in V(1)$，自然有 $p=(1)$，这与 p 是素理想矛盾，所以 $V(1)=\emptyset$.
3. 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是 A 的任意一组子集，设 $p\in\bigcup\limits_{i\in I}E_i$，自然有 $p\in V(E_i),\forall i\in I$，所以 $p\in\bigcap\limits_{i\in I}V(E_i)$.

反过来，对于 $p \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$，有 $E_i \subset p$，从而有 $\bigcup_{i\in I} E_i \subset p$，所以 $p \in V(\bigcup_{i\in I} E_i)$.

综上我们知道

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$$

4. 对于 A 中任意两个理想 a,b，我们先证明一个关于素理想的引理：

   Lemma about prime ideal: 设 R 是含幺交换环，P 是 R 的真理想，则下面三个条件等价:

   (1) 对于 $AB \subseteq P$，则 $A \subseteq P$ 或 $B \subseteq P$.

   (2) 对于 $ab \in P$，则 $a \in P$ 或者 $b \in P$.

   (3) R/P 为整环.

   Proof: (1) $\Rightarrow$ (2) 若 $ab \in P$，则 $(ab) \subseteq P$，则 $(a)(b) \subseteq (ab) \subseteq P$，从而 $(a) \subseteq P$ 或 $(b) \subseteq P$，从而 $a \in P$ 或 $b \in P$.

   (2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

   (3) $\Rightarrow$ (1) 反证，如果 $AB \subseteq P$，$A \subsetneq P$ 且 $B \subsetneq P$，则存在 $a \in A$，$a \notin P$，$b \in B$，$b \notin P$，但是 $ab \in P$，这代表 $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} = 0$. 与整环矛盾.

回到原题，我们有 $ab \subset p$ 可以退出 $a \subset p$ 或者 $b \subset p$，这代表着 $V(ab) \subset V(a) \cup V(b)$，又因为对于 $p \in V(a) \cup V(b)$，显然有 $a \cap b \subset P$，即 $P \in V(a \cap b)$，所以 $V(a) \cup V(b) \subset V(a \cap b)$.

最后，对于任意的 $p \in V(a \cap b)$，我们有 $ab \subset a$，$ab \subset b$，从而 $ab \subset a \cap b$，即 $p \in V(ab)$，所以我们有

$$V(ab) \subset V(a) \cup V(b) \subset V(a \cap b) \subset V(ab)$$

所以有

$$V(a \cap b) = V(ab) = V(a) \cup V(b)$$

□

Remark 1.1.6

- I, J 是理想，则 $V(I) \supset V(J)$ 当且仅当 $I \subset r(J)$ 当且仅当 $r(I) \subset r(J)$.
- $V(I) = V(J)$ 当且仅当 $r(I) = r(J)$.
- $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$，$V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$；$\mathfrak{p}$ 是极大理想当且仅当 $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}$.

命题 1.1.3

对于每个元素 $f \in A$，用 X_f 表示 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 中 $V(f)$ 的补集，从而 X_f 是开集，则它们构成 *Zariski* 拓扑的一组基，并且满足

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
2. $X_f = \emptyset$ 当且仅当 f 幂零.
3. $X_f = X$ 当且仅当 f 可逆.
4. $X_f = X_g$ 当且仅当 $r(f) = r(g)$.
5. X 是拟紧的(每个开覆盖都有有限子覆盖).
6. X_f 是拟紧的.
7. X 中的一个开子集是拟紧的，当且仅当它是有限个形如 X_f 的集合的并. 集合 X_f 叫做空间 X 的主开集.

证明: 对于每一个 $f \in A$，我们用 $X_f = \mathrm{Spec}(A) \backslash V(f)$ 即 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 中 $V(f)$ 的补集. 从而 X_f 是开的，我们下面证明所有 X_f 成为 X 的一组拓扑基.

由于我们知道

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$$

所以特别地我们有

$$V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$$

所以任意开集 U 满足

$$U = V(E)^c = \left(\bigcap_{f \in E} V(f)\right)^c = \bigcup_{f \in E} V(f)^c = \bigcup_{f \in E} X_f$$

所以成为一组拓扑基.

我们下面证明一系列性质

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$: 我们只需要知道

$$X_f \cap X_g = V(f)^c \cap V(g)^c = (V(f) \cup V(g))^c = V((f)(g))^c = V(fg)^c = X_{fg}$$

2. $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ 是幂零元：只需要注意到幂零元根是所有素理想的交即可.

3. $X_f = X \Leftrightarrow f$ 是可逆元：只需要注意到没有素理想包含 f，当且仅当 f 是可逆元，否则如果 f 不可逆，(f) 是 A 的真理想，存在一个极大理想包含 (f)，从而存在素理想包含 f，矛盾.

4. $X_f = X_g \Leftrightarrow r((f)) = r((g))$：由于 15(i)，我们知道 $V(f) = V((f)) = V(r(f))$，从而我们知道如果 $V(f) = V(g)$，则 $V(r((f))) = V(r((g)))$，注意到$r((f))$ 为所有包含 f 的素理想的交，所以如果 $V(f) = V(g)$，则包含 f 的素理想与包含 g 的素理想相同，即 $r((f)) = r((g))$.

   反过来，如果 $r((f)) = r((g))$，则 $V(r((f))) = V(r((g)))$，则 $V(f) = V(g)$，从而 $X_f = X_g$ 等价于 $r((f)) = r((g))$.

5. X **拟紧(quasi-compact)**(即 X 的每一个开覆盖都存在一个有限子覆盖)：对于 X 的任意一个开覆盖

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(E_\lambda)^c = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(E_\lambda)\right)^c$$

从而有 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} V(E_\lambda) = \emptyset$. 进一步有

$$V\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(E_\lambda) = \emptyset$$

所以 $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (1)$.

所以存在有限个元素

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 1, \quad e_i \in E_i$$

所以有 $(E_1, E_2, \cdots, E_n) = (1)$，所以

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \emptyset$$

所以有

$$X = V\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V(E_i)\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} V(E_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

所以存在有限子覆盖，即 X 是拟紧的.

6. X_f 是拟紧的：对任意开覆盖(我们只需要考虑任意拓扑基的覆盖有可数子覆盖就可以了)，即

$$X_f = \bigcup X_{f_i} = \bigcup V(f_i)^c$$

从而我们有

$$V\left(\bigcup f_i\right) = \bigcap V(f_i) = V(f)$$

令 m 为 $\bigcup f_i$ 生成的理想，有

$$V(m) = V((f))$$

所以我们知道 $r(m) = r((f))$，从而有存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^n \in m$$

即存在有限个 m 中的元素，使得

$$f^n = r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k$$

从而对于任意素理想 $p \in V\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} f_i\right)$，有 $f^n \in p$，进而有 $f \in p$，故有

$$V(f) \subset V\left(\bigcup_{i=1}^{k} f_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} V(f_i)$$

所以

$$X_f = V(f)^c = \bigcup_{i=1}^{k} X_{f_i}$$

从而知道 X_f 是拟紧的.

7. X 中的一个开子集是拟紧的，当且仅当它是有限个形如 X_f 的集合的并：充分性利用 (f) 显然，反过来，如果是无限个 X_f 的并，则取 $\bigcup X_f$ 为开覆盖，则不存在有限子覆盖.

集合 X_f 叫空间 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 的**主开集(basic open set)**. □

命题 1.1.4

$\varphi\colon A \to B$ 是环同态，则 φ^* 是连续的.

证明： 首先对于任意的 $q \in Y_{\varphi(f)}$，有 $\varphi(f) \notin q$，从而 $f \notin \varphi^{-1}(q)$，所以 $\varphi^*(Y_{\varphi(f)}) \subset X_f$，即 $Y_{\varphi(f)} \subset (\varphi^*)^{-1}(X_f)$.

反过来对于任意的 $q \in (\varphi^*)^{-1}(X_f)$，有 $\varphi^*(q) \in X_f$，即 $f \notin \varphi^{-1}(q)$，从而有 $\varphi(f) \notin q$，即 $q \in Y_{\varphi(f)}$. 所以 $(\varphi^*)^{-1}(X_f) \subset Y_{\varphi(f)}$.

综上我们证明了 $(\varphi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\varphi(f)}$. 从而是连续的. □

1.2 素避引理，扩张与局限

引理 1.2.1: 素避引理

(1) 设 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 是素理想，$\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$，其中 $\mathfrak{a}$ 是理想，则存在 i 使得 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$.

(2) 设 $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ 是一些理想，如果 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 是素理想，则存在 i 使得 $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$. 如果 $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$，则存在 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$.

证明： (1) 我们对 n 归纳证明，$n = 1$ 时显然，我们下面假设 $n \geq 2$ 并对于 $n-1$ 成立.

若 $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ 对于任意的 i 成立，则由归纳假设我们知道 $\mathfrak{a}$ 不包含在任意 $n-1$ 个 $\mathfrak{p}_i$ 的并中. 从而对任意的 $\mathfrak{p}_i$，存在 $x_i \in \mathfrak{a}$，使得 $x_i \not\subset \bigcup_{j\neq i} \mathfrak{p}_i$，若有某个 $x_i \notin \mathfrak{p}_i$，则 $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$，矛盾，所以 $x_i \in \mathfrak{p}_i$. 故我们有

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j\neq i} x_j \right) \in \mathfrak{a}$$

但是对于任意的 $\mathfrak{p}_i$，都有 $y \notin \mathfrak{p}_i$，矛盾，结论得证.

(2) 假设 $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}$ 对一切 i 成立，则存在 $x_i \in \mathfrak{a}_i$，使得 $x_i \notin \mathfrak{p}$，于是

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$$

但是我们知道 $\prod_{i=1}^{n} x_i \notin \mathfrak{p}$($\mathfrak{p}$ 是素理想，反证即可)，于是我们知道 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}$，矛盾.若相等，则

$$\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}_i$$

□

定义 1.2.1: 扩张

$f\colon A\to B$，理想 $\mathfrak{a}$ 的像在 B 中生成的理想 $Bf(\mathfrak{a})$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的扩理想，记为 $\mathfrak{a}^e$.

定义 1.2.2: 局限

$\mathfrak{b}$ 为 B 的一个理想，$f^{-1}(\mathfrak{b})$ 总是 A 中理想，称为理想 $\mathfrak{b}$ 的局限理想，记为 $\mathfrak{b}^c$.

命题 1.2.1

$f\colon A\to B$，$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 为 A，B 的理想.

(1) $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}^{ec}$，$\mathfrak{b}\supset\mathfrak{b}^{ce}$.

(2) $\mathfrak{a}^e=\mathfrak{a}^{ece}$，$\mathfrak{b}^c=\mathfrak{b}^{cec}$.

Remark 1.2.1

这一块的范畴论视角如下：我们设 $I(A)$ 为 A 的所有理想构成的集合，其上按包含关系构成偏序范畴，则对于 $f\colon A\to B$，我们存在伴随：

$$\mathrm{Hom}_{I(B)}(\mathfrak{a}^e,\mathfrak{b})\cong\mathrm{Hom}_{I(A)}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}^c)$$

说人话就是

$$\mathfrak{a}^e\subseteq\mathfrak{b}\iff\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}^c$$

于是我们注意到单位和余单位分别诱导了

$$\eta\colon Id\to ec,\quad \varepsilon\colon ce\to Id$$

于是单位和余单位分别代表了

$$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}^{ec},\quad \mathfrak{b}^{ce}\subseteq\mathfrak{b}$$

为方便我们给定函子

$$F(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}^e,\quad G(\mathfrak{b})=\mathfrak{b}^c$$

于是三角恒等式告诉我们有

$$F(\mathfrak{a})\to FGF(\mathfrak{a})\to F(\mathfrak{a})$$

即

$$\mathfrak{a}^e\subseteq\mathfrak{a}^{ece}\subseteq\mathfrak{a}^e$$

即

$$\mathfrak{a}^e=\mathfrak{a}^{ece}$$

同理有

$$\mathfrak{b}^c=\mathfrak{b}^{cec}$$

1.3 局部环

定义 1.3.1

环 A 的大根(Jacobson根)，定义为所有极大理想的交，记为 $\mathfrak{R}$.

命题 1.3.1

$x \in \mathfrak{R}$ 当且仅当 $\forall y \in A$，$1-xy$ 可逆.

证明: $\Rightarrow$: 如果 $1-xy$ 不可逆，那么知道包含在某个极大理想 $\mathfrak{m}$ 中，从而 $1 = 1-xy(\in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{m}) + xy \in \mathfrak{m}$ 矛盾.

$\Leftarrow$: 若 $x \notin \mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$ 是某个极大理想，此时 $(\mathfrak{m}, x) = (1)$，告诉我们存在 $u \in \mathfrak{m}$，$y \in A$ 使得 $u + xy = 1$，也就是 $u = 1 - xy$ 不可逆. □

定义 1.3.2: Local ring

一个环如果只有一个极大理想，则称为**局部环**.

Example 1.3.1

- 任何域都是局部环.
- p 是素数，则 $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b\colon a, b \in \mathbb{Z}, b \notin p\mathbb{Z}\}$ 是一个局部环.
- k 是域，$k[[x]]$ 局部环.

引理 1.3.1

(1) A 是一个环，$\mathfrak{m} \subset A$，使得 $\forall x \in A \backslash \mathfrak{m}$ 都是一个单位，则 A 是局部环并且 $\mathfrak{m}$ 为其极大理想.

(2) A 是环，$\mathfrak{m} \subset A$ 为极大理想，使得 $\forall x \in \mathfrak{m}$，有 $1 + x$ 是单位，则 A 是局部环.

证明: (1) 由于任意一个不为 (1) 的理想都由非单位构成，从而都包含在 $\mathfrak{m}$ 中，从而 $\mathfrak{m}$ 为唯一的极大理想.

(2) 设 $x \in A \backslash \mathfrak{m}$，由于 $\mathfrak{m}$ 极大，我们知道 $(x, \mathfrak{m}) = (1)$，从而存在 $y \in A, t \in \mathfrak{m}$ 使得 $xy + t = 1$，也就是 $xy = 1 - t \in 1 + \mathfrak{m}$，从而知道 xy 可逆，也即 x 可逆. 由 (1) 知道成立. □

1.4 Nakayama定理

引理 1.4.1

M 是有限生成 A 模，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，φ 是 M 的一个自同态，且 $\varphi(M) \subset \mathfrak{a}M$，则存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{a}$，使得

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

证明: 令 x_i 为 M 的生成元，有 $\varphi(x_i)=\sum a_{ij}x_j$.
则我们有

$$0=\varphi(x_i)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}\varphi-a_{ij})(x_j)=0$$

令

$$P=\begin{pmatrix}\varphi-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \varphi-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \varphi-a_{nn}\end{pmatrix}$$

我们知道

$$P\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$$

令 P^* 为 P 的伴随，有 $P^*P=\det(P)I$，我们有

$$\mathrm{diag}\{\det(P),\cdots,\det(P)\}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$$

也就是 $\det(P)x_i=0$，而注意到 $\det(P)$ 是一个关于 φ 的首一 n 次多项式，从而成立. □

推论 1.4.1

M 是有限生成 A 模，且存在 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 使得 $\mathfrak{a}M=M$，则存在 $x\equiv 1(\mod \mathfrak{a})$ 使得 $xM=0$.

证明: 取 $\varphi=id$ 即可. □

定理 1.4.1: Nakayama定理

A 是环，M 是有限生成 A 模，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{R}$ 为理想，若 $\mathfrak{a}M=M$，则 $M=0$.

证明: 由推论知道存在 $x\in 1+\mathfrak{a}\subset 1+\mathfrak{R}$，使得 $xM=0$.
但是我们知道 $\mathfrak{R}$ 的性质保证了 x 可逆，从而 $M=0$. □

Remark 1.4.1
有限生成的条件是必要的，如 $A=\mathbb{Z}_{(p)}\subset M=\mathbb{Q}$，$\mathfrak{m}\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$.

推论 1.4.2

M 是有限生成 A 模，$N\subset M$ 为子模，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{R}$ 为理想，若 $M=\mathfrak{a}M+N$，则 $N=M$.

证明: 由于 M/N 有限生成，从而 $M/N=\mathfrak{a}M/N$，从而 $M/N=0$，所以 $M=N$. □

推论 1.4.3

A 是局部环，$\mathfrak{m}$ 是极大理想，$k=A/\mathfrak{m}$ 是剩余域，M 是有限生成 A 模，假设 x_i 为 M 中的元素，使得 $\overline{x_i}$ 构成了 k 模 $M/\mathfrak{m}M$ 的一组基，则 x_i 生成 M.

证明： 令 $N=(x_1,\cdots,x_n)\subset M$ 为 M 的子模，从而

$$M\to M/\mathfrak{m}M$$

诱导了一个满射

$$N\to M/\mathfrak{m}M$$

由假设，有 $N+\mathfrak{m}M=M$，从而 $N=M$. □

Chapter 2: 张量积

2.1 模的张量积

定义 2.1.1: 张量积的泛性质

令 A 是一个交换幺环，令 M, N 为两个 A-模，则 M 与 N 的**张量积**定义为一个 A-模 H 和一个双线性映射 $\varphi\colon M\times N\to H$ 满足下面的泛性质：对于每一个 A-模 L 和任意的双线性映射 $f\colon M\times N\to L$，存在唯一的同态 $\widetilde{f}\colon H\to L$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & L \\ H \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

命题 2.1.1: 张量积的存在和同构唯一性

A 是一个环[a]，M, N 是 A-模，则张量积 (H,φ) 存在，并且在同构意义下唯一.

[a]在本书中所有环均为交换幺环

证明: 由泛性质我们知道唯一性是显然的，比如假设还存在 H'，则有

$$H\longrightarrow H'\longrightarrow H,\quad H'\longrightarrow H\longrightarrow H'$$

从而由 $H\longrightarrow H$，$H'\longrightarrow H'$ 的唯一性知道同构， 下面证明存在性.

考虑自由模 $A^{(M\times N)}$ 带有基 $M\times N$，令 $\{e_{x,y}\}_{(x,y)\in M\times N}$ 为典范基.

令 L 是形如下面元素生成的子模：

$$\begin{cases} e_{x_1+x_2,y}-e_{x_1,y}-e_{x_2,y}, & \forall x_1,x_2\in M,\forall y\in N \\ e_{x,y_1+y_2}-e_{x,y_1}-e_{x,y_2}, & \forall x\in M,\forall y_1,y_2\in N \\ e_{ax,y}-e_{x,ay},\quad ae_{x,y}-e_{ax,y}, & \forall a\in A,\forall x\in M,\forall y\in N \end{cases}$$

令 $H=A^{(M\times N)}/L$，定义 $x\otimes y$ 为 (x,y) 在 H 中的像，可以知道

$$\begin{cases} (x+x')\otimes y = x\otimes y + x'\otimes y \\ x\otimes(y+y') = x\otimes y + x\otimes y' \\ (ax)\otimes y = x\otimes(ay) = a(x\otimes y) \end{cases}$$

从而我们容易验证 $\widetilde{f}(x\otimes y)=f(x,y)$ 是由 f 唯一确定的. $\square$

Remark 2.1.1

我们将 M 与 N 的张量积记为 $(M \otimes_A N, \varphi)$，并且一般省略 φ.

Remark 2.1.2

注意 $M \otimes_A N$ 中的所有元素都可以表示为有限和 $\sum x_i \otimes y_i$，但是一般来说不能表示为 $x \otimes y$.

Example 2.1.1

令 $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，则 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = 0$.

这是因为对于任意的 $(x, y) \in M \times N$，有

$$x \otimes y = 3(x \otimes y) - 2(x \otimes y) = x \otimes (3y) - (2x) \otimes y = 0$$

命题 2.1.2: 张量积的典范同构

A 是环，M, N, M_i 都是 A 模，则存在下面的典范同构(即存在唯一的同构):

(a) $M \otimes A \cong M$.

(b) [交换律] $M \otimes N \cong N \otimes M$.

(c) [结合律] $(L \otimes M) \times N \cong L \otimes (M \otimes N)$.

(d) [分配律] $\left(\bigoplus M_i\right) \otimes N \cong \bigoplus (M_i \otimes N)$.

证明: 由泛性质均可得，下面举例说明:

(a) 交换图说明 M 满足 M, A 的张量积的泛性质.

$$\begin{tikzcd}
M \times A \arrow[r, "\varphi:(x,a)\mapsto ax"] \arrow[dr, "\forall f"'] & M \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{f}:\, x \mapsto f(x,1)"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

唯一性是因为图表交换，所以我们有

$$\widetilde{f}(ax) = f(x, a) \overset{\text{bilinear map}}{=\!=\!=\!=} f(ax, 1)$$

(b) 交换图说明 $N \otimes M$ 满足 M, N 的张量积的泛性质.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi(x,y)=y\otimes x"] \arrow[dr, "\forall f"'] & N \otimes M \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{f}:\, y\otimes x \mapsto f(x,y)"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

(c) 交换图说明 $L \otimes (M \otimes N)$ 满足 $(L \otimes M), N$ 的张量积的泛性质.

$$\begin{tikzcd}
(L \otimes M) \times N \arrow[r, "\varphi:\, (l\otimes m,n)\mapsto l\otimes(m\otimes n)"] \arrow[dr, "\forall f"'] & L \otimes (M \otimes N) \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{f}:\, l\otimes(m\otimes n) \mapsto f(l\otimes m,n)"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

(d) 交换图说明满足泛性质.

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)\times N \arrow[rrr, "\varphi:\,(\sum_i x_i, y)\mapsto\sum_i (x_i\otimes y)"] \arrow[drrr, "\forall f"'] & & & \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes N) \arrow[d, dashed, "\exists!\widetilde{f}:\,\sum_i (x_i\otimes y)\mapsto\bigoplus_{i\in I}\widetilde{f}_i(x_i\otimes y)"] \\
& M_i\times N \arrow[r] \arrow[dr, "f_i"'] & M_i\otimes N \arrow[d, dashed, "\exists!\widetilde{f}_i"] & L \\
& & L &
\end{tikzcd}$$

仔细解释一下，对于每一个 i，f 诱导了一个双线性映射 $f_i\colon M_i\times N\to L$，进而有 $\widetilde{f}_i\colon M_i\otimes N\to L$，令

$$\psi\colon \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)\times N\to\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)\otimes N$$

是典范的映射，从而我们有 $f=\widetilde{f}\circ\psi$，由此我们知道 $\widetilde{f}=\bigoplus_{i\in I}\widetilde{f}_i$ 是唯一的分解，从而满足泛性质.

□

推论 2.1.1

如果 M 是自由模，基为 $\{e_i\}$，则 $M\otimes N$ 的每一个元素都可以唯一的表示为 $\sum_i e_i\otimes y_i$，$y_i\in N$.

Remark 2.1.3

由张量积的结合律，我们可以定义出有限个 M_i 的张量积 $M_1\otimes M_2\otimes\cdots\otimes M_n$.

定义 2.1.2: 同态的张量积

设 $u\colon M\to M'$，$v\colon N\to N'$，则由泛性质，我们知道存在唯一的模同态 $u\otimes v\colon M\otimes N\to M'\otimes N'$，$u\otimes v$ 被称为u **和** v **的张量积**.

Remark 2.1.4

所提到的泛性质如下图所示：

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\text{canonical}"] \arrow[dr, "f:\,(x,y)\to u(x)\otimes v(y)"'] & M\otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! u\otimes v:\,x\otimes y\mapsto u(x)\otimes v(y)"] \\
& M'\otimes N'
\end{tikzcd}$$

定义 2.1.3: 纯量的局限

设 $\rho\colon A\to B$ 是环同态，N 是一个 B 模，则 ρ 自然地诱导了一个 A 模结构，即 $a.y=\rho(a)y$，称为**纯量的局限**.

定义 2.1.4: 纯量的扩充

令 M 是 A 模，N 是 B 模，存在环同态 $\rho\colon A\to B$，则我们可以赋予 $M\otimes_A N$ 一个 B 模结构：对任意的 $b\in B$，定义 $t_b\colon N\to N$，$y\mapsto by$，对任意的 $z\in M\otimes_A N$，定义 B 模结构

$$b\cdot z:=(1_M\otimes t_b)(z),\quad b(x\otimes y)=x\otimes(by)$$

容易验证这确实是一个 B 模结构. 我们可以定义 B 模 $M\otimes_A B$，记为 ρ^*M，被称为**纯量的扩充**.

命题 2.1.3

令 $\rho\colon A\to B$ 为环同态，M 是 A 模，N,P 是 B 模，则存在一个典范的 B 模同构：

$$M\otimes_A(N\otimes_B P)\cong(M\otimes_A N)\otimes_B P$$

证明： 首先说明都可以看做是 B 模结构：

$$M\otimes_A\overbrace{(N\otimes_B P)}^{B-Module}\xrightarrow{\text{extension to B-Module}}\overbrace{M\otimes_A(N\otimes_B P)}^{B-\text{Module}}$$

$$\underbrace{(M\otimes_A N)}_{B-\text{Module}}\otimes_B P\longrightarrow\underbrace{(M\otimes_A N)\otimes_B P}_{B-\text{Module}}$$

我们说明 $f\colon M\otimes_A(N\otimes_B P)\to(M\otimes_A N)\otimes_B P$，$x\otimes(y\otimes z)\to(x\otimes y)\otimes z$ 是一个 A 线性映射.
对固定的 $x\in M$，令 $t_x\colon N\to M\otimes_A N$，$y\mapsto x\otimes y$.
考虑映射 $h\colon M\times(N\otimes_B P)\to(M\otimes_A N)\otimes_B P$，$(x,u)\mapsto(t_x\otimes 1_P)(u)$.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t_x\,:\,y\mapsto x\otimes y"] & M\otimes_A N \arrow[d, Rightarrow] & \\
M\times(N\otimes_B P) \arrow[rr, "h\colon (x,u)\mapsto(t_x\otimes 1_P)(u)"] \arrow[d, "\text{canonical}"'] & & \overbrace{(M\otimes_A N)\otimes_B P}^{(A)B-\text{Module}} \\
M\otimes_A\underbrace{(N\otimes_B P)}_{A(B)-\text{Module}} \arrow[rru, dashed, "\exists! f"] \arrow[rr, "\text{extension}"'] & & \underbrace{M\otimes_A(N\otimes_B P)}_{B-\text{Module}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

容易验证 h 是 A 双线性的，从而由张量积的泛性质，唯一地诱导出我们所需要的 f. 验证一下即：

$$\begin{tikzcd}
(x,y\otimes z) \arrow[r, mapsto, "\text{canonical}"] \arrow[dr, bend right, "h\colon(x,y\otimes z)\mapsto(x\otimes y)\otimes z"'] & x\otimes(y\otimes z) \arrow[d, dashed, mapsto, "f"] \\
& (x\otimes y)\otimes z
\end{tikzcd}$$

同理我们可以完全类似地构造出：

$$g\colon(M\otimes_A N)\otimes_B P\to M\otimes_A(N\otimes_B P),\quad(x\otimes y)\otimes z\to x\otimes(y\otimes z)$$

从而我们知道 $f\circ g=1_{M\otimes_A(N\otimes_B P)}$，$g\circ f=1_{(M\otimes_A N)\otimes_B P}$.

而 f 和 g 都是会具有自然的 B 线性的结构，作为 A 模同构说明 f 和 g 即单又满，而他俩都是 B 线性的，也就是 B 模同态，从而可以说明是 B 模同构. □

推论 2.1.2

$\rho\colon A \to B$ 是环同态，M 是 A 模，N 是 B 模，从而有典范同构：

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A (B \otimes_B N) \cong M \otimes_A N$$

2.2 张量积函子的右正合性

定义 2.2.1: 复形与正合

一个 A 模的复形指一列 A 模 M_i，A 模同态 f_i，满足 $f_{i+1} \circ f_i = 0$，记作

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

复形称作**正合**的，如果 $\operatorname{Ker}(f_{i+1}) = \operatorname{Im}(f_i)$ 对于所有可能的 i 成立. 一个正合的复形也称作**正合列**.

Remark 2.2.1

我们约定 $f\colon N' \to N$ 是模同态，用 f_M 表示

$$f_M := f \otimes 1_M\colon N' \otimes M \to N \otimes M$$

定理 2.2.1: 张量积函子的右正合

我们已知 A 模正合列

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

则对于任意的 A 模 M，有下面的正合列成立：

$$N' \otimes M \xrightarrow{f_M} N \otimes M \xrightarrow{g_M} N'' \otimes M \longrightarrow 0$$

证明: g_M 的满射我们可以从 g 的满射立刻得到：对任意的 $\sum n_i'' \otimes m \in N'' \otimes M$，我们由 g 的满射，知道存在 $n_i \in N$ 使得 $g(n_i) = n_i''$，从而有

$$g \otimes 1_M\colon \sum n_i \otimes m_i \mapsto \sum n_i'' \otimes m_i$$

故 g_M 是满射，下面只需要验证 $\operatorname{Im}(f_M) = \operatorname{Ker}(g_M)$，换句话说[1]，即

$$\operatorname{Coker}(f_M) := N \otimes M / \operatorname{Im}(f_M) \cong N'' \otimes M$$

考虑

$$\widetilde{g}\colon (N \otimes M)/\operatorname{Im}(f_M) \to N'' \otimes M, \quad \sum n_i \otimes m_i + \operatorname{Im}(f_M) \mapsto \sum g(n_i) \otimes m_i$$

我们需要说明 $\widetilde{g}$ 是良定义的，即如果

$$\sum n_i \otimes m_i + \operatorname{Im}(f_M) = \sum \overline{n}_j \otimes \overline{m}_j + \operatorname{Im}(f_M)$$

[1]这里并不是显然的，需要注意到显然有 $g_M \circ f_M = 0$，即 $\operatorname{Im}(f_M) \subset \operatorname{Ker}(g_M)$

我们有 $\sum n_i \otimes m_i = \sum \overline{n}_j \otimes \overline{m}_j + \sum f(\hat{n}_k) \otimes \hat{m}_k$，从而

$$\sum g(n_i) \otimes m_i = \sum g(\overline{n}_j) \otimes \overline{m}_j + \sum gf(\hat{n}_k) \otimes \hat{m}_k = \sum g(\overline{n}_j) \otimes \overline{m}_j$$

故无关代表元的选取，从而是良定义的.

下面我们再考虑 h 如下定义：

$$h\colon N'' \times M \to (N \otimes M)/\operatorname{Im}(f_M), \quad (n'', m) \mapsto n \otimes m + \operatorname{Im}(f_M), n \in g^{-1}(n'')$$

我们验证 h 是良定义的，即对于 $g(n_1) = g(n_2) = n''$，有 $n_1 - n_2 \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$，从而存在 $f(n') = n_1 - n_2$，故

$$n_1 \otimes m = (n_2 + f(n')) \otimes m = n_2 \otimes m + f(n') \otimes m$$

即 $n_1 \otimes m + \operatorname{Im}(f_M) = n_2 \otimes m + \operatorname{Im}(f_M)$，故与代表元的选取无关，从而任意知道 h 是一个双线性映射，从而由张量积的泛性质，存在 $\widetilde{h}\colon N'' \otimes M \to (N \otimes M)/\operatorname{Im}(f_M)$.

下面验证 $\widetilde{h}$ 是 $\widetilde{g}$ 的逆，容易验证

$$\begin{tikzcd}
\sum n_i \otimes m_i + \operatorname{Im}(f_M) \arrow[rr, bend left, "\widetilde{g}"] & & \sum g(n_i) \otimes m_i \arrow[ll, bend left, "\widetilde{h}"]
\end{tikzcd}$$

从而我们知道 $N \otimes M/\operatorname{Im}(f_M) \cong N'' \otimes M \cong N \otimes M/\operatorname{Ker}(g_M)$，结合 $\operatorname{Im}(f_M) \subseteq \operatorname{Ker}(g_M)$ 知道 $\operatorname{Im}(f_M) = \operatorname{Ker}(g_M)$，即正合. □

Remark 2.2.2

关于这一部分，Atiyah-MacDonald 的书上有不一样的证明方法，让我们了解一下.

引理 2.2.1: Hom 函子的左正合性

对于固定的模 M, N，我们可以定义函子 $\operatorname{Hom}(-, N)$ 与 $\operatorname{Hom}(M, -)$，分别是模范畴的反变函子与协变函子. 我们可以证明这两个函子都是左正合函子，即

(a) 下面序列正合

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

当且仅当对于任意的模 N，下面序列正合

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} \operatorname{Hom}(M', N)$$

(b) 下面序列正合

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

当且仅当对于任意的模 M，下面序列正合

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} \operatorname{Hom}(M, N'')$$

证明: 我们只证明 (a)，(b) 的过程是同理的，我们先说明如何诱导出 $\overline{u}$ 与 $\overline{v}$，诱导过程如下图：

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[drr, dashed, "g\circ u"'] & M \arrow[r, "v"] \arrow[dr, dashed, "g=f\circ v"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
& & N &
\end{tikzcd}
$$

$\Leftarrow$: 我们假设有 Hom 的正合，则由 $\overline{v}$ 的单射，我们下面要证明 v 是满射的，而证明 v 是满射就等价于证明

$$M''/\operatorname{Im} v = 0$$

所以我们可以取 $N = M''/\operatorname{Im} v$，从而得到满同态 $M'' \to N$，在 $\overline{v}$ 的作用之下，我们注意到

$$(M'' \to N) \mapsto \left(M \xrightarrow{v} M'' \to N\right) = 0$$

于是由 $\overline{v}$ 的单射性，我们知道 $M'' \to N$ 只能是零映射，也就是说 $N = 0$，于是我们知道 v 是满射.

进一步，我们知道 $\overline{u} \circ \overline{v} = 0$，也就是 $f \circ v \circ u = 0$ 对任意的 $f \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ 成立，我们取 $N = M''$，$f = \mathrm{id}$，立刻得到 $v \circ u = 0$，也就是说 $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

最后，我们令 $N = M/\operatorname{Im} u$，有下面交换图：

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "0"'] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "p"] & M'' \arrow[dl, "q"] \\
& M/\operatorname{Im} u &
\end{tikzcd}
$$

考虑自然同态 $p\colon M \to M/\operatorname{Im} u$，我们知道 $p \in \operatorname{Ker} \overline{u} = \operatorname{Im} \overline{v}$，于是存在 $q \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ 使得 $p = q \circ v$，所以有

$$\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} u$$

于是 $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} v$，所以正合.

$\Rightarrow$: 假设已知模正合.

对于任意的 N，我们先证明 $\overline{v}$ 是单射：若存在 ψ 使得 $\psi \circ v = 0$，由于 v 是满射所以 ψ 是 0，得证.

下面再说明 $\operatorname{Im} \overline{v} \subset \operatorname{Ker} \overline{u}$，这只需要说明 $\overline{u} \circ \overline{v} = 0$ 即可，由于 $v \circ u = 0$，这是显然的.

最后取 $\varphi \in \operatorname{Hom}(M, N)$，使得

$$\overline{u}\colon \left(M \xrightarrow{\varphi} N\right) \mapsto \left(M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{\varphi} N\right) = 0$$

我们有

$$\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} \varphi$$

由于 $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} \varphi$，所以我们可以定义 $\psi \in \operatorname{Hom}(M', N)$ 如下：

$$\psi(v(m)) = \varphi(m)$$

容易验证是一个良定义的，从而我们知道

$$\psi \circ v = \varphi$$

也就是 $\operatorname{Ker} \overline{u} \subset \operatorname{Im} \overline{v}$，于是正合. □

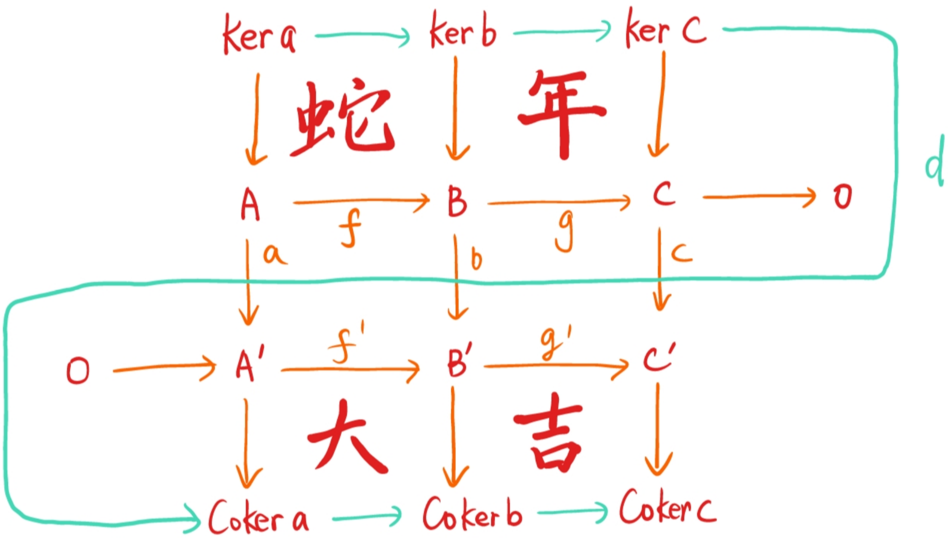
Remark 2.2.3

我们实际上可以得到蛇引理：已知下面的图交换，两行均为正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"'] & N \arrow[r, "v'"'] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则存在正合列：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f' \arrow[r, "\overline{u}"] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\overline{v}"] & \operatorname{Ker} f'' \arrow[dll, "d"'] & \\
& \operatorname{Coker} f' \arrow[r, "\overline{u}'"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[r, "\overline{v}'"'] & \operatorname{Coker} f'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$



引理 2.2.2: 张量积与Hom的关系

我们有典范同构

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

证明: 考虑 $f\colon M \times N \to P$ 是一个双线性映射，对于每一个 $x \in M$，可以定义一个线性映射 $y \mapsto f(x, y)$，所以 f 诱导了一个从 M 到 $\mathrm{Hom}(N, P)$ 的线性映射.

反过来对于任意 $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$，我们可以定义一个双线性映射 $(x, y) \mapsto \varphi(x)(y)$.

$$\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\forall f"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
M \otimes N \arrow[r, dashed, "\exists! \overline{f}"'] & P \arrow[r, phantom, "\underset{\varphi \mapsto \varphi(x)(y)}{\overset{f \mapsto f(x,\cdot)}{\rightleftarrows}}"] & \mathrm{Hom}(N, P)
\end{tikzcd}$$

即我们可以将 $M \times N \to P$ 的双线性映射一一对应到 $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$ 中，又因为张量积的泛性质，我们可以将 $M \times N$ 到 P 的双线性映射一一地对应到 $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$ 中，故我们可以得到一个典范的同构

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

□

Note 2.2.1

我们下面来看一看定理 2.2.1 的另证：

由于 $M' \to M \to M'' \to 0$ 正合，所以由引理 2.2.1 知

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', \mathrm{Hom}(N,P)) \to \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P)) \to \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N,P))$$

正合，但是由于有典范同构 $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P))$，我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M'', \mathrm{Hom}(N,P)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N,P)) \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M'' \otimes N, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M' \otimes N, P)
\end{array}$$

我们下面需要证明 $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P))$ 是自然同构，从而可以保持正合性(即 Hom-Tensor 伴随性)：

1. 构造映射 Φ 与 Ψ:
   - **映射** $\Phi : \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \to \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P))$：
     对任意 $f \in \mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$，定义：
     $$\Phi(f)(m)(n) = f(m \otimes n), \quad \forall m \in M, n \in N.$$
   - **逆映射** $\Psi : \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P)) \to \mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$：
     对任意 $g \in \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P))$，定义：
     $$\Psi(g)(m \otimes n) = g(m)(n), \quad \forall m \in M, n \in N.$$
2. 验证双射性:
   - $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$：
     对任意 $f \in \mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$，
     $$\Psi(\Phi(f))(m \otimes n) = \Phi(f)(m)(n) = f(m \otimes n).$$
   - $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$：
     对任意 $g \in \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P))$，
     $$\Phi(\Psi(g))(m)(n) = \Psi(g)(m \otimes n) = g(m)(n).$$
3. 自然性的证明:

   对任意模同态 $\alpha : M' \to M$，以下图表交换：

   $$\begin{array}{ccc}
   \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) & \xrightarrow{\Phi_M} & \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P)) \\
   {\scriptstyle \mathrm{Hom}(\alpha \otimes 1_N, P)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{Hom}(N,P))} \\
   \mathrm{Hom}(M' \otimes N, P) & \xrightarrow[\Phi_{M'}]{} & \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N,P))
   \end{array}$$

   对任意的 $f \in \mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$，左侧路径对应的是

   $$f \to f \circ (\alpha \otimes 1_N) = f' \to \Phi_M(f') = f'(\cdot \otimes ()) = f \circ (\alpha \otimes 1_N)(\cdot \otimes ())$$

右侧路径对应的是

$$f \to \Phi_M(f) = f(\cdot \otimes ()) \to f(\cdot \otimes ()) \circ \alpha$$

则对于任意的 $m' \in M', n \in N$，有

$$f \circ (\alpha \otimes 1_N)(m' \otimes n) = f(\alpha(m') \otimes n)$$

$$f(\cdot \otimes ()) \circ \alpha(m', n) = f(\alpha(m') \otimes n)$$

从而知道图表交换，故满足自然同构.

从而正合列可以传递下来，即有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'' \otimes N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M' \otimes N, P)$$

由此再依据引理 2.2.1 可以知道有正合列：

$$M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

Remark 2.2.4

事实上，这一段东西是在说

$$- \otimes N \dashv \mathrm{Hom}(N, -)$$

然后利用左伴随保持右正合，右伴随保持左正合就立刻得到这一节的所有内容.

2.3 代数与代数的张量积

定义 2.3.1: Algebra

所谓**代数**就是一个环 B 和一个环同态 $f\colon A \to B$.

实际上如果有 $f\colon A \to B$，则我们可以定义

$$a \cdot b = f(a)b$$

所以实际上给环 B 配备了一个 A-模结构. 所以代数实际上就是一个即有模结构又有环的乘法结构的代数结构.

Remark 2.3.1

任何环都是一个 $\mathbb{Z}$-代数.

定义 2.3.2: 代数同态

已知 $f\colon A \to B$，$g\colon A \to C$ 是两个环同态，一个 **A-代数同态** $h\colon B \to C$ 是一个环同态且是 A-模同态.

Remark 2.3.2

实际上如果 h 是代数同态，我们可以得到 $h \circ f = g$.

定义 2.3.3: finite algebra

一个环同态 $f\colon A \to B$ 是**有限的**，并且 B 是一个**有限 A-代数**，如果 B 作为 A-模是有限生成的. 同态 f 是**有限型** ***(finite type)***，并且 B 是一个**有限生成**的 A-代数，如果存在 B 中的有限集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，使得 B 中每一个元素都可以写成以 $f(A)$ 中元素为系数的 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式，或者等价地说，存在一个从 $A[t_1, \cdots, t_n]$ 到 B 的满代数同态.

Remark 2.3.3

一个环 A 是有限生成的，如果它是有限生成的 $\mathbb{Z}$ 代数.

定义 2.3.4: 代数的张量积

B, C 是两个 A-代数，有 $f\colon A \to B$，$g\colon A \to C$，我们可以定义他们的张量积作为一个 A 模 $D = B \otimes_A C$. 考虑映射 $B \times C \times B \times C \to D$ 如下定义

$$(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$$

容易知道是 A-线性的，所以诱导了一个 A-模同态

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \to D$$

所以有一个 A-模同态

$$D \otimes D \to D$$

所以有一个对应的 A-双线性映射

$$\mu\colon D \times D \to D, \quad \mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$$

我们定义 D 上的乘法为

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$$

总体上有

$$\left(\sum_i (b_i \otimes c_i)\right)\left(\sum_j (b'_j \otimes c'_j)\right) = \sum_{i,j} (b_i b'_j \otimes c_i c'_j)$$

从而 D 是一个以 $1 \otimes 1$ 为幺元的环，并且 $a \mapsto f(a) \otimes g(a)$ 是 $A \to D$ 的环同态，故 D 是一个 A-代数.

Chapter 3: 投射模，内射模与平坦模

3.1 投射与内射的刻画

定义 3.1.1: Projective 与 Injective

设 $M, N \in \mathbf{Mod}_A$，则

(1) 如果 $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ 为正合函子，则称 M 是一个**投射模**.

(2) 如果 $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ 为正合函子，则称 N 是一个**内射模**.

命题 3.1.1: 投射模的等价刻画

下面叙述关于 A-模 M 是等价的

(1) M 投射.

(2) 对于任一满同态 $X \to Y$，其诱导的同态 $\mathrm{Hom}_A(M, X) \to \mathrm{Hom}_A(M, Y)$ 也是满同态.

(3) 对与任一 $X \twoheadrightarrow Y \leftarrow M$ ，可以找到一个 $M \to X$ 的提升*(lifting)*，即使得下面交换图成立

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads] & Y \\
& M \arrow[u, hook] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

证明: 证明的本质就是正合列是可以拼接的，也就是由于 Hom 是左正合函子，所以我们总是有

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, Z) \to \mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(M, Y)$$

而每一个等价刻画总是可以给我们提供正合列：

$$\mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(M, Y) \to 0$$

我们两个正合列分别提供了三处正合，合起来就是我们所需要的正合列. □

命题 3.1.2: 内射模的等价刻画

下面叙述关于 A-模 N 是等价的

(1) N 内射.

(2) 对于任一单同态 $I \hookrightarrow R$，有 $\mathrm{Hom}_A(R,N) \to \mathrm{Hom}_A(I,N)$ 是满同态.

(3) 对于任一 $N \leftarrow I \hookrightarrow R$，可以找到一个 $R \to N$ 的解，即使得下面交换图成立

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d] & R \arrow[dl, dashed] \\ N & \end{tikzcd}$$

证明: 证明与投射模的证明几乎一样，略去不表. □

Remark 3.1.1

内射性质刻画的是态射的延拓，即如果 X 是内射对象，即若 $A \to B$ 是单射，则任意的态射 $A \to X$ 都可以延拓到 B 上使得 $B \to X$ 是延拓. 如果对泛函分析比较了解，就会注意到所谓 Hahn-Banach 定理就是再说域 $\mathbb{K}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上赋范线性空间的内射对象.

定义 3.1.2: Split

称短正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 分裂，若满足以下性质之一:

(1) $\exists Y \xrightarrow{h} X$ 使得 $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

(2) $\exists Z \xrightarrow{h} Y$ 使得 $g \circ h = \mathrm{id}_Z$.

引理 3.1.1: 分裂诱导的直和分解

设 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 分裂，则有模的直和分解

$$Y \cong X \oplus Z$$

证明: 我们只证一种情况，另外一种情况是类似的，假设存在 $h\colon Y \to X$ 使得 $h \circ f = \mathrm{id}_X$，我们构造映射:

$$\varphi\colon Y \to Y, \quad y \mapsto y - f \circ h(y)$$

我们给出一些同构:

$$X \cong f(X), \quad Z \cong Y/\operatorname{Ker} g$$

所以我们只需要证明

$$Y \cong f(X) \oplus Y/\operatorname{Ker} g$$

我们容易知道上面构造的 φ 是一个模同态，并且如果 $y \in \operatorname{Ker}\varphi$，也就是有 $y = f(h(y)) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$，告诉我们 $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker} g$.

反过来，对于 $y \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，从而 $x = h(f(x)) = h(y)$，于是有 $\varphi(y) = y - f(h(y)) = f(x) - f(x) = 0$，于是 $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

综上我们知道 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}\varphi$，所以

$$Y/\operatorname{Ker} g = Y/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

于是我们知道只需要证明

$$Y \cong f(X) \oplus \operatorname{Im}\varphi$$

对于任意的 $y \in Y$，我们有

$$y = f(h(y)) + y - f(h(y))$$

于是 $Y = f(X) + \operatorname{Im}\varphi$，设 $y \in f(X) \cap \operatorname{Im}\varphi$，我们知道

$$\exists y' \in Y \ \text{ s.t. } \ y = y' - f(h(y')), \quad \exists x \in X \ \text{ s.t. } \ y = f(x)$$

同时作用 h，有

$$x = h(f(x)) = h(y) = h(y') - h(f(h(y'))) = 0$$

于是 $y = f(x) = 0$，这就告诉我们是直和. □

Remark 3.1.2

更好的记忆方法其实是利用幂等映射来理解，比如说如果存在 $h\colon Z \to Y$ 使得 $g \circ h = \mathrm{id}_Z$，那么我们就可以构造投影映射

$$P = h \circ g\colon Y \to Y$$

有

$$P^2 = h \circ g \circ h \circ g = h \circ \mathrm{id}_Z \circ g = h \circ g = P$$

于是这是一个幂等映射，对于幂等映射有自然的直和分解

$$Y = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$$

注意到

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im}(h \circ g) \cong \operatorname{Im} g = Z$$

与

$$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker}(h \circ g) \cong \operatorname{Ker} g \cong \operatorname{Im} f \cong X$$

于是立刻得到.

命题 3.1.3

$M \oplus N$ 是内射模(投射模)当且仅当 M, N 都是内射模(投射模).

证明: 本质上利用 Hom 函子保持极限，所以

$$\operatorname{Hom}(-, M \oplus N) = \operatorname{Hom}(-, M \times N) = \operatorname{Hom}(-, M) \times \operatorname{Hom}(-, N)$$

与

$$\operatorname{Hom}(M \otimes N, -) = \operatorname{Hom}(M \coprod N, -) = \operatorname{Hom}(M, -) \times \operatorname{Hom}(N, -)$$

所以满射是当且仅当的，所以内射(投射)也是当且仅当的. □

命题 3.1.4

内射对象有以下性质：

(1) 设有正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to Z \to 0$，如果 X 为内射模，则正合列分裂，有 $Y \cong X \oplus Z$.

(2) 设 X 为内射模，且有正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$，则 Y 内射 $\iff$ Z 内射.

证明： (1) 由 $X \xrightarrow{f} Y$ 单射可知，$\mathrm{Hom}_A(Y, X) \to \mathrm{Hom}_A(X, X)$ 是满射，于是我们知道存在 $h \in \mathrm{Hom}_A(Y, X)$ 使得 $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

(2) 由于 X 是内射模，从而分裂，有

$$Y \cong X \oplus Z$$

于是在 X 内射的条件下很显然有 Y 内射当且仅当 X, Z 都内射当且仅当 Z 内射. □

命题 3.1.5

投射对象具有以下性质：

(1) 设有正合列 $0 \to W \to X \to Y \to 0$，如果 Y 为投射模，则正合列分裂，有 $X \cong W \oplus Y$.

(2) 设 Y 为投射模，且有正合列 $0 \to W \to X \to Y \to 0$，则 W 投射 $\iff$ X 投射.

证明： 与内射情况完全同理. □

命题 3.1.6

设 A 为环，则

(1) 自由 A-模是投射的.

(2) 设 $M \in \mathbf{Mod}_A$，则 M 投射 $\iff$ M 是某个自由模的直和项.

证明： (1) 首先我们先证明自由模是投射的，设 F 是自由模，则存在一组基 $\{f_i\}_{i \in I}$，其中 I 是指标集. 我们假设 $g \colon Y \to Z$ 是满射，则要说明任意的 $\varphi \colon F \to Z$ 存在 $\widetilde{\varphi} \colon F \to Y$ 的提升.

要说明这件事情只需要说明生成元去哪了，对任意的 f_i，我们选择 $y_i \in g^{-1}(\varphi(f_i))$，由于 g 是满射，所以一定存在这样的 y_i. 然后令 $\widetilde{\varphi}(f_i) = y_i$ 即可.(这里对自由模可行是因为自由模的基是自由的，不必担心任意选择的兼容性)

(2) 若 M 是自由模的直和项，我们立刻知道 M 是投射的. 反之如果 M 是投射的，我们以 M 的所有元素为基生成一个自由模 F，得到自然的满射

$$\pi \colon F \to M$$

从而得到正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\pi \to F \to M \to 0$$

由于 M 投射，正合列分裂，所以

$$F \cong M \oplus \mathrm{Ker}\,\pi$$

所以是直和项. □

命题 3.1.7: Baer

设 $M \in \mathbf{Mod}_A$，则 M 为内射模 $\iff$ 对于 A 的任一理想 I，以及任一 A-模同态 $\varphi\colon I \to M$，存在一个扩张 $\psi\colon A \to M$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

证明: $\Longrightarrow$：这个方向是显然的，因为理想本身就是一个 A-模.

$\Longleftarrow$：任给一个单射 $N \to L$ 与同态 $f\colon N \to M$，由 Zorn 引理，我们知道存在一个极大的延拓 (N', f')，如若 $N' \neq L$，则任取 $x \in L\backslash N'$，我们要尝试把 f' 的定义域扩大到 $N' + Ax$，定义理想

$$I = \{a \in A \mid ax \in N'\}$$

于是我们可以定义映射

$$\varphi\colon I \to M, \quad a \mapsto f'(ax)$$

由条件我们知道 φ 可以延拓到 A 上得到 $\psi\colon A \to M$，此时我们可以定义

$$f''\colon N' + Ax \to M, \quad n' + ax \mapsto f''(n) + \psi(a)$$

于是与 Zorn 引理矛盾，所以可以延拓到 L 上，即内射. □

推论 3.1.1

利用 *Baer* 准则可以立刻得到 $\mathbb{Q}$ 是内射 $\mathbb{Z}$-模.

Remark 3.1.3

Baer 准则实际上是把判断内射的过程变成一个解方程的过程.

3.2 平坦的刻画

定义 3.2.1: 平坦(flat)模

N 被称为是**平坦模**，如果对任意的正合列 E，有 $E \otimes N$ 仍然正合. 具体地，如果对任意正合列

$$\cdots \to M_1 \to M \to M_2 \to \cdots$$

有正合列

$$\cdots \to M_1 \otimes N \to M \otimes N \to M_2 \otimes N \to \cdots$$

则称 N 是平坦模.

命题 3.2.1: 平坦模的等价刻画

下面的叙述关于 A-模 N 是等价的

(1) N 是平坦的.

(2) 如果 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 正合，则 $0 \to M_1 \otimes N \to M \otimes N \to M_2 \otimes N \to 0$ 正合.

(3) 如果 $f\colon M' \to M$ 是单射，则 $f \otimes 1\colon M' \otimes N \to M \otimes N$ 是单射.

(4) 如果 $f\colon M' \to M$ 是单射，并且 M 与 M' 都是有限生成的，则 $f \otimes 1\colon M' \otimes N \to M \otimes N$ 是单射.

证明:

$(1) \Leftrightarrow (2)$：把长正合列分裂成短的就可以看出.

$(2) \Leftrightarrow (3)$：由定理 2.2.1 可知.

$(3) \Rightarrow (4)$：显然.

$(4) \Rightarrow (3)$：令 $f\colon M' \to M$ 是单射，令

$$u = \sum x_i' \otimes y_i \in \operatorname{Ker}(f \otimes 1)$$

即

$$\sum f(x_i') \otimes y_i = 0 \in M \otimes N$$

令 M_0' 是 $\{x_i'\}$ 有限生成的 M' 的子模，并且令

$$u_0 = \sum x_i' \otimes y_i \in M_0' \otimes N$$

我们容易知道存在 M 的有限生成子模 M_0 使得 $f(M_0') \subset M_0$(实际上只需要令 M_0 为由 $\{f(x_i)\}$ 有限生成的子模即可)，并且有

$$\sum f(x_i') \otimes y_i = 0 \in M_0 \otimes N$$

令 $f_0\colon M_0' \to M_0$ 为 f 在 M_0 上的限制，从而 $(f_0 \otimes 1)(u_0) = 0$. 由条件我们知道 $u_0 = 0$，即 $u = 0$. □

命题 3.2.2

平坦模的直和项是平坦的.

证明: 设 $F \cong P \oplus K$ 是平坦的，则我们知道对于正合列

$$0 \to A \to B$$

有单射

$$0 \to A \otimes F \to B \otimes F$$

利用分配律拆开得到正合列

$$0 \to (A \otimes P) \oplus (A \otimes K) \to (B \otimes P) \oplus (B \otimes K)$$

很显然如果想要上面的序列正合，必须要求单射，这就要求了在直和内的项是单射，于是有

$$A \otimes P \to B \otimes P$$

是单射，所以 P 平坦. □

命题 3.2.3

对于一般的交换环而言，我们有

$$\text{自由} \implies \text{投射} \implies \text{平坦}$$

证明: 因为投射当且仅当时自由模的直和项，所以自然我们有自由推投射. 现在由于自由模是平坦模，而投射模是自由模的直和项，所以投射模是平坦模的直和项，所以投射模平坦. □

命题 3.2.4: 局部环上平坦的性质

如果 A 是一个局部环，M 是有限生成 A-模，则

$$M \text{ 自由} \iff M \text{ 投射} \iff M \text{ 平坦}$$

证明: 这个定理实际上是在说局部环上有限生成平坦模是自由模. 设 $\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想，$k = A/\mathfrak{m}$ 是其剩余域. 由于 M 是有限生成的，所以 k-线性空间 $M/\mathfrak{m}M$ 是有限维的，设 $\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}$ 是一组基，由 Nakayama 定理的推论我们知道 $x_1, \cdots, x_n$ 构成了 M 的一组极小生成元. 现在我们构造

$$\varphi \colon A^n \to M, \quad e_i \mapsto x_i$$

很显然这是一个满射，我们只需要说明是单射即可，考虑正合列

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to A^n \to M \to 0$$

由于 M 是平坦模，所以 $\operatorname{Tor}_1^A(M,k) = 0$，所以我们仍然有正合列

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \otimes k \to A^n \otimes k \to M \otimes k \to 0$$

利用自然同构我们有

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi/\mathfrak{m}\operatorname{Ker}\varphi \to (A/\mathfrak{m})^n \to M/\mathfrak{m}M \to 0$$

正合，注意右边是同构，所以左边有

$$\operatorname{Ker}\varphi/\mathfrak{m}\operatorname{Ker}\varphi = 0$$

即

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{m}\operatorname{Ker}\varphi$$

由 Nakayama 定理我们知道

$$\operatorname{Ker}\varphi = 0$$

即 M 是自由模. □

Chapter 4: 环与模的局部化

4.1 局部化的基本定义

定义 4.1.1: 乘法封闭子集

设 A 是任意环，A 的乘法封闭子集指的是一个子集 $S \subset A$，S 包含 1 且 S 对乘法是封闭的.

定义 4.1.2: 局部化

设 S 是 A 的乘法封闭子集，从而我们可以在 $A \times S$ 上面定义一个等价关系：

$$(a,s) \equiv (b,t) \Longleftrightarrow \exists u \in S, \text{s.t.}\ (at-bs)u = 0$$

将 (a,s) 所在的等价类称为 a/s，并记所有等价类的集合为 $S^{-1}A$. 并且我们可以定义加法与乘法：

$$(a/s)+(b/t) = (at+bs)/st, \quad (a/s)(b/t) = ab/st$$

从而就在 $S^{-1}A$ 上引进了环结构，称为 A 对于 S 的**局部化**.

Remark 4.1.1

常见的等价关系没有 u，但是注意到在从 $\mathbb{Z}$ 构造 $\mathbb{Q}$ 时，证明等价关系的传递性时需要用到消去律，但是这只能在整环中成立，所以我们在这里多乘上一个 u 以得到传递性.

Remark 4.1.2

我们有环同态 $f\colon A \to S^{-1}A$，由 $f(x) = x/1$ 定义，一般来说不是单的，因为我们可以考虑

$$y/1 = x/1 \Longleftrightarrow \exists u \in S, \text{s.t.}\ (x-y)u = 0$$

这个同态有以下性质：

1. $s \in S$，则 $f(s)$ 是 $S^{-1}A$ 中可逆元.
2. $f(a) = 0$ 则 $\exists s \in S$ s.t. $as = 0$.
3. $S^{-1}A$ 中任一元素均有形状 $f(a)f(s)^{-1}$，其中 $a \in A, s \in S$.

Remark 4.1.3

如果 A 是整环并且 $S = A\backslash\{0\}$，则 $S^{-1}A$ 就是 A 的分式域.

Remark 4.1.4
定义的乘法封闭子集并没有要求不含 0，事实上如果含 0，则我们容易得到 $S^{-1}A$ 退化成为一个零环，这个东西没有研究意义，所以我们下面一般都假设不含 0.

命题 4.1.1: 局部化的泛性质

设 $g\colon A \to B$ 是一个环同态，使得对于任意的 $s \in S$，$g(s)$ 都是 B 中的可逆元，则存在唯一的一个环同态 $h\colon S^{-1}A \to B$ 使得 $g = h \circ f$.

证明: 唯一性：如果 h 满足条件，则 $h(a/1) = hf(a) = g(a)$ 对一切 $a \in A$ 成立，因此如果 $s \in S$，则

$$h(1/s) = h((s/1)^{-1}) = h(s/1)^{-1} = g(s)^{-1}$$

从而我们知道 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ 唯一确定.
存在性：令 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$. 下面只需要证明是良定义即可，设

$$a/s = a'/s' \iff \exists u \in S, \text{s. t. } (as' - a's)u = 0$$

因此有

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(u) = 0$$

但是由于 $g(u)$ 可逆，有

$$g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$$

从而良定义. □

引理 4.1.1

设 $g\colon A \to B$ 是一个环同态，具有性质

(1) $s \in S$，则 $g(s)$ 是 B 中可逆元.

(2) $g(a) = 0$ 则 $\exists s \in S$ s. t. $as = 0$.

(3) B 中任一元素均有形状 $g(a)g(s)^{-1}$，其中 $a \in A, s \in S$.

则存在着唯一的一个同构 $h\colon S^{-1}A \to B$ 使得 $g = h \circ f$.

证明: 只需要验证 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ 是一个同构即可，按定义容易验证. □

定义 4.1.3: 模的局部化

S 是 A 的乘法封闭子集，在 $M \times S$ 上定义等价关系：

$$(m, s) \equiv (m', s') \iff \exists t \in S \text{ s. t. } t(sm' - s'm) = 0$$

用 $S^{-1}M$ 表示所有等价类 m/s 构成的集合，同理可以引进加法与标量乘法，从而成为 $S^{-1}A$ 模.

Remark 4.1.5
如果 $S = A\backslash\mathfrak{p}$，记 $S^{-1}M$ 为 $M_\mathfrak{p}$. 如果 $S = \{f^n\}_{n\geq 0}$，记 $S^{-1}M$ 为 M_f.

Remark 4.1.6

设 $u\colon M \to N$ 是一个 A 模同态，则诱导出一个 $S^{-1}A$ 模同态：

$$S^{-1}u\colon S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad m/s \mapsto u(m)/s$$

我们有 $S^{-1}(u \circ v) = S^{-1}(u) \circ S^{-1}(v)$，也即 S^{-1} 满足函子性，成为一个函子.

定理 4.1.1: S^{-1}函子的正合性

S^{-1} 函子是正合的，即若

$$M' \xrightarrow{\quad f \quad} M \xrightarrow{\quad g \quad} M''$$

在 M 处正合，有

$$S^{-1}M' \xrightarrow{\quad S^{-1}f \quad} S^{-1}M \xrightarrow{\quad S^{-1}g \quad} S^{-1}M''$$

在 $S^{-1}M$ 处正合.

证明: 按定义容易验证. □

Remark 4.1.7

如果不想采用追图的方式理解，我们可以采用滤过余极限的方式来理解. 即局部化实际上是滤过余极限. 任给一个乘法封闭子集 S，我们定义 S 上的预序关系，对于 $s, t \in S$，我们定义

$$s \le t \iff \exists r \in S, \text{s.t. } t = r \cdot s$$

从而得到一个预序集，很显然这是一个滤过集，我们令 $M_s = M$，当 $s \le t \iff t = sr$ 时，我们定义

$$\varphi_{st}\colon M_s \to M_t, \quad m \mapsto m \cdot r$$

很显然这是一个滤过系统，从而我们对其取余极限

$$L = \operatorname{colim}_{x \in S} M_s = \left(\coprod_{s \in S} M_s \right) / \sim$$

容易看出来若 $m \in M_s$，记为 (m, s) 与 (n, t) 是等价的，则存在 u 使得 $s \mid u, t \mid u$，有

$$\varphi_{su}(m) = \varphi_{tu}(n) \implies u(sn - mt) = 0$$

这就是局部化的等价关系，所以很容易得到局部化 $S^{-1}M$ 到滤过余极限 L 的同构，并且这个同构是自然的. 而在模范畴里面滤过余极限是正合函子，从而 S^{-1} 自然就是正合的. 并且我们可以额外得到局部化与张量积交换，因为张量积是左伴随，左伴随保持余极限，所以作为滤过余极限的局部化自然就与张量积交换. 于是我们有

$$S^{-1}(M) \cong S^{-1}(R \otimes M) \cong S^{-1}R \otimes M$$

写成极限的形式即

$$\begin{aligned} S^{-1}M &\cong \operatorname{colim}(M \xrightarrow{s} M) \\ &\cong \operatorname{colim}(R \otimes M \xrightarrow{s \otimes 1} R \otimes M) \\ &\cong \operatorname{colim}((R \xrightarrow{s} R) \otimes M) \\ &\cong S^{-1}R \otimes M \end{aligned}$$

特别地，若 M' 是 M 的子模，映射 $S^{-1}M' \to S^{-1}M$ 是单的，从而可以把 $S^{-1}M'$ 看成是 $S^{-1}M$ 的子模.

命题 4.1.2: S^{-1} 函子与有限和，有限交与同余运算交换

如果 N, P 都是 A 模 M 的子模，则下面成立：

(1) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.

(2) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$.

(3) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$.

证明： (1)(2) 按定义容易验证，对于 (3)，我们只需对

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

施加 S^{-1} 函子立刻得到. □

命题 4.1.3

M 是一个 A 模，则 $S^{-1}A$ 模 $S^{-1}M$ 与 $S^{-1}A \otimes_A M$ 同构，确切地说存在自然同构

$$f \colon S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$$

使得

$$(a/s) \otimes m \mapsto am/s$$

证明： 由于

$$(a/s, m) \mapsto am/s$$

是双线性的，所以由张量积的泛性质，知道存在唯一的态射 f 满足条件，下面证明 f 是同构.

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}A \times M \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}M \\
S^{-1}A \otimes_A M \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

显然 f 是满的，所以只需要证明 f 是单的. 设

$$\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes M$$

令 $s = \prod_i s_i$，$t_i = s/s_i$，则

$$\sum a_i/s_i \otimes m_i = \sum a_i t_i/s \otimes m = \sum \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum a_i t_i m_i$$

所以 $S^{-1}A \otimes M$ 中每个元素都可以表示为 $1/s \otimes m$ 的形式. 则若 $f(1/s \otimes m) = 0$，即

$$m/s = 0 \Longleftrightarrow \exists t \in S \, \text{s.t.} \; tm = 0$$

从而有

$$1/s \otimes m = t/st \otimes m = 1/st \otimes tm = 1/st \otimes 0 = 0$$

故单射，从而同构. 自然性容易验证，因为都是典范的，范畴论道理见前一个 remark. □

引理 4.1.2

$S^{-1}A$ 是平坦 A 模.

证明:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "S^{-1}"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "S^{-1}"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "S^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^{-1}M' \arrow[r, "S^{-1}u"] & S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}v"] & S^{-1}M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^{-1}A \otimes_A M' \arrow[r, "1\otimes u"] \arrow[u, "f'"] & S^{-1}A \otimes_A M \arrow[r, "1\otimes v"] \arrow[u, "f"] & S^{-1}A \otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[u, "f''"] & 0
\end{tikzcd}$$

由于 f 是同构，只需要说明下面两行是交换的即可，交换图道尽一切：

$$\begin{tikzcd}
m/s \arrow[r, mapsto, "S^{-1}u"'] & u(m)/s \\
1/s \otimes m \arrow[r, mapsto, "1\otimes u"] \arrow[u, "f"'] & 1/s \otimes u(m) \arrow[u, "f''"]
\end{tikzcd}$$

□

命题 4.1.4

对任意的 A-模 M，N，存在唯一的 $S^{-1}A$ 模同构

$$f\colon S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N), \quad (m/s) \otimes (n/t) \mapsto (m \otimes n)/st$$

证明: 只需要注意到

$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M, \quad S^{-1}N \cong S^{-1}A \otimes_A N$$

所以由张量积的典范同构，我们可以得到

$$\begin{aligned}
S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} \left(S^{-1}A \otimes_A N\right) \\
&\cong \left(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A\right) \otimes_A N \\
&\cong S^{-1}M \otimes_A N \\
&\cong \left(S^{-1}A \otimes_A M\right) \otimes_A N \\
&\cong S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \\
&\cong S^{-1}(M \otimes_A N)
\end{aligned}$$

□

4.2 局部化与局部性质

定义 4.2.1: 局部化

设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想，则其补集 $S = A\backslash\mathfrak{p}$ 是乘法封闭的(事实上容易证明 $A\backslash\mathfrak{p}$ 是乘法封闭的当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是素理想). 这时，将 $S^{-1}A$ 记作 $A_\mathfrak{p}$，称为 A 在 $\mathfrak{p}$ 的**局部化**.

Remark 4.2.1

之所以称为局部化，是因为在这个操作下 $A_{\mathfrak{p}}$ 称为一个局部环，我们考虑形如 $A_{\mathfrak{p}}$ 的理想 $\mathfrak{m}=S^{-1}\mathfrak{p}$，注意到如果 $b/t\notin\mathfrak{m}$，有 $b\notin\mathfrak{p}$，从而 $b\in S$，也就是 b/t 是可逆的. 从而如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想且 $\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{m}$，则 $\mathfrak{a}$ 含有可逆元从而是整个环，也就是说 $\mathfrak{m}$ 是唯一的极大理想.

Remark 4.2.2

设 $f\in A$，$S=\{f^n\}_{n\geq 0}$，此时将 $S^{-1}A$ 记为 A_f.

定义 4.2.2: 局部性质

环 A 或者 A 模 M 的性质 P 称为**局部性质**，如果 A (或者 M) 具有性质 $P\iff$ 对于 A 的每一个素理想 $\mathfrak{p}$，$A_{\mathfrak{p}}$ (或者 $M_{\mathfrak{p}}$) 具有性质 P.

命题 4.2.1: 零模是局部性质

M 是 A 模，*TFAE*:

(1) $M=0$.

(2) $\forall\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$，$M_{\mathfrak{p}}=0$.

(3) 对 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$，$M_{\mathfrak{m}}=0$.

证明: (1) 推 (2) 推 (3) 是显然的，下面证 (3) 推 (1).

假设 $M\neq 0$，则存在一个非零元 x，设 $\mathfrak{a}=\operatorname{Ann}(x)$，其中 $a\neq(1)$，则存在一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 包含 $\mathfrak{a}$，考察元素

$$x/1\in M_{\mathfrak{m}}$$

我们知道 $M_{\mathfrak{m}}=0$，从而 $x/1=0$，从而 x 被 $A-\mathfrak{m}$ 中的元素零化，与 $\operatorname{Ann}(x)\subset\mathfrak{m}$ 矛盾. □

命题 4.2.2: 单射是局部性质

$\varphi\colon M\to N$ 是一个 A 模同态，*TFAE*:

(1) φ 是单的.

(2) $\forall\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$，$\varphi_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}}\to N_{\mathfrak{p}}$ 是单的.

(3) 对 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$，$\varphi_{\mathfrak{m}}\colon M_{\mathfrak{m}}\to N_{\mathfrak{m}}$ 是单的.

证明: (1) 推 (2): 由于 $0\to M\to N$ 正合，所以 $0\to M_{\mathfrak{p}}\to N_{\mathfrak{p}}$ 正合. 所以单.

(2) 推 (3) 显然.

只需要证明 (3) 推 (1). 令 $M'=\operatorname{Ker}(\varphi)$，则序列

$$0\to M'\to M\to N$$

是正合的，从而我们知道

$$0\to M'_{\mathfrak{m}}\to M_{\mathfrak{m}}\to N_{\mathfrak{m}}$$

是正合的，从而我们知道 $M'_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{m}})$，但是 $\varphi_{\mathfrak{m}}$ 是单的，从而我们知道 $M'_{\mathfrak{m}} = 0$，由零模是局部性质我们知道 $M = 0$，从而 φ 是单的. □

Remark 4.2.3

满射同样是局部性质，利用正合列同样证明.

引理 4.2.1: 平坦性在基变换下是稳定的

$f\colon A \to B$ 是环同态，M 是平坦 A 模，则 $M_B = B \otimes_A M$ 是平坦 B 模.

证明: 考虑 B 模正合列

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

注意到

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N' \otimes_B (B \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & N \otimes_B (B \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & N'' \otimes_B (B \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (N' \otimes_B B) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & (N \otimes_B B) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & (N'' \otimes_B B) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \otimes_A M \arrow[r] & N \otimes_A M \arrow[r] & N'' \otimes_A M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[u, dash, "\otimes_A M"] & N \arrow[r] \arrow[u, dash, "\otimes_A M"] & N'' \arrow[r] \arrow[u, dash, "\otimes_A M"] & 0
\end{tikzcd}$$

□

命题 4.2.3: 平坦性是局部性质

M 是 A 模，*TFAE*:

(1) M 是平坦 A 模.

(2) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，$M_{\mathfrak{p}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 模.

(3) 对 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$，$M_{\mathfrak{m}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{m}}$ 模.

证明: (1) 推 (2)：由于有环同态 $f\colon A \to A_{\mathfrak{p}}$，从而我们知道 $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 模，故由 4.1.3 知道

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & N \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & N'' \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\text{canonical}\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & N \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & N'' \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(2) 推 (3) 显然.

(3) 推 (1)：设 $N \to P$ 是同态，$\mathfrak{m}$ 是任意的极大理想，则我们知道

$$\begin{aligned}
N \hookrightarrow P \quad &\Rightarrow \quad N_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow P_{\mathfrak{m}} \\
&\Rightarrow \quad N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow P_{\mathfrak{n}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \\
&\Rightarrow \quad (N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow (P \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}, \text{by } 4.1.4 \\
&\Rightarrow \quad N \otimes_A M \hookrightarrow P \otimes_A M
\end{aligned}$$

从而我们知道 M 是平坦的. □

4.3 局部化环的扩张和局限理想

还是考虑 A 的乘法封闭子集 S，由自然的同态

$$f\colon A \to S^{-1}A, \quad x \mapsto x/1$$

令 C 为 A 的所有局限理想的集合，E 为 $S^{-1}A$ 的所有扩充理想的集合. 我们知道如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，则 $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$.

命题 4.3.1

(1) $S^{-1}A$ 中的每一个理想都是扩充理想.

(2) $\mathfrak{a}$ 是 A 中的理想，则 $\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$. 从而 $\mathfrak{a}^e = (1)$ 当且仅当 $\mathfrak{a}$ 与 S 有交.

(3) $\mathfrak{a} \in C$ 当且仅当 S 中的元素不是 $A/\mathfrak{a}$ 中的零因子.

(4) $S^{-1}A$ 的素理想与 A 中与 S 不交的素理想一一对应 $(\mathfrak{p} \longleftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p})$.

(5) 函子 S^{-1} 与有限和，乘积，交集与根运算交换.

证明: (1) 设 $\mathfrak{b}$ 为 $S^{-1}A$ 的理想，令 $x/s \in \mathfrak{b}$，则我们知道 $x/1 \in \mathfrak{b}$，从而知道 $x \in \mathfrak{b}^c$，从而我们知道 $x/s \in \mathfrak{b}^{ce}$，但是由于 $\mathfrak{b}^{ce} \subset \mathfrak{b}$，所以我们知道 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$.

(2) $x \in \mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c \iff x/1 = a/s$ 对于某些 $a \in \mathfrak{a}, s \in S$ 成立 $\iff (xs-a)t = 0$ 对于某些 $t \in S$ 成立 $\iff xst \in \mathfrak{a} \iff x \in \bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$.

并且我们知道 $\mathfrak{a}^e = (1) \iff \exists a \in \mathfrak{a}$ 使得 $a/s = 1/1 \iff (a-s)t = 0 \iff \mathfrak{a}^e \ni at = st \in S$.

(3) $\mathfrak{a} \in C \iff \mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a} \iff$ 存在 $s \in S$ 使得 $sx \in \mathfrak{a}$，可以推出 $x \in \mathfrak{a} \iff S$ 中的元素都不是 $A/\mathfrak{a}$ 的零因子.

有必要解释一下第二个等价号，$\mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a}$ 当且仅当 $\mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c = S^{-1}\mathfrak{a} \cap A \subset \mathfrak{a}$，这告诉我们如果 $x/s = y \in A$，则 $y \in \mathfrak{a}$，也就是说如果 $x = sy \in \mathfrak{a}$，则 $y \in \mathfrak{a}$.

(4) 若 $\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想，则 $\mathfrak{q}^c$ 是 A 的与 S 无交的素理想. 相反地，若 $\mathfrak{p}$ 是 A 中的素理想，则 $A/\mathfrak{p}$ 是整环，设 $\overline{S}$ 为 S 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像，我们知道

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$$

所以如果 S 与 $\mathfrak{p}$ 相交，则 $\overline{S}$ 中有 0，也就是说 $\overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}) = 0$，也就是说 $S^{-1}\mathfrak{p} = (1)$. 反之如果 $\mathfrak{p}$ 与 S 无交，则由于 $A/\mathfrak{p}$ 是整环，其分式化也是整环，从而 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想.

(5) 按定义验证即可. □

Remark 4.3.1

我们需要给出一些说明，首先给出一些基本的内容：

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}, \quad \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$$

在这个基础上我们来说明 (4) 中确实是一一对应，首先对于任意的素理想 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$，我们知道 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ce}$，于是一个方向唯一性得到了验证，下面验证另一个方向.

对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$，且 $\mathfrak{p}$ 与 S 无交，我们要证明 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$，我们已知 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^{ec}$，所以只需要证明 $\mathfrak{p}^{ec} \subset \mathfrak{p}$，由于

$$\mathfrak{p}^{ec} = S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$$

设 $y = x/s \in S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$，我们知道 $\exists t \in S$ 使得 $(x - sy)t = 0$，也就是 $(st)y = tx \in \mathfrak{p}$，由于 $st \in S$，不在 $\mathfrak{p}$ 中，所以 $y \in \mathfrak{p}$，所以有 $\mathfrak{p}^{ec} \subset \mathfrak{p}$，故有 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.

所以素理想之间确确实实是一一对应的.

Note 4.3.1

事实上，我们不仅有素理想的一一对应，还有 A 中与 S 无交的饱和理想与 $S^{-1}A$ 中真理想的一一对应.

我们先给饱和理想一个定义：一个 A 的理想 I 是 S-饱和的，如果对于任意的 $a \in A$ 和 $s \in S$，如果有 $sa \in I$，则 $a \in I$. 或者等价的，I 饱和当且仅当 $I = \{a \in A \colon \exists s \in S, \text{s.t.} \quad as \in I\}$.

则我们由上面命题 (3) 的证明过程可以知道，如果一个理想 $\mathfrak{a}$ 是饱和的，则告诉我们对于任意的

$$y \in \mathfrak{a}^{ec} = S^{-1}\mathfrak{a} \cap A$$

存在 $x \in \mathfrak{a}, s \in S$ 使得 $y/1 = x/s$，也就是 $sty = tx \in \mathfrak{a}$，由饱和性我们知道 $y \in \mathfrak{a}$，也就是 $\mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a}$，进而有 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$，所以 $\mathfrak{a}$ 就是局限理想，反过来也是正确的.

所以所有 S-饱和的理想与 A 中的局限理想一一对应，而所有局限理想又是和 $S^{-1}A$ 中的理想一一对应的，故结论得证.

Remark 4.3.2

我们知道非幂零元一定不被某个素理想包含，采用分式环的语言可以让证明非常简洁：考虑集合 $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$ 不包含 0，则 $S^{-1}A = A_f$ 不是零环，从而存在极大理想，而这个极大理想在 A 中的局限理想是素理想 $\mathfrak{p}$，由上面命题我们知道 $\mathfrak{p}$ 与 S 不相交，因此 $f \notin \mathfrak{p}$.

Remark 4.3.3

我们用范畴论的语言来重新总结一下这个命题. 首先 (1) 是在说对于局部化而言右伴随 c 是左伴随 e 的一个截面，或者说余单位 $\varepsilon \colon ce \to \mathrm{id}_Y$ 在局部化中是同构，也就是说扩张 e 是满射，局限 c 是单射，也就是说 $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}$. 这里稍微解释一下，由于我们知道

$$\mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^{c}$$

由局限 c 是单射知道

$$\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}$$

这就说明了 (1). 而 (2) 实际上是一种饱和化(saturation)的行为，我们本质上是定义了一种复合函子

$$T = c \circ e \colon I(A) \to I(A), \quad \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^{ec}$$

这个函子具有幂等性，因为在 (1) 中我们已经证明

$$ec = \mathrm{id}$$

于是

$$T^2 = cece = c(ec)e = ce = T$$

我们可以看出 $\mathfrak{a}^{ec}$ 就是 $\mathfrak{a}$ 的饱和化，它包含了所有“在局部化之后看起来属于 $\mathfrak{a}$”的元素. 若 x 在局部化之后看起来属于 $\mathfrak{a}$，这就说明存在 $s \in S$ 使得 $sx \in \mathfrak{a}$，也就是说 $x = x/1 = sx/s \in S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{e}$，所以 $x \in \mathfrak{a}^{ec}$. 反过来如果 $x \in \mathfrak{a}^{ec}$，这也说明存在 $s, t \in S, a \in \mathfrak{a}$，使得 $t(sx - a) = 0$，即

$$stx \in \mathfrak{a}$$

所以我们发现

$$\mathfrak{a}^{ec} = \{x \in A \colon \exists s \in S \,\text{s.t.}\ sx \in \mathfrak{a}\} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$$

这也对应了我们在上面的 remark 中提到的饱和理想的概念，你会发现所谓的 S-饱和就是在 T 下保持不变的理想. 现在也可以理解为什么我们称 T 为饱和化了，因为 $T^2=T$，所以任何理想在 T 下都会成为饱和理想. 对于 (3)，实际上我们会发现所谓局限理想 C 实际上就是饱和理想，因为如果 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}^c$，则有 $\mathfrak{a}^{ec}=\mathfrak{b}^{cec}=\mathfrak{b}^c=\mathfrak{a}$，即饱和，反之亦然. 所谓 (3) 提供了一个局部化中饱和理想的判别法. 把 (3) 翻译一下即若 $s\in S, y\in A$，则

$$sy\in\mathfrak{a}\implies y\in\mathfrak{a}$$

这正是在说饱和理想.

推论 4.3.1

(1) $\forall\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$，有 $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}})\to\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(A)\mid\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}\}$ 为同胚.

(2) $\forall f\in A$，$\operatorname{Spec}(A_f)\to D(f)=\operatorname{Spec}(A)\backslash V(f)$ 是同胚.

Remark 4.3.4

$\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})\cong V(\mathfrak{p})=\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(A)\colon\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}\}$，$A_{\mathfrak{p}}$ 有极大理想 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，令 $S=A\backslash\mathfrak{p}$，$\overline{S}$ 为 S 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像，其实就是 $A/\mathfrak{p}-\{0\}$. 我们有

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}=S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}\cong\overline{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})=\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$$

推论 4.3.2

$\mathfrak{N}$ 是 A 的小根，则 $S^{-1}\mathfrak{N}$ 是 $S^{-1}A$ 的小根.

证明: 由于 A 中与 S 不交的素理想与 $S^{-1}A$ 中的素理想一一对应，则我们知道

$$\mathfrak{N}_{S^{-1}A}=\bigcap_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(S^{-1}A)}\mathfrak{q}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A),\mathfrak{p}\cap S=\emptyset}S^{-1}\mathfrak{p}$$

注意到如果 $\mathfrak{p}\cap S$ 不空，则

$$S^{-1}\mathfrak{p}=(1)$$

所以我们有

$$\begin{aligned}\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A),\mathfrak{p}\cap S=\emptyset}S^{-1}\mathfrak{p}&=\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A),\mathfrak{p}\cap S=\emptyset}S^{-1}\mathfrak{p}\right)\bigcap\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A),\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset}(1)\right)\\&=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)}S^{-1}\mathfrak{p}\\&=S^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)}\mathfrak{p}\right)\\&=S^{-1}\mathfrak{N}\end{aligned}$$

□

推论 4.3.3

如果 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，则局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 中的素理想与 A 中包含在 p 中的素理想一一对应.

证明: 令 $S=A\backslash\mathfrak{p}$，知道 $A_{\mathfrak{p}}$ 中素理想与 A 中与 S 无交的素理想一一对应. □

Remark 4.3.5

从 A 到 $A_{\mathfrak{p}}$ 的过程消灭了包含于 $\mathfrak{p}$ 之外的所有素理想，而从 A 到 $A/\mathfrak{p}$ 的过程消灭了包含 $\mathfrak{p}$ 之外的所有素理想.

现在假设 $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}$ 是一对素理想，我们先对 $\mathfrak{p}$ 局部化在对 $\mathfrak{q}$ 取同余类(这两个次序是可以交换的)，这样我们就可以把注意力只集中在 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{q}$ 之间的素理想上来，特别地，如果 $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$，则得到一个域，称为其在理想 $\mathfrak{p}$ 处的 residue 域. 他可以作为整环 $A/\mathfrak{p}$ 的分式域或者 $A_{\mathfrak{p}}$ 的剩余类域得到.

命题 4.3.2

M 是有限生成 A 模，S 是一个乘法封闭子集，则

$$S^{-1}(\mathrm{Ann}(M))=\mathrm{Ann}(S^{-1}M)$$

证明: 首先我们证明如果对 M,N 成立，则对 $M+N$ 成立.

$$\begin{aligned}S^{-1}(\mathrm{Ann}(M+N)) &= S^{-1}(\mathrm{Ann}(M)\cap\mathrm{Ann}(N))\\ &= S^{-1}(\mathrm{Ann}(M))\cap S^{-1}(\mathrm{Ann}(N))\\ &= \mathrm{Ann}(S^{-1}M)\cap\mathrm{Ann}(S^{-1}N)\\ &= \mathrm{Ann}(S^{-1}M+S^{-1}N)=\mathrm{Ann}(S^{-1}(M+N))\end{aligned}$$

从而我们只需要对一个元素生成的模 M 证明即可. 注意到单元素生成模满足

$$M\cong A/\mathfrak{a}$$

其中 $\mathfrak{a}=\mathrm{Ann}(M)$，而我们知道

$$S^{-1}M\cong S^{-1}(A/\mathfrak{a})\cong S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a}$$

所以我们知道

$$\mathrm{Ann}(S^{-1}M)=S^{-1}\mathfrak{a}=S^{-1}(\mathrm{Ann}(M))$$

□

推论 4.3.4

N,P 为 M 的子模，P 是有限生成的，则 $S^{-1}(N:P)=(S^{-1}N:S^{-1}P)$.

证明: 注意到 $(N:P)=\mathrm{Ann}(N+P/N)$，有

$$S^{-1}(N:P)=S^{-1}(\mathrm{Ann}(N+P/N))=\mathrm{Ann}(S^{-1}(N+P)/S^{-1}N)=(S^{-1}N:S^{-1}P)$$

□

命题 4.3.3

设 $A\to B$ 是环同态，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，那么 $\mathfrak{p}$ 是 B 中某个素理想的局限当且仅当 $\mathfrak{p}^{ec}=\mathfrak{p}$.

证明: 若 $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c$，则我们知道 $\mathfrak{p}^{ec}=\mathfrak{p}$. 这是因为

$$\mathfrak{b}^c=\mathfrak{b}^{cec}$$

代入 $\mathfrak{b}=\mathfrak{q}$，$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c$ 立刻得到.

另一方面，如果 $\mathfrak{p}^{ec}=\mathfrak{p}$，令 S 为 $A-\mathfrak{p}$ 在 B 中的像，我们知道 $\mathfrak{p}^e$ 与 S 无交[1]，从而我们知道其在 $S^{-1}B$ 中的扩张理想是一个真理想，因此包含在某个极大理想 $\mathfrak{m}\subset S^{-1}B$ 中，如果 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$ 在 B 中的局限，则我们知道 $\mathfrak{q}$ 是素理想，并且 $\mathfrak{p}^e\subset\mathfrak{q}$，$\mathfrak{q}\cap S=\emptyset$. 从而 $\mathfrak{q}^c=\mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] & S^{-1}B \\
\mathfrak{p} \arrow[r, mapsto] & \mathfrak{p}^e \arrow[r, mapsto] & S^{-1}\mathfrak{p}^e\subset\mathfrak{m} \arrow[dl, mapsto] \\
\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c & \mathfrak{q}=\mathfrak{m}^c \arrow[l, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

□

Remark 4.3.6

这就是我们前面所说局限理想就是饱和理想. 其集合视角就是说如果 $\mathfrak{p}^{ec}=\mathfrak{p}$，则 $\operatorname{Spec}B\to\operatorname{Spec}A$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的纤维不是空集.

Remark 4.3.7

第二部分的证明还可以使用整环注入定理：一个整环单射进入环 R，则一定存在 R 的某个素理想的局限是 (0). 使用这个定理我们只需要考虑整环的单射：

$$A/\mathfrak{p}\to B/\mathfrak{p}B$$

于是存在 $\overline{\mathfrak{q}}\in\operatorname{Spec}(B/\mathfrak{p}B)$ 使得

$$\overline{\mathfrak{q}}^c=(0)$$

即

$$\mathfrak{q}^c=\mathfrak{p}$$

Remark 4.3.8

$X=\operatorname{Spec}A$，则局部化可以诱导出一个层 $\mathcal{O}_X$，从而引入仿射概型(affine scheme).

[1]因为 $\mathfrak{p}^{ec}=\mathfrak{p}$，也就是说 $f^{-1}(Bf(\mathfrak{p}))=\mathfrak{p}$，从而 $f(A-\mathfrak{p})\cap Bf(\mathfrak{p})=\emptyset$.

Chapter 5: 准素分解与结合素理想

准素分解, 又称 Lasker–Noether 准素分解或 Lasker–Noether 定理, 是 20 世纪初的代数学家对理想唯一分解的推广尝试, 指的是 Noether 环的理想都能写成有限多个准素理想的交, 且有较弱的唯一性.

在现代交换代数中被废弃, 完全由结合素理想的理论所取代

5.1 准素分解的定义与性质

定义 5.1.1: 准素理想

环 A 中的理想 $\mathfrak{q}$ 是准素的，如果 $\mathfrak{q} \neq A$，并且对于 $xy \in \mathfrak{q}$，有 $x \in \mathfrak{q}$ 或者存在 $n \geq 1$ 使得 $y^n \in \mathfrak{q}$.

Remark 5.1.1

换言之，$\mathfrak{q}$ 准素，当且仅当 $A/\mathfrak{q} \neq 0$ 并且 $A/\mathfrak{q}$ 的零因子都是幂零的.

Remark 5.1.2

显然，素理想都是准素的. 并且注意到 $f\colon A \to B$，如果 $\mathfrak{q}$ 是 B 的准素理想，我们有 $A/\mathfrak{q}^c$ 同构于 $B/\mathfrak{q}$ 的某个子环，从而零因子都幂零，也就是说**准素理想的局限都是准素的**.

命题 5.1.1

$\mathfrak{q}$ 是环 A 的准素理想，则 $r(\mathfrak{q})$ 是包含 $\mathfrak{q}$ 的最小素理想.

Remark 5.1.3

如果 $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$，则 $\mathfrak{q}$ 称为 $\mathfrak{p}$-准素.

Remark 5.1.4

发现如果 $\mathfrak{q}$ 是准素的，$\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$，则若 $xy \in \mathfrak{q}$，则 $x \in \mathfrak{q}$ 或者 $y \in \mathfrak{p}$.

Remark 5.1.5

素理想的幂不一定是准素理想，准素理想也不一定是素理想的幂.

- 令 $A = k[x,y,z]/(xy - z^2)$，则 $\mathfrak{p} = (\overline{x}, \overline{z})$ 是素理想(因为 $A/\mathfrak{p} \cong k[y]$ 是整环)，我们有 $\overline{xy} = \overline{z^2} \in \mathfrak{p}^2$，但是 $\overline{x} \notin \mathfrak{p}^2, \overline{y} \notin r(\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{p}$. 因此我们知道 $\mathfrak{p}^2$ 不是准素的.
- 令 $A = k[x,y]$，$\mathfrak{q} = (x, y^2)$，则我们知道 $A/\mathfrak{q} \cong k[y]/(y^2)$，在 $A/\mathfrak{q}$ 中，零因子都是 y 的倍元，因此幂零，所以 $\mathfrak{q}$ 准素. 其根为 $\mathfrak{p} = (x,y)$，但是 $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. 因此不是素理想的幂.

命题 5.1.2

$r(\mathfrak{a})$ 是极大理想，则 $\mathfrak{a}$ 准素. 特别地，极大理想的幂是准素的.

证明: 令 $\mathfrak{m}=r(\mathfrak{a})$，$\mathfrak{m}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 中的像是 $A/\mathfrak{a}$ 的幂零元根. 从而我们知道 $A/\mathfrak{a}$ 只有一个素理想(这是因为 $A/\mathfrak{a}$ 的素理想之交为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$，由于包含 $\mathfrak{a}$ 的理想与 $A/\mathfrak{a}$ 中理想一一对应，注意到 $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ 为极大理想，从而知道只有唯一素理想).

只有唯一素理想，即幂零元根就是极大理想，从而我们知道 $A/\mathfrak{a}$ 中的每一个元素要么是幂零元，要么是可逆元(这里是因为每一个不可逆元都包含在某个极大理想中，但是这里只有一个极大理想，所以所有不可逆元都在极大理想中)，从而每一个零因子都是幂零的，故准素. □

Remark 5.1.6

根理想 $r(\mathfrak{a})$ 在商环 $A/\mathfrak{a}$ 中的像为其幂零元根.

引理 5.1.1: 准素理想的交也是准素的

若 $\mathfrak{q}_i$ 都是 $\mathfrak{p}$ 准素的，则 $\mathfrak{q}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的.

证明: 注意到

$$r(\mathfrak{q})=r\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}$$

再假设 $xy\in\mathfrak{q}$，其中 $y\notin\mathfrak{q}$，则我们知道存在一个 $\mathfrak{q}_j$，使得 $xy\in\mathfrak{q}_j$，并且 $y\notin\mathfrak{q}_j$，故 $x\in\mathfrak{p}$. 所以 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的. □

引理 5.1.2

$\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的，$x\in A$，则

(1) $x\in\mathfrak{q}$，则 $(\mathfrak{q}:x)=(1)$.

(2) $x\notin\mathfrak{q}$，则 $(\mathfrak{q}:x)$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的，故 $r(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{p}$.

(3) $x\notin\mathfrak{p}$，则 $(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{q}$.

证明: (1)(3) 由定义立刻得到.

(2) 如果 $y\in(\mathfrak{q}:x)$，则 $xy\in\mathfrak{q}$，但是 $x\notin\mathfrak{q}$，所以 $y\in\mathfrak{p}$，所以有 $\mathfrak{q}\subset(\mathfrak{q}:x)\subset\mathfrak{p}$，取根有 $r(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{p}$. 令 $yz\in(\mathfrak{q}:x)$，有 $xyz\in\mathfrak{q}$，若 $y\notin\mathfrak{p}$，则有 $xz\in\mathfrak{q}$，也就是 $z\in(\mathfrak{q}:x)$，即 $(\mathfrak{q}:x)$ 准素. □

定义 5.1.2: 准素分解

A 中的理想 $\mathfrak{a}$ 是**可分解的**，如果存在**准素分解**：

$$\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$$

其中 $\mathfrak{q}_i$ 都是准素理想. 一个准素分解成为**极小的(约化的)**，如果 $r(\mathfrak{q}_i)$ 互不相同，并且 $\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j\not\subseteq\mathfrak{q}_i$ 对于任意的 i 成立.

Remark 5.1.7
一般来说，准素分解不一定存在.

5.2 准素分解的唯一性定理

引理 5.2.1

$\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 是理想，$\mathfrak{p}$ 是素理想，若 $\mathfrak{p}\supset\bigcap\mathfrak{a}_i$，则存在 i 使得 $\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}$. 特别地，若 $\mathfrak{p}=\bigcap\mathfrak{a}_i$，则存在 i 使得 $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$.

定理 5.2.1: 第一唯一性定理

$\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想，$\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是一个极小准素分解，令 $\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)$. 则 $\mathfrak{p}_i$ 恰好是 $A=\{r(\mathfrak{a}:x):x\in A\}$ 中出现的所有素理想. 从而与 $\mathfrak{a}$ 如何分解无关.

证明: 对于任意的 $x\in A$，我们知道

$$(\mathfrak{a}:x)=(\cap\mathfrak{q}_i:x)=\cap(\mathfrak{q}_i:x)$$

因此

$$r(\mathfrak{a}:x)=\bigcap r(\mathfrak{q}_i:x)=\bigcap_{x\notin\mathfrak{q}_i}\mathfrak{p}_i$$

下面假设 $r(\mathfrak{a}:x)$ 是素理想，我们知道 $r(\mathfrak{a}:x)=\mathfrak{p}_j$ 对于某个 j 成立(由引理). 因此每一个素理想都在 $\{\mathfrak{p}_j\}$ 中.

反过来，由于分解是极小的，所以对于每一个 i，存在 $x_i\notin\mathfrak{q}_i$，$x_i\in\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$. 从而我们有

$$r(\mathfrak{a}:x_i)=r\left(\bigcap\mathfrak{q}_j:x_i\right)=\bigcap r(\mathfrak{q}_j:x_i)=r(q_i:x_i)=\mathfrak{p}_i$$

$\square$

Remark 5.2.1
将 $A/\mathfrak{a}$ 看成是 A 模，定理告诉我们 $\mathfrak{p}_i$ 恰好是作为 $A/\mathfrak{a}$ 的元素的零化子的根理想而出现的素理想.

Remark 5.2.2
定理中的素理想 $\mathfrak{p}_i$ 称为**属于** $\mathfrak{a}$ 的，或者与 $\mathfrak{a}$ **相伴**. 理想 $\mathfrak{a}$ 是准素的当且仅当它只有一个相伴的素理想：一方面，如果 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的，则 $r(\mathfrak{a}:x)$ 要么是 (1) 要么是 $\mathfrak{p}$，从而只有一个相伴的素理想. 另一方面，如果

只有一个相伴的素理想，也就是说 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}$，这是由极小性保证的.

Remark 5.2.3
集合 $\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$ 的极小元素叫做属于 $\mathfrak{a}$ 的**极小的**或**孤立的**素理想，其余的叫做**嵌入**素理想.

命题 5.2.1

设 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解理想，那么任何素理想 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ 都包含一个属于 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想，因此 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想恰好是包含 $\mathfrak{a}$ 的所有素理想集合中的极小元.

证明: 如果 $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{a}=\bigcap\mathfrak{q}_i$，则 $\mathfrak{p}=r(\mathfrak{p})\supset\bigcap r(\mathfrak{q}_i)=\bigcap\mathfrak{p}_i$. 因此我们知道存在某个 i 使得 $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}_i$. □

命题 5.2.2

$\mathfrak{a}$ 是可分解理想，$\mathfrak{a}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是一个极小准素分解，$r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}_i$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i=\{x\in A:(\mathfrak{a}:x)\neq\mathfrak{a}\}$$

特别地，如果零理想是可分解的，A 的零因子的集合 D 是属于 0 的素理想的并.

证明: 如果 $\mathfrak{a}$ 是可分解的，那么 0 在 $A/\mathfrak{a}$ 中是可分解的：即容易证明 $\mathfrak{q}_i$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 中的像仍然准素，所以 $\overline{0}=\bigcap\overline{\mathfrak{q}_i}$.

因此只需要证明对零理想成立，我们容易知道

$$D=\bigcup_{x\neq 0}r(0:x)$$

我们还知道对某个 i 有下面式子成立($0=\cap\mathfrak{q}_i$ 分解极小):

$$r(0:x)=\bigcap_{x\notin\mathfrak{q}_i}\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}_i$$

所以我们知道 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$，我们知道每一个 $\mathfrak{p}_i$ 都形如 $r(0:x)$，所以反方向的包含关系也成立.

此时我们知道结论对零理想成立，我们推回去：已知 0 在 $A/\mathfrak{a}$ 中准素，有

$$\bigcup_{i=1}^{n}\overline{\mathfrak{p}_i}=\{\overline{x}\in A/\mathfrak{a}:(0:\overline{x})\neq 0\}$$

对上面的式子取原像，容易知道

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i=LHS=RHS=\{x\in A:(\mathfrak{a}:x)\neq\mathfrak{a}\}$$

□

Remark 5.2.4
当零理想可分解的时候，我们知道:

- 零因子的集合等于所有属于 0 的素理想的并.

- 幂零元的集合等于所有属于 0 的极小素理想的交.

第二条是因为 0 的极小素理想恰好就是所有包含 0 的素理想中的极小元(命题 5.2.1)，而任意素理想都包含 0，所以成立.

下面研究准素理想在局部化下的变化.

命题 5.2.3

令 S 是乘法封闭的，令 $\mathfrak{q}$ 是一个 $\mathfrak{p}$ 准素理想.

(1) 若 $S\cap\mathfrak{p}\neq\emptyset$，则 $S^{-1}\mathfrak{q}=S^{-1}A$.

(2) 若 $S\cap\mathfrak{p}=\emptyset$，则 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 准素的，并且其在 A 中的局限理想为 $\mathfrak{q}$.

Remark 5.2.5
所以我们注意到命题 4.3.1 中的 A 中与 S 不交的素理想与 $S^{-1}A$ 的素理想的一一对应将准素理想对应到准素理想.

证明: (1) 若 $s\in S\cap\mathfrak{p}$，则知道 $s^n\in S\cap\mathfrak{q}$ 对于某个 $n>0$，从而 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 包含 $s^n/1$，在 $S^{-1}A$ 中可逆.

(2) 若 $S\cap\mathfrak{p}=\emptyset$，那么 $s\in S$ 与 $as\in\mathfrak{q}$ 推出 $a\in\mathfrak{q}$. 从而设 $x\in A$ 满足 $x/1\in S^{-1}\mathfrak{q}$，则存在 $t\in S$ 使得 $tx\in\mathfrak{q}$，也就是 $x\in\mathfrak{q}$. 所以知道 $\mathfrak{q}^{ec}=\mathfrak{q}$.

并且我们有

$$r(S^{-1}\mathfrak{q})=S^{-1}r(\mathfrak{q})=S^{-1}\mathfrak{p}$$

并且容易推出是准素理想. 最后结合准素理想的局限仍然是准素理想，我们证明了结论，也即考虑 $f\colon A\to S^{-1}A$ 是标准映射，则

$$f^*\colon\{S^{-1}A\text{ 中的理想}\}\to\{A\text{ 中与 }S\text{ 无交的理想}\},\quad \mathfrak{a}\mapsto f^{-1}(\mathfrak{a})$$

将准素理想一一对应到准素理想. □

Remark 5.2.6
对于乘法封闭子集 S，以及理想 $\mathfrak{a}$，我们把 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 在 A 中的局限理想记为 $S(\mathfrak{a})$.

命题 5.2.4

S 是一个乘法封闭子集，$\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想. 令 $\mathfrak{a}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 为极小准素分解. 令 $\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)$ 并且假设 $\mathfrak{q}_i$ 按顺序排开有：S 与 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_m$ 无交，与 $\mathfrak{p}_{m+1},\cdots,\mathfrak{p}_n$ 相交. 则

$$S^{-1}\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{m}S^{-1}\mathfrak{q}_i,\quad S(\mathfrak{a})=\bigcap_{i=1}^{m}\mathfrak{q}_i$$

并且为极小的准素分解.

证明: 我们有

$$S^{-1}\mathfrak{a}=S^{-1}(\cap\mathfrak{q}_i)=\bigcap_{i=1}^{n}S^{-1}\mathfrak{q}_i=\bigcap_{i=1}^{m}S^{-1}\mathfrak{q}_i$$

并且 $S^{-1}\mathfrak{q}_i$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ 准素的. 由于 $\mathfrak{p}_i$ 互不相同，所以 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ 互不相同(有素理想的一一对应关系)，从而得到

一个极小的准素分解(极小性由 $\mathfrak{q}_i$ 的极小性保证，反之如果不成立，则存在 i 使得 $\bigcap_{i\neq j} S^{-1}\mathfrak{q}_j \subset S^{-1}\mathfrak{q}_i$，也就是说 $S^{-1}\left(\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j\right) \subset S^{-1}\mathfrak{q}_i$. 接着利用 $\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ 即可得到矛盾.).

对两边再次取极限，我们有

$$S(\mathfrak{a}) = (S^{-1}\mathfrak{a})^c = \bigcap_{1}^{m}(S^{-1}\mathfrak{q}_i)^c = \bigcap_{i=1}^{m}\mathfrak{q}_i$$

□

Remark 5.2.7

属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想集合 Σ 叫做**孤立的**，如果它满足下面的条件：如果 $\mathfrak{p}'$ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想且 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$，对某个 $\mathfrak{p} \in \Sigma$，则 $\mathfrak{p}' \in \Sigma$.

换言之，孤立的即向下封闭的.

Remark 5.2.8

由于属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想是有限的，所以孤立集合自然也是有限集合.

令 Σ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的孤立的素理想集合，令 $S = A - \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Sigma}\mathfrak{p}$，我们容易证明 S 是乘法封闭的. 对于属于 $\mathfrak{a}$ 的任何素理想 $\mathfrak{p}'$，我们有

$$\mathfrak{p}' \in \Sigma \Longrightarrow \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$$

$$\mathfrak{p}' \notin \Sigma \Longrightarrow \mathfrak{p}' \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Sigma}\mathfrak{p} \Longrightarrow \mathfrak{p}' \cap S \neq \emptyset$$

定理 5.2.2: 第二唯一性定理

设 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想，$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{a}$ 的极小准素分解，令 $\{\mathfrak{p}_{i_1}, \cdots, \mathfrak{p}_{i_m}\}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的素理想的孤立集合. 则 $\mathfrak{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_m}$ 与分解无关.

证明: 我们有

$$\mathfrak{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_m} = S(\mathfrak{a})$$

其中 $S = A - \mathfrak{p}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_{i_m}$，因此只依赖 $\mathfrak{a}$. □

推论 5.2.1

孤立准素分支(即与极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ 相对应的准素分支 $\mathfrak{q}_i$) 由 $\mathfrak{a}$ 唯一决定.

5.3 结合素理想

结合素理想是交换代数中的重要概念, 是准素分解理论的现代版本. 代数地看, 它是可以作为模中元素零化子的素理想; 几何地看, 它是拟凝聚层截面支集的不可约分支.

在本节中，约定 A 是一个环，M 是一个 A-模.

定义 5.3.1: Associated prime

*如果 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足以下等价条件之一，则称 $\mathfrak{p}$ 为 M 的**结合素理想**.*

(1) 存在 $x \in M$ 使得 $\operatorname{Ann}(x) = \mathfrak{p}$.

(2) M 包含了一个同构于 $A/\mathfrak{p}$ 的子模.

我们记 M 的结合素理想构成的集合为 $\operatorname{Ass}_A(M)$ 或者 $\operatorname{Ass}(M)$.

Remark 5.3.1

我们简单说明一下这两个条件为什么是等价的：如果 $\exists x \in M$ 使得 $\operatorname{Ann}(x) = \mathfrak{p}$，我们考虑模同态 $A \to Ax$，$a \mapsto ax$，我们知道 $\operatorname{Ker} = \mathfrak{p}$，于是 $A/\mathfrak{p} \cong Ax \subset M$. 于是得到了一个同构于 $A/\mathfrak{p}$ 的子模.

反过来，假设存在这样一个子模 $f\colon A/\mathfrak{p} \cong N$，设 $x = f(\overline{1}) \in N$，则我们知道 $N = Af(\overline{1})$，于是我们知道 $\operatorname{Ann}(x) = \{a \in A\colon f(\overline{a}) = 0\} = \mathfrak{p}$.

Remark 5.3.2

虽然结合素理想是对于一般的情况定义的，但是它往往只对 Noether 环表现良好，所以我们一般更关心 Noether 环上的情况.

命题 5.3.1

令 $\mathfrak{p}$ 为集合 $\{\operatorname{Ann}(x)\colon x \in M, x \neq 0\}$ 中的一个极大元，则 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

证明: 我们只需要说明 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想即可，令 $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$，假设 $ab \in \mathfrak{p}$，并且 $b \notin \mathfrak{p}$，我们知道 $abx = 0$，由于 $\operatorname{Ann}(bx) \supseteq \operatorname{Ann}(x) = \mathfrak{p}$，但是由于 $\mathfrak{p}$ 是极大元，于是 $\operatorname{Ann}(bx) = \operatorname{Ann}(x)$，所以我们知道 $a \in \operatorname{Ann}(bx) = \operatorname{Ann}(x) = \mathfrak{p}$. 于是 $\mathfrak{p}$ 是素理想. □

推论 5.3.1

若 A 是 Noether 环，则 $\operatorname{Ass}(M) = \emptyset \iff M = 0$.

证明: 由于 A Noetherian，故若 $M \neq 0$，则 $\{\operatorname{Ann}(x)\colon x \in M, x \neq 0\}$ 有极大元，故 $\operatorname{Ass}(M) = \emptyset \iff M = 0$. □

推论 5.3.2

若 A 是 Noether 环，则 M 的零因子的集合是 M 的结合素理想的并.

Remark 5.3.3

利用环商掉素理想是整环，我们知道如果 R 是环(不必 Noether)，$\mathfrak{p}$ 是其素理想，则 $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

命题 5.3.2

设有 A-模短正合列(此处 A 不必 Noether)

$$0 \to N \to M \to Q \to 0$$

则 $\operatorname{Ass}(N) \subset \operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(N) \cup \operatorname{Ass}(Q)$,第二个包含关系在正合列分裂时为等号.

证明: 由于可以把 N 看成是 M 的子模,所以第一个包含号由定义是显然的,下面我们来证明第二个.

设 $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(m) \in \operatorname{Ass}(M)$,记 m 在 Q 中的像为 $\overline{m}$,我们知道 $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ann}(\overline{m})$. 如果取等号,则 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(Q)$. 如果是真包含关系,取 $a \in \operatorname{Ann}(\overline{m}) \backslash \mathfrak{p}$,有 $a\overline{m} = 0$ 但是 $am \neq 0$,即 $am \in N$ 且非零,由 $\mathfrak{p}$ 是素理想,我们知道 $\operatorname{Ann}(am) = \mathfrak{p}$. 即 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(N)$,所以有第二个包含关系.

当正合列分裂时,N, Q 都是 M 的子模,所以有 $\operatorname{Ass}(M) \supset \operatorname{Ass}(N) \cup \operatorname{Ass}(Q)$,于是有等号成立. □

Remark 5.3.4

实际上,只需要正合列

$$0 \to N \to M \to Q$$

就可以得到

$$\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Ass}(N) \cup \operatorname{Ass}(Q)$$

事实上,任取 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$,取 M 的同构于 $A/\mathfrak{p}$ 的一个子模 M_0,如果 $N \cap M_0 = \{0\}$,则说明 M_0 同构于 Q 的一个子模,所以 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(Q)$. 反之如果存在 $0 \neq x \in N \cap M_0$,则由于 $M_0 \cong A/\mathfrak{p}$ 是一个整环,于是 $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x) \in \operatorname{Ass}(N)$.

命题 5.3.3

A 是 Noether 环,M 是有限生成 A-模,则存在滤链

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

以及一系列素理想 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 使得 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$.

证明: 由于 M 是 Noether 环的有限生成模,于是 M 是 Noether 模,所以我们考虑子模集合

$$\{N \subset M : \text{命题对 } N \text{ 成立}\}$$

显然非空,因为 0 在其中,从而有 M 是 Noether 模我们知道这个集合有极大元,设为 N,下面我们取证明 $N = M$.

如果 $N \subsetneq M$,取 M/N 的结合素理想 $\mathfrak{p}$ 以及元素 $\overline{m}$ 使得 $\operatorname{Ann}(\overline{m}) = \mathfrak{p}$,则我们知道 $A\overline{m} \cong A/\mathfrak{p}$.

取 $\overline{m}$ 的一个原像 $m \in M$,令 $N' = N + Am$,则我们知道 $N \subsetneq N'$,并且 $N'/N = A\overline{m} \cong A/\mathfrak{p}$,于是与 N 极大矛盾,所以 $N = M$,也即命题对 M 成立. □

推论 5.3.3

A 是 Noether 环,M 是有限生成 A-模,则 $\operatorname{Ass}_A(M)$ 有限.

证明: 由命题，我们知道存在滤链

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

以及一系列素理想 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 使得 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$. 于是我们知道有正合列

$$0 \to M_{n-1} \to M_n \to M_n/M_{n-1} \to 0$$

于是有

$$\operatorname{Ass}_A(M) = \operatorname{Ass}_A(M_n) \subset \operatorname{Ass}_A(M_{n-1}) \cup \operatorname{Ass}(M_n/M_{n-1})$$

接着同理我们有

$$\operatorname{Ass}_A(M_{n-1}) \subset \operatorname{Ass}_A(M_{n-2}) \cup \operatorname{Ass}(M_{n-1}/M_{n-2})$$

于是最终有

$$\operatorname{Ass}_A(M) \subset \operatorname{Ass}_A(M_1/M_0) \cup \operatorname{Ass}_A(M_2/M_1) \cup \cdots \cup \operatorname{Ass}_A(M_n/M_{n-1})$$

结合 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$，我们知道 $\operatorname{Ass}_A(M_i/M_{i-1}) = \operatorname{Ass}_A(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$. 于是我们知道是有限的. □

引理 5.3.1: 与局部化的关系

A 是 *Noether* 环，M 是 A-模，令 S 为 A 的一个乘法封闭子集，则有

$$\operatorname{Ass}_A(S^{-1}M) = f(\operatorname{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)) = \operatorname{Ass}_A(M) \cap \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \operatorname{Ass}_A(M) \cap f(\operatorname{Spec} S^{-1}A)$$

其中 f 是自然映射 $\operatorname{Spec}(S^{-1}A) \to \operatorname{Spec}(A)$.

证明: 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(S^{-1}M)$，则 $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_A(x)$ 对某个非零的 $x \in S^{-1}M$ 成立，且 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 若 $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$，则存在 $s \in \mathfrak{p} \cap S$，使得 $sx = 0$，但是我们知道 s 在 $S^{-1}A$ 中是可逆的，这与 $x \neq 0$ 矛盾. 所以我们知道 $\mathfrak{p}$ 是 A 中与 S 无交的素理想.

反过来，对于 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$，则 $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_{S^{-1}A}(y)$ 对某个非零 $y \in S^{-1}M$ 成立，由于 $S^{-1}A$ 的素理想都是扩张理想，所以我们设 $\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q}$，其中 $\mathfrak{q}$ 是 A 中与 S 无交的素理想，我们知道

$$\operatorname{Ann}_{S^{-1}A}(y) = S^{-1}\operatorname{Ann}_A(y)$$

也就是

$$S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}\operatorname{Ann}_A(y)$$

由于 $\mathfrak{q}$ 是理想的局限，所以是饱和理想，下面我们说明 $\operatorname{Ann}_A(y)$ 是饱和理想，从而由与 S 无交的饱和理想与 $S^{-1}A$ 中理想的一一对应，我们可以得到 $\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_A(y)$，从而得证第一个等式.

对于任意的 $x \in A$，$s \in S$，设 $sx \in \operatorname{Ann}_A(y)$，从而我们知道，从而我们知道 $sxy = 0 \in S^{-1}M$，也就是说存在 $t \in S$ 使得 $tsxy = 0 \in M$，于是我们有 $(ts)xy = 0 \in M$，于是有 $xy = 0 \in S^{-1}M$，所以有 $x \in \operatorname{Ann}_A(y)$，所以 $\operatorname{Ann}_A(y)$ 是 S-饱和的.

现在证明第二个等式，取 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(S^{-1}M)$，设为 $\operatorname{Ann}_A(m/s)$，$m \in M, s \in S$，由 Noether 性知道 $\mathfrak{p}$ 是有限生成的，设为 $(a_1, \cdots, a_n)$，由 $a_i m/s = 0 \in S^{-1}M$ 知道存在 $s_i \in S$ 使得 $a_i s_i m = 0 \in M$.

从而不难发现 $\operatorname{Ann}_A(s_1 \cdots s_n m) = \mathfrak{p}$，所以 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$，故

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M) \cap \operatorname{Ass}_A(S^{-1}M) \subset \operatorname{Ass}_A(M) \cap f(\operatorname{Spec}(S^{-1}A))$$

而对于任意的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M) \cap f(\operatorname{Spec} S^{-1}A)$，我们知道 $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_A(m)$，并且 $\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想，我们注意到令 $n = m/1 \in S^{-1}M$，显然有

$$\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ann}_A(n)$$

而对于任意的 $x\in \mathrm{Ann}_A(n)$，有 $xn=0\in S^{-1}M$，也就是存在 $s\in S$ 使得 $sxn=0\in M$，所以 $sx\in\mathfrak{p}$，但是由于 $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$，所以 $x\in\mathfrak{p}$，于是有

$$\mathfrak{p}=\mathrm{Ann}_A(n)\in \mathrm{Ass}_A(S^{-1}M)$$

所以我们得证. □

Remark 5.3.5

这个引理是在说局部化筛掉了那些与 S 有交的结合素理想.

定义 5.3.2: 模的支集

A-模 M 的**支集**指的是满足 $M_{\mathfrak{p}}\neq 0$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合，记作 $\mathrm{Supp}_A(M)$，无歧义时省略下标 A.

定理 5.3.1: 与支集的关系

$\mathrm{Ass}_A(M)\subseteq \mathrm{Supp}_A(M)$. 如果 A 是 *Noether* 环，则 $\mathrm{Supp}_A(M)$ 中的极小元都在 $\mathrm{Ass}_A(M)$ 中. 特别地，如果 M 有限生成，则有

$$\overline{\mathrm{Ass}_A(M)}=\mathrm{Supp}_A(M),\quad \sqrt{\mathrm{Ann}_A(M)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(M)}\mathfrak{p}$$

证明: 如果 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(M)$，则我们知道 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$，故 $M_{\mathfrak{p}}\neq 0$，所以 $\mathrm{Ass}_A(M)\subseteq\mathrm{Supp}_A(M)$.

如果 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}_A(M)$ 极小，则 $\mathrm{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})=\{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$，故我们知道 $\mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})=\{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$(因为 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(M)\iff\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$)，于是我们知道 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(M)$. 如果 M 有限生成，则我们知道 $\mathrm{Supp}_A(M)=V(\mathrm{Ann}(M))$ 在 A 的素谱中是闭集，所以由 $\mathrm{Ass}_A(M)\subset\mathrm{Supp}_A(M)$ 可以得到

$$\overline{\mathrm{Ass}_A(M)}\subseteq\mathrm{Supp}_A(M)$$

现在我们要证明反过来的方向也是正确的，任取 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}_A(M)$，由 Noether 环的性质，我们知道存在极小元 $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$，由于极小元都落在 $\mathrm{Ass}_A(M)$ 中，所以我们知道 $\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}_A(M)$. 而由于 $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$，我们知道

$$\mathfrak{p}\in\overline{\{\mathfrak{q}\}}\subseteq\overline{\mathrm{Ass}_A(M)}$$

所以最终我们有

$$\mathrm{Supp}_A(M)\subseteq\overline{\mathrm{Ass}_A(M)}\implies\mathrm{Supp}_A(M)=\overline{\mathrm{Ass}_A(M)}$$

最后，由于

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_A(M)}=\bigcap_{\mathrm{Ann}_A(M)\subseteq\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$$

对有限生成模 M 有

$$\mathrm{Ann}_A(M)\subseteq\mathfrak{p}\iff\mathfrak{p}\in V(\mathrm{Ann}_A(M))=\mathrm{Supp}_A(M)$$

所以

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_A(M)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}_A(M)}\mathfrak{p}$$

而所有极小元都在 $\mathrm{Ass}_A(M)$ 里面，所以最终有

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_A(M)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(M)}\mathfrak{p}$$

□

Remark 5.3.6

对于有限生成模而言我们会有

$$\mathrm{Supp}_A(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$$

大概就是如果消灭了零化子就不为零了.

命题 5.3.4

A 是 Noether 环，M 是 A-模，则自然映射

$$M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} M_{\mathfrak{p}}$$

是单射.

证明: 若存在 $m \neq 0$ 使得 m 在自然映射的核里面，则我们取 Am 的一个结合素理想 $\mathfrak{p}$，不妨设

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$$

注意到 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$，于是存在 $s \in A - \mathfrak{p}$ 使得 $sm = 0$，这与

$$\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$$

矛盾，所以 $m = 0$，即单射. □

命题 5.3.5

A 是 Noether 环，$f\colon M \to N$ 是 A-模同态，如果对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$，$f$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化都是单射，那么 f 就是单射.

证明: 取 $K = \mathrm{Ker}\, f$，知道 K 是 M 的子模，于是 K 的结合素理想都是 M 的结合素理想，然后由于局部化都是单射，知道

$$K_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}(f)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}(f_{\mathfrak{p}}) = 0$$

结合

$$K \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(K)} K_{\mathfrak{p}}$$

是单射，我们知道 $K = 0$，即 f 是单射. □

Chapter 6: 整性与赋值

6.1 整性

定义 6.1.1: 整元

B 是一个环，A 是 B 的含幺子环，元素 $x \in B$ 是 A 上的**整元**，如果 x 是一个 $A[x]$ 中的**首一**多项式的根.

定义 6.1.2: 整闭包与整闭性

设 $A \subset B$ 为子环，令

$$C := \{b \in B : b \text{ 是 } A \text{ 上的整元}\}$$

称 C 为 A 在 B 中的**整闭包**，如果 $C = A$，则称 A 在 B 中是**整闭的**. 如果 $C = B$，则称 B **在** A **上是整的**.

Remark 6.1.1

设 A 是整环，如果 A 在其分式域 K 上是整闭的，我们此时直接省略 K，简称 A 是整闭的.

如 $\mathbb{Z}$ 是整闭的，一般来说，可以证明 UFD 都是整闭的. 我们给出一个简单的证明：设 R 为一个 UFD，K 是其分式域，我们下面证明 R 在 K 中整闭，假设 $a \in K$ 在 R 上整，则存在首一多项式 $f \in R[x]$ 使得 $f(a) = 0$，不妨设有

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = 0$$

设 $a = p/q$，其中 $p, q \in R$，把分母除掉有

$$p^n + c_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + c_1 pq^{n-1} + c_0 q^n = 0$$

有

$$p^n = -(c_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + c_1 pq^{n-1} + c_0 q^n)$$

由于 R 是 UFD，我们不妨设 p 与 q 没有公共的不可约因子，从而看上式右边可以被 q 整除，所以 $q \mid p$，再结合没有公共不可约因子，从而我们知道 q 是单位，从而 $a \in R$，从而 R 是整闭.

命题 6.1.1

$A \subset B$，则 TFAE:

(1) $x \in B$ 是 A 上的整元.

(2) $A[x]$ 是有限生成 A 模.

(3) $A[x]$ 包含于 B 的一个子环 C，其中 C 是有限生成 A 模.

(4) 存在一个忠实的 $A[x]$-模 M(即 $\mathrm{Ann}_{A[x]}(M)=0$)，作为 A 模是有限生成的.

证明： (1) 推 (2)：显然.

(2) 推 (3)：取 $C = A[x]$ 即可.

(3) 推 (4)：取 $M = A[x]$，容易知道 $1 \in M$，从而忠实.

(4) 推 (1)：考虑 M 到自身的同态 $x\colon M \to M$，$m \mapsto xm$，由于 M 作为 A 模是有限生成的，行列式办法告诉我们存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$ 使得有

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

从而 $x^n + \cdots + a_n \in A[x]$ 将 M 零化，因此由忠实性我们知道

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \in A[x]$$

于是我们知道 $x \in B$ 在 A 上是整元. □

推论 6.1.1

若 $x_1, \cdots, x_n \in B$ 均在 A 上整，则 $A[x_1, \cdots, x_n]$ 是一个有限生成的 A-模.

证明： 对 n 归纳立刻得到. □

推论 6.1.2

B 中在 A 上的整元构成一个包含 A 的子环 C.

证明： 若 $x, y \in C$，我们知道 $A[x,y]$ 有限生成，从而 $x \pm y, xy$ 在 A 上整(由于 $A[x \pm y] \subset A[x,y]$，$A[xy] \subset A[x,y]$ 由命题 6.1.1 立刻得到). 当然也可以利用 Kronecker 积的方式通过构造矩阵特征值的方法来证明. □

定义 6.1.3

令 $f\colon A \to B$ 是一个环同态，从而 B 是 A-代数，如果 B 在子环 $f(A)$ 上是整的，那么 f 叫做**整的**，B 叫做整的 A-代数.

Remark 6.1.2

使用术语，我们知道上面的结果告诉我们

$$\boxed{\text{有限生成代数+整性} = \text{有限代数(即作为模是有限生成的)}}$$

推论 6.1.3: 整性的传递性

若 $A \subset B \subset C$ 是环，B 在 A 上整，C 在 B 上整，则 C 在 A 上整.

证明: 令 $x \in C$，我们有方程

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \quad (b_i \in B)$$

我们知道 $B' = A[b_1, \cdots, b_n]$ 是有限生成 A-模，并且 $B'[x]$ 是有限生成 B' 模，因此我们知道 $B'[x]$ 是有限生成的 A-模，我们知道 x 在 A 上整. □

推论 6.1.4

令 $A \subset B$ 是环，C 是 A 在 B 中的整闭包，那么 C 在 B 中是整闭的.

证明: 令 $x \in B$ 在 C 上整，我们知道 x 在 A 上整，从而 $x \in C$. □

下面的命题指出整性被商环与局部化保留.

命题 6.1.2: 整性被商环与局部化保留

令 $A \subset B$ 是环，B 在 A 上整.

(1) 若 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$，则 $B/\mathfrak{b}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 上整.

(2) 若 S 是 A 的乘法封闭子集，那么 $S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整.

证明: (1) 首先我们要说明可以诱导一个 $A/\mathfrak{a}$ 到 $B/\mathfrak{b}$ 的一个嵌入，我们可以考虑 $x + \mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a}$，嵌入到 $x + \mathfrak{b} \in B/\mathfrak{b}$，这个是良定义的因为如果 $x - y \in \mathfrak{a}$，则一定有 $x - y \in \mathfrak{b}$，从而 $x + \mathfrak{b} = y + \mathfrak{b}$，于是是一个嵌入.

若 $x \in B$，有

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

其中 $a_i \in A$，两边同时模 $\mathfrak{b}$ 结论得证.

(2) 令 $x/s \in S^{-1}B (x \in B, s \in S)$，在上面等式中两边除掉 s^n，我们知道

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s^n = 0$$

所以 x/s 在 $S^{-1}A$ 上整. □

6.2 GOING-UP

命题 6.2.1

$A \subset B$ 是整环，B 在 A 上整，那么 B 是域当且仅当 A 是域.

证明: 若 A 是域，令 $y \in B$，$y \neq 0$，令 y 的最低次的零化首一多项式为

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A)$$

由于 B 是整环，所以我们有 $a_n \neq 0$. 否则 y 有零因子，于是有

$$y^{-1} = -a_n^{-1}\left(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right) \in B$$

因此 B 是域，反之若 B 是域，设 $x \in A$，则 $x^{-1} \in B$ 在 A 上整，我们有方程

$$x^{-m} + a_1' x^{-m+1} + \cdots + a_m' = 0 \quad (a_i' \in A)$$

因此 $x^{-1} = -(a_1' + a_2' x + \cdots + a_m' x^{m-1}) \in A$. 因此 A 是域. □

Remark 6.2.1

实际上我们有结论是整扩张保持 Krull 维数不变，从而有

$$\dim A = \dim B$$

所以如果二者之一的维数是 0，则都是零，零维整环就是域.

推论 6.2.1

$A \subset B$ 是环，B 在 A 上整，令 $\mathfrak{q}$ 是 B 的素理想，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$. 则 $\mathfrak{q}$ 是极大的当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大的.

证明: 我们知道 $B/\mathfrak{q}$ 在 $A/\mathfrak{p}$ 上整，所以 $B/\mathfrak{q}$ 是域当且仅当 $A/\mathfrak{p}$ 是域. □

推论 6.2.2: Incomparability Theorem

令 $A \subset B$ 是环，B 在 A 上整. 令 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ 是 B 的素理想使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$，并且 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}$. 那么 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

证明: 由于局部化保持整性，我们知道 $B_\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 上整. 令 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 中的扩理想，$\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{n}'$ 为 $\mathfrak{q}$ 与 $\mathfrak{q}'$ 在 $B_\mathfrak{p}$ 中的扩理想.

则知道 $\mathfrak{m}$ 是 $A_\mathfrak{p}$ 的极大理想，并且有 $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}'$，由于有 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^c$，再结合 $\mathfrak{m}$ 的极大性，我们知道 $\mathfrak{n}^c = \mathfrak{n}'^c = \mathfrak{m}$. 我们考虑

$$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$$

由于 $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ 是整扩张，所以上面的商环也是整扩张，由于 $\mathfrak{m}$ 是极大理想，所以 $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ 是域，从而 $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ 也是域，所以 $\mathfrak{n}$ 是极大理想，同理 $\mathfrak{n}'$ 也是极大理想. 从而 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$，由局部化素理想的一一对应，得到 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. □

Remark 6.2.2

这个命题叫做不可比较定理，也就是说只要 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$ 都在 $\mathfrak{p}$ 的上方，就没法比较他们的大小，除非他们相等. 其几何视角的含义是 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 的同一根纤维上不能发生包含关系，如果两个点投影到同一个点，那么要么完全一样，要么毫无关系(没有包含关系).

我们也可以从维数的角度来理解，$\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}'$ 意味着

$$\dim B/\mathfrak{q} > \dim B/\mathfrak{q}'$$

但是整扩张是保持维数不变的，如果在上面的维数下降了，那么在 A 中的维数也要下降，但是他们投影下来的是同一个 $\mathfrak{p}$ 维数没变，所以只能相等.

定理 6.2.1: 整扩张诱导素谱的满射(Lying Over Theorem)

令 $A \subset B$ 是环，B 在 A 上整. $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想，那么存在 B 的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

证明: 首先 $B_\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 上整.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

图表交换，水平箭头是单射. 令 $\mathfrak{n}$ 是 $B_\mathfrak{p}$ 一个极大理想，那么我们有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p}$ 是极大的(推论 6.2.1)，因此是局部环 $A_\mathfrak{p}$ 唯一的极大理想 $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A & & & \operatorname{Spec} B \arrow[lll] \\ & \mathfrak{m} \cap A & \mathfrak{n} \cap B \arrow[l, mapsto] & \\ & \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p} \arrow[u, mapsto] & \mathfrak{n} \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \\ \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \arrow[uuu] & & & \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p} \arrow[lll] \arrow[uuu] \end{tikzcd}$$

如果 $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \cap B$，那么 $\mathfrak{q}$ 是素的，我们有 $\mathfrak{q} \cap A = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$. □

Remark 6.2.3

这个定理的另外一个表述是：$A \subset B$，B 是 A 的整扩张，则有 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 是满射.

定理 6.2.2: Going-up theorem

令 $A \subset B$ 是环，B 在 A 上整，$\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ 是 A 的素理想链，$\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m (m < n)$ 是 B 的素理想链，使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i (1 \leq i \leq m)$.

那么链 $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ 可以扩充成链 $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ 使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 成立.

证明: 使用归纳法我们立刻得到只需要证明 $m = 1$，$n = 2$ 的情况.

令 $\overline{A} = A/\mathfrak{p}_1$，$\overline{B} = B/\mathfrak{q}_1$，那么有

$$\overline{A} \subset \overline{B}$$

我们知道 $\overline{B}$ 在 $\overline{A}$ 上整. 由 Lying Over Theorem 知道存在 $\overline{B}$ 的素理想 $\overline{\mathfrak{q}_2}$ 使得 $\overline{\mathfrak{q}_2} \cap \overline{A} = \overline{\mathfrak{p}_2}$，其中 $\overline{\mathfrak{p}_2}$ 是 $\mathfrak{p}_2$ 在 $\overline{A}$ 中的像. 把 $\overline{\mathfrak{q}_2}$ 映回 B，我们得到所需的 $\mathfrak{q}_2$. □

Remark 6.2.4

我们给出 going up 的另外一个表述：$A \subset B$ 是整扩张，则对于任意的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ 使得 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$，则对于

任意的 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$，存在 $\mathfrak{q}'$ 使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ 并且 $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}'$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A & & & \operatorname{Spec} B \arrow[lll] \\
& \mathfrak{p}' = \mathfrak{q}' \cap A & \mathfrak{q}' \arrow[l, mapsto] & \\
& \overline{\mathfrak{p}'} = \overline{\mathfrak{q}'} \cap A/\mathfrak{p} \arrow[u, mapsto] & \overline{\mathfrak{q}'} \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \\
\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p} \arrow[uuu] & & & \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q} \arrow[lll] \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

定理 6.2.3: 整扩张保持 Krull 维数

如果 $A \subseteq B$ 是整扩张，则其 *Krull* 维数相等.

证明: 设 A 有素理想升链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

由 Lying Over 我们知道存在 $\mathfrak{q}_0 \in \operatorname{Spec} B$ 使得 $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$，于是由 Going up 我们知道存在 B 中的素理想升链

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$$

所以我们知道

$$\dim B \geq \dim A$$

反过来，如果 B 中存在素理想升链

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$$

把它映回 A 中得到

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$$

如果 $\dim B > \dim A$，则一定存在 $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{i+1}$，由 Incomparability Theorem 我们知道 $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_{i+1}$，矛盾. 所以有

$$dim B \leq \dim A$$

于是

$$\dim A = \dim B$$

□

6.3 GOING-DOWN

命题 6.3.1: 局部化保持整闭包

$A \subset B$ 是环，C 是 A 在 B 中的整闭包，S 为 A 的一个乘法闭子集，则 $S^{-1}C$ 是 $S^{-1}A$ 在 $S^{-1}B$ 中的整闭包.

证明: 由前面结论，我们知道 $S^{-1}C$ 在 $S^{-1}A$ 上整，反过来，如果 $b/s \in S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整，则我们有

$$(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots a_n/s_n = 0$$

令 $t=s_1\cdots s_n$，我们对上面的方程两边同时乘 $(st)^n$，所以我们有 bt 在 A 上整，于是 $bt\in C$，从而我们知道 $b/s=bt/st\in S^{-1}C$. □

命题 6.3.2: 整闭是局部性质

A 是一个整环，TFAE:

(1) A 是整闭的.

(2) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$，$A_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的.

(3) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$A_{\mathfrak{m}}$ 是整闭的.

证明: 令 C 为 A 在 $K=\mathrm{Frac}(A)$ 中的整闭包，则有

$$A\subset C\subset K$$

上面命题告诉我们 $C_{\mathfrak{p}}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 在 K 中的整闭包. 于是考虑含入映射

$$f\colon A\hookrightarrow C$$

我们知道 A 整闭当且仅当 f 是满射，而我们知道满射是局部性质，从而知道 f 是满射当且仅当对于任意的 $\mathfrak{p}$，有 $f_{\mathfrak{p}}$ 是满射，这又当且仅当对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$，$f_{\mathfrak{m}}$ 是满射，于是命题得证. □

Remark 6.3.1

$A\subset B$ 是环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想. B 的元素称为在 $\mathfrak{a}$ 上整的，如果满足 A 上的整相关条件，并且系数都在 $\mathfrak{a}$ 中. $\mathfrak{a}$ 在 B 中的整闭包是 B 中所有在 $\mathfrak{a}$ 中整的元素的集合.

引理 6.3.1

令 C 是 A 在 B 中的整闭包，$\mathfrak{a}^e$ 表示 $\mathfrak{a}$ 在 C 中的扩理想，那么 $\mathfrak{a}$ 在 B 中的整闭包是 $r(\mathfrak{a}^e)$(因此对加法与乘法封闭).

证明: 如果 $x\in B$ 在 $\mathfrak{a}$ 上整，则存在 $a_1,\cdots,a_n\in\mathfrak{a}$，使得

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n=0$$

于是我们知道 $x\in C$，并且 $x^n=-(a_1x^{n-1}+\cdots a_n)\in\mathfrak{a}^e$，于是有 $x\in r(\mathfrak{a}^e)$.

反过来，如果 $x\in r(\mathfrak{a}^e)$，则有

$$x^n=\sum a_ix_i$$

对于某个 $n>0$，$a_i\in\mathfrak{a}$，$x_i\in C$ 成立. 由于 x_i 都是 A 上的整元，于是我们知道 $M=A[x_1,\cdots,x_n]$ 是有限生成 A-模，并且我们有 $x^nM\subset\alpha M$，从而我们由引理 1.4.1 知道，取 $\varphi=x^n$，知道 x^n 在 α 上整，于是 x 在 α 上整. □

命题 6.3.3

$A\subset B$ 是整环，A 是整闭的，$x\in B$ 在 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 上整. 那么 x 在 A 的分式域 K 上代数，并且如果 x 在 K 上的极小多项式是 $t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$，那么 $a_1,\cdots,a_n\in r(\mathfrak{a})$.

证明: 设 x 被系数在 $\mathfrak{a}$ 中的首一多项式 f 零化，显然我们知道 x 在 K 上代数，令 L 为 f_x 在 K 上的分裂域，$x_1,\cdots,x_n$ 为 f_x 所有的根，显然我们有 x_i 在 $\mathfrak{a}$ 上整.

x 在 K 上的极小多项式的根一定在 x_i 中，于是我们由 Vieta 定理知道极小多项式的系数一定是 x_i 的多项式，结合 x_i 在 $\mathfrak{a}$ 上整，由上面引理(对加法与乘法封闭)我们知道系数在 $\mathfrak{a}$ 上整，再结合 A 是整闭的(在上面引理中 $C=A$)，再由上面的引理我们可以知道这些系数一定在 $r(\mathfrak{a})$ 中. □

定理 6.3.1: Going-down theorem

令 $A\subset B$ 是整环，A 整闭，B 在 A 上整. 令 $\mathfrak{p}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{p}_n$ 是 A 的素理想链，$\mathfrak{q}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{q}_m(m<n)$ 是 B 的素理想链，使得 $\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_i(1\le i\le m)$，那么链 $\mathfrak{q}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{q}_m$ 可以扩充成链 $\mathfrak{q}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{q}_n$，使得 $\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_i(1\le i\le n)$.

证明: 我们只需要对二元形式证明即可，考虑 $m=1$，$n=2$，由于 B 中包含于 $\mathfrak{q}_1$ 的素理想与 $B_{\mathfrak{q}_1}$ 中的素理想一一对应，我们可以考虑去说明 $\mathfrak{p}_2$ 是 $B_{\mathfrak{q}_1}$ 中素理想的局限. 这等价于说明

$$B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2\cap A=\mathfrak{p}_2$$

对于任意的 $x\in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2$，一定是形如 y/s，其中 $y\in B\mathfrak{p}_2$，$s\in B-\mathfrak{q}_1$，由引理 6.3.1 知道(在引理中令 $C=B$) $y\in B\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_2^e\subset r(\mathfrak{p}_2^e)$，于是 y 在 $\mathfrak{p}_2$ 上整，于是我们知道 y 在 K 上极小多项式的系数都在 $r(\mathfrak{p}_2)=\mathfrak{p}_2$ 中，即形如

$$y^r+u_1y^{r-1}+\cdots+u_r=0$$

其中 $u_1,\cdots,u_r\in\mathfrak{p}_2$. 现在假设 $x\in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2\cap A$，则 $s=yx^{-1}$，其中 $x^{-1}\in K$，所以 s 在 K 中的极小多项式就是

$$s^r+v_1s^{r-1}+\cdots+v_r=0$$

其中 $v_i=u_i/x^i$，所以有

$$x^iv_i=u_i\in\mathfrak{p}_2$$

由于 s 在 A 上整，所以在上面命题中取 $\mathfrak{a}=(1)$，可以知道 $v_i\in r((1))=A$，假设 $x\notin\mathfrak{p}_2$，则有 $v_i\in\mathfrak{p}_2$，从而有 $s^r\in B\mathfrak{p}_2\subset B\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{q}_1$，因此 $s\in\mathfrak{q}_1$，这与 $s\in S=B-\mathfrak{q}_1$ 矛盾. 于是 $x\in\mathfrak{p}_2$，因此 $B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2\cap A=\mathfrak{p}_2$ 得证. □

Remark 6.3.2

我们给出 going down 定理的另外一个叙述：$A\subset B$ 是整扩张，A,B 都是整环，则对任意的 $\mathfrak{p},\mathfrak{p}'\in\operatorname{Spec}A$ 使得 $\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{p}$，且存在 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}B$ 使得 $\mathfrak{q}\cap A=\mathfrak{p}$，则存在 $\mathfrak{q}'\in\operatorname{Spec}B$ 使得 $\mathfrak{q}'\subset\mathfrak{q}$ 并且 $\mathfrak{p}'=\mathfrak{q}'\cap A$.

命题 6.3.4

A 是一个整闭的整环，K 是其分式域，L 是 K 的一个有限可分代数扩张，B 是 A 在 L 中的整闭包. 那么存在 L 在 K 上的基 $v_1,\cdots,v_n$ 使得 $B\subset\sum_{i=1}^n Av_i$.

证明: 我们选取 L 在 K 上的一组基 $v_1,\cdots,v_n$，为了方便，我们可以不妨假设它们都属于 B(乘上一个充分大的分母即可). 我们定义一个双线性型

$$(x,y)\mapsto\operatorname{Tr}_{L/K}(xy)$$

由于扩张可分，所以这个二次型非退化，从而存在对偶基 $u_1,\cdots,u_n$ 使得

$$\operatorname{Tr}_{u_iv_j}=\delta_{ij}$$

现在任取 $b \in B$，我们知道 b 可以写成

$$b = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

两边同时乘 v_i 并取 trace，得到

$$\mathrm{Tr}(bv_i) = \mathrm{Tr}\left(\sum c_j u_j v_i\right) = \sum \mathrm{Tr}(c_j u_j v_i) = c_j$$

结合 b, v_i 都在 B 中，我们知道

$$c_j = \mathrm{Tr}(bv_i) \in A$$

所以我们知道

$$B \subset \sum_{i=1}^{n} Au_i$$

□

Remark 6.3.3
这个定理告诉我们整闭包的扩张不会超过域的扩张次数.

6.4 赋值环

定义 6.4.1: 赋值环

令 B 是一个整环，K 是其分式域，B 叫做 K 的一个**赋值环**，如果对于每一个 $x \neq 0$，$x \in B$ 或者 $x^{-1} \in B$ 至少成立一个.

Remark 6.4.1
赋值环中的整除关系是全序.

命题 6.4.1: 赋值环是局部整闭整环

B 是 K 的赋值环，则

(1) B 是局部环.

(2) 如果 B' 是一个中间环，即 $B \subset B' \subset K$，则 B' 是 K 的一个赋值环.

(3) B 是整闭的.

证明: (1) 令

$$\mathfrak{m} = \{x \in B \mid x \text{ 非单位(在 } B \text{ 中)}\}$$

则在 K 中：$x \in \mathfrak{m}$ 当且仅当 $x = 0$ 或者 $x^{-1} \notin B$. 若 $a \in B$ 与 $x \in \mathfrak{m}$，我们知道 $ax \in \mathfrak{m}$，否则 $(ax)^{-1} \in B$ 因此

$$x^{-1} = a(ax)^{-1} \in B$$

矛盾. 从而 $\mathfrak{m}$ 有吸收性，下面假设 $x, y \in \mathfrak{m}$ 非零，则 $xy^{-1} \in B$ 或者 $x^{-1}y \in B$. 若 $xy^{-1} \in B$，则

$$x + y = (1 + xy^{-1})y \in B\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

$x^{-1}y$ 同理，于是我们知道 $\mathfrak{m}$ 加法封闭，于是 $\mathfrak{m}$ 是一个理想，于是 B 是一个局部环.

(2) 由定义显然.

(3) 对任意的 $x \in K$ 在 B 上整，我们有

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

其中 $b_i \in B$. 若 $x \in B$ 则已经成立，反之如果 $x \notin B$，则 $x^{-1} \in B$，这导致

$$x = -(b_1 + b_2 x^{-1} + \cdots + b_n x^{-(n-1)}) \in B$$

从而我们知道无论如何 x 都在 B 中，于是整闭. □

定理 6.4.1

A 是整环，K 是其分式域，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$，则存在一个 K 的赋值环 B，使得 $A \subset B \subset K$ 并且 $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{p}$.

证明: 考虑 A 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化 $A_\mathfrak{p}$，我们将 A 替换成 $A_\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}$ 被 $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ 替换为极大理想. 令

$$\mathscr{F} = \{B \text{ 包含 } A \text{ 为 } K \text{ 的子环，并且 } 1 \notin \mathfrak{p}B\}$$

很显然 $A \in \mathscr{F}$，所以不是空集，对 $\mathscr{F}$ 的全序子集，我们容易知道所有东西的并仍然落在里面，所以由 Zorn 引理我们知道存在一个极大元 B，由于 $\mathfrak{p}B \neq B$，于是存在包含 $\mathfrak{p}B$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$，注意到 $B \subseteq B_\mathfrak{m}$，而显然 $\mathfrak{p}B_\mathfrak{m} \neq B_\mathfrak{m}$，所以 $B_\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$，于是由极大性可以保证

$$B = B_\mathfrak{m}$$

并且 B 是局部环，还有 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$，结合 $\mathfrak{p}$ 是 A 的极大理想，于是 $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}$，现在我们只需要证明 B 是 K 的赋值环. 现在假设 $x \in K, x \notin B$，则我们知道 $B[x] \notin \mathscr{F}$，所以有

$$1 \in \mathfrak{p}B[x]$$

即存在 $a_i \in \mathfrak{p}B$，使得

$$1 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

由于 $a_0 \in \mathfrak{m} = \mathfrak{R}$，所以 $1 - a_0$ 是单位，于是我们可以变成

$$1 = b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

其中 $b_i \in \mathfrak{m}$，在所有情况中选择使得 n 最小的情况，此时如果 $x^{-1} \notin B$，我们同理有

$$1 = c_1 x^{-1} + \cdots + c_m x^{-m}$$

其中 $c_i \in \mathfrak{m}$，同理选择使得 m 最小的情况，如果 $n \geq m$，我们在上式同时乘 $b_n x^n$，会得到一个比 n 更小的情况，矛盾. 如果 $n < m$，同理可得矛盾，所以 $x^{-1} \in B$，即 B 是赋值环. □

推论 6.4.1

A 是一个整环，K 为其分式域，则其 K 中的整闭包 $\overline{A}$ 可以写成

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset B \subset K, B \text{ is a valuation ring of } K} B$$

证明: 如果 $A\subset B\subset K$，对于 K 的赋值环，则由于 B 是整闭的，我们知道 $\overline{A}\subset B$.

反过来，对于 $x\in K$，并且 $x\notin\overline{A}$，我们将找到一个赋值环 B 使得 $A\subset B\subset K$，并且 $x\notin B$.

令 $y=x^{-1}$，考虑 $A'=A[y]\subset K$，则 $1\notin yA'$，否则

$$1=a_1y+\cdots+a_ny^n,\quad a_i\in A$$

这告诉我们 x 是 A 上的整元，矛盾.

从而我们知道 y 不是 A' 中的单位，从而存在极大理想 $\mathfrak{m}'\subset A'$，使得 $y\in\mathfrak{m}'$.

从而由上面定理我们知道存在 K 的赋值环 B，使得 $B\supset A'$，并且 $\mathfrak{m}_B\cap A'=\mathfrak{m}'$，则 $y=x^{-1}\in\mathfrak{m}_B$，这告诉我们 $x\notin B$. □

定义 6.4.2: 赋值环的等价定义

$(\Gamma,\leq,+)$ 为一个全序 *Abel* 群，K 是一个固定的域，K 上的一个在 Γ 中的**赋值**是一个映射

$$v\colon K^\times\to\Gamma$$

使得对任意的 $x,y\in K^\times$，满足

(1) $v(xy)=v(x)+v(y)$.

(2) $v(x+y)\geq\min\{v(x),v(y)\}$，$x\neq -y$.

令 $v(0)=\infty$，$\infty>a,\forall a\in\Gamma$. 即对 Γ 进行一个延拓，从而得到

$$v\colon K\to\Gamma\cup\{\infty\}$$

Remark 6.4.2

- 若 $v\colon K\to\Gamma\cup\{\infty\}$ 是一个赋值，则 $R_v=\{x\in K\mid v(x)\geq 0\}$ 是一个赋值环，带有极大理想 $\mathfrak{m}=\{x\in K\colon v(x)>0\}$.
- 若 $A\subset K$ 是一个赋值环，令 $\Gamma=K^\times/A^\times$，对任意的 $\xi=[x],\eta=[y]$，我们定义 $\xi\geq\eta\iff xy^{-1}\in A$. 容易验证是一个良定义的全序关系，则我们可以定义一个赋值

  $$v\colon K^\times\to\Gamma$$

  为典范映射，于是我们得到了一个赋值.

于是我们知道

$$\boxed{\text{域 } K \text{ 中的赋值环与其上的赋值是一一对应的.}}$$

Chapter 7: 链条件

7.1 链条件与正合列

命题 7.1.1

令 Σ 是一个偏序集，*TFAE:*

(1) 每一个升链 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ 都会停止.

(2) 每一个 Σ 的非空子集都有极大元.

定义 7.1.1

令 Σ 为 M 的子模集合，令偏序关系为 $\subseteq$，则我们称升链必停止为**升链条件**，简称 a.c.c. 一个模如果满足升链条件，则称之为 ***Noether* 模**. 如果令偏序关系为 $\supseteq$，我们称降链必停止为**降链条件**，简称 d.c.c. 一个模如果满足降链条件，则称之为 ***Artin* 模**.

命题 7.1.2

令 $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ 是模正合列，则

(1) M *Noetherian* $\iff$ M' 与 M'' *Noetherian.*

(2) M *Artinian* $\iff$ M' 与 M'' *Artinian.*

证明: $\Rightarrow$: 我们只需要注意到 M', M'' 的子模升链或者降链都由 M 的子模由子模或者商模的形式给出，所以由 M 的链条件可以得到 M', M'' 的链条件.

$\Leftarrow$: 令 (L_n) 为 M 的子模升链，则我们知道 $(\alpha^{-1}(L_n))$ 为 M' 的子模升链，$(\beta(L_n))$ 为 M'' 的子模升链，对于充分大的 n 这两个升链都停止，然后可以证明 (L_n) 也停止. $\square$

推论 7.1.1

如果 M_i *Noetherian(*或者 *Artinian)*，则 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 也 *Noetherian(*或者 *Artinian).*

推论 7.1.2

A Noetherian(或者 Artinian), M 是有限生成 A-模, 则 M Noetherian(或者 Artinian).

Example 7.1.1

- 任何域都是 Noether 且 Artin 的.
- 环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是 Noether 且 Artin 的.
- 环 $\mathbb{Z}$ 是 Noether 的，但并非 Artin 的.
- PID 都是 Noether 的.
- $k[x_1, x_2, \cdots]$ 不是 Noether 的，但是由于是一个整环，我们可以考虑其分式域 K，K 是 Noether 的，于是我们知道一个 Noether 环的子环不一定是 Noether 的.
- 考虑 X 是一个无限的紧 Hausdorff 空间，$C(X)$ 是其上的实值函数环，取一个严格递减的闭集套

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

  令 $\mathfrak{a}_n = \{f \in C(X) \colon f(F_n) = \{0\}\}$，则我们知道 $\mathfrak{a}_n$ 构成了一个严格上升理想列，所以我们知道 $C(X)$ 不是 Noether 的.

命题 7.1.3: Noehter/Artin 环的商环也是 Noether/Artin 的

A 是 Noether 环(或者 Artin 环), $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想, 则 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether 环(或者 Artin 环).

证明: 由

$$0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

我们知道 $A/\mathfrak{a}$ 作为一个 A-模是 Noehter/Artin 的, 于是我们知道作为 $A/\mathfrak{a}$ 模也是成立的. □

7.2 合成列

定义 7.2.1

我们定义下面链的长度为 n:

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

定义 7.2.2

一个 M 的合成列是一个形如

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

的链, 并且是极大的, 即 M_i/M_{i+1} 是单模.

命题 7.2.1

若 M 有一个长度为 n 的合成列，则每一个 M 的合成列的长度都是 n，并且每一个链都可以扩充为一个合成列.

证明： 我们令

$$\ell(M) = M \text{ 中合成列的最短长度}$$

其中如果 M 没有合成列，则 $\ell(M) = +\infty$.

Claim 1: 若 $\ell(M) < +\infty$，则对于 $N \subsetneq M$，有 $\ell(N) < \ell(M)$.

考虑 $\{M_i\}$ 为 M 的最短长度的合成列，则我们注意到

$$N_i = M_i \cap N \subset N$$

并且

$$N_i/N_{i+1} \subset M_i/M_{i+1}$$

所以我们知道 $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ 或者 0，从而 $\{N_i\}$(去掉某些重复项) 是 N 的合成列，于是 $\ell(N) \leq \ell(M)$. 如果取等，说明所有的 $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$，于是 $N_{n-1}/N_n = M_{n-1}/M_n$，由于 $N_n = M_n = 0$，于是 $N_{n-1} = M_{n-1}$，于是 $N_{n-2} = M_{n-2}$，以此类推，这告诉我们 $N = M$.

Claim 2: 所有合成列都有相同的长度.

如果 M 的某个合成列 $\{M_i\}$ 的长度为 k，我们知道 M_1 的合成列长度为 $k-1$，而我们知道 $\ell(M_1) < \ell(M) = n$，于是 $k \leq n$.

所以所有合成列的长度都小于等于 n.

再假设存在某个合成列长度小于 n，这与 n 的取法矛盾，于是我们知道所有合成列长度相同.

假设某个链的长度小于 n，我们知道肯定不是合成列，从而可以往其中插入某些项使得长度更大，重复操作我们得到结论. □

命题 7.2.2: Composition series $\iff$ a.c.c + d.c.c

M 有一个合成列 $\iff$ M 满足两个链条件(即 a.c.c 与 d.c.c).

证明： $\Rightarrow$ 是显然的.

$\Leftarrow$: 由于满足两个 a.c.c，我们知道存在一个极大的子模 $M_1 \subset M_0 = M$，同理 M_1 存在极大子模 M_2，以此类推得到一个降链，但是由于 d.c.c，我们知道降链是有限的，于是我们得到了一个 M 的合成列. □

定义 7.2.3: Finite length

M 是**有限长度的**，如果 M 有一个合成列.

Remark 7.2.1

$\ell(\bullet)$ 其实是一个加性函数，我们考虑正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

我们知道 $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$.

命题 7.2.3

$\ell(\cdot)$ 是有限长度 A-模的一个加性函数.

证明: 考虑正合列

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

我们要说明 $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$. 取 M' 的一个合成列在 α 的像，再取 M'' 的一个合成列在 β 下的原像，我们知道

$$\alpha(M') = \beta^{-1}(0)$$

于是我们可以把这两个合成列合起来，即

$$M = \beta^{-1}(M_0'') \supsetneq \beta^{-1}(M_1'') \supsetneq \cdots \supsetneq \beta^{-1}(M_s'' = 0) = \alpha(M_0') \supsetneq \alpha(M_1') \supsetneq \cdots \supsetneq \alpha(M_t') = 0$$

得到一个新的合成列，于是我们知道

$$\ell(M) = s + t = \ell(M') + \ell(M'')$$

所以是一个加性函数. $\square$

命题 7.2.4: 线性空间与合成列

V 是域 k 上的一个线性空间，TFAE:

(1) V 有限维.

(2) V 作为 k-模是有限长度.

(3) V 作为 k-模 a.c.c.

(4) V 作为 k-模 d.c.c.

证明: (1) 推 (2) 是显然的，(2) 推 (3),(4) 我们在之前已经说明过，有先长度当且仅当满足两个链条件.

现在只需要说明 (3) 推 (1) 和 (4) 推 (1)，我们假设 V 不是有限维的，取出一组无限基 v_i，我们令

$$U_n = \mathrm{Span}\{v_1, \cdots, v_n\}, \quad V_n = \mathrm{Span}\{v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots\}$$

我们知道 U_n 是无限升链，V_n 是无限降链，于是与 a.c.c 与 d.c.c 矛盾. $\square$

推论 7.2.1

A 是一个环，A 的极大理想 $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n$ 满足 $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_n = (0)$，则 A Noehter $\iff$ Artin.

证明: 考虑 $A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_n = 0$，我们知道 $\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_i$ 是一个 $A/\mathfrak{m}_i$ 上的线性空间，于是 a.c.c $\iff$ d.c.c. 反复使用命题 7.1.2 我们知道 A a.c.c(或者 d.c.c) 当且仅当每一个 $\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_i$ a.c.c(或者 d.c.c)，于是得证. $\square$

Chapter 8: Noether性及Hilbert基定理

8.1 Noether环与Noether模

定义 8.1.1: Noether环

设 R 是一个交换幺环，如果 R 的任意理想都是有限生成的，则 R 被称为 *Noether* 环.

命题 8.1.1: Noether环的等价定义

TFAE:

1. R 是诺特环.
2. R 的严格理想升链必停止.
3. R 的理想构成的非空子集有极大元.

证明:

(1) ⇒ (2): 任取一个理想升链

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

取 $I = \bigcup I_n$，容易知道有 I 是一个理想，由 R 诺特，知道 I 有限生成，我们设

$$I = (f_1, \cdots, f_k)$$

从而我们知道一定存在某个 I_t 使得 $(f_1, \cdots, f_k) \subset I_t$，从而有

$$I_t = I_{t+1} = \cdots$$

(2) ⇒ (3): 任意非空子集可以取出一个升链，从而由升链必停止知道有极大元.
(3) ⇒ (1): 如果存在理想不有限生成，则一直可以取出

$$(f_1) \subsetneq (f_1, f_2) \subsetneq (f_1, f_2, f_3) \subsetneq \cdots$$

没有极大元，与条件矛盾. □

定义 8.1.2: Noether模

如果R-模 M 的所有子模都是有限生成的，则称 M 为***Noether*模**.

命题 8.1.2: Noether模等价定义

下面条件等价:

(1) M 是诺特模.

(2) M 的严格子模升链必停止.

(3) M 子模构成的非空子集有极大元.

Remark 8.1.1

注意到我们把模 M 取称 R，此时诺特模即变成诺特环. 所以诺特模是比诺特环更加一般的概念.

命题 8.1.3: 局部化保持诺特

A 是一个 Noether 环，S 是一个乘法封闭子集，则 $S^{-1}A$ 是诺特环.

证明: 对于任意 $S^{-1}A$ 的理想 $\mathfrak{a}$，我们知道 $\mathfrak{a}^c$ 作为 A 的理想有限生成，设由 $x_1, \cdots, x_n$ 生成，于是我们知道 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ce} = S^{-1}\mathfrak{a}^c$ 由 $x_1/1, \cdots, x_n/1$ 生成，于是任意理想有限生成，所以是 Noether 的. □

Remark 8.1.2

另证：我们知道 $S^{-1}A$ 的理想与 A 中与 S 无交的局限理想一一对应，从而我们知道满足有限升链条件.

推论 8.1.1

A 是 Noether 环，$\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想，则 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 Noether 环.

8.2 环上的Hilbert基定理

定理 8.2.1: Hilbert Basis Theorem

R 是交换幺环，R 诺特，则 $R[x]$ 诺特.

证明: 我们先定义首项的概念，如果

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

则称 $a_n x^n$ 为 f 的首项，a_n 为 f 的首项系数.

令 $I \subset R[x]$ 为 R 中理想，令 f_1 为 I 中次数最低的元素，下面归纳定义 f_i: 对 $i \geq 1$，如果 $(f_1, \cdots, f_i) \neq I$，取 f_{i+1} 为 I 中不在 $(f_1, \cdots, f_i)$ 里次数最低的元素，如果 $(f_1, \cdots, f_i) = I$，则结论成立.

下面令 a_j 为 f_j 的首项系数，由于 R 诺特，则理想

$$J = (a_1, a_2, \cdots)$$

是有限生成的，设 m 是最小的使得 $J = (a_1, \cdots, a_m)$ 成立的整数，我们下面说明

$$I = (f_1, \cdots, f_m)$$

反之，存在 f_{m+1}，但是注意到 f_{m+1} 的首项系数

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{m}u_ja_j$$

我们定义

$$g=\sum_{j=1}^{m}u_jf_jx^{\deg f_{m+1}-\deg f_j}\in(f_1,\cdots,f_m)$$

则我们知道 $f_{m+1}-g$ 是 I 中不在 $(f_1,\cdots,f_m)$ 里且次数比 f_{m+1} 更低的多项式，这与条件矛盾.
从而我们知道结论成立. □

Remark 8.2.1
这个证明还是有些限制，我们后面会在分次环与 Gröbner 基中看到其他想法的证明，会更加一般化.

推论 8.2.1

诺特环的同态像也是诺特环. 更多的，如果 R_0 是诺特环，R 是有限生成 R_0 代数，则 R 是诺特的.

证明: 由于 R 的同态像一定同构于 R/J，其中 J 为 R 中理想，从而我们知道 R/J 中理想的原像是有限生成的，从而知道生成元的像生成理想.

由 R 为 R_0 上的有限生成代数，从而我们知道 R 是 $S=R_0[x_1,\cdots,x_r]$ 的同态像，从而我们知道 S 诺特，从而由于 R 是 S 的同态像，知道 R 是诺特的. □

命题 8.2.1: 幂级数环上的Hilbert基定理

若 R 是诺特环，则 $R[[x]]$ 是诺特环.

证明: 此时无法去考虑最低次数的多项式，但是我们可以反向考虑最低项的次数，我们考虑如下：

设 I 为 $R[[x]]$ 的一个理想，定义其系数理想

$$J_n:=\{a\colon \exists f=ax^n+\sum_{k>n}a_kx^k\in I\}$$

我们显然知道有

$$J_0\subset J_1\subset J_2\subset\cdots$$

由于 R 诺特，从而存在 N 使得任意 $n\geq N$ 有 $J_n=J_N$. 对于每一个 $0\leq k\leq N$，存在 J_k 的有限生成元 $\{g_{k1},\cdots,g_{ks}\}$.

对于每一个 g_{ki}，存在对应的幂级数 f_{ki}，我们下面说明 $\{f_{ki}\}$ 生成了 I.

对于任意的 $f\in I$，设 f 的最低项为 ax^k，有 $a\in J_k$，从而存在生成元

$$a=\sum a_ig_{ki}$$

考虑 $f-\sum a_if_{ki}$ 最低次数更高，我们逐步归纳地可以将最低次数提升上去，最后由幂级数的收敛性我们得到证明. □

命题 8.2.2: Artin-Tate

$A\subset B\subset C$ 为环，A 是 *Noether* 环，C 为有限生成 A-代数，并且 C 满足下面两个条件之一

(1) C 是有限生成 B-模.

(2) C 是 B 的整扩张.

则 B 是有限生成 A 代数.

证明: 由于 C 是有限生成 A-代数，从而更是有限生成 B-代数，于是我们知道条件 (1)(2) 在这个意义下是等价的，因为

$$\text{有限生成代数}+\text{整扩张} \iff \text{有限代数}$$

我们令 $x_1,\cdots,x_m$ 为 C 作为 A-代数的生成元，令 $y_1,\cdots,y_n$ 为 C 作为 B-模的生成元，我们有

$$x_i=\sum_j b_{ij}y_j,\quad b_{ij}\in B;\quad y_iy_j=\sum_k b_{ijk}y_k,\quad b_{ijk}\in B$$

令 B_0 是 b_{ij} 与 b_{ijk} 生成的有限生成 A-代数，我们知道 B_0 是 Noether 的，有 $A\subset B_0\subset B$.

由于 C 的任何元素都是系数在 A 中的 $x_1,\cdots,x_m$ 的多项式，所以我们反复使用上面的关系降次可以知道 C 中的元素是 y_i 的线性组合，所以 C 是有限生成 B_0 模，由于 B_0 是 Noehter 的，所以 B 作为 C 的子模是有限生成 B_0-模，又由于 B_0 是有限生成 A-代数，所以知道 B 是有限生成 A-代数. □

8.3 模上的Hilbert基定理

定理 8.3.1: Hilbert Basis Theorem on Modules

R 是诺特环，M 是有限生成 R-模，则 M 是诺特模.

证明: 设 M 由 $f_1,\cdots,f_t$ 生成，令 N 为 M 的子模，我们下面证明 N 是有限生成的.

如果 $t=1$，则显然成立，下面假设 $t>1$，且小于 t 时成立. 则 N 在 M/Rf_1 中的像 $\widetilde{N}$ 是有限生成的，令 $g_1,\cdots,g_s$ 为 N 中的元素，其像生成 $\widetilde{N}$. 由于 $Rf_1\subset M$，且由 f_1 生成. 由 $N\cap Rf_1$ 为 Rf_1 的子模由归纳假设知道是有限生成的，记生成元为 $h_1,\cdots,h_r$.

我们下面说明 $h_1,\cdots,h_r$ 和 $g_1,\cdots,g_s$ 生成了 N：对于任意的 $n\in N$，则 n 在 $\widetilde{N}$ 中的像为 g_i 的像的线性组合，则我们知道 N 中的元素可以表示为 $\widetilde{N}$ 中一个原像与 $N\cap Rf_1$ 中元素的和，从而我们得证. □

我们下面通过正合列的手段来看一下现代的证明方法.

命题 8.3.1

已知模的正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

则 B 是诺特模当且仅当 A,C 都是诺特模.

证明: $\Rightarrow$: 已知 B 是诺特模，由于 A 可以看成是 B 的子模，从而 A 显然是诺特的(诺特模子模的子模还是诺特模的子模，从而有限生成). 又由于 C 可以看做是 B 的商模，显然诺特模的商模还是诺特的，从而 C 也诺特.

$\Leftarrow$: 若 A, C 都是诺特模，我们下面说明 B 满足升链条件，设 B 的一个子模升链为

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots$$

通过满射 $g\colon B \to C$，我们可以得到 C 中的子模升链:

$$g(N_1) \subset g(N_2) \subset \cdots$$

从而由于 C 诺特，知道存在 k 使得

$$g(N_k) = g(N_{k+1}) = \cdots$$

把 A 视作是 B 的子模，我们得到 A 中的子模升链

$$A \cap N_1 \subset A \cap N_2 \subset \cdots$$

同理有存在 l，使得

$$A \cap N_l = A \cap N_{l+1} = \cdots$$

所以我们取 $i \geq \max\{k, l\}$，对任意的 $n \in N_{i+1}$，存在 $m \in N_i$ 使得 $g(n) = g(m)$，从而 $n - m \in \operatorname{Ker} g = A$. 我们知道 $N_i \cap A = N_{i+1} \cap A$，从而有 $n - m \in N_{i+1} \cap A = N_i \cap A$，从而有

$$n = n - m + m \in N_i$$

所以有 $N_{i+1} \subset N_i$，即 $N_i = N_{i+1}$. 从而升链最终稳定，我们知道 B 诺特. □

Remark 8.3.1

这是一个非常有用的结论，我们有如下应用：

若 A, B 是诺特模，则 $A \oplus B$ 是诺特模，因为有

$$0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$$

若 R 是诺特模，则有

$$0 \to R \to R^2 \to R \to 0$$

从而 $R^2 = R \oplus R$ 诺特，然后通过归纳，我们得到

$$0 \to R \to R^n \to R^{n-1} \to 0$$

即 R^n 诺特.

最后我们再来看一下模上 Hilbert 基定理利用正合列的证明：

证明: M 是有限生成 R-模，设生成元为 $f_1, \cdots, f_n$，我们知道

$$M \cong R^n / \operatorname{Ker} f, \quad f\colon (a_1, \cdots, a_n) \mapsto a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$$

从而我们有

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to R^n \xrightarrow{f} M \to 0$$

所以由于 R^n 是诺特环，我们得到 M 是诺特环. □

命题 8.3.2: PID上自由模的子模还是自由模

设 D 是 PID，M 是 D 上有限秩自由模，若 N 是 M 的子模，则 N 是 D 上自由模.

证明: 由模上的 Hilbert 基定理，由于 D 诺特，M 有限生成，从而知道 M 是诺特模，从而 N 有限生成，设生成元为

$$u_1,\cdots,u_r$$

设 M 的生成元为

$$v_1,\cdots,v_n$$

有

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

我们知道存在 D 上可逆矩阵 P,Q 使得

$$P\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} QQ^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left\{d_1,\cdots,d_m,0,\cdots,0\right\} Q^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

令

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

从而知道 $N \cong D(d_1e_1) \oplus D(d_2e_2) \oplus \cdots D(d_me_m)$ 为自由模.

□

8.4 Noether 环上的准素分解

定义 8.4.1: Irreducible ideals

一个理想 $\mathfrak{a}$ 称为**不可约的**，如果

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad or \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$$

换言之，$\mathfrak{a}$ 不能表示为两个真包含 $\mathfrak{a}$ 的理想的交.

引理 8.4.1

A 是 Noether 环，则 A 的每一个理想都是有限个不可约理想的交.

证明: 假设不成立，则 A 中不满足条件的理想构成的集合非空，从而由 A Noether，知道有极大元 $\mathfrak{a}$，由于 $\mathfrak{a}$ 是不能表示为不可约理想的交，所以 $\mathfrak{a}$ 是可约的，即存在 $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{c}$，使得 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. 但是我们知道 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{c}$ 都是有限个不可约理想的交，所以 $\mathfrak{a}$ 也是，矛盾. □

引理 8.4.2

Noether 环中的不可约理想都是准素的.

证明: 我们先说明可以传递到商环中，即如果 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 是准素的，则 $A/\mathfrak{a}$ 的零理想是准素理想，反过来如果 $A/\mathfrak{a}$ 的 (0) 是准素理想，则其原像 $\mathfrak{a}$ 也是准素的.

所以我们现在只需要对于不可约的零理想证明即可，令 $xy=0$，并且 $y\neq 0$，则我们知道

$$\mathrm{Ann}(x)\subset \mathrm{Ann}(x^2)\subset\cdots$$

会停止，从而存在 n 使得 $\mathrm{Ann}(x^n)=\mathrm{Ann}(x^{n+1})=\cdots$，这告诉我们

$$(x^n)\cap(y)=0$$

这是因为如果 $a\in(y)$ 则 $ax=0$，则如果 $a\in(x^n)$，即 $a=bx^n$，有 $bx^{n+1}=0$，因此有 $b\in\mathrm{Ann}(x^{n+1})=\mathrm{Ann}(x^n)$，于是 $bx^n=0$，也就是 $a=0$.

由于 (0) 是不可约的，并且 $(y)\neq 0$，所以我们知道 $(x^n)=(0)$，也就是 $x^n=0$，所以 (0) 是准素的. □

命题 8.4.1: Lasker-Noether

Noether 环 A 的每个理想都有一个准素分解.

证明: 由于每个理想都是有限个不可约理想的交，而不可约理想都是准素的，得证. □

命题 8.4.2

在 *Noether* 环 A 中，每个理想 $\mathfrak{a}$ 都包含其根 $r(\mathfrak{a})$ 的一个幂次.

证明: 令 $x_1,\cdots,x_k$ 生成 $r(\mathfrak{a})$，由于 $x_i^{n_i}\in\mathfrak{a}$，令 $m=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)+1$，我们知道 $r(\mathfrak{a})^m$ 由 $x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$ 生成，其中 $\sum r_i=m$，由抽屉原理我们知道至少有一个 $r_i\geq n_i$，从而我们知道 $r(\mathfrak{a})^m\subset\mathfrak{a}$. □

推论 8.4.1

诺特环的幂零元根是幂零的.

证明: 正在上面命题中取 $\mathfrak{a}=(0)$ 即可. □

推论 8.4.2

A 是 *Noether* 环，$\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想，$\mathfrak{q}$ 是 A 的理想，*TFAE:*

(1) $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的.

(2) $r(\mathfrak{q})=\mathfrak{m}$.

(3) $\mathfrak{m}^n\subset\mathfrak{q}\subset\mathfrak{m}$ 对于某个 $n>0$ 成立.

证明: (1) 推 (2) 是定义，(2) 推 (1) 是命题 5.1.2，(2) 推 (3) 就是上面的命题，(3) 推 (2) 取根之后是显然的. □

定理 8.4.1

A 是 *Noether* 环，$I \subset A$ 是理想，则

(1) $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$，其中 $\mathfrak{q}_i \subset A$ 是准素理想并且 $\forall i \neq j$，有 $r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$.

(2) 令 $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$，则 $\mathrm{Ass}_A(A/I) = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$ 由 I 唯一决定.

(3) 如果 $\mathfrak{p} \supset I$ 是包含 I 的一个极小素理想，则存在 i 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}_A(A/I)$ 并且对应的准素理想 $\mathfrak{q}_i$ 被 I 与 $\mathfrak{p}_i$ 唯一决定.

证明: 考虑准素分解的第一和第二唯一性定理即可. □

Remark 8.4.1

只有有限多个包含 I 的极小素理想. 我们还是假设 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$，我们知道有

$$r(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I, \mathfrak{p} \text{ minimal}} \mathfrak{p}$$

最右端是一个有限交.

Chapter 9: Hilbert's Nullstellensatz

9.1 Noether正规化定理

定理 9.1.1: Noether正规化定理

k 是一个域，$A \neq 0$ 是有限生成的 k-代数，则存在 k-代数无关的 $t_1, \cdots, t_n \in A$，使得 A 在 $k[t_1, \cdots, t_n]$ 上整并且是有限代数.

证明: 令 $y_1, \cdots, y_m \in A$，使得 $A = k[y_1, \cdots, y_m]$，如果 $y_1, \cdots, y_m$ 本身就是代数无关的，则结束.

如果不是代数无关的，则存在 $f \in k[x_1, \cdots, x_m]$ 使得

$$f(y_1, \cdots, y_m) = 0$$

设 $d = \deg(f) + 1$，对于任意的单项式

$$\alpha = a x_1^{d_1} \cdots x_m^{d_m}$$

令 $\ell(\alpha) = d d_1 + d^2 d_2 + \cdots d^{m-1} d_{m-1} + d_m$.

则对于任意的 f 中单项式 $\alpha \neq \beta$，则 $\ell(\alpha) \neq \ell(\beta)$.

于是对于任意的 $1 \leq i \leq m-1$，令 $x_i = y_i - y_m^{d^i}$，则

$$f(x_1 + y_m^d, x_2 + y_m^{d^2}, \cdots, x_{m-1} + y_{m-1}^{d^{m-1}}, y_m) = 0$$

从而对于任意的 f 中单项式 $\alpha = a x_1^{d_1} \cdots x_m^{d_m}$，得到 $a y_m^{\ell(\alpha)}$.

从而 y_m 在 $k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 上整，并且

$$A = k[x_1, \cdots, x_{m-1}, y_m]$$

于是 A 在 $k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 上整，那么归纳，知道存在 $B \subset k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 同构于多项式代数，并且 $k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 在 B 上整，则 A 在 B 上整. □

推论 9.1.1: Zariski 引理

A 是有限生成 k-代数，若 A 是一个域，则 A 是一个 k 的有限扩张.

证明: 由 Noether正规化定理我们知道存在一个同构于多项式环的 k-子代数 $R \subset A$，使得 A 在 R 上整，我们下面说明 $R = k$.

反之，则 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$，则 $x_1^{-1} \in A \backslash R$，这不可能，这是因为多项式环是整闭的. □

9.2 Hilbert零点定理

推论 9.2.1: 弱零点定理

k 是代数闭域，$n \geq 1$，考虑 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$，则

(1) 任意 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 都形如 $(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$.

(2) $I \subsetneq k[x_1, \cdots, x_n]$ 是理想，则存在 $(a_1, \cdots, a_n) \in k^n$，使得

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \quad \forall f \in I$$

证明: (1) 对于任意的 $\mathfrak{m} \subset R$ 是极大理想，我们知道

$$k[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m}$$

是 k 的一个有限扩张，再由 k 是代数闭，我们知道

$$k[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m} \cong k$$

令 a_i 为 x_i 在 $R/\mathfrak{m}$ 中的像，我们知道

$$(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) \subset \mathfrak{m}$$

再由于是极大理想，我们知道 $(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) = \mathfrak{m}$.
(2) 任取极大理想 $\mathfrak{m} \supset I$，我们知道 $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$，则我们知道成立. □

定理 9.2.1: 零点定理代数形式

k 是域，A 是有限生成 k 代数，则*(用 $J(A)$ 表示 A 的大根，也叫 Jacobson 根)*

$$J(A) = \mathrm{Nilrad}(A)$$

证明: 不妨设 $A \neq 0$，若 $J(A) \supsetneq \mathrm{Nilrad}(A)$，取 $a \in J(A) \setminus \mathrm{Nilrad}(A)$，则我们取

$$S = \{1, a, a^2, \cdots\} \subset A$$

为一个乘法封闭子集，我们知道 $A_a \neq 0$，取一个 A_a 的极大理想 $\mathfrak{p}$，并且我们知道 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$ 是 $\mathfrak{p}$ 在 $A \to A_a$ 的原像，结合前面的推论我们知道 $A_a/\mathfrak{p}$ 是 k 的有限扩张.

由于 $A/\mathfrak{q} \subset A_a/\mathfrak{p}$，由于是有限生成的，我们由等价条件知道 $A/\mathfrak{q}$ 在 k 上整，这告诉我们 $A/\mathfrak{q}$ 是域，即 $\mathfrak{q}$ 是极大理想，但是与 $a \notin \mathfrak{q}$ 矛盾. □

推论 9.2.2

k 是域，$I \subsetneq k[x_1, \cdots, x_n]$ 为理想，则

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ max ideal}} \mathfrak{m}$$

证明: 我们只需要考虑 $A=k[x_1,\cdots,x_n]/I$，我们有

$$J(A)=\mathrm{Nilrad}(A)$$

注意这里的 $\mathrm{Nilrad}(A)$ 在商环原像就是 $\sqrt{I}$，而 $J(A)$ 拉回去的原像就是所有包含 I 的极大理想之交. □

定理 9.2.2: Hilbert's Nullstellensatz(强形式)

k 是代数闭域，考虑环 $k[x_1,\cdots,x_n]$，则映射

$$\Phi\colon\{\text{根理想}\}\to\{\mathbb{A}^n(k)\ \text{中闭集}\},\quad \mathfrak{a}\mapsto V(\mathfrak{a})$$

是一个双射，其逆映射 Φ^{-1} 定义为

$$V\mapsto\{f\in k[x_1,\cdots,x_n]\mid \forall x\in V: f(x)=0\}$$

证明: 我们只需要说明

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\Phi^{-1}(V(\mathfrak{a}))$$

这是因为如果有这个式子成立，则对根理想 $\mathfrak{a}$ 显然有

$$\Phi^{-1}\circ\Phi(\mathfrak{a})=\Phi^{-1}(V(\mathfrak{a}))=\sqrt{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}$$

所以 Φ 显然是单射. 另一方面，由于任意的 $V=V(\mathfrak{a})=V(\sqrt{\mathfrak{a}})$，所以显然是满射，于是双射.

下面说明上面的 claim 是正确的，我们很容易得到其中包含关系

$$\sqrt{\mathfrak{a}}\subset\Phi^{-1}(V(\mathfrak{a}))$$

下面只要说明另一边，也就是对于任意的 $f\notin\sqrt{\mathfrak{a}}$，我们要找到一个点 $x\in V$ 使得 $f(x)\neq 0$. 考虑

$$R=k[x_1,\cdots,x_n,y]/(\mathfrak{a},f(x_1,\cdots,x_n)y-1)\cong S_{\overline{f}}^{-1}(k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{a})$$

其中 $S_{\overline{f}}=\{\overline{f}^n\}_{n\geq 0}$，$\overline{f}$ 为 f 在 $k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{a}$ 中的像，如果 $R=0$，由局部化相关知识我们知道 $S_{\overline{f}}$ 含零，也就是 $\overline{f}$ 是幂零的，所以 $f\in\sqrt{\mathfrak{a}}$ 矛盾，所以 R 不为零.

再由于 R 为有限生成 k-代数，取一个 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$，令 $R_0=R/\mathfrak{m}$，所以 R_0 是一个域，且是一个有限生成 k-代数，由推论 9.1.1 知道 R_0 是 k 的有限扩张，从而是代数扩张，但是 k 是代数闭的，所以有 $R_0\cong k$，我们设这个同构为 $\varphi\colon R_0\to k$.

于是我们有代数同态

$$k[x_1,\cdots,x_n,y]\to kR\to R/\mathfrak{m}\xrightarrow{\varphi}k,\quad \Psi\colon k[x_1,\cdots,x_n,y]\to k$$

R 非零，任取 R 中幺元 1_R，有 1_R 在上面同态下的像为

$$1_R\to 1_k$$

注意在 R 中 $1_R=\overline{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)y}$，取 $x_1,\cdots,x_n,y$ 在同态下的像为 $a_1,\cdots,a_n,b\in K$，我们有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)b=1$$

这告诉我们 $f(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$，但是对于任意的 $g\in\mathfrak{a}$，有 $\mathfrak{a}\subset\mathrm{Ker}\,\Psi$，于是

$$g(a_1,\cdots,a_n)=\Psi(g(x_1,\cdots,x_n))=0$$

所以 $x=(a_1,\cdots,a_n)\in V(\mathfrak{a})$，但是 $f(x)\neq 0$，故得证. □

Remark 9.2.1
我们实际上是想说明

$$I(V(\mathfrak{a}))=\sqrt{\mathfrak{a}}$$

这实际上利用前面的零点定理的变体可以更快速地得到. 考虑 $\mathfrak{a}$ 是 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 的一个理想，我们由推论 9.2.2 可以得到

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\bigcap_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m},\mathfrak{m}\quad \text{max ideal}}\mathfrak{m}$$

注意到若令 $p=(a_1,\cdots,a_n)$，$\mathfrak{m}_p=(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$，则

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}_p \iff \forall f\in\mathfrak{a}, f(p)=0 \iff p\in V(\mathfrak{a})$$

所以我们注意到

$$I(V(\mathfrak{a}))=\bigcap_{p\in V(\mathfrak{a})}\mathfrak{m}_p=\bigcap_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m},\mathfrak{m}\quad \text{max ideal}}\mathfrak{m}$$

所以得到了

$$I(V(\mathfrak{a}))=\bigcap_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m},\mathfrak{m}\quad \text{max ideal}}\mathfrak{m}=\sqrt{\mathfrak{a}}$$

Remark 9.2.2
注意到代数形式并不要求 k 是代数闭的，所以代数形式实际上对应的是更加普遍的情况，同时也把零点定理的含义翻译出来：即函数如果在所有点为 0，则就是幂零的.

Remark 9.2.3
其背后的代数结构为：有限生成代数一定是 Jacobson 环. 所谓 Jacobson 环指满足所有素理想都是极大理想的交的环. 其证明也很简单，我们考虑 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想，则 $B=A/\mathfrak{p}$ 仍然是有限生成代数，所以

$$J(B)=\text{Nilrad}(B)$$

拉回到 A 中即

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}}\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$$

Chapter 10: 初窥不变量理论

我们下面简单介绍一下 Hilbert 基定理在不变量理论中的运用.

10.1 不变量理论基本介绍

定义 10.1.1: 群的线性表示

一个群的线性表示 φ 是一个群同态
$$\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$$
其中 $\mathbb{F}$ 为任意域，n 称为表示的次数.

给定一个线性表示 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$，诱导了一个 G 在 V^* 上的作用: 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为对偶基，从而我们定义
$$g.x_i(v) = x_i(\rho(g)^{-1}(v))$$
我们定义 $\mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]$，记一个单项式为
$$x^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad I = (i_1, \cdots, i_n)$$
从而任一 $f \in \mathbb{F}[V]$ 都可以写作一个有限和
$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_I a_I x^I$$
我们可以定义一个 G 在单项式上的作用扩张：
$$g \cdot (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) = \left(g(x_1)^{i_1} \cdots g(x_n)^{i_n}\right)$$
从而得到一个 G 在所有多项式上的作用：
$$gf = g\left(\sum_I a_I x^I\right) = \sum_I a_I g(x^I)$$
所以我们知道
$$gf(v) = f(\rho(g)^{-1}v), \quad \forall g \in G, v \in V, f \in \mathbb{F}[V]$$
注意到 f 的次数在作用之下是不改变的(这并不是显然的，我们考虑 gf 的形式，显然我们知道 gf 的次数不会高于 f 的次数，同时由于作用是可逆的，从而有 $f = g^{-1}(gf)$ 的次数不高于 gf 的次数，即有 $\deg gf = \deg f$.)，从而我们知道
$$g\colon \mathbb{F}[V] \to \mathbb{F}[V], \quad f \mapsto gf$$

是一个零次分次环同态，换言之即对于任意的 $d \geq 0$，有同态

$$g\colon \mathbb{F}[V]_d \to \mathbb{F}[V]_d, \quad f \mapsto gf$$

定义 10.1.2: 不变元素与不变子环

我们称 $f \in \mathbb{F}[V]$ 是 G 作用下的不变元，如果

$$gf = f, \quad \forall g \in G$$

我们令 $\mathbb{F}[V]^G \subset \mathbb{F}[V]$ 为所有不变元构成的子集.

Remark 10.1.1

我们容易说明 $\mathbb{F}[V]^G$ 构成一个子环: 对于任意的 $f, g \in \mathbb{F}[V]^G$，任意 $a \in G$ 有

$$a(f-g) = af - ag = f - g, \quad a(fg) = a(f)a(g) = fg$$

从而构成 $\mathbb{F}[V]^G$ 实际上是一个子环.

Remark 10.1.2

由于不变元 f 在 $\rho(G)$ 下也不变，并且一个群可能有不同的表示，所以有时候会把不变子环记为 $\mathbb{F}[V]^{\rho(G)}$.

引理 10.1.1

令 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 是 G 的线性表示，令 $H = G/\operatorname{Ker}\rho$，则我们有

$$\mathbb{F}[V]^G = \mathbb{F}[V]^H$$

证明: 由定义 H 诱导了一个忠实表示

$$\overline{\rho}\colon H \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$$

则有 $H \cong \overline{\rho}(H)$，我们有

$$H \cong \overline{\rho}(H) = \overline{\rho}(G/\operatorname{Ker}\rho) = \rho(G)$$

所以有

$$\mathbb{F}[V]^G = \mathbb{F}[V]^{\rho(G)} = \mathbb{F}[V]^{\overline{\rho}(H)} = \mathbb{F}[V]^H$$

□

Remark 10.1.3

由引理我们知道可以不妨设表示是一个忠实表示.

命题 10.1.1

$\mathbb{F}[V]^G$ 是一个 $\mathbb{F}$-代数.

证明: 显然 $\mathbb{F}$ 中的元素都是不变的，特别地有

$$0, 1 \in \mathbb{F}[V]^G$$

如果 $f \in \mathbb{F}[V]^G$，显然有 $-f$ 也是不变元，下面假设 f_1, f_2 是不变元，从而有

$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2 = f_1 + f_2 \in \mathbb{F}[V]^G$$

还有

$$g(f_1 f_2) = g(f_1)g(f_2) = f_1 f_2 \in \mathbb{F}[V]^G$$

故知道 $\mathbb{F}[V]^G \subset \mathbb{F}[V]$ 是一个子环，并且有 $\mathbb{F}$ 模结构，从而为 $\mathbb{F}$-代数. □

注意到 $\mathbb{F}[V]^G$ 是一个整环，还可以继承 $\mathbb{F}[V]$ 的分次结构(作用是保次数的).

下面我们看一个具体的问题：令 $\{f_1, f_2, \cdots\} \subset \mathbb{F}[V]^G$ 是 $F[V]^G$ 作为 F-代数的极小生成元组，我们是否能得到 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是有限的？答案是肯定的.

在此之前先看一个例子：

Example 10.1.1

考虑群表示

$$\rho\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad 1 \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们下面可以说明

$$\mathbb{R}[x, y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \mathbb{R}[x^2, y]$$

显然有 x^2 与 y 都是不变元，下面考察一般的情况，由于群作用保次数，所以任何一个多项式的齐次部分都是不变元，所以不妨设 f 是齐次的，有

$$f(v) = f(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$$

考虑作用

$$1.f(v) = f(\rho(1)^{-1} v) = f(-x, y) = f(x, y)$$

从而我们知道 f 被 x^2 和 y 生成.

10.2 IT基本定理

引理 10.2.1

k 是一个域，令 $S = k[x_1, \cdots, x_r]$ 是一个按多项式次数分次的分次环. 令 R 为 S 的一个 k-子代数，如果 R 是 S 的一个直和项，即存在一个保持次数的 R 模同态 $\varphi\colon S \to R$ 使得 $\varphi|_R = id_R$，则 R 是有限生成 k-代数.

证明: 令 $m \subset R$ 是由 R 中所有次数严格大于 0 的齐次元素生成的 R 中理想. 由于 S 是诺特的，我们知道 Sm 是有限生成的，并且由于 m 是齐次理想，所以我们可以选择出 m 中齐次元素 $f_1, \cdots, f_s$ 生成 Sm.

下面我们假设 R' 是 S 中由 $f_1, \cdots, f_s$ 生成的 k-子代数，假设 $f \in R$ 是齐次元素，我们对 f 的次数归纳说明 $f \in R'$. 当 $\deg f = 0$ 的时候，我们有 $f \in k \subset R'$.

下面假设 $\deg f > 0$，有 $f \in m$，由于 f_i 生成了 Sm，我们可以说明

$$f = \sum g_i f_i$$

我们可以设 g_i 都是齐次元素，并且有

$$\deg g_i = \deg f - \deg f_i < \deg f$$

从而知道有

$$f = \varphi(g_i) f_i$$

由于 $\varphi(g_i)$ 次数比 f 严格低，并且 $\varphi(g_i) \in R$，从而知道 $\varphi(g_i) \in R'$，从而我们知道 $f \in R'$.

从而有 $R \subset R'$，反过来，由于 $f_1, \cdots, f_s$ 在 m 中，从而 $R' = \mathbb{F}[f_1, \cdots, f_s] \subset R$，故 R 为有限生成 $\mathbb{F}$-代数. □

Remark 10.2.1

我们在这里稍微解释一下为什么 R 为 S 的直和项与存在一个保持次数的 R 模同态 $\varphi\colon S \to R$ 使得 $\varphi|_R = id_R$ 等价.

若存在满足条件的同态，我们有正合列

$$0 \to \operatorname{Ker} \varphi \to S \to R \to 0$$

并且我们可以构造出 $h\colon R \to S, r \mapsto r$，从而有 $\varphi \circ h = id_R$，从而我们知道正合列分裂

$$S \cong \operatorname{Ker} \varphi \oplus R$$

反之如果为直和项，很容易构造出满足条件的同态，取投影映射即可.

定理 10.2.1: 弱IT基本定理(Hilbert's finiteness result)

设 k 是特征零的域，令 $S = k[x_1, \cdots, x_r]$，$G \subset \operatorname{Aut}(S)$ 是有限群，则 S^G 是有限生成的.

证明: 我们只需要考虑一个保持次数的模同态[1]:

$$\varphi\colon S \to S^G, \quad f \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf$$

所以我们只需要在引理里面取 $R = S^G$ 即可. □

定理 10.2.2: 强IT基本定理

$\mathbb{F}$ 是一个域，$R = \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]$，$G$ 是一个有限群，则 R^G 是有限生成 $\mathbb{F}$ 代数.

证明: 我们注意到 $\mathbb{F} \subset R^G \subset R$，其中 $\mathbb{F}$ 是域，从而 Noether，R 是 $\mathbb{F}$ 的有限生成代数，我们下面只要说明 R 是 R^G 的整扩张，则由 Artin-Tate 定理我们就知道 R^G 是有限生成 $\mathbb{F}$ 代数.

对于 x_i，我们考虑多项式

$$\Phi_{x_i}(x) = \prod_{g \in G} (x - gx_i)$$

由于对于任意的 $h \in G$，有

$$h\Phi_{x_i}(x) = \prod_{g \in G} (hx - hgx_i) = \prod_{hg \in G} (x - hgx_i) = \prod_{g \in G} (x - gx_i) = \Phi_{x_i}(x)$$

所以我们知道 $\Phi_{x_i}(x)$ 的系数都在 R^G 中，于是 x_i 在 R^G 上整，于是我们知道 R 在 R^G 上整，得证. □

[1]这里其实有 gap，我并不知道如何说明 φ 是保持次数的，但是纵观证明，发现其实只需要用到 φ 是保持次数不上升的即可，而这一点是显然的.

Chapter 11: Gröbner基

11.1 单项式理想和Dickson引理

定义 11.1.1: 单项式理想

理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 被称为**单项式理想**，如果存在一个 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 的子集(可以是无穷子集) A，对 $\alpha \in A$，记 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，令 $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$，使得 I 是由 $\{x^\alpha | \alpha \in A\}$ 生成的理想.

引理 11.1.1: 单项式理想的结构定理

令 $I = \langle x^\alpha | \alpha \in A \rangle$ 是一个单项式理想，则对于任意的单项式 $x^\beta \in I$，必定存在某个 $\alpha \in A$ 使得 $x^\alpha | x^\beta$.

证明: 如果 $x^\beta \in I$，则由定义知道

$$x^\beta = \sum_{i=1}^s h_i x^{\alpha_i}, \quad h_i \in K[x_1, \cdots, x_n],\ \alpha_i \in A$$

如果我们将 h_i 写成单项式的和，则有

$$x^\beta = \sum_{i=1}^s h_i x^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^s \left(\sum_j c_{ij} x^{\beta_{ij}} \right) x^{\alpha_i} = \sum_{i,j} c_{ij} x^{\beta_{ij}} x^{\alpha_i}$$

提取出右边所有 $\beta_{ij} + \alpha_i = \beta$ 的项，我们知道

$$x^\beta = \sum_{\beta_{ij}+\alpha_i=\beta} c_{ij} x^{\beta_{ij}} x^{\alpha_i}$$

注意此时至少存在一个 x^{α_i} 在右边出现，并且右边所有的单项式除去系数之外完全相同，所以有 x^{α_i} 整除右边的每一个单项式，所以 $x^{\alpha_i} \mid x^\beta$. □

从证明过程我们不难发现，整除 x^β 的单项式是从它的生成元中挑选出来的，所以我们自然有下面的结论：

推论 11.1.1

如果 $I = (x^{\alpha_1}, \cdots, x^{\alpha_k})$，则对于任意的单项式 $x^\beta \in I$，总存在 $i \in \{1, \cdots, k\}$，使得 $x^{\alpha_i} \mid x^\beta$.

我们注意到所有 x^α 的倍数都可以写成 $x^{\alpha+\gamma}$ 的形式，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，从而我们可以想到下面的结论：

引理 11.1.2

I 是一个单项式理想，$f \in K[x_1, \cdots, x_n]$，则下面条件是等价的：

(1) $f \in I$.

(2) f 的每一个单项式都落在 I 中.

(3) f 是 I 中单项式的线性组合.

证明： (3) 推 (2) 推 (1) 是显然的.

(2) 推 (3) 也是容易的.

(1) 推 (2) 的过程我们只需要完全仿照引理 11.1.1 的证明就可以了，把 f 的表达式完全拆成单项式的和，然后提取同类项即可.

由于 I 是单项式理想，设其生成元为 $\{m_i\}$，若 $f \in I$，则存在多项式 $h_1, h_2, \ldots, h_k \in K[x_1, \ldots, x_n]$，使得：

$$f = \sum_{i=1}^{k} h_i m_i$$

将每个 h_i 写成其单项式的线性组合：

$$h_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \mu_{ij}$$

其中$c_{ij} \in K$，μ_{ij}为单项式，代入后，f可表示为：

$$f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} (\mu_{ij} m_i)$$

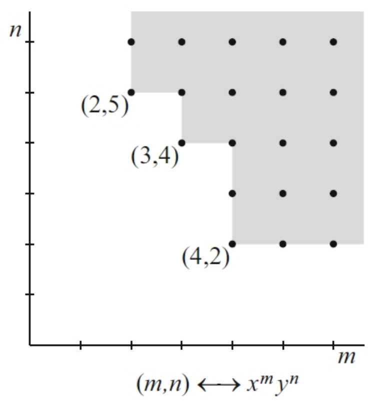
每个 $\mu_{ij} m_i$ 仍是单项式，因此，f 的所有单项式项均为 $\mu_{ij} m_i$，而 $\mu_{ij} m_i \in I$ (因为 $m_i \in I$)，故 f 的每个单项式项都属于 I，即(2)成立. □

定理 11.1.1: Dickson引理

S 为 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 上的单项式集合，则在整除偏序关系下只有有限个极小元.

证明： 实际上由 Hilbert 基定理，引理 11.1.2 以及推论 11.1.1 立刻得到.

我们下面来看一种比较有启发性的证明：以二元情况 $K[x_1, x_2]$ 为例，将 x, y 的次数在格点上作图，考虑下面的步骤



(1) 圈出 S 中最左侧且最下方的点 (k,m)，并划去 S 中在 (k,m) 上方和右方的所有点.

(2) 将剩下的点重新看作一个新的集合，重复 (1) 的操作.

(3) 由于每次圈出的点总是严格向下一行运动，所以有限步内必停止.

n 元情况同理可证明. □

定理 11.1.2: Dickson引理更好用的版本

I 是单项式理想，则 I 可以被有限个 I 中的单项式生成，即

$$I=(x^{\alpha_1},\cdots,x^{\alpha_n}),\quad x^{\alpha_i}\in I$$

证明: 首先由 Hilbert基定理我们知道 I 是有限生成的，注意 I 是单项式理想，所以由引理 11.1.2，I 的生成元 f_i 的每一个单项式都在 I 中，从而 I 由这些单项式生成，故结论得证. □

11.2 Gröbner基的存在性

定义 11.2.1: 单项式序

K 是域，$K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的**单项式序**定义为在所有单项式构成的集合上面的一个良序[a] "$\geq$"，满足对于任意的单项式 m,m_1,m_2，若 $m_1\geq m_2$，有 $mm_1\geq mm_2$.

[a] 良序指的是在全序的基础上，每一个非空子集都有最小元.

我们发现对于任意的单项式 m，考虑集合 $\{1,m,m^2,\cdots\}$ 是单项式集合的非空子集，从而存在最小元，如果最小元不是 1，则存在 $k\in\mathbb{N}^*$，使得 m^k 是最小元，即 $1\geq m^k$，且有 $m^k\geq m^{2k}\geq m^k$，即 $m^{2k}=m^k$，与 $k\neq 0$ 矛盾，故 1 是最小元，即对任意的 m，有 $m\geq 1$. 所以我们实际上有下面的结论：

定理 11.2.1: 单项式序的等价定义

$K[x_1,\cdots,x_n]$ 中任何满足 *(1)* 任意单项式 $m\geq 1$；*(2)* 任意单项式 m,m_1,m_2，若 $m_1\geq m_2$，有 $mm_1\geq mm_2$. 的全序都是良序，从而都是单项式序.

证明: 只需要证明所有非空单项式集都有全序关系下的最小元即可.

考虑 Hilbert 基定理，对于任意单项式的非空子集 S，考虑 S 生成的理想 I，我们知道 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 是 Noether 的，从而 I 有限生成，并且生成元可以选择 S 中的元素生成，不妨设

$$I=(x^{\alpha_1},\cdots,x^{\alpha_k}),\quad x^{\alpha_i}\in S$$

由推论 11.1.1 我们知道任意的单项式 $x^\beta\in S\subset I$，都存在 $x^{\alpha_i}|x^\beta$，从而有 $x^\beta\geq x^{\alpha_i}$，从而最小元必可以在 $x^{\alpha_1},\cdots,x^{\alpha_k}$ 中挑选出来. □

定义 11.2.2: 首项与首项理想

给定一个单项式序，对于 $f \in K[x_1, \cdot, x_n]$，在序关系下存在唯一的最高项，也称之为**首项**，我们定义 $\mathrm{LT}(f)$ 为 f 的首项[a].

对于理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$，我们可以定义 I 的**首项理想**如下

$$\mathrm{LT}(I) = (\mathrm{LT}(f) | f \in I)$$

[a] LT 是带系数的，LM 是不带系数的，但是我们既然在域上考虑，系数的影响可以忽略不计，所以我们就统一用 LT 了.

推论 11.2.1

由上面的定义我们容易知道：$\mathrm{LT}(fg) = \mathrm{LT}(f)\,\mathrm{LT}(g)$.

引理 11.2.1

S 是一族多项式，记 $\mathrm{LT}(S) = (\mathrm{LT}(f) | f \in S)$ 为 S 生成的首项理想. 对于 $g \in \mathrm{LT}(S)$，存在 $f \in S$，使得 $\mathrm{LT}(f) \mid \mathrm{LT}(g)$.

证明： 由引理 11.1.2 和引理 11.1.1 容易证明. □

命题 11.2.1

I 是 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 的非零理想，则 $\mathrm{LT}(I)$ 是单项式理想，且存在 $g_1, \cdots, g_t \in I$ 使得 $\mathrm{LT}(I) = (\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_t))$.

证明： 单项式理想是显然的，域上的系数随时可以消除掉.

由于 $\mathrm{LT}(I)$ 是由 $\mathrm{LT}(f), f \in I$ 生成的，所以由 Dickson 引理，我们知道

$$\mathrm{LT}(I) = (\mathrm{LM}(g_1), \cdots, \mathrm{LM}(g_t)), \quad g_i \in I$$

我们知道域中系数不重要，所以即有

$$\mathrm{LT}(I) = (\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_t)), \quad g_i \in I$$

□

由 Hilbert 基定理，我们有

$$I = (f_1, \cdots, f_n)$$

显然有

$$(\mathrm{LT}(f_1), \cdots, \mathrm{LT}(f_n)) \subset \mathrm{LT}(I)$$

一个自然的想法是我们能不能选择出来一组基使得

$$(\mathrm{LT}(f_1), \cdots, \mathrm{LT}(f_n)) = \mathrm{LT}(I)$$

定义 11.2.3: Gröbner基

一个 *Gröbner* 基指的是理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 的生成元 $g_1, \cdots, g_m$，使得

$$I = (g_1, \cdots, g_m), \quad \mathrm{LT}(I) = (\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_m))$$

为了说明 Gröbner基的存在性，我们先介绍一些引理：

引理 11.2.2

固定一个单项式序，令 $R = K[x_1, \cdots, x_n]$，设 $\{g_1, \cdots, g_m\}$ 是 I 的一组 *Gröbner*基，则对于 $\forall f \in R$，下面的写法是唯一的：

$$f = f_I + r$$

其中 $f_I \in I$ 并且 r 中的所有单项式均不被 $\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_m)$ 整除.

证明: 我们先证明这种分解的存在性：

(1) 如果 $\mathrm{LT}(f)$ 被某个 $\mathrm{LT}(g_i)$ 整除，则 $\mathrm{LT}(f) = a_i \mathrm{LT}(g_i)$，则把 $a_i g_i$ 加入 f_I 中，$f - a_i g_i$ 具有更低的首项.

(2) 如果 f 的首项不被任何一个 $\mathrm{LT}(g_i)$ 整除，则把 $\mathrm{LT}(f)$ 加入到 r 中，$f - \mathrm{LT}(f)$ 具有更低的首项.

我们反复这个过程，首项可以整除就放进 f_I 中，首项不能整除就放进 r 中，由于首项次数不断降低，所以总是可以在有限步内完成这个过程，最终得到

$$f = f_I + r, \quad f_I = q_1 g_1 + \cdots + q_m g_m$$

容易知道这样的分解满足条件，所以存在性得证，下面我们考虑唯一性，假设存在两种分解

$$f = f_I + r = f_I' + r'$$

从而有 $r - r' = f_I' - f_I \in I$，所以 $\mathrm{LT}(r - r')$ 是 $\mathrm{LT}(I)$ 中的元素，由于 $\{g_1, \cdots, g_m\}$ 是 Gröbner 基，我们知道任何 $\mathrm{LT}(T)$ 中元素的所有单项式都是某个 $\mathrm{LT}(g_i)$ 的倍数，所以

$$r - r' = \sum a_i r_i - \sum b_j r_j' = \sum c_k \overline{r}_k$$

中的所有 $\overline{r}_k$ 都是某个 $\mathrm{LT}(g_i)$ 的倍数，但是考虑 r 与 r' 的性质以及 $\overline{r}_k$ 一定是某一个 r 中的单项式与 r' 中的相同构成的单项式的差(如果不存在的话就是 r 中的某个单项式，或者 r' 中的某个单项式的相反数)，从而如果 $\mathrm{LT}(r - r')$ 不是 0，就必定有 $\mathrm{LT}(g_i) \nmid \mathrm{LT}(r - r'), \forall i$，进而由推论 11.1.1 可以知道矛盾，所以 $r - r' = 0$，故 $f_I = f_I'$，所以唯一性得证. □

定理 11.2.2: Gröbner基的存在性

固定一个单项式序. 任意的理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 都存在一个 *Gröbner*基.

证明: 由命题 11.2.1 知，存在 $g_1, \cdots, g_m$ 使得

$$\mathrm{LT}(I) = (\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_m))$$

我们下面说明 $I = (g_1, \cdots, g_m)$，显然有 $(g_1, \cdots, g_m) \subset I$，反过来，对于任意的 $f \in I$，我们由引理 11.2.2 可以知道 f 可以写成

$$f = \sum_{i=1}^{m} q_i g_i + r$$

其中 r 的任何单项式不被 $\mathrm{LT}(g_i)$ 整除. 由于 $f \in I$, 从而 $r \in I$, 这告诉我们 $\mathrm{LT}(r) \in \mathrm{LT}(I)$, 但是如果 $\mathrm{LT}(r) \in \mathrm{LT}(I)$, 就必定有某个 $\mathrm{LT}(g_i) \mid \mathrm{LT}(r)$, 这告诉我们 r 必须为 0, 否则矛盾.

从而 $f \in (g_1, \cdots, g_m)$, 这告诉我们 $I \subset (g_1, \cdots, g_m)$, 命题得证. □

11.3 Buchberger算法

定义 11.3.1

对于 $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$, 定义

$$S(f,g) = \frac{M}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{M}{\mathrm{LT}(g)} g$$

其中 M 是 $\mathrm{LT}(f), \mathrm{LT}(g)$ 的首一的最小公倍式.

Remark 11.3.1

会发现首项变低了, S 算符用来降次.

定义 11.3.2

定义 f 的 *multidegree* 为 f 的首项的 *multidegree*, 记为 ∂f.

引理 11.3.1

$f_1, \cdots, f_m \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 拥有相同的 *multidegree* α, 其线性组合

$$h = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m, \quad a_i \in K$$

的 *multidegree* 比 α 严格小, 则有表达式:

$$h = \sum_{i=2}^{m} b_i S(f_{i-1}, f_i), \quad b_i \in K$$

证明: 记 $f_i = c_i f_i'$, 其中 f_i' 是 multidegree 为 α 的首一的多项式, 我们有

$$\begin{aligned} h = \sum a_i c_i f_i' &= a_1 c_1 (f_1' - f_2') + (a_1 c_1 + a_2 c_2)(f_2' - f_3') + \cdots \\ &\quad + (a_1 c_1 + \cdots + a_{m-1} c_{m-1})(f_{m-1}' - f_m') + (a_1 c_1 + \cdots + a_m c_m) f_m' \end{aligned}$$

注意到 $f_{i-1}' - f_i' = S(f_{i-1}, f_i)$. 由于 h 与 $f_{i-1}' - f_i'$ 的 multidegree 都严格小于 α, 所以我们必须有

$$a_1 c_1 + \cdots + a_m c_m = 0$$

所以我们得证. □

命题 11.3.1: Buchberger's Criterion

令 $R = K[x_1, \cdots, x_n]$, 并且固定一个单项式序. 如果 $I = (g_1, \cdots, g_m)$ 是一个 R 的非零理想, 则 $G = \{g_1, \cdots, g_m\}$ 是 *Gröbner* 基当且仅当 $S(g_i, g_j) \equiv 0 (\mod G)$, 对任意的 $1 \le i < j \le m$.

证明: 如果是 Gröbner 基，由前面知道 $S(g_i, g_j) \in I$，故余式肯定为 0，从而我们知道成立.

反之，假设 $S(g_i, g_j) \equiv 0(\mod G)$，对任意的 $1 \leq i < j \leq m$ 成立，我们任取 $f \in I$，为了说明是 Gröbner 基，我们只需要说明 $\mathrm{LT}(f) \in (\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_m))$.

由于 $f \in I$，我们可以写成

$$f = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i$$

这种写法并不是唯一的(一般来说)，从所有的写法中选出使得 $\max \partial(h_i g_i)$ 最小的那一种，记为 α，显然有 $\partial f \leq \alpha$，有

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{m} h_i g_i = \sum_{\partial(h_i g_i)=\alpha} h_i g_i + \sum_{\partial(h_i g_i)<\alpha} h i g_i \\ &= \sum_{\partial(h_i g_i)=\alpha} \mathrm{LT}(h_i) g_i + \sum_{\partial(h_i g_i)=\alpha} (h_i - \mathrm{LT}(h_i)) g_i + \sum_{\partial(h_i g_i)<\alpha} h_i g_i \end{aligned}$$

假设 $\partial f < \alpha$，则显然有

$$\partial \left(\sum_{\partial(h_i g_i)=\alpha} \mathrm{LT}(h_i) g_i \right) < \alpha$$

记 $\mathrm{LT}(h_i) = a_i h_i'$，其中 h_i' 是首一单项式，从而我们可以运用引理 11.3.1，有

$$\sum a_i (h_i' g_i) = \sum b_i S(h_{i-1}' g_{i-1}, h_i' g_i)$$

令 $\beta_{i-1,i}$ 为 $\mathrm{LT}(g_i)$ 与 $\mathrm{LT}(g_{i-1})$ 的首一最小公倍式的 multidegree，则我们知道 $S(h_{i-1}' g_{i-1}, h_i' g_i)$ 等于 $S(g_{i-1}, g_i)$ 乘上 $x^{\alpha - \beta_{i-1,i}}$，并且 $S(g_{i-1}, g_i) \equiv 0(\mod G)$，这告诉我们每一个 $S(g_{i-1}, g_i)$ 可以写成 $\sum q_j g_j$ 的形式且 $\partial(q_j g_j) < \beta_{i-1,i}$，这告诉我们所有的 $S(h_{i-1}' g_{i-1}, h_i' g_i)$ 可以被写成 $\sum q_j' g_j$ 且 $\partial(q_j' g_j) < \alpha$.

这告诉我们 f 可以写成 $\sum p_i g_i$ 且 $\partial(p_i g_i) < \alpha$，这与 α 的最小性矛盾，从而 $\partial(f) = \alpha$.

这告诉我们

$$\mathrm{LT}(f) = \sum_{\partial(h_i g_i)=\alpha} \mathrm{LT}(h_i)\,\mathrm{LT}(g_i)$$

所以 $\mathrm{LT}(f) \in (\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_m))$，从而是 Gröbner 基. □

Buchberger算法

Buchberger 判别法可以提供一个算法去寻找 Gröbner 基.

如果 $I = (g_1, \cdots, g_m)$，并且每个 $S(g_i, g_j)$ 在 $G = \{g_1, \cdots, g_m\}$ 下的余式为 0，则由判别法知道已经是一个 Gröbner 基.

反之，如果 $S(g_i, g_j)$ 存在一个非零余数 r，把 r 扩张进入 G 中，令 $g_{m+1} = r$，$G' = \{g_1, \cdots, g_m, g_{m+1}\}$，并且重复. 有限次内必停止.

定义 11.3.3: 极小Gröbner基与约化Gröbner基

一个 *Gröbner* 基 $\{g_1, \cdots, g_m\}$ 称为**极小的**，如果 $\mathrm{LT}(g_i)$ 是首一的，并且 $\mathrm{LT}(g_i) \mid \mathrm{LT}(g_j), \forall i, j$. 一个 *Gröbner* 基是**约化的**，如果每一个 g_i 都是首一的，并且 g_j 不被任何 $\mathrm{LT}(g_i), i \neq j$ 整除.

Example 11.3.1

我们给出一个 Gröbner 基的具体计算的例子：我们在分次字典序(grlex)下，针对理想 $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$(其中 $x > y$)计算其Gröbner基.设

$$f_1 = x^3 - 2xy \quad 和 \quad f_2 = x^2 y - 2y^2 + x.$$

初始基为 $G=\{f_1,f_2\}$，首项分别为 $\mathrm{LT}(f_1)=x^3$ 和 $\mathrm{LT}(f_2)=x^2y$.最小公倍式为 $\mathrm{LCM}(x^3,x^2y)=x^3y$，故

$$S(f_1,f_2)=\frac{x^3y}{x^3}f_1-\frac{x^3y}{x^2y}f_2=yf_1-xf_2.$$

展开计算：

$$y(x^3-2xy)-x(x^2y-2y^2+x)=x^3y-2xy^2-x^3y+2xy^2-x^2=-x^2.$$

将 $-x^2$ 对 G 取模约简.由于 $\mathrm{LT}(f_1)=x^3$ 和 $\mathrm{LT}(f_2)=x^2y$ 均不整除 x^2，故将 $f_3=-x^2$ 加入 G.

此时基更新为 $G=\{f_1,f_2,f_3\}$.首项为 $\mathrm{LT}(f_1)=x^3$ 和 $\mathrm{LT}(f_3)=x^2$，最小公倍式为 $\mathrm{LCM}(x^3,x^2)=x^3$，故

$$S(f_1,f_3)=\frac{x^3}{x^3}f_1-\frac{x^3}{x^2}f_3=f_1-xf_3.$$

代入多项式：

$$(x^3-2xy)-x(-x^2)=x^3-2xy+x^3=2x^3-2xy.$$

对 G 取模约简：

- 首项 $2x^3$ 可被 $\mathrm{LT}(f_1)=x^3$ 整除.减去 $2f_1$：

$$(2x^3-2xy)-2(x^3-2xy)=2x^3-2xy-2x^3+4xy=2xy.$$

- $2xy$ 无法被 G 进一步约简.将 $f_4=2xy$ 加入 G.

首项为 $\mathrm{LT}(f_2)=x^2y$ 和 $\mathrm{LT}(f_3)=x^2$，最小公倍式为 $\mathrm{LCM}(x^2y,x^2)=x^2y$，故

$$S(f_2,f_3)=\frac{x^2y}{x^2y}f_2-\frac{x^2y}{x^2}f_3=f_2-yf_3.$$

代入多项式：

$$(x^2y-2y^2+x)-y(-x^2)=x^2y-2y^2+x+x^2y=2x^2y-2y^2+x.$$

对 G 取模约简：

- 首项 $2x^2y$ 可被 $\mathrm{LT}(f_2)=x^2y$ 整除.减去 $2f_2$：

$$(2x^2y-2y^2+x)-2(x^2y-2y^2+x)=2x^2y-2y^2+x-2x^2y+4y^2-2x=2y^2-x.$$

- $2y^2-x$ 无法被约简.将 $f_5=2y^2-x$ 加入 G.

此时基更新为 $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$.继续计算剩余S-多项式，直至所有S-多项式均能约简为零，算法终止.最终得到的Gröbner基为 G.

Chapter 12: Artin 环

12.1 Artin 环基本定义

定义 12.1.1: Artin Ring

Artin 环就是满足 d.c.c 的环.

Remark 12.1.1

把 Artin 环看做是 Noether 环的对偶是有误导性质的，事实上我们将说明 Artin 环一定是一个 Noether 环，并且是非常特殊的 Noether 环. 在某种意义上 Artin 环是除了域之外最简单的环，我们研究 Artin 环并未是为了他的一般性，而是因为它简单.

命题 12.1.1

Artin 环 A 的每个素理想都是极大的.

证明: 令 $\mathfrak{p}$ 为 A 的素理想，$B = A/\mathfrak{p}$ 是一个 Artin 整环，令 $x \in B$，$x \neq 0$，由于 d.c.c，我们知道存在 n 使得 $(x^n) = (x^{n+1})$，所以我们知道 $x^n = x^{n+1}y$ 对某个 y，于是有 $xy = 1$，从而我们知道 x 可逆，也就是 B 是一个域，所以 $\mathfrak{p}$ 是极大的. □

推论 12.1.1

Artin 环中 *Jacobson* 根与幂零元根是相同的.

命题 12.1.2

Artin 环只有有限个极大理想.

证明: 考虑所有极大理想有限交的集合 S，由于 d.c.c，我们知道这个集合存在极小元，记为

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$$

由于对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$，我们都有

$$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$$

所以我们知道

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}$$

由于素避引理，存在某个 $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}$，所以有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. □

定义 12.1.2: Krull dimension

我们定义 A 的 ***Krull* 维数**(简称**维数**)为所有素理想严格升链

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

长度 n 的上确界，记为 $\dim A$，其值为一个非负整数或者 $+\infty$.

Example 12.1.1

域的 Krull 维数为 0，$\mathbb{Z}$ 的 Krull 维数为 1.

命题 12.1.3: Artin 环的幂零元根幂零

A 是 Artin 环，则 A 的幂零元根 $\mathrm{Nilrad}(A)$ 是幂零的.

证明: 我们令 $\mathfrak{R} = J(A) = \mathrm{Nilrad}(A)$，考虑

$$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}^2 \supset \cdots$$

由 d.c.c 我们知道存在 k 使得 $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{k+1} = \cdots$. 如果 $\mathfrak{a} \neq 0$，我们令

$$\Sigma = \{\mathfrak{b} \subset A \colon \mathfrak{b} \text{ 是理想，且 } \mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0\}$$

由于 $\mathfrak{a} \in \Sigma$ 所以 Σ 非空，于是由 Artin 我们知道 Σ 存在极小元 $\mathfrak{c}$，存在 $x \in \mathfrak{c}$，使得 $x\mathfrak{a} \neq 0$，于是 $(x)\mathfrak{a} \neq 0$，有 $(x) \in \Sigma$，由极小性由 $\mathfrak{c} = (x)$. 我们还有 $(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq 0$，于是 $((x)\mathfrak{a})\mathfrak{a} \neq 0$，所以 $(x)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$，且 $(x)\mathfrak{a} \in \Sigma$，由极小性我们有 $\mathfrak{c} = (x)\mathfrak{a}$.

于是有 $(x) = (x)\mathfrak{a}$，所以存在 $y \in \mathfrak{a}$ 使得 $x = xy$，因此我们知道

$$x = xy = xy^2 = \cdots = xy^n = \cdots$$

但是由于 $y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{R}^k \subset \mathfrak{R} = \mathrm{Nilrad}(A)$，我们知道 y 是幂零的，所以 $x = 0$，这与我们对 x 的选择矛盾. □

定理 12.1.1: Artin 环当且仅当零维 Noether

A 是 Artin 环 $\iff$ A 是零维 Noehter 环.

证明: $\Rightarrow$: 由于 Artin 环的素理想都极大，我们知道是 $\dim A = 0$，我们再令 $\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq n)$ 为 A 的所有极大理想，由 Artin 环的幂零根幂零，我们知道存在 k 使得

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathfrak{m}_i)^k \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i\right)^k = \mathfrak{R}^k = 0$$

于是由推论 7.2.1 知道是 Noether 的.

$\Leftarrow$: 由于 Noether 环的理想都有准素分解，所以零理想存在一个准素分解，所以 A 只有有限个极小的素理想，并且由于 $\dim A = 0$，这些素理想同时也是极大的，所以我们知道

$$\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

其中 $\mathfrak{p}_i$ 为所有极小素理想，$\mathfrak{N} = \mathrm{Nilrad}(A)$，由于 Noether 环的幂零元根幂零，于是存在 k 使得 $\mathfrak{N}^k = 0$，于是有

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^k \subset (\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i)^k = 0$$

再由于这些 $\mathfrak{p}_i$ 同时又是极大的，由推论 7.2.1 知道 A 是 Artin 的. □

推论 12.1.2

A 是环，则 A 是 Artin $\iff \ell(A) < +\infty$.

证明： 我们知道有合成列等价于满足两个链条件，于是 Artin，反过来，一个环是 Artin 的，则自然是 Noether 的，于是满足两个链条件，所以有合成列. □

12.2 Artin 局部环

如果 A 是一个 Artin local ring，唯一的极大理想为 $\mathfrak{m}$，则 $\mathfrak{m}$ 是 A 唯一的素理想，所以 $\mathfrak{m}$ 就是 A 的幂零元根. 因此我们知道 $\mathfrak{m}$ 的每一个元素都是幂零的，并且 $\mathfrak{m}$ 自身就是幂零的. A 中的元素不是单位就是幂零元.

命题 12.2.1

A 是一个 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是其极大理想，则下面两个陈述恰有一个是正确的：

(1) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ 对于任何 $n \geq 1$ 成立.

(2) $\mathfrak{m}^n = 0$ 对于某个 n 成立，此时 A 是一个 Artin 局部环.

证明： 假设 $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$，令 $M = \mathfrak{m}^n$，我们有 $M = \mathfrak{m}M$，则由 Nakayama 引理我们有 $M = \mathfrak{m}^n = 0$，则 $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，有 $0 = \mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p}$，取 radical 知道 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$，于是 $\dim A = 0$，从而 A 是 Artin 的. □

Note 12.2.1

如果 A 是一个 Noehter 局部环，$\mathfrak{m}$ 是极大理想，令 $k = A/\mathfrak{m}$，则由 $\mathfrak{m}$ 有限生成，从而 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 < +\infty$.

事实上，如果 $\mathfrak{m}$ 是有限生成的，我们都可以知道 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 是有限的.

命题 12.2.2

A 是一个 Artin 局部环，$k = A/\mathfrak{m}$ 为其剩余域，TFAE:

(1) A 的理想都是主理想.

(2) 极大理想 $\mathfrak{m}$ 是主理想.

(3) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$.

证明： (1) 推 (2) 推 (3) 是显然的，下面说明 (3) 推 (1)：

如果 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$，则 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$，于是由 Nakayama 我们知道 $\mathfrak{m} = 0$，从而 A 是一个域，得证.

如果 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=1$，由推论 1.4.3，知道 $\mathfrak{m}$ 是一个主理想，令 $\mathfrak{m}=(x)$. 令 $\mathfrak{a}$ 为 A 的一个理想，$\mathfrak{a}\neq(0),(1)$，我们知道 $\mathfrak{m}$ 是幂零元根，由 $\mathfrak{m}$ 是幂零的知道存在 $r>0$ 使得

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}^r,\quad \mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{m}^{r+1}$$

于是存在 $y\in\mathfrak{a}$ 使得 $y=ax^r\notin(x^{r+1})$，于是知道 $a\notin(x)=\mathfrak{m}$，所以 a 是一个单位，所以 $x^r\in\mathfrak{a}$，因此 $\mathfrak{m}^r=(x^r)\subset\mathfrak{a}$，所以 $\mathfrak{a}=\mathfrak{m}^r=(x^r)$，因此 $\mathfrak{a}$ 是主理想. □

引理 12.2.1

令 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 为 A 的理想，如果 $r(\mathfrak{a})$ 与 $r(\mathfrak{b})$ 是互素的，则 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 就是互素的.

证明： 由于

$$r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}))=r((1))=(1)$$

所以我们知道 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$. □

定理 12.2.1: 中国剩余定理

A 是一个环，$\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 是其理想，定义同态

$$\varphi\colon A\to\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i,\quad x\mapsto(x+\mathfrak{a}_1,\cdots,x+\mathfrak{a}_n)$$

我们有以下结论：

(1) φ 满射 $\iff$ $\mathfrak{a}_i$ 与 $\mathfrak{a}_j$ 互素，$\forall i\neq j$.

(2) φ 单射 $\iff$ $\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i=(0)$.

特别地，如果 $\mathfrak{a}_i$ 两两互素，我们有

$$A/\prod_{i=1}^n\mathfrak{a}_i\cong\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i$$

定理 12.2.2: Artin 环的结构定理

Artin 环 A 是有限个 *Artin* 局部环的直积，并且在同构意义下是唯一的.

证明： 令 $\mathfrak{m}_i(1\leq i\leq n)$ 为 A 的所有不同极大理想，我们知道这些极大理想都是互素的，即 $\mathfrak{m}_i+\mathfrak{m}_j=(1)(\forall i\neq j)$. 并且我们知道存在 $k>0$ 使得 $\prod_{i=1}^n\mathfrak{m}_i^k=0$，由引理知道 $\mathfrak{m}_i^k$ 与 $\mathfrak{m}_j^k$ 也是互素的，所以有

$$\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{m}_i^k=\prod_{i=1}^n\mathfrak{m}_i^k=0$$

于是由中国剩余定理我们知道

$$A\cong\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{m}_i^k$$

其中 $A/\mathfrak{m}_i^k$ 是 Artin 局部环. 下面说明唯一性. 如果有

$$A \cong \prod_{i=1}^n A_i$$

其中 A_i 为 Artin 局部环，令 $\varphi_i\colon A \to A_i$ 为投射同态，令 $\mathfrak{a}_i = \operatorname{Ker}\varphi$，由中国剩余定理容易知道 $\mathfrak{a}_i$ 是两两互素的并且 $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = 0$.

我们令 $\mathfrak{q}_i$ 为 A_i 的唯一素理想，令 $\mathfrak{p}_i$ 为其局限，即 $\mathfrak{p}_i = \varphi_i^{-1}(\mathfrak{q}_i)$，我们知道 $\mathfrak{p}_i$ 是素理想从而极大，由于 $\mathfrak{q}_i$ 是幂零的，所以知道 $\mathfrak{a}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$-准素的，于是知道

$$\bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$$

是 (0) 的准素分解，由于 $\mathfrak{a}_i$ 间两两互素，于是 $\mathfrak{p}_i$ 两两互素，所以他们就是 (0) 的 isolated 素理想，因此其准素分解也是 isolated 的，因此根据第二唯一性定理，由 A 唯一决定. $\square$

Chapter 13: 离散赋值环(DVR)与Dedekind整环

13.1 离散赋值环

命题 13.1.1

A 是一个一维的 Noether 整环，则 A 的每个非零理想都可以唯一地表示为准素理想的乘积，并且这些准素理想的 radical 都是互不相同的.

证明: 由于 A Noether，$\mathfrak{a}$ 有一个极小准素分解

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$$

其中 $\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$-准素的，由于 $\dim A = 1$，所以我们知道整环 A 的非零素理想都是极大理想，于是我们知道 $\mathfrak{p}_i$ 是两两互素的，于是我们知道 $\mathfrak{q}_i$ 是两两互素的，于是

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = \mathfrak{a}$$

反过来，如果 $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$，则我们知道 $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$，这是 $\mathfrak{a}$ 的一个极小准素分解，其中每个 $\mathfrak{q}_i$ 都是 isolated primary component，从而被唯一决定. $\square$

定义 13.1.1: DVR

*K 是一个域，则 K 上的一个**离散赋值(discrete valuation)** 是从 K^*(作为乘法群) $\to \mathbb{Z}$ 的一个满射，使得*

(1) $v(xy) = v(x) + v(y)$，即 v 是一个同态.

(2) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

*集合 $\{0\} \cup \{x \in K^* : v(x) \geq 0\}$ 构成一个环，我们称之为 v 的**赋值环**，离散赋值的赋值环称为**离散赋值环(DVR)**.*

Example 13.1.1

- p 是素数，考虑 $\nu_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ 为 p-adic 赋值，则得到 p 进整数环 $Z_{(p)}$.
- k 是域，令 $K = k(x) \supset k[x] \ni f$，其中 f 为不可约多项式，考虑 $\mathfrak{p}_f = (f)$ 为素理想，则

$$\nu_f : K^* \to \mathbb{Z}$$

有其赋值环 $k[x]_{\mathfrak{p}_f}$.

定义 13.1.2

一个整环 A 称为 DVR，如果存在其分式域 K 上的一个离散赋值，使得赋值环为 A.

Remark 13.1.1
首先我们知道赋值环是局部环，并且其极大理想是

$$\{x \in K\colon v(x) > 0\}$$

Remark 13.1.2
我们考虑离散赋值环 A 中两个不同的元素 x, y，满足 $v(x) = v(y)$，于是有 $v(xy^{-1}) = 0$，令 $u = xy^{-1}$ 不在 A 的极大理想中，从而是一个单位. 所以有 $(x) = (y)$.

引理 13.1.1

A 是 DVR，则 A 是 $Nother$ 局部一维整环，并且 A 的所有非零理想都是其极大理想 $\mathfrak{m}$ 的一个幂次.

证明: 由前面的 remark 我们知道 A 是一个局部环，对于 $\forall 0 \neq \mathfrak{a} \subset A$ 为理想，存在一个极小的 $k \in \mathbb{N}$ 使得存在 $a \in \mathfrak{a}$ ，有 $v(a) = k$. 由于

$$v\colon K^* \to \mathbb{Z}$$

满射告诉我们对于任意的 $y \in A$，$v(y) \geq k$，存在 $u \in A$ 使得 $v(u) = v(y) - v(a) \geq 0$，有 $(ua) = (y)$，于是我们知道 $y \in \mathfrak{a}$，所以有

$$\mathfrak{m}_k := \mathfrak{a} = \{y \in A\colon v(y) \geq k\}$$

得到唯一的降链

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_3 \supset \cdots$$

所以我们知道 A 是 Noether 的，因为任何的升链都是上面降链的一个从右往左的子链，必在有限步内停止.

再由于 $v\colon K^* \to \mathbb{Z}$ 是满射，存在 $x \in \mathfrak{m}$ 使得 $v(x) = 1$，于是 $\mathfrak{m} = (x)$，$\mathfrak{m}_k = (x)^k$. 所以 $\mathfrak{m}$ 是唯一的非零素理想，于是 $\dim A = 1$.

综上我们知道 A 是一个一维的 Noether 局部整环. $\square$

命题 13.1.2

A 是一个 Noether 局部整环，维数为 1，$\mathfrak{m}$ 是其极大理想，$k = A/\mathfrak{m}$ 是其剩余域，TFAE:

(1) A 是 DVR.

(2) A 整闭.

(3) $\mathfrak{m}$ 是主理想.

(4) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$.

(5) 所有非零理想都是 $\mathfrak{m}$ 的幂.

(6) 存在 $x \in A$ 使得所有非零理想都形如 (x^k)，$k \geq 0$.

证明: 我们先给出两个 remarks:

(A) 如果 $\mathfrak{a}$ 是非 $(0),(1)$ 的理想，则 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的，并且存在 n 使得 $(m)^n \subset \mathfrak{a}$. 这是根据推论 8.4.2.

(B) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$，$\forall n \geq 0$，这是根据命题 12.2.1.

(1) $\Rightarrow$ (2): 由于赋值环都是整闭的，所以 DVR 是整闭的.

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $a \in \mathfrak{m}$，$a \neq 0$，由 (A) 知道存在整数 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subset (a)$，$\mathfrak{m}^{n-1} \not\subset (a)$. 选择 $b \in \mathfrak{m}^{n-1} - (a)$，令 $x = a/b \in K$，其中 K 为 A 的分式域，我们知道 $x^{-1} \notin A$，否则 $b \in (a)$，与 b 的取法矛盾. 所以 x^{-1} 在 A 上不是整元，于是我们知道 $x^{-1}\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}$，否则有 $x^{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$，可以推出 $A[x^{-1}]\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$，并且在整环上，所以 $\mathfrak{m}$ 是一个忠实 $A[x^{-1}]$ 模，并且是一个有限生成的 A 模，由命题 6.1.1这代表着 x^{-1} 在 A 上整，矛盾.

但是因为 $a \in \mathfrak{m}$，$x^{-1}\mathfrak{m} = \dfrac{b}{a}\mathfrak{m} \subset \dfrac{\mathfrak{m}^n}{a} \subset A$，这告诉我们 $x^{-1}\mathfrak{m} = A$，所以 $\mathfrak{m} = Ax = (x)$ 是主理想.

(3) $\Rightarrow$ (4): 由于 $\mathfrak{m}$ 是主理想，所以 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$，再由 (B) 知道 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (5): 由于 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$，由推论 1.4.3 我们知道 $\mathfrak{m}$ 是主理想，对于任意的理想 $0 \neq \mathfrak{a} \subsetneq A$，由 (A) 知道存在 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}$，考虑 $A/\mathfrak{m}^n$ 是零维诺特局部环，于是是 Artin 局部环. 由命题 12.2.2 的证明过程知道 $\mathfrak{a}$ 在 $A/\mathfrak{m}^n$ 中的像 $a/\mathfrak{m}^n$ 是 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ 的幂，于是 $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^n$，由商环理想的一一对应知道 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r$，于是是 $\mathfrak{m}$ 的幂.

(5) $\Rightarrow$ (6): 我们知道 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$，从而存在 $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$，但是我们知道 $(x) = \mathfrak{m}^r$，我们知道 $r = 1$，$(x) = \mathfrak{m}$，$(x^k) = \mathfrak{m}^k$，故得证.

(6) $\Rightarrow$ (1): 由 $\mathfrak{m} = (x)$，由 (B) 知道 $(x^k) \neq (x^{k+1})$，所以如果 a 是 A 的任何非零元，我们知道

$$(a) = (x^k)$$

对于某一个确定的 k 成立，我们可以定义

$$v\colon K^* \to \mathbb{Z}, \quad v(a) = k, a \in A, \quad v(a/b) = v(a) - v(b)$$

我们知道 v 是一个良定义的离散赋值，并且 A 是其赋值环. □

13.2 Dedekind整环

定理 13.2.1

A 是一个一维诺特整环，TFAE:

(1) A 整闭.

(2) A 的每个准素理想都是一个素理想的幂.

(3) A 的每个局部化 $A_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p} \neq 0)$ 都是 DVR.

证明: (1) $\iff$ (3): 回忆整闭是一个局部性质，并且一维诺特局部整闭整环是 DVR，故得证.

(2) $\iff$ (3): 回忆准素理想和理想的幂在局部化中表现良好，结合上面命题可以说明. □

定义 13.2.1: Dedekind整环

我们称一维整闭诺特整环为 ***Dedekind* 整环**.

Remark 13.2.1

根据上面的定理我们知道 Dedekind 整环有等价定义，满足上面定理中的任何一个条件即可.

Remark 13.2.2

由于 DVR 是一维诺特整闭整环，所以 DVR 自然是与Dedekind 整环.

Example 13.2.1

- PID 是 Dedekind 整环：首先 PID A 是 Noether 的，并且容易说明是一维的，再考虑其局部化环仍为主理想整环，所以局部化 $A_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想是主理想，于是有 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 DVR，于是知道 Dedekind 整环.
- 考虑 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张，$\mathcal{O}_K$ 为 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的整闭包，则 $\mathcal{O}_K$ 是 Dedekind 整环.
- k 是代数闭域，K 是 k 的一个有限生成一次超越扩张，即存在 $K/k(x)$ 是有限扩张，令 A_1 为 $k[x]$ 在 K 中的整闭包，A_2 在 $k[x^{-1}]$ 在 K 中的整闭包，则 A_1, A_2 是 Dedekind 整环.

定义 13.2.2: Algebraic Number Field

我们称 $\mathbb{Q}$ 的一个有限代数扩张 K 为**代数数域**，**其代数整数环**为 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的整闭包.

定理 13.2.2: 代数整数环是DDK

K 是代数数域，则其代数整数环是 Dedekind 整环.

证明: 我们知道 K 是 $\mathbb{Q}$ 的一个有限可分扩张，令 A 为其代数整数环，由命题 6.3.4 知道存在 K 在 Q 上的一组基 $v_1, \cdots, v_n$ 使得

$$A \subset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} v_i$$

从而我们知道 A 是一个有限生成 $\mathbb{Z}$-模，从而是 Noether $\mathbb{Z}$-模，容易说明 A 作为环是 Noether 的. 再根据 A

是整闭包，知道 A 是整闭的. 下面只需要说明是一维的，即所有非零素理想都是极大理想. 考虑 A 的非零素理想 $\mathfrak{p}$，由推论 6.2.2 知道如果 $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}=0$，则 $\mathfrak{p}=0$，所以 $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}$ 不为零，且为 $\mathbb{Z}$ 的非零素理想，所以 $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}$ 是极大理想，再由推论 6.2.1 知道 $\mathfrak{p}$ 是极大理想. 于是一维. □

13.3 分式理想

定义 13.3.1: Fractional Ideals

A 是整环，K 是 A 的分式域，一个 A-模 $M\subset K$ 称为 A 的**分式理想**，如果 $xM\subset A$ 对于某个 $A\ni x\neq 0$. 我们记

$$(A:M)=\{x\in K: xM\subset A\}$$

容易知道 $(A:M)$ 为一个 K 中的 A-模.

Remark 13.3.1

特别地，我们平时所称的理想，现在称之为**整理想(integral ideals)** 是 $x=1$ 的分式理想，任何元素 $u\in K$ 都可以生成一个分式理想，记为 (u) 或者 Au，称之为主理想.

Example 13.3.1

$M\subset K$ 是一个有限生成的 A-模，则 M 是分式理想. 这是因为我们考虑 M 的一组生成元 $a_1/b_1,\cdots a_n/b_n$，我们考虑 $x=b_1\cdots b_n\in A$ 有 $xM\subset A$，于是 M 是分式理想.

特别地，如果 A 是 Noether 的，则

$$\{\text{分式理想}\}=\{\text{有限生成 } A\text{-模 }\subset K\}$$

定义 13.3.2: Invertible ideal

一个 A-模 $M\subset K$ 称为**可逆理想**，如果存在 A-模 $N\subset K$，使得 $MN=A$. 事实上这样的 N 是唯一的并且等于 $(A:M)$.

Remark 13.3.2

唯一且等于 $(A:M)$ 的原因是：显然我们有 $N\subset(A:M)=(A:M)MN=((A:M)M)N\subset AN=N$.

Example 13.3.2

对于任意的 $x\in K^\times$，有 $Ax\subset K$ 是一个分式理想，且有 $(A:Ax)=Ax^{-1}$.

Remark 13.3.3

设 M 为 A 的一个分式理想，我们知道存在 $x\in A$ 使得 $xM\subset A$ 为 A 的整理想，如果 xM 可逆，即存在 A-模 N 使得 $xMN=(A)$，其中 $N=(A:xM)$，令 $L=xN$，我们有 $ML=A$，即 M 是可逆理想.

所以如果想证明所有的非零分式理想可逆，只需要证明所有的整理想可逆.

引理 13.3.1: 可逆理想是分式理想

一个 A-模 $M\subset K$ 是可逆理想，则 M 是有限生成 A-模，从而是分式理想.

证明: 由于 M 是可逆理想，所以有 $M(A:M)=A$，所以存在 $x_i\in M$ 与 $y_i\in(A:M)$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=1$$

因此对于任何的 $x\in M$ 我们有 $x=\sum_{i=1}^{n}(y_ix)x_i$，其中 $y_ix\in A$，所以 M 被 $x_1,\cdots,x_n$ 生成. $\square$

命题 13.3.1: 可逆理想是局部性质

M 是 A 的分式理想，TFAE:

(1) M 是可逆理想.

(2) M 是有限生成的，且对于任意的 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$，$M_{\mathfrak{p}}$ 是可逆的.

(3) M 是有限生成的，且对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}\subset A$，有 $M_{\mathfrak{m}}$ 可逆.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): 由局部化的性质，我们知道

$$A_{\mathfrak{p}}=(M\cdot(A:M))_{\mathfrak{p}}=M_{\mathfrak{p}}\cdot(A_{\mathfrak{p}}:M_{\mathfrak{p}})$$

由可逆理想知道有限生成，由上式知道是 $M_{\mathfrak{p}}$ 是可逆理想.

(2) $\Rightarrow$ (3): 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1): 令 $\mathfrak{a}=M\cdot(A:M)$ 是一个整理想，对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$，我们有

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}=M_{\mathfrak{m}}\cdot(A_{\mathfrak{m}},M_{\mathfrak{m}})=A_{\mathfrak{m}}$$

所以我们知道 $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{m}$，所以 $\mathfrak{a}=A$，于是 $\mathfrak{m}$ 是可逆理想. $\square$

命题 13.3.2: 局部整环中 DVR $\Longleftrightarrow$ 非零分式理想都可逆

A 是一个局部整环，则 A 是 DVR $\Longleftrightarrow$ A 的每个非零分式理想都是可逆理想.

证明: $\Rightarrow$: 由于 DVR 的非零理想都是主理想，我们设极大理想 $\mathfrak{m}$ 的生成元为 x，设 $M\neq 0$ 为 A 的一个分式理想，则存在 $y\in A$ 使得 $yM\subset A$，因此 yM 是一个整理想，也就是说 $yM=(x^r)$，因此 $M=(x^{r-s})$，其中 $s=v(y)$.

$\Leftarrow$: 每一个非零的整理想都是可逆理想，因此是有限生成的，所以 A 是一个 Noether 环. 所以只需要证明所有的非零整理想都是极大理想 $\mathfrak{m}$ 的幂.

假设这是错的，令 Σ 为所有不是 $\mathfrak{m}$ 的幂的非零理想构成的集合，我们知道其有极大元 $\mathfrak{a}$. 则 $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{m}$. 因此有 $\mathfrak{a}\subsetneq\mathfrak{m}$，因此有 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}\subsetneq A$，是一个整理想. 并且 $\mathfrak{a}\subset m^{-1}\mathfrak{a}$，如果 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$，则知道 $\mathfrak{a}=\mathfrak{m}\mathfrak{a}$，由 Nakayama 引理知道 $\mathfrak{a}=0$，因此有 $\mathfrak{a}\subsetneq\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$，因此有 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个幂，从而 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的幂，矛盾. $\square$

定理 13.3.1: 整环中 Dedekind $\Longleftrightarrow$ 非零分式理想都是可逆理想

A 是一个整环，则 A 是 Dedekind 整环 $\Longleftrightarrow$ A 的每个非零分式理想都是可逆理想.

证明: $\Rightarrow$: 设 M 是非零分式理想，A 是 Noehter 的，知道 M 是有限生成的，考虑 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，由 $M_{\mathfrak{p}}$ 是局部整环 DVR $A_{\mathfrak{p}}$ 的非零分式理想，从而知道 $M_{\mathfrak{p}}$ 可逆，结合可逆是局部性质，知道 M 可逆.

$\Leftarrow$: 由于每个非零的整理想都是可逆理想，从而是 Noether 的. 我们下面说明对于任意的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，$A_{\mathfrak{p}}$ 是 DVR，这等价于证明 $A_{\mathfrak{p}}$ 的每个非零分式理想都是可逆理想，进而只需要证明所有整理想可逆，令 $\mathfrak{b}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 的非零整理想，令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$. 我们知道 $\mathfrak{a}$ 可逆，由可逆是局部性质，知道 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ 可逆. 所以 A 是 Dedekind 整环. □

推论 13.3.1

A 是一个 Dedekind 整环，则 $I = \{A$ 的非零分式理想$\}$ 构成了一个 Abel 群.

Remark 13.3.4

这个群被称为 A 的 group of ideals，记为 I，并且这个 Abel 群还是自由 Abel 群，其基为 $\operatorname{Spec} A - \{0\}$.

令 $K^\times$ 为 A 的分式域去掉零之后的乘法群，每一个 $u \in K^\times$ 定义了一个分式理想 (u)，并且映射

$$u \mapsto (u)$$

诱导了一个同态

$$\varphi\colon K^\times \to I$$

其像 P 是所有主分式理想，我们称商群(同时也是 $\operatorname{Coker}\varphi$) $H = I/P$ 为 A 的**理想类群(ideal class group)**. 其核 $U = \operatorname{Ker}\varphi$ 为所有 $u \in K^\times$ 使得 $(u) = (1)$ 的元素构成的集合，所以是 A 的单位群. 我们得到正合列

$$1 \to U \to K^\times \to I \to H \to 1$$

Remark 13.3.5

- 如果 $A = \mathcal{O}_K$，其中 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张，则 H 是一个有限群. 这个性质对于一般的 Dedekind 整环不成立.
- A 是 Dedekind 整环，则

$$H \text{ trivial} \iff A \text{ is a PID} \iff A \text{ is a UFD}$$

Chapter 14: 完备化

14.1 拓扑与完备化

令 G 是一个拓扑 Abel 群.(不必 Hausdorff). 如果 $\{0\}$ 在 G 中是闭集，则 $G \times G$ 的对角是闭集，因为可以看做

$$(x, y) \to x - y$$

的原像，从而 G 是 Hausdorff 的.(实际上对于拓扑群而言，T_0 可以推 $T_{3.5}$) 由于平移映射 $T_a \colon x \mapsto x + a$ 是同胚，所以 G 的拓扑完全由在 0 处的局部基所决定.

引理 14.1.1

令 H 为 $0 \in G$ 的所有邻域的交，则

(1) H 是一个子群.

(2) H 是 $\{0\}$ 的闭包.

(3) G/H 是 *Hausdorff* 的.

(4) G 是 *Hausdorff* 的 $\iff H = 0$.

证明: 参见任何一本拓扑群教材. □

为方便起见，假设 G 在 0 处存在可数邻域基，则 G 的完备化 $\hat{G}$ 按照通常方式定义 Cauchy 列来诱导. 具体来说一个序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，如果对 0 的任意邻域 U，都存在 $N_U > 0$，使得 $m, n > N_U$ 时，有

$$x_m - x_n \in U$$

两个 Cauchy 列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 被称为等价的，如果

$$x_n - y_n \to 0 \in G$$

记 $\hat{G}$ 为 Cauchy 列的等价类. 容易看出来 $\hat{G}$ 是一个 Abel 群. 对于任意的 $x \in G$，我们可以定义常值映射

$$\varphi \colon G \to \hat{G}, \quad x \mapsto [(x_n = x)]$$

于是自然诱导了一个 Abel 群同态

$$\varphi \colon G \to \hat{G}$$

注意 φ 一般来说并不是一个单射，实际上我们有

$$\operatorname{Ker} \varphi = \bigcap_{0 \in U} U$$

所以 φ 是单射当且仅当 G Hausdorff. 如果 H 是另外一个拓扑 Abel 群，并且有连续同态

$$f\colon G \to H$$

则很显然 f 将 Cauchy 列映为 Cauchy 列，从而自然诱导了一个映射

$$\hat{f}\colon \hat{G} \to \hat{H}$$

并且这个也是连续的，我们还注意到是保持复合的，即

$$\widehat{g\circ f} = \hat{g}\circ\hat{f}$$

我们现在聚焦一些特殊情况，即假设 $0 \in G$ 有一个由子群 $G_n < G$ 构成的邻域基，即

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots$$

并且 $U \subseteq$ 是 0 的一个邻域当且仅当包含某个 G_n. 一个典型例子就是 $\mathbb{Z}$ 上的 p-adic 拓扑，其中 $G_n = p^n\mathbb{Z}$. 注意在这种情况下 G_n 是既开又闭的，我们考虑 $g \in G_n$，则 $g + G_n \subseteq G_n$ 为 g 的邻域，从而 G_n 开，另外一方面由于 $h + G_n$ 是开集，所以我们有

$$G - G_n = \bigcup_{h\notin G_n} (h + G_n)$$

是开集，所以 G_n 是闭集.

下面我们以一种代数的方法来刻画完备化，任何一个柯西列在 G/G_n 中都是最终常值的，所以我们可以定义映射

$$\theta_{n+1}\colon G/G_{n+1} \to G/G_n$$

为截断映射，很容易看出来这诱导了一个逆向极限，即

$$\hat{G} = \varprojlim G/G_n$$

这种逆向极限的定义有很多好处. 首先很容易观察出来 θ_{n+1} 总是满射. 我们称满足这样的逆向系统为满射逆向系统. 设 $\{A_n\},\{B_n\},\{C_n\}$ 为三个逆向系统满足正合列的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & C_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这很自然诱导了一个逆向极限之间的态射

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$$

但是这不一定正合. 不过我们有命题：

命题 14.1.1

如果 $0 \to \{A_n\} \to \{B_n\} \to \{C_n\} \to 0$ 为逆向系统的正合列，则

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$$

总是正合的，如果 $\{A_n\}$ 还是一个满射逆向系统，则正合：

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$$

证明: 注意到逆向极限是右伴随，所以左正合，右正合的缺失在导出函子的计算下发现只需要 $\{A_n\}$ 是满射系统就可以补全. □

推论 14.1.1

令 $0 \to G' \to G \xrightarrow{p} G'' \to 0$ 为一个群的正合列，G 有由子群集 $\{G_n\}$ 产生的拓扑，G', G'' 给予诱导拓扑和商拓扑，则

$$0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$$

正合.

证明: 我们注意到正合列

$$0 \to \frac{G'}{G' \cap G_n} \to \frac{G}{G_n} \to \frac{G''}{p(G_n)} \to 0$$

并且交换图性质是自然的，所以取逆向极限之后即

$$0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$$

正合. □

推论 14.1.2

$\hat{G}_n$ 是 $\hat{G}/$ 的子群，并且有

$$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n$$

证明: 子群的话对

$$0 \to G_n \to G \to G/G_n \to 0$$

取逆向极限即可，而在 G/G_n 中，$\{0\}$ 是一个开集，所以是一个离散拓扑，离散拓扑的完备化还是子集，所以

$$\widehat{G/G_n} \cong G/G_n$$

所以我们对上式取逆向极限即

$$0 \to \hat{G}_n \to \hat{G} \to G/G_n \to 0$$

所以

$$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n$$

□

我们对上式再取逆向极限，有

$$\hat{\hat{G}} \cong \hat{G}$$

我们称 G 是完备的，如果 $\varphi \colon G \to \hat{G}$ 是同构. 所以我们知道完备化之后的 G 就是完备的. 同时我们注意到

$$\hat{G} \subseteq \prod_g G/G_n$$

其中 $\hat{G}$ 为那些满足相容性的元素组成，由于 G/G_n 是离散，从而 Hausdorff，而 Hausdorff 任意可乘，所以 $\hat{G}$ 作为 Hausdorff 空间的子空间自然也是 Hausdorff 的.

我们所考虑的此类拓扑群中，最重要的一类例子由 $G = A$，$G_n = \mathfrak{a}^n$ 给出，其中 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的一个理想。如此在 A 上定义的拓扑称为 **$\mathfrak{a}$-进拓扑**($\mathfrak{a}$-adic topology)，或者简称为 **$\mathfrak{a}$-拓扑**. 由于 $\mathfrak{a}^n$ 都是理想，不难验证在赋以此拓扑后 A 成为一个拓扑环，即其环运算是连续的. 该拓扑是 Hausdorff 的 $\iff \bigcap \mathfrak{a}^n = (0)$. A 的完备化 $\hat{A}$ 仍然是一个拓扑环；$\varphi\colon A \to \hat{A}$ 是一个连续环同态，其核为 $\bigcap \mathfrak{a}^n$.

对于 A-模 M 也有类似结论：取 $G = M$，$G_n = \mathfrak{a}^n M$. 这定义了 M 上的 $\mathfrak{a}$-拓扑，M 的完备化 $\hat{M}$ 是一个拓扑 $\hat{A}$-模(即 $\hat{A} \times \hat{M} \to \hat{M}$ 是连续的). 如果 $f\colon M \to N$ 是任意 A-模同态，则有 $f(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n f(M) \subseteq \mathfrak{a}^n N$，因此 f 是连续的(关于 M 和 N 上的 $\mathfrak{a}$-拓扑)，从而定义了 $\hat{f}\colon \hat{M} \to \hat{N}$.

Example 14.1.1

(1) $A = k[x]$，其中 k 是一个域且 x 是不定元；$\mathfrak{a} = (x)$. 此时 $\hat{A} = k[[x]]$，即形式幂级数环.

(2) $A = \mathbb{Z}$，$\mathfrak{a} = (p)$，p 为素数。此时 $\hat{A}$ 是 p-进整数环. 其元素为无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$，其中 $0 \leqslant a_n \leqslant p-1$。当 $n \to \infty$ 时，我们有 $p^n \to 0$.

14.2 滤过

定义 14.2.1: filtration

A 是一个环，$M \in Mod_A$，M 的一个**滤过**是一个子模链

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

其中 M_i 为 M 的子模，滤过记为 (M_n). 对于 $I \subset A$ 是理想，(M_n) 称为 **I-滤过**，如果 $IM_n \subset M_{n+1}$ 对于每个 n 成立；称为一个 ***stable I-filtration***，如果 $IM_n = M_{n+1}$ 对于充分大的 n 成立；称为 ***I-adic***，如果 $M_n = I^n M$，$\forall n \geq 0$.

引理 14.2.1

如果 $(M_n), (M'_n)$ 都是 M 的稳定(*stable*) I-滤过，则存在一个整数 n_0 使得有 *bounded difference*，即：

$$M_{n+n_0} \subset M'_n, \quad M'_{n+n_0} \subset M_n, \quad \forall n \geq 0$$

证明： 由于 M_n 稳定，所以存在 k 使得对于任意的 $n \geq 0$，都有

$$M_{n+k} = I^n M_k$$

于是我们注意到

$$M_{n+k} \subseteq I^n M \subseteq M_n$$

同理存在 l 使得

$$M'_{n+l} \subseteq I^n M \subseteq M'_n$$

取 $n_0 = \max k, l$，我们有

$$M_{n+n_0} \subseteq M_{n+k} \subseteq I^n M \subseteq M'_n$$

同理

$$M'_{n+n_0} \subseteq M'_{n+l} \subseteq I^n M \subseteq M_n$$

□

Remark 14.2.1
这个引理告诉我们所有稳定 I-滤过定义的拓扑都是一样的，统一称之为 I-拓扑.

14.3 分次环与分次模

定义 14.3.1: Graded Ring

一个**分次环**是指一个环 R 和一个直和分解

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

其中的直和为 *Abel* 群的直和，并且满足

$$R_iR_j \subset R_{i+j}, \quad \forall i, j \geq 0$$

R 中的一个**齐次元素**是 R_i 中的一个元素，**齐次理想**是由齐次元素生成的理想.
对任意的 $f \in R$，有唯一的写法

$$f = f_0 + f_1 + \cdots, \quad f_i \in R_i$$

Remark 14.3.1
比如一个常见的例子，考虑 $S = K[x_1, \cdots, x_r]$，有

$$S = S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots$$

其中 S_i 为 i 次齐次多项式.

定义 14.3.2: 分次模

已知 $R = R_0 \oplus R_1 \oplus$ 是一个分次环，则 R 上的分次模 M 定义为

$$M = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} M_i \quad \textit{as abelian groups}$$

满足 $R_iM_j \subset M_{i+j}$，$\forall i, j$.

定义 14.3.3: 分次模同态

M, N 都是分次 A-模，则一个**分次模同态** f 是一个模同态 $f\colon M \to N$ 满足 $f(M_n) \subset N_n$.

引理 14.3.1

I 为分次环 R 的一个齐次理想，I 由齐次元素 $f_1, \cdots, f_s$ 生成，则对齐次元素 $f \in I$，我们可以写成

$$f = \sum g_i f_i$$

其中 g_i 都是齐次元素且次数为 $\deg g_i = \deg f - \deg f_i$.

证明: 我们首先知道

$$f = \sum G_i f_i$$

可以将 G_i 分解成齐次元素的和，有

$$G_i = \sum g_{ik}$$

从而

$$f = \sum G_i f_i = \sum\sum g_{ik} f_i = \sum g_i f_i + (\triangle)$$

其中 $\deg g_i = \deg f - \deg f_i$，而 $\triangle$ 中元素的次数都不等于 f，从而在最终表达式中必定为 0，即有

$$f = \sum g_i f_i$$

□

定理 14.3.1: Hilbert Basis Theorem on Graded Rings

$R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ 是分次环，则

$$R \text{ 为诺特环} \Leftrightarrow R_0 \text{ 是诺特环且 } R \text{ 是有限生成 } R_0 \text{ 代数.}$$

证明: 首先我们知道，如果 R_0 诺特，且 R 是有限生成 R_0 代数，则由推论 8.2.1 知道 R 诺特.

反之，如果 R 诺特，我们有 $\bigoplus_{i\geq 1} R_i$ 是 R 的理想，且有 $R_0 \cong R/\bigoplus_{i\geq 1} R_i$，从而 R_0 诺特.

由 $\bigoplus_{i\geq 1} R_i$ 为 R 的理想，结合 R 诺特，我们知道 $\bigoplus_{i\geq 1} R_i$ 是有限生成的，设生成元为 $f_1, \cdots, f_m$，将每一个 f_i 拆成齐次元素的和，我们可以设 $\bigoplus_{i\geq 1} R_i$ 的生成元为 $x_1, \cdots, x_s$，其中 x_i 都是齐次元素.

设 $R' = R_0[x_1, \cdots, x_s]$，我们下面说明 $R' = R$，这只需要说明对于任意的 $k \geq 0$，有

$$R_k \subset R'$$

我们对 k 进行归纳，$k = 0$ 时自不必说，下面假设 $k \leq m-1$ 时成立，考虑 $\forall y \in R_m \subset \bigoplus_{i\geq 1} R_i$，我们由生成元可以知道

$$y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$$

并且由引理知道可以选择 a_i 均为齐次元，有 $\deg a_i = \deg y - \deg x_i = m - \deg x_i$，从而有

$$a_i \in R_{m-\deg x_i}$$

由归纳假设知道 $a_i \in R'$，从而有 $y \in R'$，即 $R_m \subset R'$.

最后我们知道 $R = R' = R_0[x_1, \cdots, x_s]$. □

我们考虑 A 是一个环(不必是分次的)，I 是 A 的一个理想，则我们可以构造一个分次环

$$A^* = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} I^n$$

类似地，如果 M 是一个 A-模，并且 (M_n) 是一个 I-滤过，我们有

$$M^* = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} M_n$$

是一个分次 A^*-模，这是因为 $I^m M_n \subset M_{n+m}$.

如果 A 是 Noether 的，I 是有限生成的，我们设 $x_1,\cdots,x_r$ 是其生成元，则我们知道 $A^*=A[x_1,\cdots,x_r]$ 并且是 Noether 的.

引理 14.3.2

A 是一个 Noether 环，M 是一个有限生成 A-模，(M_n) 是一个 I-滤过，TFAE:

(1) M^* 是一个有限生成 A^*-模.

(2) (M_n) 是稳定的.

证明: A Noether，M 有限生成，从而 M 是 Noether A-模，于是我们知道 M_n 都是有限生成的，所以我们令

$$Q_n=\bigoplus_{r=0}^{n}M_n$$

Q_n 是 M^* 的一个子群，但是一般来说不是 A^*-模，但是它可以生成一个，即

$$M_n^*=M_0\oplus\cdots\oplus M_n\oplus IM_n\oplus I^2M_n\oplus\cdots=Q_n\oplus IM_n\oplus I^2M_n\oplus\cdots$$

由于 Q_n 作为 A-模是有限生成的，我们知道 M_n^* 作为 A^* 模是有限生成的. 我们知道 M_n^* 构成了一个升链，其并为 M^*，由于 A^* Noether，我们知道 M^* 作为 A^*-模有限生成 $\iff$ 这个升链会停止，即存在 n_0 使得 $M^*=M_{n_0}^*$ $\iff$ $M_{n_0+r}=I^rM_{n_0}$ 对 $\forall r\geq 0$ $\iff$ 滤过是稳定的. □

命题 14.3.1: Artin-Rees Lemma

A 是一个 Noether 环，I 是 A 的一个理想，M 是一个有限生成 A-模，(M_n) 是一个稳定 I-滤过，如果 M' 是 M 的一个子模，则 $(M'\cap M_n)$ 是 M' 的一个稳定 I-滤过.

证明: 我们有

$$I(M'\cap M_n)\subset IM'\cap IM_n\subset M'\subset M_{n+1}$$

因此我们知道 $(M'\cap M_n)$ 是一个 I-滤过，因此其定义了一个分次 A^* 模，并且是 M^* 的子模，因此是有限生成的，从而由上面引理知道成立. □

若令 $M_n=\mathbb{I}^nM$，则我们有

推论 14.3.1

存在整数 k 使得对于任意的 $n\geq k$ 有

$$(I^nM)\cap M'=I^{n-k}((I^kM)\cap M')$$

定理 14.3.2

A 是一个 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是理想，M 是有限生成 A-模，M' 是 A 的子模. 则滤过 $\mathfrak{a}^nM'$ 和 $\mathfrak{a}^nM\cap M'$ 有 bounded difference. 特别地，M' 的 $\mathfrak{a}$-拓扑和 M' 在 M 的 $\mathfrak{a}$-拓扑下的诱导拓扑相同.

证明: 结合引理 14.2.1 和 Artin-Rees Lemma 立刻得到. □

命题 14.3.2

令

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

是诺特环 A 上有限生成模的正合列，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，则关于 $\mathfrak{a}$-*adic* 的完备化仍然正合：

$$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$$

证明: 由定理 14.3.2 和推论 14.1.1 立刻得到. □

14.4 Noether 环与完备化

由于存在自然态射

$$A \to \hat{A}$$

所以我们可以把 $\hat{A}$ 看成是 A-代数，于是对任何的 A-模 M，可以得到 $\hat{A}$-模 $\hat{A} \otimes_A M$. 很自然的问题是它和 $\hat{A}$-模 $\hat{M}$ 之间是什么关系？注意到 A-模同态 $M \to \hat{M}$ 诱导了

$$\hat{A} \otimes_A M \to \hat{A} \otimes_A \hat{M} \to \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}$$

对于一般的 A，这既不是单射也不是满射，但是我们有

命题 14.4.1

对于任何的环 A，如果 M 是有限生成的，则 $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ 是满射，如果额外 A 还是 *Noether* 的，则是同构.

命题 14.4.2

如果 A 是诺特环，$\mathfrak{a}$ 是理想，$\hat{A}$ 是 $\mathfrak{a}$-*adic* 完备化，则 $\hat{A}$ 是一个平坦 A-代数.

命题 14.4.3

如果 A 是诺特的，$\hat{A}$ 是 $\mathfrak{a}$-*adic* 完备化，则

(1) $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a} \cong \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}$.

(2) $\widehat{\mathfrak{a}^n} = (\hat{\mathfrak{a}})^n$.

(3) $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$.

(4) $\hat{\mathfrak{a}} \subseteq J(\hat{A})$.

命题 14.4.4

A 是一个诺特局部环，$\mathfrak{m}$ 是极大理想，则 $\mathfrak{m}$-*adic* 完备化 $\hat{A}$ 是一个局部环，极大理想是 $\hat{\mathfrak{m}}$.

定理 14.4.1: Krull Intersection Theorem

A 是一个 *Noether* 环，$\mathfrak{a}$ 是理想，M 是有限生成 A-模，$\hat{M}$ 是 $\mathfrak{a}$-*adic* 完备化，则 $M \to \hat{M}$ 的 *kernel*

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$$

由被 $1+\mathfrak{a}$ 的某些元素零化的 $x \in M$ 构成.

推论 14.4.1

令 A 为一个 *Noether* 整环，$\mathfrak{a} \neq (1)$ 为 A 的一个理想，则 $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

推论 14.4.2

令 A 为一个 *Noether* 环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个被 *Jacobson* 根包含的理想，令 M 为一个有限生成 A-模. 则 M 的 $\mathfrak{a}$-拓扑是 *Hausdorff* 的，即 $\bigcap \mathfrak{a}^n M = 0$.

推论 14.4.3

A 为 *Noether* 局部环，$\mathfrak{m}$ 是极大理想，M 是一个有限生成 A-模，则 M 的 $\mathfrak{m}$-拓扑是 *Hausdorff* 的.

14.5 结合分次环

定义 14.5.1: Associated Graded Ring

A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，定义

$$G(A) = G_{\mathfrak{a}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$$

这是一个分次环，乘法自然定义. 对于 A-模 M 及 M 的一个 $\mathfrak{a}$-滤过 $\{M_n\}$，我们可以定义

$$G(M) = G_{\mathfrak{a}}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}$$

这是一个分次 $G(A)$-模，记

$$G_n(M) = M_n/M_{n+1}$$

命题 14.5.1

令 A 是一个 *Noether* 环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，则

(1) $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 是 *Noether* 的.

(2) $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 与 $G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ 作为分次环是同构的.

(3) 若 M 是有限生成 A-模，(M_n) 是 M 的稳定 $\mathfrak{a}$-滤过，则 $G(M)$ 是一个有限生成分次 $G_{\mathfrak{a}}(A)$-模.

引理 14.5.1

令 $\varphi\colon A \to B$ 为滤过群的态射，即 $\varphi(A_n) \subseteq B_n$，令

$$G(\varphi)\colon G(A) \to G(B), \quad \hat{\varphi}\colon \hat{A} \to \hat{B}$$

为诱导的态射，则

(1) $G(\varphi)$ 是单射 $\implies$ $\hat{\varphi}$ 是单射.

(2) $G(\varphi)$ 是满射 $\implies$ $\hat{\varphi}$ 是满射.

于是可以得到这一节的主定理

命题 14.5.2

A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，M 是 A-模，(M_n) 是稳定 $\mathfrak{a}$-滤过. 假设 A 在 $\mathfrak{a}$-拓扑下是完备的并且 M 在滤过拓扑下是 *Hausdorff* 的. 假设 $G(M)$ 是有限生成 $G(A)$-模，则 M 是有限生成 A-模.

推论 14.5.1

A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，M 是 A-模，(M_n) 是稳定 $\mathfrak{a}$-滤过. 假设 A 在 $\mathfrak{a}$-拓扑下是完备的并且 M 在滤过拓扑下是 *Hausdorff* 的. 则若 $G(M)$ 是 *Noether* $G(A)$-模，则 M 是 *Noether* A-模.

从而可以推出

定理 14.5.1

A 是 *Noether* 环，$\mathfrak{a}$ 是理想，则 $\mathfrak{a}$-*adic* 完备化 $\hat{A}$ 也是 *Noether* 的.

证明: 我们知道

$$G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A}) \cong G_{\mathfrak{a}}(A)$$

由于 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ Noether，从而 $G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ Noether，从而我们在上面推论中令 $M = \hat{A}$ 就得到 $\hat{A}$ Noether. □

推论 14.5.2: 幂级数环上的Hilbert基定理

若 A *Noether*，则 $A[[x_1, \cdots, x_n]]$ *Noether.*

证明: 由于 $A[x_1, \cdots, x_n]$ Noether，注意到幂级数环就是 $A[x_1, \cdots, x_n]$ 关于 $(x_1, \cdots, x_n)$-adic 的完备化，从而 Noether. □

Chapter 15: 维数理论

15.1 Hilbert 函数

令 $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ 为 Noether 分次环，我们知道 A_0 是 Noether 环，并且 A 是有限生成 A_0 代数，设生成元为 $x_1, \cdots, x_s$，并且不妨设这些生成元都是齐次的，次数为 $k_1, \cdots, k_s$. 令 M 为有限生成分次 A-模，则 M 被有限个齐次元素生成，记为 $m_j (1 \le j \le t)$，令 $r_j = \deg m_h$. 令 M_n 为 n 次齐次元素，齐次元素必定形如

$$\sum_j f_j(x) m_j$$

其中 $f_j(x) \in A$ 是齐次元素，次数为 $n - r_j$. 从而 M_n 是有限生成 A_0 模，生成元是 $g_j(x) m_j$，其中 $g_j(x)$ 是 $x_1, \cdots, x_s$ 的单项式，使得总次数为 $n - r_j$.

定义 15.1.1: Poincare 级数

令 λ 为一个取值在 $\mathbb{Z}$ 中的加性函数，定义在所有有限生成 A_0-模上. 我们定义 M 的 *Poincare* 级数为 $\lambda(M_n)$ 的生成函数，即

$$P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$$

定理 15.1.1: Hilbert-Serre

$P(M,t)$ 是一个有理函数，形如

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1 - t^{k_i})}, \quad f(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

证明: 我们对 A 在 A_0 上生成元的数量来归纳，当 $s = 0$ 时，对任意的 $n > 0$ 都有 $A_n = 0$，所以 $A = A_0$. 而 M 变成了有限生成 A_0-模，从而当 n 充分大的时候有 $M_n = 0$，于是 $P(M,t)$ 是一个多项式，从而满足命题.

现在假设 $s > 0$，并且定理对 $s - 1$ 成立，我们注意到乘上 x_s 是一个从 $M_n \to M_{n+k_s}$ 的同态，于是我们有正合列

$$0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{x_s} M_{n+k_s} \to L_{n+k_s} \to 0$$

令 $K = \bigoplus K_n$，$L = \bigoplus L_n$，由于 K 是 M 的子模，L 是 M 的商模，从而它们都是有限生成的，并且都被 x_s 零化，于是我们知道它们都是 $A[x_1, \cdots, x_{s-1}]$-模，所以对上面正合列作用 λ 得到

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0$$

乘 t^{n+k_s} 之后求和得到

$$(1 - t^{k_s}) P(M,t) = P(L,t) - t^{k_s} P(K,t) + g(t)$$

其中 $g(t)$ 是一个整系数多项式，从而归纳得证. □

$P(M,t)$ 在 $t=1$ 处极点的阶数我们记为 $d(M)$，在一定程度上它度量了 M 的大小(当然和 λ 相关). 特别地，$d(A)$ 也是有定义的，当 $k_i=1$ 的情况特别简单.

推论 15.1.1

若每个 $k_i=1$，则对于充分大的 n，有 $\lambda(M_n)$ 是一个关于 n 的有理系数的 $d-1$ 次[a]的多项式.

[a]我们这里令零多项式的次数为 -1，并且令 $\binom{n}{-1}=\begin{cases}0, & n\geq 0\\ 1, & n=-1\end{cases}$.

证明: 由前面的定理我们知道 $\lambda(M_n)$ 是 $f(t)(1-t)^{-s}$ 的 n 次项系数. 通过上下同时约去 $(1-t)$，我们不妨设 $s=d$. 此时 $f(1)\neq 0$，设

$$f(t)=\sum_{k=0}^{N}a_kt^k$$

由于

$$(1-t)^{-d}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d+k-1}{k}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d+k-1}{d-1}t^k$$

于是我们有

$$\lambda(M_n)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d+k+n-1}{d-1}$$

对于任意的 $n\geq N$ 成立. 而右边式子都是 $d-1$ 次有理系数多项式的和. 容易验证首项

$$\frac{(\sum a_k)n^{d-1}}{(d-1)!}\neq 0$$

故得证. □

推论 15.1.2

对充分大的 n，映射

$$n\mapsto\sum_{k=1}^{n}\lambda(M_n)$$

是一个 $d(M)$ 次的多项式.

Remark 15.1.1

对于使得任意的整数 n 都有 $f(n)$ 是整数的多项式 $f(x)$ 不必是整系数的多项式，比如 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$.

定义 15.1.2: Hilbert Function

在推论中定义的多项式称为 M 的关于 λ 的 *Hilbert* 函数.

回忆我们有正合列

$$0\to K_n\to M_n\xrightarrow{x_s}M_{n+k_s}\to L_{n+k_s}\to 0$$

如果我们将 x_s 替代为 $x \in A_k$，使得 x 不是 M 的零因子，则 $K=0$，于是我们通过

$$(1-t^{k_s})P(M,t) = P(L,t) - t^{k_s}P(K,t) + g(t) = P(L,t) + g(t)$$

得到

$$d(L) = d(M) - 1$$

所以我们证明了

命题 15.1.1

如果 $x \in A_k$ 不是 M 的零因子，则有

$$d(M/xM) = d(M) - 1$$

我们将会在 A_0 是 Artin 环且 $\lambda(M) = l(M)$ 时考虑一些东西，其中 $l(M)$ 是有限生成 A_0-模 M 的长度. 我们在前面已经证明 l 是一个加性函数.

Example 15.1.1

令 $A = A_0[x_1, \cdots, x_s]$，其中 A_0 是 Artin 环，x_i 为代数无关的超越元. 则 A_n 是一个自由的 A_0-模，由次数为 n 的单形式为基，容易知道维数为

$$\binom{s+n-1}{s-1}$$

结合 l 是加性函数，我们有

$$l(A_n) = \binom{s+n-1}{s-1} l(A_0)$$

于是可以知道

$$P(A,t) = l(A_0)(1-t)^{-s}$$

命题 15.1.2

令 A 为一个 *Noetherian* 局部环，$\mathfrak{m}$ 是极大理想，$\mathfrak{q}$ 是一个 $\mathfrak{m}$-准素理想，M 是一个有限生成 A-模，M_n 是一个稳定的 $\mathfrak{q}$-滤过，则

(1) M/M_n 是有限长的.

(2) 对于充分大的 n，长度是一个小于等于 s 次的关于 n 的多项式 $g(n)$，其中 s 是 $\mathfrak{q}$ 最小的生成元数量.

(3) $g(n)$ 的次数和首项系数仅与 M 和 $\mathfrak{q}$ 决定，与滤过的选择无关.

证明： (1) 令

$$G(A) = \bigoplus_n \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}, \quad G(M) = \bigoplus_n M_n/M_{n+1}$$

由 $\dim A/\mathfrak{q} = 0$ 可知，$G_0(A) = A/\mathfrak{q}$ 是一个 Artin local ring；$G(A)$ 是诺特环，且 $G(M)$ 是一个有限生成的分次 $G(A)$-模(见 10.22). 每个 $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ 是一个被 $\mathfrak{q}$ 零化的诺特 A-模，因此它是一个诺特 $A/\mathfrak{q}$-模. 由于 $A/\mathfrak{q}$ 是阿廷环，故 $G_n(M)$ 具有有限长度. 因此 M/M_n 具有有限长度，且长度满足：

$$l_n = l(M/M_n) = \sum_{r=1}^{n} l(M_{r-1}/M_r)$$

(2) 若 $x_1, \ldots, x_s$ 生成 $\mathfrak{q}$，则 x_i 在 $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ 中的像 $\overline{x}_i$ 生成作为 $A/\mathfrak{q}$-代数的 $G(A)$，且每个 $\overline{x}_i$ 的次数为 1，因此记 $l(M_n/M_{n+1}) = f(n)$，其中对于所有充分大的 n，$f(n)$ 是关于 n 的次数 $\leq s-1$ 的多项式. 既然由 (1) 我们有 $l_{n+1} - l_n = f(n)$，由此推知对于所有充分大的 n，l_n 是次数 $\leq s$ 的多项式 $g(n)$.

(3) 设 $(\tilde{M}_n)$ 是 M 的另一个稳定 $\mathfrak{q}$-过滤，并令 $\tilde{g}(n) = l(M/\tilde{M}_n)$，可知这两个过滤具有 bounded difference，即存在整数 n_0 使得对所有 $n \geq 0$，有 $M_{n+n_0} \subseteq \tilde{M}_n$ 以及 $\tilde{M}_{n+n_0} \subseteq M_n$；从而我们有：

$$g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n), \quad \tilde{g}(n+n_0) \geq g(n).$$

由于对充分大的 n，g 和 $\tilde{g}$ 都是多项式，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)/\tilde{g}(n) = 1$，因此 g 和 $\tilde{g}$ 具有相同的次数和首项系数. □

滤过 $\mathfrak{q}^n M$ 对应的多项式 $g(n)$ 记为 $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$，对充分大的 n 有

$$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$$

如果 $M = A$，我们直接记 $\chi_{\mathfrak{q}}^A(n)$ 为 $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ 为关于 $\mathfrak{m}$-准素理想 $\mathfrak{q}$ 的**特征多项式**. 我们有

推论 15.1.3

对充分大的 n，有

$$l(M/\mathfrak{q}^n M) = \chi_{\mathfrak{q}}(n)$$

其中 $\deg \chi_{\mathfrak{q}} \leq s$，$s$ 是 $\mathfrak{q}$ 的最小的生成元数量.

命题 15.1.3

$A, \mathfrak{m}, \mathfrak{q}$ 记号同上，则

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}(n) = \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n)$$

即次数与 $\mathfrak{q}$ 的选择无关.

证明: 我们知道存在 $r > 0$ 使得

$$\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$$

于是

$$\mathfrak{m}^{rn} \subseteq \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{m}^n$$

因此

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(rn)$$

对任意的 n 成立，这很显然能看出来次数一样. □

15.2 Noether 局部环的维数理论

定义 15.2.1: 高度与维数

$A \neq 0$ 为环，对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，我们定义其高度为

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{n \colon \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A\}$$

对 A 的真理想 $\mathfrak{a}$，定义其高度为

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) = \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \colon \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\}$$

对 A-模 M，定义其维数为

$$\dim M = \dim(A/\operatorname{Ann}_A(M))$$

从而我们知道 A 的 Krull 维数可以写成

$$\dim A = \sup\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \colon \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\}$$

由定义容易验证下面两个式子

$$\dim A/\mathfrak{a} + \operatorname{ht}(\mathfrak{a}) \leq \dim A, \quad \dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$$

命题 15.2.1

设 A 为 *Noether* 环，M 是有限生成 A-模，*TFAE*:

(1) M 是有限长的 A-模.

(2) $A/\operatorname{Ann}(M)$ 是 *Artin* 环.

(3) $\dim M = 0$.

定义 15.2.2: Noether 局部环的次数

设 A 为 *Noether* 局部环，$\mathfrak{m}$ 为极大理想，定义 A 的次数为

$$d(A) := \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n) = \deg \chi_{\mathfrak{q}}(n)$$

由前面的定理我们知道 $d(A)$ 仅与 A 相关，因为极大理想是唯一的，而次数与准素理想的选取无关. 根据定义，当 n 充分大的时候，我们有

$$\begin{aligned} d(A) &= \deg l(A/\mathfrak{m}^n) \\ &= \deg \left(\sum_{k=0}^{n-1} l(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}) \right) \\ &= d(G_{\mathfrak{m}}(A)) \end{aligned}$$

令 A 为一个 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是他的极大理想. 令 $\delta(A)$ 为 A 的 $\mathfrak{m}$-准素理想的最少的生成元的数量，我们的目的是证明

$$\delta(A) = d(A) = \dim A$$

命题 15.2.2

$\delta(A) \geq d(A)$.

证明: 我们已经证明了 $\delta(A) \geq \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n)$，所以得证. □

命题 15.2.3

记号同上，M 是一个有限生成的 A-模，$x \in A$ 不是 M 的零因子，则有

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M/xM} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M} - 1$$

证明: 记 $M' := M/xM$，$N := xM \subset M$，由于 x 不为零因子，所以有 A- 模的同构 $N = xM \simeq M, xm \mapsto m$. 取 M 的稳定 $\mathfrak{q}$-滤过 $(\mathfrak{q}^n M)$，置 $N_n := N \cap \mathfrak{q}^n M, n \geq 0$，根据 Artin-Rees 引理可知 (N_n) 是 N 的稳定 $\mathfrak{q}$-滤过.

于是由 $N \simeq M$ 和命题 15.1.2 可知，当 n 充分大时，多项式 $n \mapsto l(N/N_n)$ 对应多项式的首项和 $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n)$ 的首项相等. 我们有自然的正合列

$$0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to M'/\mathfrak{q}^n M' \to 0$$

于是当 n 充分大时，有

$$l(N/N_n) - \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0$$

而 $l(N/N_n)$ 和 $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n)$ 相减消去了最高次项，因此 $\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M} - 1$. □

推论 15.2.1

A 是 Noether 局部环，x 不是 A 的零因子，则有

$$d(A/(x)) \leq d(A) - 1$$

命题 15.2.4

$d(A) \geq \dim A$.

证明: 对 A 的次数 $d := d(A)$ 归纳.

如果 $d = 0$，则当 n 充分大时，整值函数 $n \mapsto l(A/\mathfrak{m}^n)$ 为常数，所以对任意充分大的 n 有 $l(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 0$，但 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 是域 $A/\mathfrak{m}$ 上的线性空间，并且其 $A/\mathfrak{m}$-子空间必为 A-子模，所以只能 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = 0$，进而由 Nakayama 引理可知 $\mathfrak{m}^n = 0$，因此 A 为 Artin 环，也即 $\dim A = 0$.

现在设 $d > 0$，结论对 $\leq d-1$ 成立，任取 A 中素理想链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

设 $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$，置 $x' := \overline{x}$ 为 x 在整环 $A' := A/\mathfrak{p}_0$ 中的像，则由 $x' \neq 0$ 知 x' 不为 A' 的零因子，于是有

$$d(A'/(x')) \leq d(A') - 1$$

设 $\mathfrak{m}' \subset A'$ 为极大理想，则 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}_0$，于是有满的环同态 $A/\mathfrak{m}^n \to A'/\mathfrak{m}'^n$，所以 $l(A/\mathfrak{m}^n) \geq l(A'/\mathfrak{m}'^n)$ 恒成立，由此推出

$$d(A) \geq d(A') \geq d(A'/(x')) + 1$$

根据归纳假设有 $d(A'/(x')) \geq \dim(A'/(x'))$，所以 $d(A) \geq \dim(A'/(x'))+1$，又因为 $x \in \mathfrak{p}_1$，所以

$$\overline{\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\mathfrak{p}_r/\mathfrak{p}_0}$$

是 $A'/(x')$ 中的素理想链，于是

$$d(A) \geq \dim(A'/(x'))+1 \geq (r-1)+1 = r$$

根据 r 的任意性可得 $d(A) \geq \dim A$. □

从而可以推出，Noether 环必为局部有限维的，即 Noether 环的局部化必为有限维，进而 Noether 环的任一素理想都具有有限高度；进而一个 Noether 环中素理想的降链也必然是有限的，即一个由 Noether 环中素理想构成的非空集合必存在极小元.

> **Remark 15.2.1**
> 我们也可以定义 $\mathfrak{p}$ 的深度，即从 $\mathfrak{p}$ 开始的素理想升链长度，很显然我们有
>
> $$\operatorname{depth}\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}$$

命题 15.2.5

令 A 为一个 d 维的诺特局部环. 则存在一个 $\mathfrak{m}$-准素理想由 d 个元素生成，从而 $\dim A \geq \delta(A)$.

证明: 我们递归构造 $x_1,\cdots,x_d$，使得对每个 $1 \leq i \leq d$，任一包含 $(x_1,\cdots,x_i) \neq (1)$ 的素理想高度均至少为 i.

$i=0$ 时显然成立，设 $i>0$, $x_1,\cdots,x_{i-1}$ 已经构造好，由于 Noether 环的素理想满足降链条件，故必存在包含 $(x_1,\cdots,x_{i-1}) \neq (1)$ 的极小素理想，它们同时是 Noether 环 $A/(x_1,\cdots,x_{i-1})$ 的极小素理想，只有有限个，设为

$$\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_s$$

又因为 $(x_1,\cdots,x_{i-1}) \subset \mathfrak{m}$，如果存在 $1 \leq j \leq s$ 使得 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_j$，则 $\mathfrak{m}$ 是包含 $(x_1,\cdots,x_{i-1})$ 的唯一素理想，特别地有 $\sqrt{(x_1,\cdots,x_{i-1})} = \mathfrak{m}$，所以 $(x_1,\cdots,x_{i-1})$ 是 $\mathfrak{m}-$ 准素的，但 $\mathfrak{m}-$ 准素理想的生成元个数至少为 $d > i-1$，这就得到矛盾，因此 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_j$. 进而根据 Prime avoidance 可知

$$\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup \mathfrak{p}_j$$

取 $x_i \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup \mathfrak{p}_j$，则 $(x_1,\cdots,x_i) \subset \mathfrak{m}$，任取包含 $(x_1,\cdots,x_i)$ 的素理想 $\mathfrak{q}$，其必包含一个 $\mathfrak{p}_j$，于是有 $x_i \in \mathfrak{q}$ 但 $x_i \notin \mathfrak{p}_j$，所以 $\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}_j$，又因为 $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_j) \geq i-1$，因此 $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \geq i$.

回到原命题，任一包含 $(x_1,\cdots,x_d)$ 的素理想高度均至少为 d，但 $d = \dim A = \operatorname{ht}(\mathfrak{m})$，所以 $\mathfrak{m}$ 是唯一的包含 $(x_1,\cdots,x_d)$ 的素理想，由此推出 $\sqrt{(x_1,\cdots,x_d)} = \mathfrak{m}$，所以 $(x_1,\cdots,x_d)$ 是 $\mathfrak{m}-$ 准素的，由 d 个元素生成. □

于是我们得到了：

定理 15.2.1: 维数定理

对于 *Noehter* 局部环 A 而言，我们有

$$\delta(A) = d(A) = \dim A$$

Example 15.2.1

考虑域上的 n 元多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$，这是 Noehter 的，并且有极大理想 $\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_n)$，考虑

$$A=k[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{m}}$$

是 Noether 局部环，而 $G_{\mathfrak{m}}(k[x_1,\cdots,x_n])$ 是 k 上的 n 元多项式环，从而有

$$\dim A=d(A)=n$$

由于

$$\dim k[x_1,\cdots,x_n]=\sup \operatorname{ht}(k[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{p}})=\sup \operatorname{ht}(k[x_1,\cdots,x_n]_{\mathfrak{m}})=n$$

所以域上多项式环的超越维数就是 Krull 维数.

推论 15.2.2

A 是 Noether 局部环，则 $\dim A\leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 其中 $k=A/\mathfrak{m}$ 为剩余域.

证明: 由 Nakayama 引理立刻得到 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的基可以提升为 $\mathfrak{m}$ 的生成元，从而有

$$\dim A=\delta(A)\leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

□

推论 15.2.3

设 A 为 Noether 环，$x_1,\cdots,x_r\in A$，则任一包含 $(x_1,\cdots,x_r)$ 的极小素理想 $\mathfrak{p}$ 高度均不超过 r.

证明: 考虑局部化 $A_{\mathfrak{p}}$，有极大理想 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，由 $\mathfrak{p}$ 的极小性知道

$$\sqrt{(x_1,\cdots,x_r)}=\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$$

从而

$$r\geq \delta(A_{\mathfrak{p}})=\dim A_{\mathfrak{p}}=\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$$

□

定理 15.2.2: Krull's principal ideal theorem

令 A 为一个 Noether 环，$x\in A$ 既不是零因子又不是单位，则 (x) 的极小素理想的高度都是 1.

证明: 首先知道 $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})\leq 1$，如果 $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=0$，则 $\mathfrak{p}$ 是极小素理想，从而 $\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}_A(A)$，也就是说 $\mathfrak{p}$ 落在 A 的零因子集中，但是 $x\in\mathfrak{p}$ 不是零因子，矛盾. □

推论 15.2.4

A 是一个 *Noether* 局部环，$x \in \mathfrak{m}$ 不是零因子，则

$$\dim A/(x) = \dim A - 1$$

证明: 令 $d = \dim A/(x)$，我们知道

$$d = d(A/(x)) \leq d(A) - 1 \leq \dim A - 1$$

另一方面，令 $x_i(1 \leq i \leq d)$ 为 $\mathfrak{m}$ 的元素使得在 $A/(x)$ 的像中生成一个 $\mathfrak{m}/(x)$-准素理想，则我们知道理想

$$(x, x_1, \cdots, x_d) \subseteq A$$

是一个 $\mathfrak{m}$-准素的，从而

$$d + 1 \geq \dim A$$

所以

$$\dim A/(x) = \dim A - 1$$

□

推论 15.2.5

令 $\hat{A}$ 为 $\mathfrak{m}$-*adic* 完备化，则 $\dim A = \dim \hat{A}$.

证明: 只需要注意到

$$A/\mathfrak{m}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$$

于是

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \chi_{\hat{\mathfrak{m}}}(n)$$

所以相等. □

15.3 正则局部环

定义 15.3.1: system of parameters

设 $(A, \mathfrak{m})$ 是 *Noether* 局部环，$d = \dim A$，如果

$$\sqrt{(x_1, \cdots, x_d)} = \mathfrak{m}$$

则称 $x_1, \cdots, x_d$ 是一个参数系统.

注意 $d = \delta(A)$ 已经是最小生成元个数.

命题 15.3.1

设 $\mathfrak{q} = (x_1, \cdots, x_d)$ 满足 $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$，令 $f \in A[t_1, \cdots, t_d]$ 是 s-次齐次多项式，如果 $f(x_1, \cdots, x_d) \in \mathfrak{q}^{s+1}$，则 f 的系数均在 $\mathfrak{m}$ 中.

证明: 我们熟知，分次环 $G_{\mathfrak{q}}(A)$ 由 $x_1,\cdots,x_d\in\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ 在 $A/\mathfrak{q}$ 上生成，所以有环的满同态

$$\begin{aligned}\alpha:(A/\mathfrak{q})[t_1,\cdots,t_d]&\twoheadrightarrow G_{\mathfrak{q}}(A)\\ t_i&\mapsto x_i\end{aligned}$$

记 $\overline{f}$ 为 f 在 $(A/\mathfrak{q})[t_1,\cdots,t_d]$ 中的像，则 $\overline{f}\in\operatorname{Ker}\alpha$，于是得到满同态

$$(A/\mathfrak{q})[t_1,\cdots,t_d]/(\overline{f})\twoheadrightarrow G_{\mathfrak{q}}(A).$$

如果存在 f 的系数不在 $\mathfrak{m}$ 中，则该系数为 A 中单位，于是可知 $\overline{f}$ 不为零因子，所以

$$\begin{aligned}d(A)=d(G_{\mathfrak{q}}(A))&\le d((A/\mathfrak{q})[t_1,\cdots,t_d]/(\overline{f}))\\&\le d((A/\mathfrak{q})[t_1,\cdots,t_d])-1=d-1,\end{aligned}$$

注意到由维数定理，我们有

$$d(G_{\mathfrak{q}}(A))=d$$

从而矛盾. □

推论 15.3.1

$(A,\mathfrak{m})$ 是 *Noether* 局部环，满足剩余域 $k=A/\mathfrak{m}\subseteq A$ 为子环，设 $x_1,\cdots,x_d$ 是一个参数系统，则它们在 k 上是代数无关的.

证明: 假设存在 k 系数的非零多项式 f 使得 $f(x_1,\cdots,x_d)=0$，记 f_s 为 f 的最低次(记为 s 次)的齐次部分，显然有 $f_s\neq 0$. 于是我们知道

$$f_s(x_1,\cdots,x_d)=0\in\mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$$

即

$$f_s(x_1,\cdots,x_d)\in\mathfrak{m}^{s+1}$$

从而由上面的命题知道 f_s 的系数都在 $\mathfrak{m}$ 中，从而 $f_s=0$，因为 f 的系数都在 $A/\mathfrak{m}$ 中. □

定理 15.3.1

设 A 是 *Noether* 局部环，$\dim A=d$，$\mathfrak{m}$ 为极大理想，$k=A/\mathfrak{m}$ 为剩余域，*TFAE*:

(1) $G_{\mathfrak{m}}(A)\cong k[t_1,\cdots,t_d]$.

(2) $\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\dim A=d$.

(3) $\mathfrak{m}$ 可以由 d 个元素生成.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2)：由于 $G_{\mathfrak{m}}(A)_1=\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 与一次齐次多项式同构，从而

$$\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=d=\dim G_{\mathfrak{m}}(A)=\dim A$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)：由 Nakayama 定理推论立刻得到.

(3) $\Longrightarrow$ (1)：考虑映射

$$\alpha\colon k[t_1,\cdot,t_d]\mapsto G_{\mathfrak{m}}(A),\quad t_i\mapsto x_i$$

对任意的 $f \in \operatorname{Ker}\alpha$，容易知道 f 的系数在 $\mathfrak{m}$ 中，但是 f 是 k-系数，从而 $f=0$，所以 α 为同构. □

定义 15.3.2: regular local ring

满足上面等价条件之一的 *Noether* 局部环称为**正则局部环**.

引理 15.3.1

A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是理想，若 $\bigcap \mathfrak{a}^n=0$，则 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 是整环 $\iff$ A 是整环.

证明: 对任意的 $x,y\in A$，$x,y\neq 0$，由 $\bigcap \mathfrak{a}^n=0$ 可知存在 $r,s\geq 0$，使得

$$x\in \mathfrak{a}^r-\mathfrak{a}^{r+1},\quad y\in \mathfrak{a}^s-\mathfrak{a}^{s+1}$$

所以 x 在 $\mathfrak{a}^r/\mathfrak{a}^{r+1}$ 和 y 在 $\mathfrak{a}^s/\mathfrak{a}^{s+1}$ 中的像均不为 0，所以 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 在 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 中的像均不为零，于是

$$\overline{xy}\neq 0 \iff xy\neq 0$$

□

命题 15.3.2

设 A 为正则局部环，则 A 是整环.

证明: 我们只需要证明 $\bigcap \mathfrak{m}^n=0$，这是显然的，因为

$$G_{\mathfrak{m}}(A)\cong k[t_1,\cdots,t_d]$$

没有什么非零元是无穷次的，所以我们知道 $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 同构与域上多项式环，所以是整环，所以 A 是整环. □

命题 15.3.3

令 A 为一个 *Noether* 局部环，则 A 正则当且仅当 $\mathfrak{m}$-*adic* 完备化 $\hat{A}$ 正则.

证明: 注意到

$$G_{\mathfrak{m}}(A)\cong G_{\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{A}),\quad A/\mathfrak{m}\cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$$

立刻得到. □

15.4 超越维数

假设 k 是一个代数闭域，V 是一个 k 上的不可约代数簇，因此我们知道 V 的坐标环形如

$$A(V)=k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{p}$$

其中 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想，$A(V)$ 的分式域被称为 V 上的有理函数域，记为 $k(V)$. 它是 k 的有限扩张，因此有有限的超越维数(即最大代数无关元的数量). 这个同时也定义了 V 的维数.

由零点定理，我们知道 V 上的点与 $A(V)$ 的极大理想一一对应，如果 P 对应 $\mathfrak{m}$，则我们称

$$\dim A(V)_{\mathfrak{m}}$$

为 V 在 P 点的局部维数.

引理 15.4.1

$B \subseteq A$ 都是整环，B 是整闭的，A 在 B 上整. $\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大理想，$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$. 则 $\mathfrak{n}$ 也是极大理想，并且 $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim B_{\mathfrak{n}}$.

证明: 只需要证明两个方向的不等式，分别利用 Going-UP 和 Going-Down 即可. □

定理 15.4.1

对于任意的 k 上不可约代数簇 V，其在任意点处的局部维数与 V 的维数相同.

证明: 由 Noether 正规化定理，我们可以找到一个多项式环 $B = k[x_1, \cdots, x_d] \subseteq A(V)$ 使得 $d = \dim A(V)$ 并且 $A(V)$ 在 B 上整. 由于 B 是 UFD，很显然是整闭的，从而我们可以说明

$$\dim A(V)_{\mathfrak{m}} = \dim B_{\mathfrak{n}}$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是 $A(V)$ 的极大理想，$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$ 为 B 的一个极大理想，所以我们只需要说明结论对 B 成立即可，而 B 是多项式环，很显然是成立的. □

推论 15.4.1

对于 $A(V)$ 的极大理想，我们有

$$\dim A(V) = \dim A(V)_{\mathfrak{m}}$$

从而我们有

$$\dim V = \dim A(V)$$

证明: 注意到

$$\dim A(V) = \sup \dim A(V)_{\mathfrak{m}}$$

所以结合 $\dim A(V)_{\mathfrak{m}}$ 是定值 $\dim V$ 立刻得证. □

Chapter 16: Hilbert Syzygy 定理

我们常说的 Hilbert 三件套就是基定理，合冲定理与零点定理，我们现在就开始了解合冲定理.

16.1 Hilbert 函数与 Hilbert 多项式

定义 16.1.1: Hilbert Function

令 M 是一个有限生成 $k[x_1,\cdots,x_r]$ 模，其中 $k[x_1,\cdots,x_r]$ 为按次数分次的分次环，我们定义 M 的 ***Hilbert* 函数**为

$$H_M(s) := \dim_k M_s$$

Remark 16.1.1

所有的维数都是有限的，假设存在 M_s 不是有限维的，则子模 $\bigoplus\limits_s^{\infty} M_i$ 不是有限生成的，这与模上的 Hilbert 基定理矛盾.

定理 16.1.1: Hilbert多项式

如果 M 是 $k[x_1,\cdots,x_r]$ 上有限生成分次模，则对于充分大的 s，存在一个次数小于等于 $r-1$ 的多项式 $P_M(x)$ 满足

$$H_M(s) = P_M(s)$$

这样个多项式称之为 M 的 ***Hilbert* 多项式**.

在证明定理之前我们先进行一些准备工作.

定义 16.1.2

我们定义 $M(d)$ 为一个同构于 M 的分次模，满足

$$M(d)_e = M_{d+e}$$

引理 16.1.1

令 $H(s) \in \mathbb{Z}$ 定义在所有自然数 s 上，定义 $H'(s) = H(s) - H(s-1)$，如果存在一个次数小于等于 $n-1$ 的有理系数多项式 $Q(s)$，使得当 $s \geq s_0$ 时，有

$$H'(s) = Q(s)$$

则存在一个次数小于等于 n 的有理系数多项式 $P(s)$ 使得当 $s \geq s_0$ 时，有

$$H(s) = P(s)$$

证明: 对于任意整数 s，令

$$P(s) = H(s_0) + \sum_{t=s_0+1}^{s} Q(t)$$

对于 $s \geq s_0$，我们有

$$P(s) = H(s)$$

并且容易看出来 $P(s)$ 是次数小于等于 $n-1$ 的多项式的求和，从而 $P(s)$ 的次数小于等于 n. □

定义 16.1.3: 加性函数

设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴(如向量空间、模、阿贝尔群等)，函数 $f : Ob(\mathcal{A}) \to G$(其中 G 是阿贝尔群，如整数 $\mathbb{Z}$)称为加性函数，若对任意短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

均满足：

$$f(B) = f(A) + f(C)$$

引理 16.1.2: 加性函数的交错和为 0

若存在有限长度的正合列

$$0 \to A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n \to 0,$$

则交替和满足：

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(A_i) = 0$$

证明: 长正合列分解为相邻的短正合列.例如，对每个 $0 \leq k < n$，存在短正合列：

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_k) \to A_k \to \mathrm{Im}(d_k) \to 0$$

由于正合性，有：

$$\mathrm{Im}(d_k) = \mathrm{Ker}(d_{k+1})$$

因此可将长正合列拆分为一系列短正合列：

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_k) \to A_k \to \mathrm{Ker}(d_{k+1}) \to 0$$

对每个短正合列应用加性函数：

$$f(A_k) = f(\mathrm{Ker}(d_k)) + f(\mathrm{Ker}(d_{k+1}))$$

将这些等式代入交替和:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(A_i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[f(\mathrm{Ker}(d_i))+f(\mathrm{Ker}(d_{i+1}))\right]=f(\mathrm{Ker}(d_0))+(-1)^n f(\mathrm{Ker}(d_{n+1}))$$

其中约定 $\mathrm{Ker}(d_0)=0$ 和 $\mathrm{Ker}(d_{n+1})=0$.

最终我们得到结论:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(A_i)=0$$

□

下面我们来证明定理 16.1.1.

证明: 我们对未定元的数量 r 进行归纳，如果 $r=0$，则 M 单纯只是一个有限维的分次线性空间，从而显然成立.

下面假设 $r>0$，令 $K\subset M$ 为乘上 x_r 这个同态的核，我们得到了一个线性空间的正合列，并且其中的同态都是保持分次次数的

$$0\to K(-1)\to M(-1)\xrightarrow{x_r} M\to M/x_rM\to 0$$

由于保持分次次数，我们有

$$0\to K_{n-1}\to M_{n-1}\xrightarrow{x_r} M_n\to M/x_rM_n\to 0$$

再由于线性空间的维数是加性函数，我们得到

$$H_M(s)-H_M(s-1)=H_{M/x_rM}(s)-H_K(s-1)$$

由于 K 和 M/x_rM 都是 $k[x_1,\cdots,x_{r-1}]$ 上的有限生成模，由归纳假设我们知道右边式子为次数小于等于 $r-2$ 的多项式，从而由引理我们知道结论成立. □

16.2 自由消解与Syzygy定理

定义 16.2.1: 分次自由模

R 是一个分次环，我们可以定义一个**分次自由 R-模**为若干个 $R(d)$ 的直和.

定义 16.2.2: Free Resolution

一个 R-模 M 的**自由消解**为一个正合列

$$\mathcal{F}:\ \cdots F_n\xrightarrow{\varphi_n}\cdots\to F_1\xrightarrow{\varphi_1}F_0\to M\to 0$$

其中 F_i 均为自由 R-模，$\mathrm{Im}(\varphi_i)$ 被称作为 M 的第 i 个 ***Syzygy* 模**.

一个消解 $\mathcal{F}$ 被称作**分次自由消解**，如果 R 是分次环，F_i 是分次自由模，并且 φ_i 为次数为 0 的齐次映射. 如果存在 $n>0$ 使得 $F_{n+1}=0$，$F_i\neq 0, 0\le i\le n$，则我们说 $\mathcal{F}$ 是一个**长度为 n 的有限消解**.

Remark 16.2.1

容易看到每一个模都有一个自由消解. 我们下面来看一看这个过程，考虑 M 的一组生成元 $\{v_i\}_{i\in I}$，考虑

一个以 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为基的自由 R-模 F_0，从而我们得到一个同态 $e_i\mapsto v_i$，有

$$F_0\to M\to 0$$

考虑 $M_1=\mathrm{Ker}(F_0\to M)$，对 M_1 重复过程得到一个 F_1，从而有

$$F_1\to F_0\to M\to 0$$

以此类推，我们得到一个 M 的自由消解.

定理 16.2.1: Hilbert Syzygy Theorem

令 $R=k[x_1,\cdots,x_r]$，则任意有限生成的分次 R-模存在由有限生成的自由模构成的长度 $\le r$ 的有限的分次自由消解.

定理 16.2.2: Hilbert Syzygy Theorem 弱版本

设 $R=k[x_1,\cdots,x_r]$，则有限生成的 R-模存在长度 $\le r$ 的自由消解.

Example 16.2.1

我们来看一个例子去理解 Syzygy 到底是什么.

令 $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\langle\sigma\rangle$，考虑 G 在 $R=\mathbb{C}[x,y]$ 上的作用 $\sigma(x,y)=(\omega x,\omega y)$，其中 $\omega=e^{2\pi i/3}$，我们不难得到

$$\mathbb{C}[x,y]^G=\mathbb{C}[x^3,x^2y,xy^2,y^3]$$

是有限生成的 $R:=\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2,z_3]$ 模，其中有

$$z_0=x^3,\quad z_1=x^2y,\quad z_2=xy^2,\quad z_3=y^3$$

我们有 1 阶 syzygy-关系(R-线性):

$$z_0z_3-z_1z_2=0,\quad z_1^2-z_0z_2=0, z_2^2-z_1z_3=0$$

令 $a_1=z_2^2-z_1z_3$，$a_2=z_0z_3-z_1z_2$，$a_3=z_1^2-z_0z_2$，我们有两个 2 阶 syzygy-关系：

$$z_0a_1+z_1a_2+z_2a_3=0,\quad z_1a_2+z_2a_2+z_3a_3=0$$

令 $b_1=z_0a_1+z_1a_2+z_2a_3$，$b_2=z_1a_2+z_2a_2+z_3a_3$，有 b_1,b_2 是 R 线性无关的.

从而我们有

$$Rb_1\oplus Rb_2\to Ra_1\oplus Ra_2\oplus Ra_3\to R\to\mathbb{C}[x,y]^G\to 0$$

我们从自由消解的角度来解释一下：

由于 $R=\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2,z_3]$，其中有关系

$$z_0z_3-z_1z_2=0,\quad z_1^2-z_0z_2=0, z_2^2-z_1z_3=0$$

我们知道 $\mathbb{C}[x,y]^G=R/(z_0z_3-z_1z_2,z_1^2-z_0z_2,z_2^2-z_1z_3)$，从而我们可以考虑自由模

$$R^3\to(z_0z_3-z_1z_2,z_1^2-z_0z_2,z_2^2-z_1z_3)$$

从而我们可以定义 $R^3=Ra_1\oplus Ra_2\oplus Ra_3$，令 $\varphi(a_1)=z_2^2-z_1z_3$，$\varphi(a_2)=z_0z_3-z_1z_2$，$\varphi(a_3)=z_1^2-z_0z_2$，其中 $\mathrm{Ker}\,\varphi=Ra_1\oplus Ra_2\oplus Ra_3/(z_0a_1+z_1a_2+z_2a_3,z_1a_2+z_2a_2+z_3a_3)$，继续延长消解有

$$\psi : Rb_1 \oplus Rb_2 \to \operatorname{Ker}\varphi, \quad b_1 \mapsto z_0a_1 + z_1a_2 + z_2a_3, b_2 \mapsto z_1a_2 + z_2a_2 + z_3a_3$$

我们知道 $\operatorname{Ker}\psi = 0$，从而自由消解停止，有

$$0 \to R^2 \to R^3 \to R \to \mathbb{C}[x, y]^G \to 0$$

Remark 16.2.2

我们可以利用 Syzygy 定理去证明 Hilbert 多项式的存在性：

令 $R = k[x_1, \cdots, x_r]$，如果存在某个 d 使得 $M = R(d)$，则有[a]

$$H_{R(d)}(s) = H_R(s + d) = \binom{s + d + r - 1}{r - 1}$$

当 $s \geq -(d + r - 1)$ 成立，所以我们知道

$$H_{R(d)}(s) = Q(s) = \binom{s + d + r - 1}{r - 1} = \frac{s^{r-1}}{(r - 1)!} + (\text{lower order terms})$$

如果 F 是一个有限生成的分次自由模，则 F 是若干个形如 $R(d)$ 的直和，所以 $H_F(s)$ 是有限个 $H_{R(d)}(s)$ 的和，而 Syzygy 定理告诉我们存在有限的分次自由消解 $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} : 0 \to F_r \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

故有

$$H_M(s) = \sum (-1)^i H_{F_i}(s)$$

从而我们知道 $H_M(s)$ 的次数小于等于 $r - 1$.

---

[a]即 $n_1 + \cdots + n_r = s + d$ 的非负整数解的个数