

# Just Enough Category Theory to be Dangerous

Muke

January 20, 2026



# Contents

---

<b>1</b>	<b>范畴, 函子和自然变换</b>	<b>1</b>
1.1	泛性质简介 . . . . .	1
1.2	范畴 . . . . .	3
1.3	函子 . . . . .	7
1.4	自然变换 . . . . .	10
1.5	拾遗 . . . . .	17
<b>2</b>	<b>伴随</b>	<b>20</b>
2.1	伴随的基础定义 . . . . .	20
2.2	从单位和余单位看伴随 . . . . .	23
2.3	从始对象看伴随 . . . . .	27
<b>3</b>	<b>可表函子</b>	<b>33</b>
3.1	小范畴和大范畴 . . . . .	33
3.2	可表的定义与例子 . . . . .	34
3.3	米田引理 . . . . .	40
3.4	泛元素与可表性 . . . . .	44
3.5	米田嵌入 . . . . .	46
3.6	可表对象的同构 . . . . .	47
<b>4</b>	<b>极限</b>	<b>49</b>
4.1	积, 等化子和拉回 . . . . .	49
4.2	极限 . . . . .	52
4.3	余极限 . . . . .	56
4.4	余积, 余等化子和推出 . . . . .	63
4.5	保持, 反映与创造 . . . . .	65
4.6	极限和余极限的函子性 . . . . .	67
4.7	函子的极限 . . . . .	72
4.8	预层是表示的余极限 . . . . .	78

4.9 伴随与极限 .....	79
5 局部化	81
6 加性范畴	82
7 Abel范畴	83
8 导出范畴	84
9 三角范畴	85
10 无穷范畴	86

# Chapter 1: 范畴，函子和自然变换

The most important concept in this book is that of *universal property*. The further you go in mathematics, especially pure mathematics, the more universal property you will meet. We will spend most of our time studying different manifestations of this concept.

## 1.1 泛性质简介

**例 1.1.1** 我们下面所称的环都是含有乘法幺元的环，所称的环同态都是把幺元送到幺元的环同态。

环  $\mathbb{Z}$  有这样的性质：对于任何一个环  $R$ ，存在唯一一个从  $\mathbb{Z}$  到  $R$  的环同态。

存在性：我们令  $\varphi(n) = n \cdot 1_R, n \in \mathbb{Z}$ 。唯一性：由于把幺元送到幺元，所以假设存在另一个  $\psi$ ，我们还是只有  $\psi(n) = n \cdot 1_R$ ，从而  $\psi$  实际上等于  $\varphi$ 。

**笔记 1.1.1** *Crucially, there can be essentially only one object satisfying a given universal property. The word 'essentially' mean that two objects satisfying the same universal property need not **literally** be equal, but they are always isomorphic.*

### 引理 1.1.1

$A$  是一个满足下面这个性质的环：对每一个环  $R$ ，都存在唯一一个从  $A$  到  $R$  的同态，则  $A \cong \mathbb{Z}$ 。

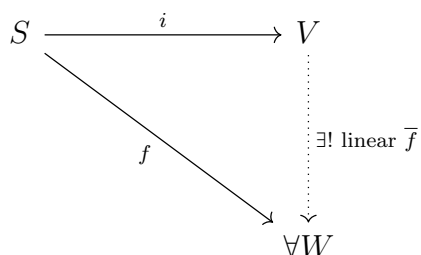
**证明：** 我们称满足此性质的环是“initial”的，我们知道给定的  $A$  是 initial 的，并且  $\mathbb{Z}$  也是 initial 的。

由于  $A$  是 initial 的，从而有唯一的从  $A$  到  $\mathbb{Z}$  的同态  $\varphi$ ，同理由于  $\mathbb{Z}$  是 initial 的，也有唯一的从  $\mathbb{Z}$  到  $A$  的同态  $\psi$ 。现在我们知道  $\psi \circ \varphi$  是从  $A$  到  $A$  的同态(注意这里保持幺元)，但是我们还知道  $A \rightarrow A$  的同态只有唯一一个，并且我们知道恒等映射就是一个，从而我们知道  $\psi \circ \varphi = 1_A$ ，同理有  $\varphi \circ \psi = 1_{\mathbb{Z}}$ 。故  $\varphi$  和  $\psi$  是互逆的，从而  $A$  与  $\mathbb{Z}$  是同构的。□

我们下面看一个更复杂的例子来帮助理解。

**例 1.1.2**  $V$  是一个以  $(v_s)_{s \in S}$  为基的线性空间， $W$  是另外一个线性空间，则从  $V$  到  $W$  的线性映射由从  $S$  到  $W$  的函数唯一决定。

我们定义函数  $i: S \rightarrow V$ ,  $i(s) = v_s$ , 则  $V$  和  $i$  有如下的泛性质:



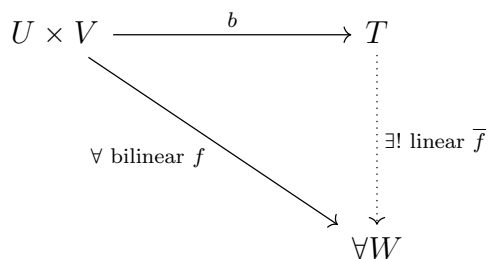
这个图的意思是对于所有线性空间  $W$  和  $f: S \rightarrow W$ , 存在唯一一个线性映射  $\bar{f}: V \rightarrow W$  使得  $\bar{f} \circ i = f$ .

换言之, 下面的函数是双射:

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{linear maps } V \rightarrow W\} & \rightarrow & \{\text{functions } S \rightarrow W\} \\
 \bar{f} & \mapsto & \bar{f} \circ i
 \end{array}$$

我们下面再看一个例子:

**例 1.1.3** 考虑双线性映射  $f: U \times V \rightarrow W$ , 则存在一个确定的线性空间  $T$  和一个确定的双线性映射  $b: U \times V \rightarrow T$ , 满足下面的泛性质



即使我们不知道这样的  $T$  和  $b$  存在, 我们仍旧可以证明这样的泛性质在同构意义下唯一决定  $T$  和  $b$ .

### 引理 1.1.2

$U$  和  $V$  是线性空间, 假设  $b: U \times V \rightarrow T$  和  $b': U \times V \rightarrow T'$  都是  $U \times V$  上的泛双线性映射, 则  $T \cong T'$ . 更精确地说, 存在唯一的同构  $j: T \rightarrow T'$  使得  $j \circ b = b'$ .

**证明:** 很简单  $> \_ <$ . □

## 1.2 范畴

### 定义 1.2.1: 范畴(category)

一个**范畴**  $\mathcal{A}$  由以下内容组成:

- **对象(objects)** 的集合  $\text{ob}(\mathcal{A})$ .
- 对于每一个  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{A})$ , a collection<sup>a</sup>  $\mathcal{A}(A, B)$  of **maps** or **arrows** or **morphisms** from  $A$  to  $B$ .
- 对每一个  $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{A})$ , 下面的函数被称为 **composition**:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(B, C) \times \mathcal{A}(A, B) &\rightarrow \mathcal{A}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

- 对于每个  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ , 存在  $A$  的 **identity**  $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$ .

此外还要满足下面两条公设:

- **结合律**: 对于每一个  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ ,  $g \in \mathcal{A}(B, C)$  和  $h \in \mathcal{A}(C, D)$ , 有  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .
- **幺元律**: 对于每一个  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ , 我们有  $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ .

<sup>a</sup>也经常记为  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ .

**注 1.2.1** 我们经常使用以下表示:

- 用  $A \in \mathcal{A}$  表示  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ .
- 用  $f: A \rightarrow B$  或者  $A \xrightarrow{f} B$  表示  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ .
- 用  $gf$  表示  $g \circ f$ .

**注 1.2.2** 态射的集合被记作  $\text{Mor}(\mathcal{A})$ .

### 定义 1.2.2

如果  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ , 我们称  $A$  为  $f$  的 **source**,  $B$  为  $f$  的 **target**.

**例 1.2.1** 我们来看从前的数学对象如何写成范畴的形式:

- **集合范畴**: 对象是集合, 态射是函数/映射, 复合就是常规意义的复合, 幺元就是常规意义的幺元. 集合范畴被记为 **Set**.

- **群范畴**: 对象是群, 态射是群同态. 群范畴被记为 **Grp**.
- **环范畴**: 对象是环, 态射是环同态. 环范畴被记为 **Ring**.
- **线性空间范畴**: 对于一个域  $k$ , 对象是  $k$  上的线性空间, 态射是线性映射. 线性空间范畴被记为 **Vect**.
- **拓扑范畴**: 对象是拓扑空间, 态射是连续映射. 拓扑范畴被记为 **Topo**.
- **离散 (discrete) 范畴**: 态射只有幺元.

**注 1.2.3** 我们接下来着重讨论的是范畴之间的互动, 而非范畴里面到底是个什么东西.

### 定义 1.2.3

一个态射  $f: A \rightarrow B$  是**同构**, 如果存在  $g: B \rightarrow A$  使得  $gf = 1_A$  且  $fg = 1_B$ . 其中  $g$  被称为  $f$  的**逆 (inverse)**, 记为  $g = f^{-1}$ .

### 命题 1.2.1

一个范畴  $\mathcal{A}$  中的态射最多拥有一个逆, 即对于给定的态射  $f: A \rightarrow B$ , 最多存在一个态射  $g: B \rightarrow A$  使得  $gf = 1_A, fg = 1_B$ .

**证明:** 留作习题. □

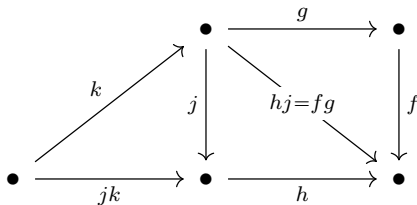
**例 1.2.2** 我们来看一些经典的同构:

- 集合范畴中的同构为双射.
- 群范畴中的同构为群同构
- 环范畴中的同构为环同构.
- 拓扑范畴中的同构为同胚.

当然, 范畴并不需要如此具体, 我们也可以有一些比较抽象的范畴. 比如我们可以考虑只有一个对象和么元的范畴(我们在画图时常常省略掉么元) 1:

•

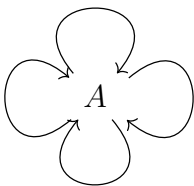
我们可以造出来一些更复杂的例子, 比如



一个群实际上就是一个范畴  $\mathcal{A}$ , 其中  $\text{ob}(\mathcal{A}) = \{A\}$ , 即只包含一个对象, 所有的态射都是同构. 群乘法就是复合运算  $\circ: \circ: \mathcal{A}(A, A) \times \mathcal{A}(A, A) \rightarrow \mathcal{A}(A, A)$ . 我们可以做一个对应:

category $\mathcal{A}$ with single object $A$	corresponding group $G$
maps in $\mathcal{A}$	elements of $G$
$\circ$ in $\mathcal{A}$	$\cdot$ in $G$
$1_A$	$1 \in G$

这个范畴看起来像:



一个么半群就是把上面的同构换成一般的态射即可.

#### 定义 1.2.4: 预序与偏序

**预序(preorder)** 是一个有自反性和传递性的二元关系. 如果再加上反对称性, 就称谓**偏序(partial order)**. 预序集被称为 **preordered sets**, 偏序集被称为 **partially ordered sets** 或者 **posets**.

预序集可以看作是一个范畴  $\mathcal{A}$ : 对于每一个  $A, B \in \mathcal{A}$ , 最多有一个从  $A$  到  $B$  的态射, 如果  $A \leq B$ , 则存在态射  $A \rightarrow B$ . 从而容易验证这是一个范畴.

**注 1.2.4** 一个预序集不是偏序集的例子是整除关系，有  $2 \mid -2$  且  $-2 \mid 2$ ，但是  $2 \neq -2$ .

## 从旧范畴得到新范畴

### 定义 1.2.5

每一个范畴  $\mathcal{A}$  都有一个 **opposite** 或 **dual** 范畴  $\mathcal{A}^{op}$ ，由反方向的箭头定义出来. 正式地讲，我们有

- $\text{ob}(\mathcal{A}^{op}) = \text{ob}(\mathcal{A})$ .
- $\mathcal{A}^{op}(B, A) = \mathcal{A}(A, B)$ ,  $\forall A, B \in \text{ob}(\mathcal{A})$ .
- $\mathcal{A}^{op}$  中的么元和  $\mathcal{A}$  中的么元相同，但是 arguments reversed.

**笔记 1.2.1** 我们尝试表示以下：对于  $\mathcal{A}^{op}$  中的态射

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

它在  $\mathcal{A}$  中变成

$$A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

对于  $\mathcal{A}$  中的  $f: A \rightarrow B$ ，对应的  $\mathcal{A}^{op}$  中的态射  $B \rightarrow A$  也称作  $f$ ，也有些人愿意写成  $f^{op}$  加以区分.

我们验证一下对偶范畴的复合，下图道尽一切：

$$\begin{array}{ccc} f^{op}: X \rightarrow Y, & g^{op}: Y \rightarrow Z \in \mathcal{A}^{op} & \rightsquigarrow & g^{op}f^{op}: X \rightarrow Z \in \mathcal{A}^{op} \\ \updownarrow & & & \updownarrow \\ g: Z \rightarrow Y, & f: Y \rightarrow X \in \mathcal{A} & \rightsquigarrow & fg: Z \rightarrow X \in \mathcal{A} \end{array}$$

下面我们举一些对偶范畴的例子：

- 考虑矩阵范畴  $\mathbf{Mat}_R^{op}$ ，它的对象是所有非零自然数，从  $m$  到  $n$  的态射是  $R$  上的  $m \times n$  矩阵，那么当我们考虑  $\mathbf{Mat}_R$ ，箭头反过来之后  $n$  到  $m$  的态射就变成  $m \times n$  的矩阵，相当于取了转置.

- 考虑预序范畴, 如果  $y \leq x$ , 则  $y \rightarrow x$ , 在其对偶中是如果  $y \leq x$ , 则  $x \rightarrow y$ , 相当于把不等号反向.

另一种构造新范畴的方法是乘积:

### 定义 1.2.6

给定范畴  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , 则有 **product category**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , 满足

$$\begin{aligned} \text{ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) &= \text{ob}(\mathcal{A}) \times \text{ob}(\mathcal{B}) \\ (\mathcal{A} \times \mathcal{B})((A, B), (A', B')) &= \mathcal{A}(A, A') \times \mathcal{B}(B, B') \end{aligned}$$

### 命题 1.2.2

一个态射至多有一个逆.

**证明:** 设  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ , 假设  $g_1, g_2 \in \mathcal{A}(B, A)$  均满足

$$g_1 f = 1_A, f g_1 = 1_B, \quad g_2 f = 1_A, f g_2 = 1_B$$

则我们知道

$$g_1 = g_1 \circ 1_B = g_1 \circ f \circ g_2 = 1_A \circ g_2 = g_2$$

□

## 1.3 函子

下面我们将讨论一些范畴与范畴之间的东西.

### 定义 1.3.1

$\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  是范畴, 一个**函子(functor)**  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  由下面内容组成:

- $F: \text{ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{B})$ ,  $A \mapsto F(A)$ .
- 对于任意的  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 有

$$F: \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A')), \quad f \mapsto F(f)$$

并满足下面的公设

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ , 对任意  $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ .
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ , 对任意  $A \in \mathcal{A}$ .

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

**注 1.3.1** 由上面的定义我们知道:

唯一决定了一个  $F(A_0) \rightarrow F(A_n)$  的态射.

此外我们还可以知道函子是可以结合的, 给定两个函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$$

我们可以得到一个新的函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{C}$$

从而我们知道又可以得到一个新的范畴 **CAT**, 它的对象是范畴, 态射是函子. (也许我们可以称之为范畴范畴  $\mathcal{C}at$ )

## 遗忘函子

我们不正式地介绍一下 **forgetful functors**, 遗忘函子就是在范畴间映射的时候忘却掉原本范畴的一些性质, 如下面的一些例子:

- 我们可以从  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , 遗忘掉群结构, 只把群元素当成集合.
- 相似地, 我们可以得到  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Set}$  的遗忘.
- 我们不必把所有东西全部忘掉, 可以逐渐忘却, 比如从  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , 再比如  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Mon}$ ,  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ .

## 自由函子

自由函子是和遗忘函子在某种意义上对偶的一个概念, **Free functors** 是为原本的范畴赋予一些新的性质.

- 比如我们考虑给定一个集合  $S$ ,  $F(S)$  是对应的自由群, 从而我们就从  $\mathbf{Set}$  到  $\mathbf{Grp}$  给出了一个态射, 原本集合间的映射在函子的作用下变成同态.
- 同理我们可以考虑在集合  $S$  上生成的  $\mathbb{Z}$  上多项式环,  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{CRing}$ .
- 进一步还可以构造  $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}$ .

**例 1.3.1** 我们考虑一个多项式方程组:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 3z^2 &= 1 \\ x^3 + x &= y^2 \end{aligned}$$

诱导出一个  $F: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Set}$ , 其中我们对于一个环  $A$ , 我们定义

$$F(A) := \{(x, y, z) \in A \times A \times A \mid \text{satisfying the equation system}\}$$

则对于  $f: A \rightarrow B$ , 我们可以构造出  $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ .

### 定义 1.3.2: 反变函子

$\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  是两个范畴, 则从  $\mathcal{A}$  到  $\mathcal{B}$  的一个反变函子(contravariant functor) 是一个从  $\mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}$  的函子.

**注 1.3.2** 我们一般所称的函子其实是协变函子(covariant functor).

### 定义 1.3.3: presheaf(预层)

$\mathcal{A}$  上的预层(presheaf) 是一个从  $\mathcal{A}^{op}$  到  $\mathbf{Set}$  的函子.

我们可以观察到一些基本的性质:

- $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  的函子与  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$  的函子是一一对应的.
- $(\mathcal{A}^{op})^{op} = \mathcal{A}$ .
- 从而我们知道  $\mathcal{A}$  到  $\mathcal{B}$  的反变函子可以有两种等价的表示方法, 即  $\mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}$  与  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ .

**例 1.3.2** 对于一个拓扑空间  $X$ , 令  $C(X)$  为连续实值函数环, 则我们知道一个连续映射  $f: X \rightarrow Y$  诱导了一个环同态  $C(f): C(Y) \rightarrow C(X)$ ,  $q \mapsto q \circ f$ .

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} \mathbb{R}$$

所以我们知道  $C(f)$  的方向就与  $f$  的方向相反, 即我们知道  $C$  就是一个从  $\mathbf{Topo}$  到  $\mathbf{Ring}$  的反变函子.

**笔记 1.3.1** 我们要注意到  $X$  变成  $C(X)$  的过程中没有损失信息, 即我们可以反过来通过  $C(X)$  构造出  $X$ , 即通过连续函数族来确定拓扑. 在这个意义下, 我们通常会说“代数是几何的对偶”.

**例 1.3.3** 考虑域  $k$  上的线性空间  $V, W$ , 定义

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{\text{linear maps: } V \rightarrow W\}$$

则对于一个固定的线性空间  $W$ , 我们知道  $\mathrm{Hom}(-, W)$  是一个反变函子, 这只需要考虑

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{q} W$$

从而诱导出了函子

$$\mathrm{Hom}(-, W): \mathbf{Vect}_k^{op} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$$

**定义 1.3.4: 忠实函子与满函子**

一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  如果对于任意的  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 映射

$$F: \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A')), \quad f \mapsto F(f)$$

是单射, 则称为**忠实的(faithful)**; 如果是满射, 则称为**满的(full)**.

**注 1.3.3** 忠实性不代表如果  $f_1$  与  $f_2$  在  $\mathcal{A}$  中是不同的, 则  $F(f_1) \neq F(f_2)$ , 事实上后者是可能发生的, 比如  $F(A_1) = F(A_2), F(A_3) = F(A_4)$ , 就可能存在  $f_1 \in \mathcal{A}(A_1, A_3), f_2 \in \mathcal{A}(A_2, A_4)$ , 则他俩作为不同的个体可能存在  $F(f_1) = F(f_2)$  这种情况发生.

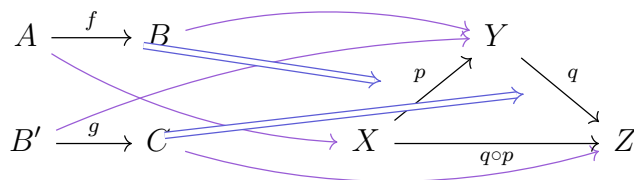
**定义 1.3.5: 子范畴**

令  $\mathcal{A}$  为一个范畴, 一个  $\mathcal{A}$  的**子范畴**  $\mathcal{S}$  包括  $\text{ob}(\mathcal{S})$  的子集  $\text{ob}(\mathcal{S})$ , 与任意  $S, S' \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{A}(S, S')$  的子集  $\mathcal{S}(S, S')$ , 使得满足在幺元律与结合律下是封闭的. 称子范畴  $\mathcal{S}$  是**满子范畴**, 如果对于任意的  $S, S' \in \text{ob}(\mathcal{S})$ , 有  $\mathcal{S}(S, S') = \mathcal{A}(S, S')$ .

**注 1.3.4** 一个满子范畴实际上就是一些对象和他们之间所有态射的集合, 从而当我们提到满子范畴的时候, 我们只需要刻画它所包含的对象就可以了, 其中的所有态射会自然的被纳入进来.

**例 1.3.4** 比如  $\mathbf{Ab}$  就是  $\mathbf{Grp}$  的满子范畴.

**注 1.3.5** 一定要注意函子的像未必是一个子范畴! 比如下图



不是子范畴的原因是  $f, g$  的像的复合  $q \circ p$  并不在函子的像中.

## 1.4 自然变换

我们现在已经知道了从  $\mathcal{A}$  到  $\mathcal{B}$  有函子的作用, 但是不同的函子之间是否会有一些联系呢? 自然变换回答了这个问题.

**定义 1.4.1: 自然变换**

令  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  是范畴, 有函子  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ , 一个**自然变换(natural transformation)**  $\alpha: F \rightarrow G$  是一态射  $(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A))_{A \in \mathcal{A}}$ , 并且满足自然性条件, 即下面交换图交换:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \end{array}$$

其中的  $\alpha_A$  称为  $\alpha$  的组成元.

**注 1.4.1** 我们通常把自然变化记为

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{A} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{B} \\ & G & \end{array}$$

**定义 1.4.2: 函子范畴**

我们可以定义  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  的**函子范畴**  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  或者记为  $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ , 其对象是  $\mathcal{A}$  到  $\mathcal{B}$  的函子, 而态射是函子间的自然变换.

**注 1.4.2** 比如我们可以从

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{A} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \Downarrow \beta \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{B} \\ & G & \\ & H & \end{array}$$

得到

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{A} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \circ \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{B} \\ & H & \end{array}$$

我们通常不关心也不知道两个数学对象到底是不是完全一样的, 我们关心的只是其中的同构关系.

**定义 1.4.3: 自然同构**

$\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  中函子的一个**自然同构(natural isomorphism)**是函子范畴  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  中的一个同构.

## 引理 1.4.1

考虑自然变换  $\alpha$ :

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{A} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{B} \\ & G & \end{array}$$

则  $\alpha$  是自然同构当且仅当对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有  $\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$  是同构.

**证明:** 我们来验证  $\alpha$  确实是  $F$  与  $G$  之间的一个同构, 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 我们有

$$\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$$

是一个同构, 从而存在  $\beta_A: G(A) \rightarrow F(A)$  使得  $\alpha_A \circ \beta_A = 1_{G(A)}$ ,  $\beta_A \circ \alpha_A = 1_{F(A)}$ .

从而我们断言由  $\beta_A$  们组成的函子  $\beta: G \rightarrow F$  是  $\alpha$  的逆元, 首先验证  $\beta$  确实是一个自然变换, 对任意的  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 有

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \\ \beta_A \uparrow & & \uparrow \beta_{A'} \\ & \alpha_A \downarrow & \downarrow \alpha_{A'} \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \end{array}$$

首先有  $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ F(f)$ , 由于  $\beta_A$  与  $\beta_{A'}$  的定义, 我们有

$$\beta_{A'} \circ G(f) \circ \alpha_A \circ \beta_A = \beta_{A'} \circ \alpha_{A'} \circ F(f) \circ \beta_A$$

也即  $\beta_{A'} \circ G(f) = F(f) \circ \beta_A$ , 从而满足自然性, 并且容易得到  $\beta$  就是  $\alpha$  的逆, 故得证.  $\square$

## 通过自然同构导出正合列

我们可以通过构造自然同构(链同构)将一个正合列转化为另一个正合列. 比如  $\alpha$  是  $F, G \in [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  中的一个自然同构, 其中有自然同构  $\alpha: F \rightarrow G$ , 则若有正合列

$$\cdots \longrightarrow F(A_n) \xrightarrow{f_n} F(A_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1}} F(A_{n+2}) \longrightarrow \cdots$$

我们可以证明下面的序列也是正合的:

$$\cdots \longrightarrow G(A_n) \xrightarrow{g_n} G(A_{n+1}) \xrightarrow{g_{n+1}} G(A_{n+2}) \longrightarrow \cdots$$

这是因为有自然同构使得下图交换

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F(A_n) & \xrightarrow{f_n} & F(A_{n+1}) & \xrightarrow{f_{n+1}} & F(A_{n+2}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \alpha_{A_n} & & \downarrow \alpha_{A_{n+1}} & & \downarrow \alpha_{A_{n+2}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & G(A_n) & \xrightarrow{g_n} & G(A_{n+1}) & \xrightarrow{g_{n+1}} & G(A_{n+2}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

从而若有  $\text{Im}(f_n) = \text{Ker}(f_{n+1})$ , 通过简单运算可以知道  $\text{Im}(g_n) = \text{Ker}(g_{n+1})$ , 从而下面序列正合.

**定义 1.4.4**

对于给定的函子  $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{B}$ , 我们称  $F(A) \cong G(A)$  在  $A$  中是自然的, 如果  $F$  和  $G$  是自然同构的.

**注 1.4.3** 我们会有自然同构于典范同构 (*canonical isomorphism*) 两个容易混淆的名词, 自然同构已经在上面明确的定义出来, 而典范同构在数学中是一定程度上被滥用的. 典范同构的解释可以理解为: *God given*. 即当我们说  $A$  和  $B$  是典范同构时, 你应该能立刻明白我说的同构是怎样的同构.

比如我们会说  $A \times B$  和  $B \times A$  典范同构, 那你很自然就能明白同构是通过双射

$$(a, b) \rightarrow (b, a)$$

实现的, 这就是典范同构 *God given* 的含义.

**定义 1.4.5: 范畴的等价**

范畴  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  之间的等价 (equivalence) 是一对函子

$$\mathcal{A} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{B}$$

并且有自然同构

$$\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow G \circ F, \quad \varepsilon: F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$$

如果  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  之间存在一个等价, 我们说  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  是等价的 (equivalent), 并且写作  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ , 我们也称函子  $F$  与  $G$  是等价 (equivalences).

**注 1.4.4**  $\eta$  与  $\varepsilon$  的方向并不重要, 因为本身就已经是同构了, 但是我们这样选择是有原因的, 这个原因将在讲到伴随的时候揭晓.

$$1_{\mathcal{A}} \left( \curvearrowright \mathcal{A} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{B} \left( \curvearrowright \right) 1_{\mathcal{B}}$$

**注 1.4.5** 在范畴等价中, 如果你从  $\mathcal{A}$  走到  $\mathcal{B}$  再走回  $\mathcal{A}$ , 你不需要回到同一个对象, 你只需要回到一个同构的对象.

**定义 1.4.6: 本质满函子**

一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  被称为是本质满的 (essentially surjective on objects), 如果对于任意的  $B \in \mathcal{B}$ , 存在  $A \in \mathcal{A}$ , 使得  $F(A) \cong B$ .

**注 1.4.6** 注意  $\cong$  指的是范畴中对象的内构或者把范畴视作范畴范畴中的对象的内构, 而  $\simeq$  则表示等价.

**命题 1.4.1: 等价范畴的刻画**

一个函子是全忠实(full, faithful)并且本质满的当且仅当这个函子是一个等价.

**证明:**

- 如果  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是范畴等价, 则存在函子  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  与自然同构

$$\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow G \circ F, \quad \varepsilon: F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$$

对于任意  $B \in \mathcal{B}$ , 由于  $\varepsilon: F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$  是同构, 从而有

$$F \circ G(B) \cong 1_{\mathcal{B}}(B) = B$$

即有

$$A = G(B) \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad F(A) \cong B$$

从而  $F$  是本质满的.

并且对任意的  $A, A' \in \mathcal{A}$ ,  $\forall f, g \in \mathcal{A}(A, A')$ , 如果有

$$F(f) = F(g) \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$$

从而有  $G(F(f)) = G(F(g))$ , 由于有自然同构  $\eta$ , 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} A = 1_{\mathcal{A}}(A) & \xrightarrow{f} & A' = 1_{\mathcal{A}}(A') \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_{A'} \\ G \circ F(A) & \xrightarrow{G \circ F(f)} & G \circ F(A') \end{array}$$

有

$$\eta_{A'} \circ f = G \circ F(f) \circ \eta_A = G \circ F(g) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ g$$

由于  $\eta_{A'}$  是同构, 所以有  $f = g$ , 从而  $F$  是忠实的.

对任意的  $h \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$ , 我们考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & & & F \\ & & & & \swarrow \\ F(A') & \xrightarrow{G} & G \circ F(A') & \xleftarrow{\eta_{A'}} & A' \\ \uparrow h & \xrightarrow{\quad} & \uparrow G(h) & \xrightarrow{\quad} & \uparrow \eta_{A'}^{-1} \circ G(h) \circ \eta_A \\ F(A) & \xrightarrow{G} & G \circ F(A) & \xleftarrow{\eta_A} & A \\ & & & & \searrow F \end{array}$$

令  $f = \eta_{A'}^{-1} \circ G(h) \circ \eta_A$ , 我们知道  $f \in \mathcal{A}(A, A')$ , 我们还是考虑交换图

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & A' \\
 \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_{A'} \\
 GF(A) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(A') \\
 & \xrightarrow{G(h)} & 
 \end{array}$$

含  $G(h)$  的交换性是由  $f$  的定义得到, 含  $GF(f)$  的交换性是由自然变换定义得到, 从而我们有

$$G(F(f)) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ f = G(h) \circ \eta_A$$

由于  $\eta_A$  是同构, 我们自然有  $G(F(f)) = G(h)$ , 注意到  $G$  是范畴等价, 我们前面已经证明范畴等价是忠实的, 所以自然有  $F(f) = h$ , 从而我们知道  $F$  是满的. 综上所述我们证明了范畴等价是全忠实且本质满的.

- 如果  $F$  是全忠实且本质满的, 下面我们证明是范畴等价.

首先我们构造对象的映射, 由于  $F$  是本质满的, 所以对于任意的  $B \in \mathcal{B}$ , 所以存在  $A \in \mathcal{A}$ , 有  $F(A) \cong B$ , 我们考虑构造函数子  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  如下:

- 对象的构造: 令  $G(B) = A$ , 从而我们知道  $FG(B) \cong B$ , 所以存在同构  $\varepsilon_B: FG(B) \rightarrow B$ .
- 态射的构造: 对于  $h \in \mathcal{B}(B, B')$ , 考虑有同构  $\varepsilon_B$  与  $\varepsilon_{B'}$ , 有下面交换图成立

$$\begin{array}{ccccc}
 B' & \xleftarrow{\varepsilon_{B'}} & FG(B') & \xleftarrow{F} & G(B) \\
 \uparrow h & & \uparrow \varepsilon_{B'}^{-1} \circ h \circ \varepsilon_B & & \uparrow G(h) \\
 B & \xleftarrow{\varepsilon_B} & FG(B) & \xleftarrow{F} & G(B)
 \end{array}$$

由于  $F$  是全忠实的, 所以存在(full)唯一(faithful)的态射  $f \in \mathcal{B}(B, B')$ , 使得  $F(f) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ h \circ \varepsilon_B$ , 我们就令  $G(h) = f$ .

- 下面我们验证  $G$  是函子, 对于恒等态射  $id_B$ , 有  $FG(id_B) = \varepsilon_B^{-1} \circ id_B \circ \varepsilon_B = id_{FG(B)}$ , 所以由于  $F$  忠实, 有  $G(id_B) = id_{G(B)}$ , 所以  $G$  保持态射的恒等.

对于  $B_1 \xrightarrow{h} B_2 \xrightarrow{g} B_3$ , 有

$$F(G(g) \circ G(h)) = F(G(g)) \circ F(G(h)) = \varepsilon_{B_3}^{-1} \circ h \circ \varepsilon_{B_2} \circ \varepsilon_{B_2}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_{B_1} = FG(g \circ h)$$

所以有  $G$  保持复合. 从而  $G$  是一个函子.

下面我们注意由  $G$  的定义知道

$$\varepsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$$

是自然同构. 我们还可以构造自然同构  $\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ . 由于  $F$  的全忠实性, 我们知道  $F$  在态射集上面是双射, 从而对于同构

$$\varepsilon_{F(A)}^{-1}: F(A) \rightarrow FGF(A)$$

存在唯一的  $\eta_A: A \rightarrow GF(A)$  使得  $F(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)}^{-1}$ .

我们需要验证  $\eta$  的自然性, 由于有交换图

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \varepsilon_{F(A)}^{-1} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{F(A')}^{-1} \\ FGF(A) & \xrightarrow{FGF(f)} & FGF(A') \end{array}$$

所以有

$$FGF(f) \circ F(\eta_A) = FGF(f) \circ \varepsilon_{F(A)}^{-1} = \varepsilon_{F(A')}^{-1} \circ F(f) = F(\eta_{A'}) \circ F(f)$$

所以有  $F(GF(f) \circ \eta_A) = F(\eta_{A'} \circ f)$ , 由忠实性知道  $GF(f) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ f$ , 所以下面交换图成立:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_{A'} \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(A') \end{array}$$

所以自然性成立, 至于同构, 我们只需要注意到  $F$  是全的, 所以存在  $\eta_A^{-1} \in \mathcal{A}(GF(A), A)$ , 使得  $F(\eta_A^{-1}) = \eta_{F(A)}$ .

有  $F(\eta_A \circ \eta_A^{-1}) = F(\eta_A) \circ F(\eta_A^{-1}) = \varepsilon_{F(A)}^{-1} \circ \varepsilon_{F(A)} = id_{FGF(A)}$ , 所以由忠实性知道  $\eta_A \circ \eta_A^{-1} = id_{GF(A)}$ . 所以  $\eta$  是自然同构, 综上知道  $F$  是范畴等价.

□

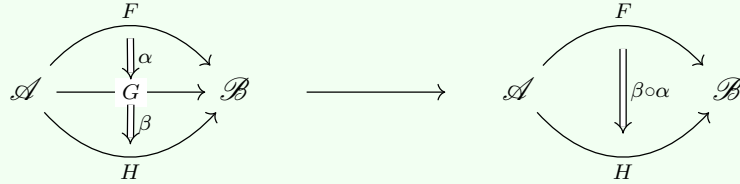
#### 推论 1.4.1

如果  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  是全忠实的函子, 则  $\mathcal{C}$  等价于  $\mathcal{D}$  的满子范畴  $\mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{C}'$  的对象是  $F(C)$ ,  $\forall C \in \mathcal{C}$ .

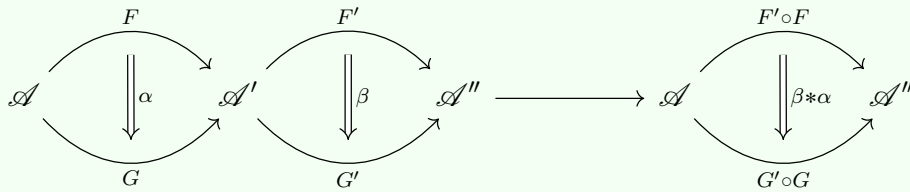
## 1.5 拾遗

### 定义 1.5.1: vertical composition 与 horizontal composition

熟知的自然变换的复合我们称之为**垂直复合**:



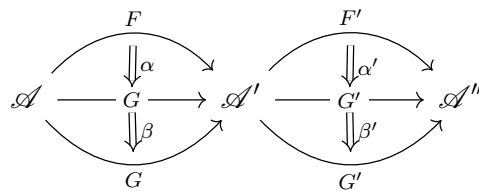
下面的这种复合被称为**水平复合**:



其中  $\beta * \alpha$  定义如下:

$$\begin{array}{ccc}
 F'(F(A)) & \xrightarrow{F'(\alpha_A)} & F'(G(A)) \\
 \beta_{F(A)} \downarrow & \searrow (\beta * \alpha)_A & \downarrow \beta_{G(A)} \\
 G'(F(A)) & \xrightarrow{G'(\alpha_A)} & G'(G(A))
 \end{array}$$

垂直复合与水平复合有交换律:



$$(\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha) = (\beta' * \beta) \circ (\alpha' \circ \alpha) : F' \circ F \rightarrow H' \circ H$$

### 定义 1.5.2: Skeleton

一个满子范畴  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  是  $\mathcal{C}$  的一副**骨架(skeleton)**, 如果  $\mathcal{C}$  的每个对象  $X$  都存在同构  $X \rightarrow Y \in \text{ob}(\mathcal{C}')$ , 并且此  $Y$  是唯一的. 自为骨架的范畴称为骨架范畴.

为什么要考虑骨架这个概念呢? 因为在范畴论中, 我们认为两个对象如果同构, 那么我们就应该区分它们, 所以如果把一个范畴中所有同构的对象坍缩成同一个, 那么就得到了这个范畴的骨架.

那么我们就问了, 是不是任何范畴都存在骨架?

**引理 1.5.1: 骨架的存在性**

任意范畴  $\mathcal{C}$  都存在一副骨架  $\mathcal{C}'$ , 且包含函子  $\iota: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  是范畴等价.

**证明:** 我们构造  $\mathcal{C}$  上的等价关系为

$$X \simeq Y \iff X \cong Y$$

对任意  $\mathcal{C}$  中的对象, 记其的等价类为:

$$[X] := \{Y \in \text{ob}(\mathcal{C}) : X \cong Y\}$$

设  $\mathcal{S}$  是所有这种等价类构成的集合或者类. 应用选择公理, 存在一个选择函数  $f: \mathcal{S} \rightarrow \text{ob}(\mathcal{C})$ , 使得对于任意的  $I \in \mathcal{S}$ , 都有

$$f(I) \in I$$

现在我们定义骨架  $\mathcal{C}'$  如下:

$$\text{ob}(\mathcal{C}') = \{f(I) : I \in \mathcal{S}\}$$

其上的态射定义为

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

恒等态射和态射合成继承  $\mathcal{C}$  的运算. 容易看出来这构成骨架. 下面验证包含函子是范畴等价: 对于任意的  $X \in \mathcal{C}$ , 存在同构

$$\theta_X: X \rightarrow f([X])$$

不妨设对每一个  $X = f([X])$  都有  $\theta_X = id_X$ , 则对于  $f: X \rightarrow Y$ , 我们有态射

$$\theta_Y \circ f \circ \theta_X^{-1}: f([X]) \rightarrow f([Y])$$

于是我们可以构造一个函子

$$\kappa: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}', \quad X \mapsto f([X]), \quad X \xrightarrow{f} Y \mapsto f([X]) \xrightarrow{f} f([Y])$$

容易验证: 这里的  $\theta: id_{\mathcal{C}} \rightarrow \iota \circ \kappa$  是自然同构. 并且  $\kappa \circ \iota = id_{\mathcal{C}'}$ . 于是我们立刻得到范畴等价.  $\square$

我们现在可以利用骨架的语言重新观察一下所谓本质满和全忠实是什么意思. 所谓本质满的意思就是在同构的意义下能打满, 也就是骨架上面的满射. 全忠实则保证了某种单射的性质, 于是我们有:

**定理 1.5.1: 骨架范畴的同构**

骨架范畴间的全忠实且本质满函子就是同构.

**证明:** 设  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是骨架范畴间的全忠实且本质满的函子, 于是对任意的  $B \in \mathcal{B}$ , 存在  $A \in \mathcal{A}$  使得

$$B \cong FA \implies B = FA$$

并且这样的  $A$  是唯一的, 因为如果

$$FA_1 \cong FA_2$$

由于  $F$  在态射集上是双射, 所以可以保持和反映恒等态射, 于是可以得到

$$A_1 \cong A_2 \implies A_1 = A_2$$

所以在对象集上也是双射, 由此定义逆函子  $G$  即可. □

利用骨架的语言, 我们可以更快证明范畴等价当且仅当全忠实且本质满:

**定理 1.5.2: 范畴等价的骨架刻画**

函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 则  $F$  是范畴等价当且仅当全忠实且本质满.

**证明:** 范畴等价推全忠实且本质满的过程见之前的证明, 现在利用骨架说明全忠实且本质满可以推范畴等价: 取骨架  $\iota_A: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  和  $\iota_B: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ , 与在骨架存在性中构造的拟逆  $\kappa_A, \kappa_B$ , 我们有

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}' & \xrightarrow{\kappa_B \circ F \circ \iota_A} & \mathcal{B}' \\
 \uparrow \kappa_A & & \downarrow \iota_B \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\
 \downarrow \iota_A & & \uparrow \kappa_B
 \end{array}$$

容易知道

$$F_0 = \kappa_B \circ F \circ \iota_A$$

是全忠实且本质满的, 于是在骨架范畴上是同构, 于是存在逆, 记为  $F_0^{-1}$ , 我们令

$$G = \iota_A \circ F_0^{-1} \circ \kappa_B$$

则我们有

$$GF = \iota_A \circ F_0^{-1} \circ \kappa_B \circ F \simeq \iota_A \circ F_0^{-1} \circ \underbrace{\kappa_B \circ F \circ \iota_A}_{F_0} \circ \kappa_A = \iota_A \circ \kappa_A \simeq id_{\mathcal{A}}$$

同理

$$FG = F \circ \iota_A \circ F_0^{-1} \circ \kappa_B \simeq \iota_B \circ \underbrace{\kappa_B \circ F \circ \iota_A}_{F_0} \circ F_0^{-1} \circ \kappa_B = \iota_B \circ \kappa_B \simeq id_{\mathcal{B}}$$

所以是范畴等价. □

# Chapter 2: 伴随

Mac Lane 的书上写道

*Adjoint functors arise everywhere.*

## 2.1 伴随的基础定义

考虑一对函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 与  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . 简单地讲,  $F$  是  $G$  的左伴随, 如果说对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , 态射  $F(A) \rightarrow B$  与  $A \rightarrow G(B)$  本质是一样的.

### 定义 2.1.1: Adjoint

考虑一对函子

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

我们称  $F$  是  $G$  的左伴随,  $G$  是  $F$  的右伴随, 并且记为  $F \dashv G$ , 如果

$$\mathcal{B}(F(A), B) \cong \mathcal{A}(A, G(B))$$

在  $A \in \mathcal{A}$  与  $B \in \mathcal{B}$  上满足自然性公理, 一个  $F$  与  $G$  的伴随(adjunction)是一个自然同构的选择.

**注 2.1.1** 在  $A, B$  上自然意味着在  $\mathcal{B}(F(A), B) \cong \mathcal{A}(A, G(B))$  上存在一个确定的双射, 对于每一个  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ , 并且满足自然性公理.

我们下面陈述一些记号, 对于  $F(A) \rightarrow B$  与  $A \rightarrow G(B)$  之间的对应关系, 我们记为

$$\left( F(A) \xrightarrow{g} B \right) \mapsto \left( A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \right)$$

$$\left( F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B \right) \leftarrow \left( A \xrightarrow{f} G(B) \right)$$

有  $\bar{\bar{f}} = f$ ,  $\bar{\bar{g}} = g$ . 我们称  $\bar{f}$  为  $f$  的转置(transpose). 自然性公理有两部分:

$$\overline{\left( F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B' \right)} = \left( A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B') \right) \quad \text{i. e.} \quad \overline{\bar{q} \circ \bar{g}} = G(q) \circ \bar{g}$$

$$\overline{\left( A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B) \right)} = \left( F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B \right) \quad \text{i. e.} \quad \overline{\bar{f} \circ p} = \bar{f} \circ F(p)$$

画成交换图就是说上下两行的复合互为转置：

$$\begin{array}{ccccc}
 F(A) & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{q} & B' \\
 \uparrow F & & \downarrow G & & \downarrow G \\
 A & \xrightarrow{\bar{f}} & G(B) & \xrightarrow{G(q)} & G(B')
 \end{array}$$

实际上这个自然性公理可以看成是函子的自然同构，也就是说： $F$  和  $G$  为伴随，当且仅当下图的两个函子自然同构：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathcal{A}(-, G(-))} & \mathbf{Set} \\
 & \xrightarrow{\mathcal{B}(F(-), -)} &
 \end{array}$$

也就是说，对于  $A \in \mathcal{A}$ ， $q: B \rightarrow B'$ ，有下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 F(A) & \text{Mor}(F(A), B) & \xrightarrow{\text{adjoint}} & \text{Mor}(A, G(B)) & A \\
 \downarrow f & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \bar{f} \\
 B & \xrightarrow{q \circ -} & & G(B) & \\
 \downarrow q & & \begin{array}{ccc} f \longmapsto \bar{f} \\ \downarrow & & \downarrow \\ q \circ f \longmapsto \overline{q \circ f} = G(q) \circ \bar{f} \end{array} & \xleftarrow{G(q) \circ -} & \\
 B' & \text{Mor}(F(A), B') & \xrightarrow{\text{adjoint}} & \text{Mor}(A, G(B')) & G(B') \\
 & & & & \downarrow G(q)
 \end{array}$$

### 自由函子 $\dashv$ 遗忘函子(自由是遗忘的左伴随)

代数结构上的遗忘函子总是有左伴随，比如

- $k$  是一个域，则存在伴随对

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Vect} & \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 F & \dashv & U \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & \mathbf{Set} &
 \end{array}$$

其中  $U$  是遗忘函子， $F$  是自由函子. 对于一个固定的集合  $S$  和一个线性空间  $V$ ，对于给定的线性映射

$$g: F(S) \rightarrow V$$

我们可以定义一个集合映射  $\bar{g}: S \rightarrow U(V)$ ， $\bar{g}(s) = g(s)$ ， $\forall s \in S$ .

从而给出了一个函数

$$\begin{aligned} \mathbf{Vect}(F(S), V) &\rightarrow \mathbf{Set}(S, U(V)) \\ g &\mapsto \bar{g} \end{aligned}$$

对于另一个方向, 给定一个集合映射  $f: S \rightarrow U(V)$ , 我们可以定义一个线性映射  $\bar{f}: F(S) \rightarrow V$ ,  $\bar{f}\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s)$ . 从而给出了函数

$$\begin{aligned} \mathbf{Set}(S, U(V)) &\rightarrow \mathbf{Vect}(F(S), V) \\ f &\mapsto \bar{f} \end{aligned}$$

并且我们有  $\bar{\bar{g}} = g$ ,  $\bar{\bar{f}} = f$ .

**定义 2.1.2: 始对象(initial)与终对象(terminal)**

$\mathcal{A}$  是一个范畴, 对象  $I \in \mathcal{A}$  是一个**始对象**, 如果对于每一个  $A \in \mathcal{A}$ , 存在唯一一个态射  $I \rightarrow A$ . 对象  $T \in \mathcal{A}$  是一个**终对象**, 如果对于每一个  $A \in \mathcal{A}$ , 存在唯一一个态射  $A \rightarrow T$ .

**注 2.1.2** 在集合范畴中, 空集是始对象; 在群范畴中, 平凡群是始对象; 在环范畴中,  $\mathbb{Z}$  是始对象.

在集合范畴中, 一元集是终对象; 在群范畴中, 平凡群是终对象; 在环范畴中, 平凡环是终对象.

**引理 2.1.1**

令  $I$  与  $I'$  是一个范畴的始对象, 则存在唯一的同构  $I \rightarrow I'$ .

**证明:** 由定义, 我们有

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & I' \\ \uparrow & \searrow & \nearrow \\ & 1 & \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ I' & \xleftarrow{f} & I \end{array}$$

由始对象的定义, 其中  $f, g$  都是唯一的, 并且  $f \circ g = 1$ ,  $g \circ f = 1$ . 从而存在唯一的同构.  $\square$

**注 2.1.3** 伴随对是可以复合的:

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{A}' \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \perp \\ \xleftarrow{G'} \end{array} \mathcal{A}''$$

则我们可以得到伴随对

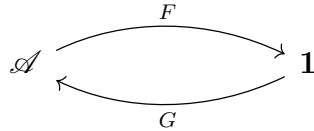
$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F' \circ F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G' \circ G} \end{array} \mathcal{A}''$$

这是因为下面的同构在  $A \in \mathcal{A}, A'' \in \mathcal{A}''$  中自然.

$$\mathcal{A}''(F'(F(A)), A'') \cong \mathcal{A}'(F(A), G'(A'')) \cong \mathcal{A}(A, G(G'(A'')))$$

**例 2.1.1** 我们可以将终对象与始对象看成是伴随, 令  $\mathcal{A}$  是一个范畴,  $\mathbf{1}$  是只有一个对象并且只有恒等映射的范畴, 于是我们只有唯一的从  $\mathcal{A}$  到  $\mathbf{1}$  的函子  $F$ . 相反的, 给定一个从  $\mathbf{1}$  到  $\mathcal{A}$  的函子  $G$ , 就对应着  $\mathcal{A}$  中的一个对象  $A_0 = G(1)$ .

我们将  $\mathbf{1} \Rightarrow \mathcal{A}$  视为  $\mathcal{A}$  的一个对象, 则其左伴随  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{1}$  就是一个始对象.



或者我们应该说, 如果  $F \dashv G$ , 则自然有对于  $\mathcal{A}$  中任意对象  $A$ , 都有

$$\mathcal{A}(A_0, A) = \mathcal{A}(G(1), A) \cong \mathbf{1}(1, F(A)) = \mathbf{1}(1, 1) = \{\text{id}\}$$

所以我们就知道  $A_0$  是一个始对象, 反过来如果  $A_0$  是始对象, 则  $F \dashv G$ , 于是我们得到结论:

$$\boxed{G \text{ 是 } F \text{ 的左伴随} \iff A_0 \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的始对象.}}$$

同理也有:

$$\boxed{G \text{ 是 } F \text{ 的右伴随} \iff A_0 \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的终对象.}}$$

## 2.2 从单位和余单位看伴随

我们需要了解所谓自然性到底是个什么东西, 通俗的说, 给定一个伴随

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

自然性就是说当  $A$  在  $\mathcal{A}$  中变化,  $B$  在  $\mathcal{B}$  中变化,  $\mathcal{B}(F(A), B)$  和  $\mathcal{A}(A, G(B))$  之间有一个与  $A, B$  的改变相容的同构, 我们很希望: 如果有

$$F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'$$

则有  $\overline{q \circ g}: A \rightarrow G(B')$  和  $G(q) \circ \overline{g}: A \rightarrow G(B')$  两种对应的态射, 相容性就是要求他们是一样的, 对于另一个方向也是一样.

于是在这种条件下, 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$\left( A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \right) = \overline{\left( F(A) \xrightarrow{1} F(A) \right)}$$

对偶地, 有对于任意的  $B$ , 有

$$\left( FG(B) \xrightarrow{\varepsilon_B} B \right) = \overline{\left( G(B) \xrightarrow{1} G(B) \right)}$$

也就是说，我们可以定义

$$\eta_A = \overline{1_{F(A)}}, \quad \varepsilon_B = \overline{1_{G(B)}}$$

于是对于这个伴随对  $F, G$ ，可以验证(利用伴随的自然性)我们实际上定义了两个自然变换

$$\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow G \circ F, \quad \varepsilon: F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$$

称为这个伴随的**单位(unit)**和**余单位(counit)**。

**引理 2.2.1**

给定伴随对  $F \dashv G$ ，单位和余单位是  $\eta, \varepsilon$ ，则下面两个三角交换：

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\
 & \searrow 1 & \downarrow \varepsilon F \\
 & & F
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\
 & \searrow 1 & \downarrow G\varepsilon \\
 & & G
 \end{array}$$

**注 2.2.1** 这称之为**三角恒等式(triangle identities)**。它们是函子范畴  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  和  $[\mathcal{B}, \mathcal{A}]$  中的交换图。

**证明：** 我们仅证明第一个，第二个同理。任给  $A \in \mathcal{A}$ ，考虑交换图：

$$A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \xrightarrow{1_{GF(A)}} GF(A)$$

$$F(A) \xrightarrow{F(\eta_A)} FGF(A) \xrightarrow{\varepsilon_{F(A)}} F(A)$$

注意到  $\overline{1_{GF(A)}} = \varepsilon_{F(A)}$ ，我们有

$$1_{F(A)} = \overline{\eta_A} = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)$$

从而得证。 □

实际上，单位和余单位决定了这整个伴随，我们可以将  $F$  和  $G$  之间的转置关系通过单位和余单位显式地写出来。

**引理 2.2.2**

令  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$  为伴随， $\eta, \varepsilon$  为单位和余单位，则有

$$\bar{g} = G(g) \circ \eta_A, \quad \bar{f} = \varepsilon_B \circ F(f), \quad \forall g: F(A) \rightarrow B, \forall f: A \rightarrow G(B)$$

**证明:** 对于任意的  $g: F(A) \rightarrow B$ , 我们有

$$\begin{array}{c}
 A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \\
 \\
 A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \\
 \\
 F(A) \xrightarrow{1_{F(A)}} F(A) \xrightarrow{g} B \\
 \\
 A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \xrightarrow{G(g)} G(B)
 \end{array}$$

于是得到结论. □

我们可以通过下面的定理, 使用单位和余单位来完整地刻画伴随:

**定理 2.2.1**

考虑范畴间的函子  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$ . 则下面两个东西之间存在双射:

- (1)  $F \dashv G$  之间的一个伴随.
- (2) 满足三角恒等式的自然变换有序对:  $(1_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta} GF, FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{B}})$ .

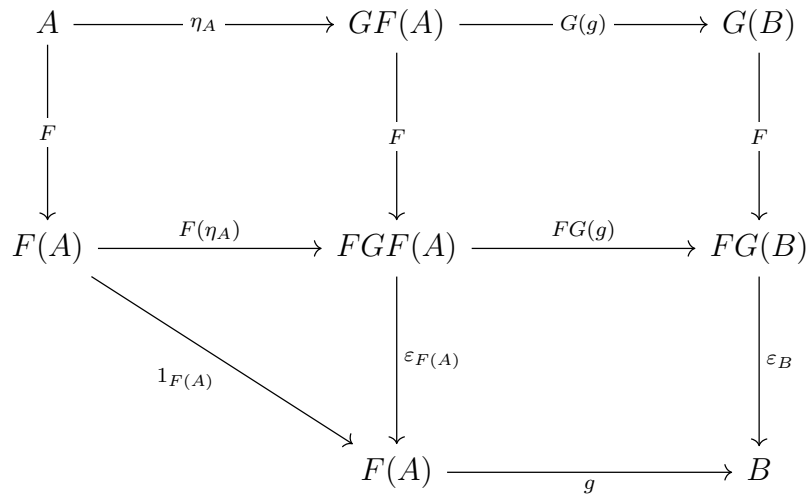
**证明:** 我们在之前已经证明了  $F$  和  $G$  之间的一个伴随给出了一个对  $(\eta, \varepsilon)$ , 并且满足三角恒等式. 我们下面说明这个过程实际上是一个双射. 取一个对  $(\eta, \varepsilon)$  满足三角恒等式, 我们要说明存在唯一的  $F$  和  $G$  之间的伴随使得  $\eta$  和  $\varepsilon$  是单位和余单位.

唯一性由引理 2.2.2 给出, 下面说明存在性. 对于  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ , 我们定义函数

$$\mathcal{B}(F(A), B) \xleftrightarrow{\quad} \mathcal{A}(A, G(B))$$

两个方向都记为  $\bar{\bullet}$ , 对于任意给定的  $g \in \mathcal{B}(F(A), B)$ , 定义  $\bar{g} = G(g) \circ \eta_A \in \mathcal{A}(A, G(B))$ ; 对于任意的  $f \in \mathcal{A}(A, G(B))$ , 定义  $\bar{f} = \varepsilon_B \circ F(f)$ .

我们下面要说明上面两个过程是互逆的，实际上，我们有交换图：

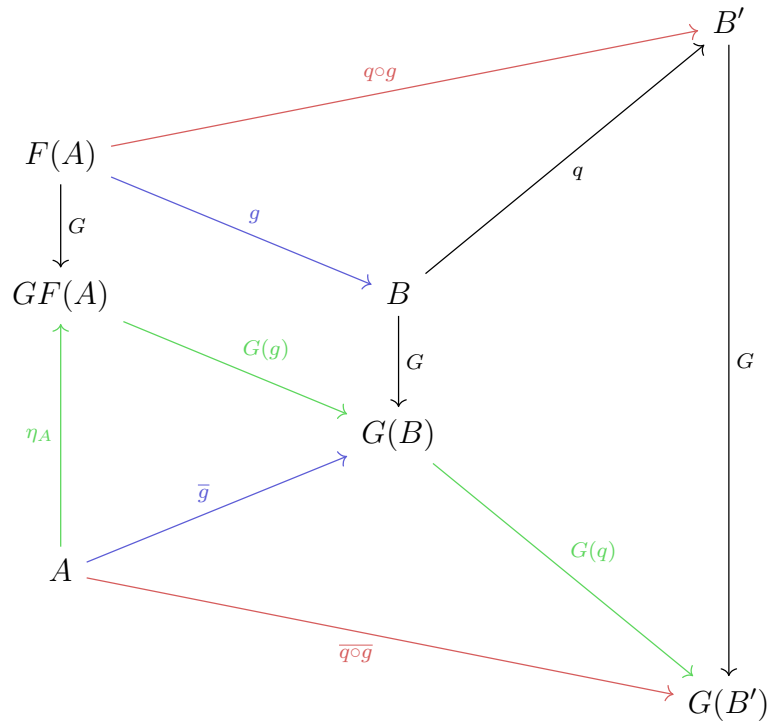


考虑从  $F(A) \rightarrow B$  的不同路径，我们有

$$g = g \circ 1_{F(A)} = \varepsilon_B \circ FG(g) \circ F(\eta_A) = \varepsilon_B \circ F(G(g) \circ \eta_A) = \varepsilon_B \circ F(\bar{g}) = \bar{\bar{g}}$$

于是有  $g = \bar{\bar{g}}$ ，对偶地我们可以得到  $f = \bar{\bar{f}}$ 。于是我们成功证明了双射。

自然性的检验是直接的，下图道尽一切：



从交换图可以读出来： $\overline{q \circ \bar{g}} = G(q) \circ \bar{g}$ ，于是自然性成立，对偶的自然性同理成立，于是确实得到了  $F$  和  $G$  之间的一个伴随。并且由这个伴随，我们得到的单位为：

$$\overline{1_{F(A)}} = G(1_{F(A)}) \circ \eta_A = 1_{GF(A)} \circ \eta_A = \eta_A$$

同理余单位也是  $\varepsilon_B$ 。所以定理得证。

□

## 推论 2.2.1

考虑范畴间的函子  $\mathcal{A} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{B}$ . 则  $F \dashv G$  当且仅当存在自然同构  $\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$  和  $\varepsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$  满足三角恒等式.

## 2.3 从始对象看伴随

## 定义 2.3.1: Comma category

给定范畴与函子

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{B} \\ & & \downarrow Q \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{P} & \mathcal{C} \end{array}$$

从  $P$  到  $Q$  的**逗号范畴(comma category)**, 经常写作  $(P \downarrow Q)$  定义如下:

- 对象是三元组  $(A, h, B)$ , 其中  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  中的态射  $h: P(A) \rightarrow Q(B)$ .
- 从  $(A, h, B)$  到  $(A', h', B')$  是一个对  $(f: A \rightarrow A', g: B \rightarrow B')$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P(A) & \xrightarrow{P(f)} & P(A') \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ Q(B) & \xrightarrow{Q(g)} & Q(B') \end{array}$$

这里的逗号范畴一名来自早起的记法  $(P, Q)$ , 从而冠以逗号之名, 不过这个记号后来逐渐被  $(P \downarrow Q)$  替代, 因为这个更能体现从  $P$  到  $Q$  的关系.

我们可以验证逗号范畴中的态射复合规则为:

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

## 命题 2.3.1

给定  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  与函子  $P, Q$ , 存在如图函子  $F, G$  和一个自然变换  $\alpha: P \circ F \Rightarrow Q \circ G$ .

$$\begin{array}{ccc} (P \downarrow Q) & \xrightarrow{G} & \mathcal{B} \\ \downarrow F & \nearrow \alpha & \downarrow Q \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{P} & \mathcal{C} \end{array}$$

**证明:** 对象层面, 取

$$F(A, h, B) = A, \quad G(A, h, B) = B$$

态射层面, 取

$$F(f, g) = f, \quad G(f, g) = g$$

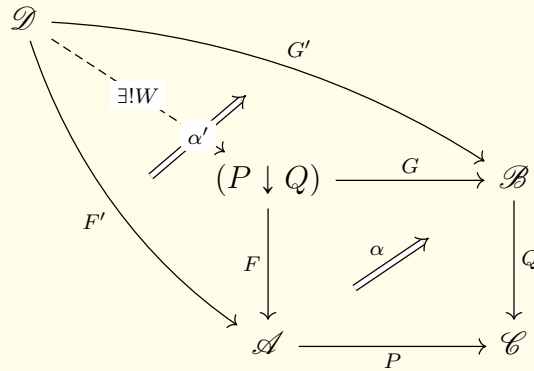
自然变换我们直接令

$$\alpha_{(A, h, b)} = h$$

容易验证这确实是一个自然变换, 于是命题成立. □

**命题 2.3.2: 逗号范畴的泛性质**

继承上一个命题的记号, 如果给定一个范畴  $\mathcal{D}$  与如图的函子与自然变换  $\alpha': P \circ F' \Rightarrow Q \circ G'$



则存在唯一的函子  $\mathcal{D} \rightarrow (P \downarrow Q)$  使得

$$F \circ W = F', \quad G \circ W = G', \quad \alpha * W = \alpha'$$

**证明:** 我们会有一个自然的构造, 即

$$W(D) = (F'(D), \alpha'_D, G'(D))$$

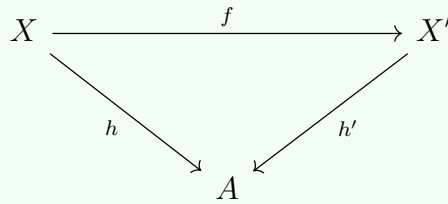
对于  $\mathcal{D}$  中的态射  $d$ , 我们令

$$W(d) = (F'd, G'd)$$

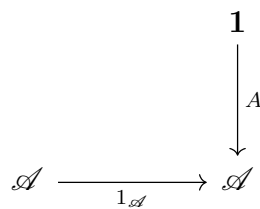
至此唯一性已经得证, 存在性只需要验证  $W$  确实是一个函子即可. 只是简单的. □

**定义 2.3.2: Slice category**

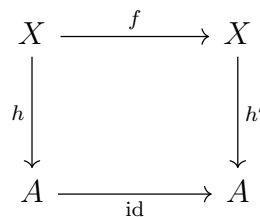
$\mathcal{A}$  是一个范畴,  $A \in \mathcal{A}$ , 则  $\mathcal{A}$  over  $A$  的切片范畴(slice category), 记为  $\mathcal{A}/A$ , 其对象为映入  $A$  的对象及态射构成的二元组  $(X, h)$ , 即  $h: X \rightarrow A$ . 其态射  $f: (X, h) \rightarrow (X', h')$  为使下图交换的态射



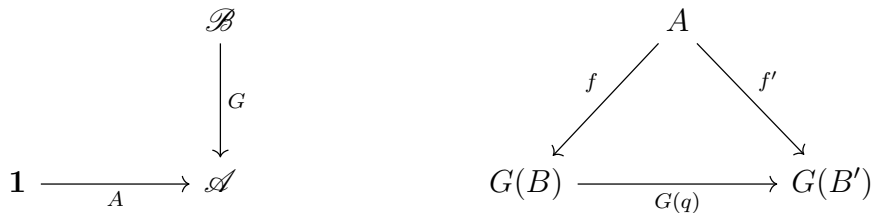
切片范畴可以看成是逗号范畴的特例, 我们把离散范畴  $\mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A}$  看成是  $\mathcal{A}$  中的一个元素, 记为  $A$ , 现在我们考虑逗号范畴  $(\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \downarrow A)$ , 如下图所示



我们知道  $(\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \downarrow A)$  中的一个对象形如  $(X, h, *)$ , 使得  $h: \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(X) \rightarrow A(*) = A$ , 即  $h: X \rightarrow A$ . 其态射是  $(f, g)$ , 即  $f: X \rightarrow X', g: * \rightarrow *$ , 并且使得下图交换



现在给定一个函子  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  和一个元素函子  $A: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A}$ , 我们可以得到逗号范畴  $(A \downarrow G)$ : 对象是  $(B, f)$  使得  $f: A \rightarrow G(B)$ , 一个映射  $(B, f) \rightarrow (B', f')$  是一个  $q: B \rightarrow B'$  使得下图右边交换.



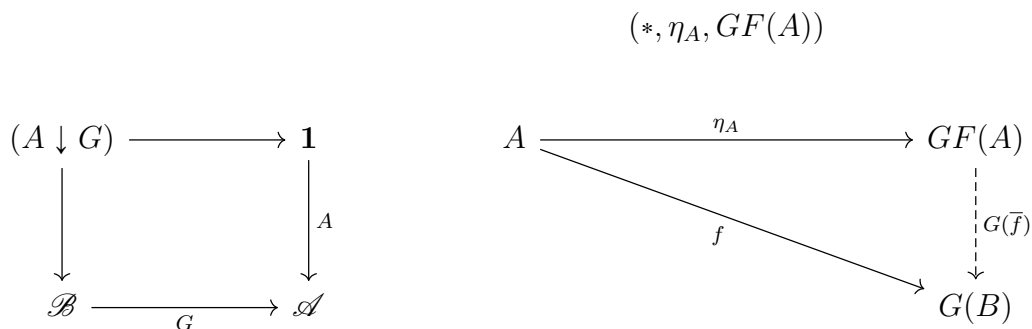
**定义 2.3.3: Coslice category**

把切片范畴取一个对偶我们就得到了余切片范畴(coslice category), 记为  $A/\mathcal{A}$ .

**引理 2.3.1**

给定一个伴随  $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{B}$  和一个  $\mathcal{A}$  中的对象  $A$ . 则单位映射  $\eta_A: A \rightarrow GF(A)$  是逗号范畴  $(A \downarrow G)$  的一个始对象.

**证明:** 考虑  $(B, f: A \rightarrow G(B))$  为一个对象, 我们看下图:



我们知道  $\bar{f}: F(A) \rightarrow B$  是  $f: A \rightarrow G(B)$  的转置, 并且由引理 2.2.2 可以知道对于任意的  $q: F(A) \rightarrow B$ , 有

$$\bar{q} = G(q) \circ \eta_A$$

于是我们知道

$$f = \bar{\bar{f}} = G(\bar{f}) \circ \eta_A$$

于是我们构造出了一个从  $(*, \eta_A, GF(A))$  到  $(*, f, B)$  的态射, 下面说明这个唯一的, 即如果有  $g: F(A) \rightarrow B$ , 使得  $f = G(g) \circ \eta_A$ , 这说明  $f = \bar{g}$ , 即  $\bar{f} = g$ , 于是唯一性得证.  $\square$

**定理 2.3.1**

取范畴和函子  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$ , 则下面两个对象之间存在一一对应.

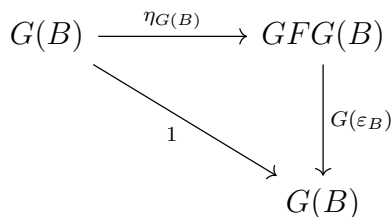
- (1)  $F \dashv G$  之间的伴随.
- (2) 自然变换  $\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$  使得对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\eta_A: A \rightarrow GF(A)$  是  $(A \downarrow G)$  的一个始对象.

**证明:** 我们刚刚证明了,  $F$  和  $G$  之间的每个伴随都给出了一个具有 (2) 中所述性质的自然变换  $\eta$ . 为了证明该定理, 我们必须证明每个具有 (2) 中性质的  $\eta$  是  $F$  和  $G$  之间恰好一个伴随的单位.

根据定理 2.2.1,  $F$  和  $G$  之间的一个伴随等价于一对满足三角恒等式的自然变换  $(\eta, \varepsilon)$ . 因此只需证明, 对于每个具有 (2) 中性质的  $\eta$ , 存在唯一的自然变换  $\varepsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ , 使得该对  $(\eta, \varepsilon)$  满足三角恒等式.

设  $\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$  是一个具有 (2) 中所述性质的自然变换.

假设  $\varepsilon, \varepsilon': FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$  是自然变换, 使得  $(\eta, \varepsilon)$  和  $(\eta, \varepsilon')$  都满足三角恒等式. 其中一个三角恒等式表明, 对于所有的  $B \in \mathcal{B}$ , 三角(记为  $\star$ )



是交换的. 因此,  $\varepsilon_B$  是一个在  $(G(B) \downarrow G)$  中的映射

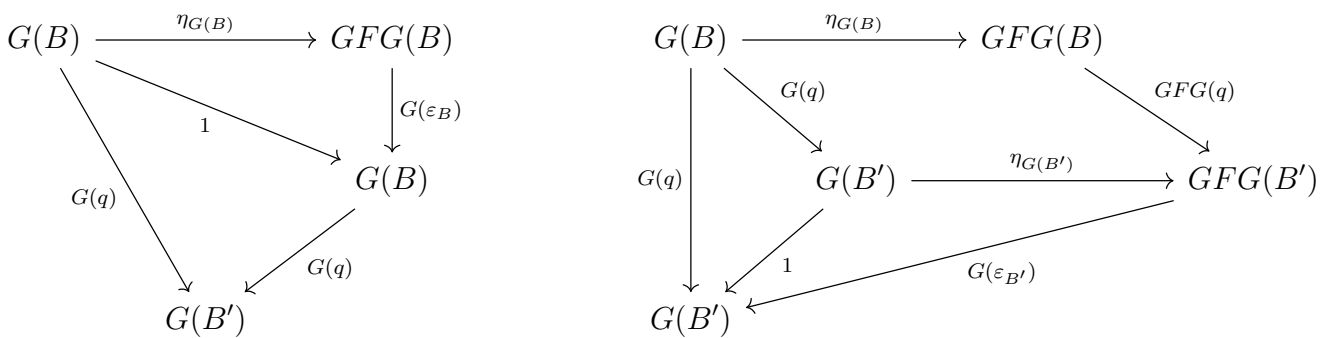
$$\left( FG(B), G(B) \xrightarrow{\eta_{G(B)}} G(FG(B)) \right) \rightarrow \left( B, G(B) \xrightarrow{1} G(B) \right)$$

$\varepsilon'_B$  也是如此, 但  $\eta_{G(B)}$  是始的, 所以只存在一个这样的映射, 所以  $\varepsilon_B = \varepsilon'_B$ . 这对所有的  $B$  都成立, 所以  $\varepsilon = \varepsilon'$ .

对于  $B \in \mathcal{B}$ , 定义  $\varepsilon_B: FG(B) \rightarrow B$  为在  $(G(B) \downarrow G)$  中的唯一映射

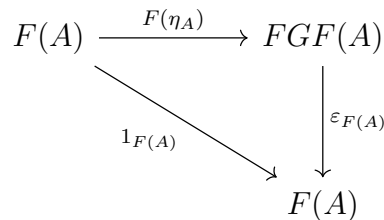
$$(FG(B), \eta_{G(B)}) \rightarrow (B, 1_{G(B)})$$

所以根据  $\varepsilon_B$  的定义, 三角  $(\star)$  交换. 我们证明  $(\varepsilon_B)_{B \in \mathcal{B}}$  是一个自然变换  $FG \rightarrow 1$ , 使得  $\eta$  和  $\varepsilon$  满足三角恒等式. 为了证明自然性, 取  $\mathcal{B}$  中的  $B \xrightarrow{q} B'$ . 我们有交换图

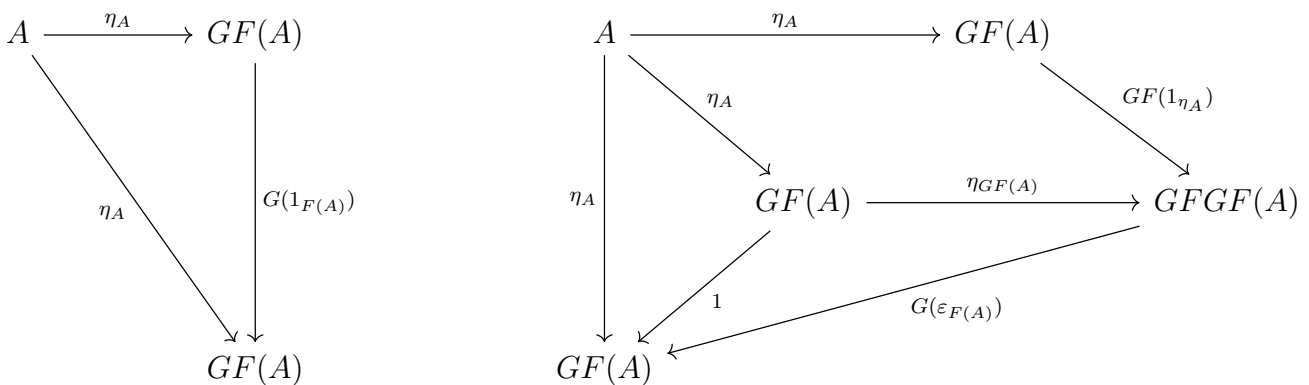


所以  $q \circ \varepsilon_B$  和  $\varepsilon_{B'} \circ FG(q)$  都是  $(G(B) \downarrow G)$  中从  $\eta_{G(B)}$  到  $G(q)$  的映射, 并且由于  $\eta_{G(B)}$  是始的, 它们必然相等. 这证明了  $\varepsilon$  关于  $q$  的自然性. 因此  $\varepsilon$  是一个自然变换.

我们已经注意到, 其中一个三角恒等式, 即方程  $(\star)$ , 是成立的. 另一个是对于  $A \in \mathcal{A}$ ,



是交换的. 为了证明它, 我们重复之前的技巧: 存在交换图



所以根据  $\eta_A$  是始对象, 我们有  $\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = 1_{F(A)}$ , 于是证毕. □

## 推论 2.3.1: 左伴随的存在性判别

令  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  为一个函子, 则  $G$  有左伴随当且仅当对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 逗号范畴  $(A \downarrow G)$  有一个始对象.

**证明:** 引理 2.3.1 证明了“仅当”部分. 为了证明“当”部分, 我们对每个  $A \in \mathcal{A}$  选取  $(A \Rightarrow G)$  的一个始对象, 并记作  $(F(A), \eta_A: A \rightarrow GF(A))$ . (这里  $F(A)$  和  $\eta_A$  仅仅是我们选用的记号.) 对于  $\mathcal{A}$  中的每个映射  $f: A \rightarrow A'$ , 令  $F(f): F(A) \rightarrow F(A')$  是使得

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) \\
 & \searrow f & \downarrow GF(f) \\
 & A' & \\
 & & \searrow \eta_{A'} \\
 & & GF(A')
 \end{array}$$

交换的唯一映射 (换言之,  $(A \Rightarrow G)$  中从  $\eta_A$  到  $\eta_{A'} \circ f$  的唯一映射). 容易验证  $F$  是一个函子  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 并且该图表明  $\eta$  是一个自然变换  $1 \rightarrow GF$ . 所以根据定理 2.3.1,  $F$  是  $G$  的左伴随.  $\square$

# Chapter 3: 可表函子

## 3.1 小范畴和大范畴

我们非正式地运用**类(class)**去表示任何数学对象的聚合<sup>1</sup>.

任何集合都是类, 但是有些类可能过于大导致不能是一个集合. 一个类称之为**小(small)**, 如果它是一个集合, 反之则称之为**大(large)**. 如任给一个集合, 他本身是小的, 但是所有集合构成的类就是大的.

### 定义 3.1.1: small and large category

范畴  $\mathcal{A}$  称为**小范畴**, 若  $\mathcal{A}$  中所有态射构成的类  $\text{Mor}(\mathcal{A})$  是小的, 反之则称  $\mathcal{A}$  为**大范畴**.

范畴  $\mathcal{A}$  称为**局部小范畴(locally small)**, 如果对于任意的  $A, B \in \mathcal{A}$ , 类  $\mathcal{A}(A, B)$  是小的.

**注 3.1.1** 如果  $\mathcal{A}$  是小的, 那显然  $\text{ob}(\mathcal{A})$  也是小的, 因为所有对象一一对应一个恒等态射.

### 定义 3.1.2: essential small

范畴  $\mathcal{A}$  是**本质小(essential small)** 如果  $\mathcal{A}$  范畴等价于某个小范畴.

下面我们简单介绍一下宇宙的概念.

在集合论中, Grothendieck 宇宙是一类集合, 该集合包含的集合全体满足 ZFC 集合论的所有公理, 从而常规数学中的任何操作都可限制在该宇宙中进行. 这一工具可以用来规避 Russell 悖论及范畴论等中常出现的类似集合论问题. 常将 Grothendieck 宇宙视为一个小型的 ZFC 集合论, 此时该集合论中的真类可表示为可能在该宇宙之外的集合. 例如, 宇宙本身, 即宇宙中所有集合的集合, 即是该宇宙之外的集合.

在通常的 ZFC 集合论中, 不能直接证明存在 Grothendieck 宇宙. 事实上, Grothendieck 宇宙的存在性等价于不可达基数的存在性, 因此可将其视为施加于 ZFC 集合论之上的另一条公理.

<sup>1</sup>这里的意思就是放在一起的一堆数学对象, 因为集合这个词是有含义的, 在这里运用集合会产生问题, 所以此处非正式非常规地使用聚合这个词, 单纯为了不产生歧义, 不必做任何理解.

**定义 3.1.3: Grothendieck 宇宙**

如果某个集合  $\mathcal{U}$  满足一下要求, 则称其为 **Grothendieck 宇宙**.

**U.1** 传递性: 如果集合  $x \in \mathcal{U}$ , 则  $x$  的元素也都在  $\mathcal{U}$  中.

**U.2** 二元集: 如果  $x, y \in \mathcal{U}$ , 则  $\{x, y\} \in \mathcal{U}$ .

**U.3** 幂集: 如果  $x \in \mathcal{U}$ , 那么  $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$ .

**U.4** 并集: 如果  $I \in \mathcal{U}$ , 那么以  $I$  为指标集的集合族  $\{x_i \in \mathcal{U}\}_{i \in I}$  的并集  $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$ .

**U.5** 空集:  $\emptyset \in \mathcal{U}$ .

称  $\mathcal{U}$  中的元素为  **$\mathcal{U}$ -集合**, 一个集合称为  **$\mathcal{U}$ -small** 如果与一个  $\mathcal{U}$ -集合等势.

我们在 Grothendieck 宇宙中讨论问题时不需要考虑集合论上可能无法操作的事情, 然而问题是是否有足够多足够大的宇宙供我们来调用? 所以我们可以引入一个假设, 即

对于任何集合  $X$ , 存在宇宙  $\mathcal{U}$  使得  $X \in \mathcal{U}$

## 3.2 可表的定义与例子

**定义 3.2.1**

定义  $\mathcal{A}$  是一个局部小范畴, 对于  $A \in \mathcal{A}$ , 我们定义一个集合值函子

$$H^A = \text{Hom}(A, -): \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$$

定义为

$$H^A(B) = \text{Hom}(A, B)$$

对于  $B \xrightarrow{g} B'$ , 定义

$$H^A(g): H^A(B) \rightarrow H^A(B'), \quad p \mapsto g \circ p$$

**注 3.2.1**  $H^A(g)$  有时也写成  $g_*$ .

**定义 3.2.2: Representable Functor**

$\mathcal{A}$  是一个局部小范畴, 一个协变函子  $X: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  是**可表的(representable)**, 如果存在  $A \in \mathcal{A}$  使得  $\alpha: X \xrightarrow{\cong} H^A$ . 一个**代表(representation)**即  $(A, \alpha)$ .

**例 3.2.1** 考虑  $H^1: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ , 其中  $1$  是一元集, 我们有

$$H^1(B) = \text{Hom}(1, B) \cong B$$

所以容易验证下面的交换图成立:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & B' \\
 \alpha_B \downarrow & & \downarrow \alpha_{B'} \\
 & \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{\quad} & f(b) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (1 \mapsto b) & \xrightarrow{\quad} & \frac{1 \mapsto f(b)}{f \circ (1 \mapsto b)}
 \end{array} & \\
 H^1(B) & \xrightarrow{H^1(f)} & H^1(B')
 \end{array}$$

所以我们有  $H^1 \cong 1_{\mathbf{Set}}$ , 即  $1_{\mathbf{Set}}$  可表.

**引理 3.2.1**

给定局部小范畴  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , 有伴随对

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \\ \perp \end{array} \mathcal{B}$$

令  $A \in \mathcal{A}$ , 则函子<sup>a</sup>

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(-)): \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Set}$$

是可表函子.

---

<sup>a</sup>即复合  $\mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A} \xrightarrow{H^A} \mathbf{Set}$

**证明:** 由于伴随的性质, 我们有集合的同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$$

我们下面要说明这个同构是自然的, 从而可以说明

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(-)) \cong H^{F(A)}$$

只需要说明对于任给的  $\mathcal{B}$  中  $q: B \rightarrow B'$ , 下面的交换图交换即可:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{G(q)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B')) & \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & G(q) \circ f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{f} & \xrightarrow{\quad} & \frac{G(q) \circ f}{q \circ \bar{f}} \end{array} \\
 \downarrow & & \downarrow & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B') &
 \end{array}$$

而由伴随的性质我们知道

$$q \circ \bar{f} = \overline{G(q) \circ f}$$

从而是自然的，于是可表. □

### 命题 3.2.1

有左伴随的集合值函子可表.

**证明:** 考虑  $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  是一个有左伴随  $F$  的函子，令  $1$  为一元集合，则有

$$G(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G(A))$$

由例 3.2.1 可知这个同构是自然同构，于是

$$G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G(-)) \cong H^{F(1)} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(1), -)$$

于是可表. □

对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $H^A \in [\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$ . 这一过程描述了  $A$  如何看待世界，当  $A$  变化，看待世界的方式也会发生变化，但是这些变化可能是相互联系的，也即  $H^A$  与  $H^{A'}$  中会有一个由  $f: A' \rightarrow A$  诱导的自然变换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \begin{array}{c} \xrightarrow{H^A} \\ \Downarrow H^f \\ \xrightarrow{H^{A'}} \end{array} & \mathbf{Set} \end{array}$$

定义为：

$$H^f: H^A(B) \rightarrow H^{A'}(B), \quad p \mapsto p \circ f$$

有时也把  $H^f$  写成  $f^*$ ，也即  $f^*\varphi = \varphi \circ f$ .

### 定义 3.2.3

$\mathcal{A}$  是局部小范畴，定义函子

$$H^\bullet(A): \mathcal{A}^{op} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathbf{Set}], \quad A \mapsto H^A, \quad f \mapsto H^f$$

**定义 3.2.4**

定义  $\mathcal{A}$  是一个局部小范畴, 对于  $A \in \mathcal{A}$ , 我们定义一个集合值函子

$$H_A = \text{Hom}(-, A): \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

定义为

$$H_A(B) = \text{Hom}(B, A)$$

对于  $B' \xrightarrow{g} B$ , 定义

$$H_A(g): H_A(B) \rightarrow H_A(B'), \quad p \mapsto p \circ g$$

**定义 3.2.5**

$\mathcal{A}$  是一个局部小范畴, 一个反变函子  $X: \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  是**可表的**, 如果存在  $A \in \mathcal{A}$  使得  $\alpha: X \xrightarrow{\cong} H_A$ . 一个**代表**即  $(A, \alpha)$ .

之前我们将协变函子  $(H^A)_{A \in \mathcal{A}}$  装配到了一个更大的函子  $H^\bullet$  中, 下面我们对反变函子  $H_A$  做同样的事情:

任意的  $f: A \rightarrow A'$ , 诱导了一个自然变换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{op} & \begin{array}{c} \xrightarrow{H_A} \\ \Downarrow H_f \\ \xrightarrow{H_{A'}} \end{array} & \mathbf{Set} \end{array}$$

定义为

$$H_f: H_A(B) \rightarrow H_{A'}(B), \quad p \mapsto f \circ p$$

我们也把  $H_f$  记为  $f_*$ , 即  $f_*\varphi = f \circ \varphi$ .

**定义 3.2.6: 米田嵌入**

$\mathcal{A}$  是一个局部小范畴,  $\mathcal{A}$  的**米田嵌入**是一个函子

$$H_\bullet: \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathbf{Set}], \quad A \mapsto H_A, \quad f \mapsto H_f$$

下面我们总结一下至今为止的所有定义

对于任意给定的  $A \in \mathcal{A}$ ，我们有函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{H^A} \mathbf{Set}$$

将所有函子放到一起得到一个更大的函子

$$\mathcal{A}^{op} \xrightarrow{H^\bullet} [\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$$

对于任意给定的  $A \in \mathcal{A}$ ，我们有函子

$$\mathcal{A}^{op} \xrightarrow{H_A} \mathbf{Set}$$

将所有函子放到一起得到一个更大的函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{H_\bullet} [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$$

其中第二组是第一组的对偶，我们在讨论可表函子的时候，使用第一组与第二组并没有太大的差别，当讨论完其中一组的时候，另一组就直接对偶出来了，我们选择使用  $H_A$  与  $H_\bullet$ ，因为  $H_\bullet$  将  $\mathcal{A}$  嵌入了  $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ ，这使用起来更方便。

### 定义 3.2.7

令  $\mathcal{A}$  是局部小范畴，定义函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \\ (f, g) &\mapsto g \circ - \circ f: \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', B') \end{aligned}$$

其中

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{g} B'$$

**例 3.2.2** 给定集合  $A, B$ ，我们令  $B^A$  为所有从  $A$  到  $B$  的函数，这与  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$  是相同的，但是我们用  $B^A$  的时候是在强调他作为  $\mathbf{Set}$  的对象，地位与  $A, B$  相同。

现在固定  $B$ ，我们可以定义一个函子

$$\begin{aligned} - \times B: \mathbf{Set} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ A &\mapsto A \times B \end{aligned}$$

还有一个函子

$$\begin{aligned} (-)^B: \mathbf{Set} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ C &\mapsto C^B \end{aligned}$$

对于任何集合  $A, C$ ，存在一个集合的典范同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, C^B)$$

定义为对于任意的  $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A \times B, C)$ ，令  $\bar{g}: A \rightarrow C^B$  为

$$\bar{g}(a)(-) = g(a, -)$$

反之, 给定  $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(A, C^B)$ , 定义

$$\bar{f}(-, \bullet) = f(-)(\bullet)$$

所以我们得到伴随对:  $- \times B \dashv (-)^B$

或许我们还可以写成

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(A \times B, C) \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(A, \text{Hom}_{\text{Set}}(B, C))$$

**例 3.2.3** 对于任意的范畴  $\mathcal{B}$ , 存在一个  $\text{CAT} \rightarrow \text{CAT}$  的伴随对  $(- \times \mathcal{B}) \dashv [\mathcal{B}, -]$ , 换言之存在典范同构

$$\text{Hom}_{\text{CAT}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \text{Hom}_{\text{CAT}}(\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}])$$

在这个双射下, 函子

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}_{\text{CAT}}(\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A}, \text{Set}), \quad H^\bullet \in \text{Hom}_{\text{CAT}}(\mathcal{A}^{\text{op}}, [\mathcal{A}, \text{Set}])$$

互为转置.

**注 3.2.2** 现在我们可以再一次解释伴随的自然性. 给定范畴和函子

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

有

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{1 \times G} & \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \\ \downarrow F^{\text{op}} \times 1 & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{B}}} & \text{Set} \end{array}$$

左下路径将  $(A, B)$  送到  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ , 可以写成  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(-), -)$ , 右上路径将  $(A, B)$  送到  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ , 可以写成  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, G(-))$ .

我们会有如下断言:  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(-), -)$  与  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, G(-))$  作为  $\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$  的函子是自然同构的, 当且仅当  $F$  与  $G$  是伴随.

所以伴随中的自然性实际上就是两个特定函子的自然同构.

将上面的自然同构画出来即

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B') \\ \downarrow \alpha_{(A, B)} & & \downarrow \alpha_{(A', B')} \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B')) \end{array}$$

对任意的  $(A, B), (A', B')$ ,  $f: A' \rightarrow A, g: B \rightarrow B'$  成立.

有元素的映射为

$$\begin{array}{ccc} q & \xrightarrow{\quad} & g \circ q \circ F(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{q} & \xrightarrow{\quad} & \overline{g \circ q \circ F(f)} \\ & & G(g) \circ \bar{q} \circ f \end{array}$$

想要交换, 即

$$\overline{g \circ q \circ F(f)} = G(g) \circ \bar{q} \circ f$$

而显然这个式子成立当且仅当  $F, G$  伴随.

### 定义 3.2.8

$A$  是某个范畴的对象, 一个  $A$  的**广义元素 (generalized element)** 是一个以  $A$  为陪域的映射. 一个映射  $S \rightarrow A$  是一个 **shape  $S$  的  $A$  的 generalized element**.

顾名思义, 广义元素是元素的推广, 比如当  $A$  是一个集合的时候, 我们可以说  $\mathbf{shape} \mathbf{1}$  的广义元素就是  $A$  中的一个元素. 形状为  $\mathbb{N}$  的广义元素就是  $A$  中的一个序列.

当  $A$  是一个拓扑空间的时候, 形状为  $S^1$  的广义元素就是  $A$  中的一条闭路.

如果给定一个  $S \in \mathcal{A}$ , 函子

$$H^S: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$$

就将  $\mathcal{A}$  中的对象  $A$  送到它的所有形状为  $S$  的广义元素集合. 这个函子的函子性告诉我们如果给定一个态射  $A \rightarrow B$ , 则在这个函子的作用下, 我们就把  $A$  的所有形状  $S$  的广义元素送到  $B$  的形状  $S$  的广义元素. 如取拓扑空间范畴,  $S = S^1$ , 我们知道连续映射将闭路送到闭路.

## 3.3 米田引理

回忆: 一个从  $\mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  的函子有时称为  $\mathcal{A}$  上的预层, 所以对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 都存在一个预层  $H_A$ .

问题来了, 我们如何从  $H_A$  去看待预层范畴  $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$  中的其他预层. 换言之即对于  $X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ ,  $H_A \rightarrow X$  的自然映射都有什么? 即我们想要刻画

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X)$$

回顾我们之前对范畴论的学习, 发现总是输入一些东西最终唯一输出一些东西, 而这个输出的结果相对于输入的东西是唯一的, 那么现在考虑我们输入了什么?

$$(A, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_-, -) \rightarrow ?$$

所以这个唯一输出的东西理当只与  $(A, X)$  相关, 而  $(A, X)$  如何输出一个集合呢? 结果似乎是显而易见的, 也就是

$$\text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_A, X) \cong X(A)$$

用语言来描述即: 一个从  $H_A \rightarrow X$  的自然变换就是  $X(A)$  中的一个元素.

**定理 3.3.1: Yoneda**

令  $\mathcal{A}$  是一个局部小范畴, 则

$$\text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_A, X) \cong X(A)$$

对  $A \in \mathcal{A}$  与  $X \in [\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]$  自然.

**注 3.3.1** 换言之, 考虑复合函子  $F$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{op} \times [\mathcal{A}^{op}, \text{Set}] & \xrightarrow{H_A^{op} \times 1} & [\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]^{op} \times [\mathcal{A}^{op}, \text{Set}] & \xrightarrow{\text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}} & \text{Set} \\ (A, X) & \mapsto & (H_A, X) & \mapsto & \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_A, X) \end{array}$$

与函子  $G$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{op} \times [\mathcal{A}^{op}, \text{Set}] & \rightarrow & \text{Set} \\ (A, X) & \mapsto & X(A) \end{array}$$

米田引理说的就是  $F$  与  $G$  自然同构.

**证明:** 我们只需要证明对于任意的  $A, X$ , 使得双射  $\text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_A, X) \cong X(A)$  是自然的.

首先, 我们固定  $A, X$ , 我们定义这个双射为

$$\text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_A, X) \begin{array}{c} \xrightarrow{(\hat{\cdot})} \\ \xleftarrow{(\tilde{\cdot})} \end{array} X(A)$$

$(\hat{\cdot})$  对于  $\alpha: H_A \rightarrow X$ , 定义  $\hat{\alpha} = \alpha_A(1_A)$ .

$(\tilde{\cdot})$  对于  $x \in X(A)$ , 我们需要定义一个自然变换  $\tilde{x}: H_A \rightarrow X$ , 考虑到我们输入的是一个  $\mathcal{A}$  中的对象  $B$ , 输出的是一个

$$\tilde{x}_B: H_A(B) \rightarrow X(B), \quad f \mapsto (X(f))(x) \in X(B)$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(B) & \xleftarrow{X(f)} & X(A) \end{array}$$

下面我们要说明这个定义是自然的，对于任意的  $g: B' \rightarrow B$ ，要说明下面交换：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B', A) & & f & \xrightarrow{\quad} & f \circ g \\
 \downarrow \tilde{x}_B & & \downarrow \tilde{x}_{B'} & & \downarrow & & \downarrow \\
 X(B) & \xrightarrow{X(g)} & X(B') & & (Xf)(x) & \xrightarrow{\quad} & (Xg)((Xf)(x)) \\
 & & & & & & X(f \circ g)(x)
 \end{array}$$

由于  $X$  是反变函子，所以  $X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$ . 故交换，故自然，故良定义.

于是我们成功定义了两个映射，下面我们需要证明这两个映射是互逆的，也即

- 对于  $x \in X(A)$ ，我们要说明  $\hat{x} = x$ ，实际上，我们有

$$\hat{x} = \tilde{x}_A(1_A) = (X(1_A))(x) = 1_{X(A)}(x) = x$$

- 对于  $\alpha: H_A \rightarrow X$ ，我们要说明  $\tilde{\alpha} = \alpha$ . 两个自然变换相等当且仅当他们的组成元相等，所以只需要对每一个  $\alpha_B$  说明即可，任取  $B \in \mathcal{A}$ ，考虑  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$ ，我们知道

$$\left(\tilde{\alpha}\right)_B(f) = (X(f))(\hat{\alpha}) = (X(f))(\alpha_A(1_A))$$

由  $\alpha$  的自然性，我们有下图交换

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A) \\
 \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_B \\
 X(A) & \xrightarrow{X(f)} & X(B)
 \end{array}$$

从而我们知道  $(X(f))(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(f)$ ，也即有  $\tilde{\alpha} = \alpha$ .

**笔记 3.3.1** 我们不妨在这里停下思考一下：由于  $\tilde{\alpha} = \alpha$ ，也即  $\alpha$  由  $\hat{\alpha}$  决定，但是注意到  $\hat{\alpha} = \alpha_A(1_A)$  决定，所以我们最终注意到自然变换  $\alpha: H_A \rightarrow X$  仅由  $1_A$  通过等式  $\alpha_B(f) = (X(f))(\alpha_A(1_A))$  决定.

下面我们需要说明这两个可逆映射是在  $(A, X)$  中是自然的，也即任取  $A, X$ ，都有图表交换，而这由于自然变换当且仅当每个组成元是同构，所以只需要对  $\hat{\bullet}$  证明. 又由于交换图是可以拼接的，也即如果有下面交换图所言

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_A, X) & \xrightarrow{- \circ H_f} & \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_B, X) & & \\
 (\bullet) \downarrow & & \downarrow (\bullet) & \xrightarrow{(\bullet) \circ (\bullet)} & \\
 X(A) & \xrightarrow{X(f)} & X(B) & \xleftrightarrow{(\bullet)} & \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_B, X) \\
 \theta_{B \circ X}(f) \searrow & & \downarrow \theta_B & & \downarrow \theta_{\circ -} \\
 & & X'(B) & \xleftrightarrow{(\bullet)} & \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \text{Set}]}(H_B, X')
 \end{array}$$

其中从左上到右下的复合映射即我们熟悉的  $\theta \circ - \circ H_f$ .

所以下面我们只对固定的  $A$  或者固定的  $X$  证明.

当  $X$  给定时, 对任意的  $f: B \rightarrow A$ , 只要证明下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X) & \xrightarrow{- \circ H_f} & \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_B, X) \\ \downarrow (\cdot) & & \downarrow (\cdot) \\ X(A) & \xrightarrow{X(f)} & X(B) \end{array}$$

考虑元素的映射:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\quad} & \alpha \circ H_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha_A(1_A) & \xrightarrow{\quad} & (X(f))(\alpha_A(1_A)) \end{array}$$

$(\alpha \circ H_f)_B(1_B) = \alpha_B(f)$

这个交换性由之前过程是显然的, 下面假设  $A$  固定, 考虑自然变换

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \mathcal{A}^{op} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \theta \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathbf{Set} \\ & X' & \end{array}$$

只需要证明下图交换

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X) & \xrightarrow{\theta \circ -} & \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X') \\ \downarrow (\cdot) & & \downarrow (\cdot) \\ X(A) & \xrightarrow{\theta_A} & X(A) \end{array}$$

考虑元素的映射

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\quad} & \theta \circ \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha_A(1_A) & \xrightarrow{\quad} & \theta_A(\alpha_A(1_A)) \end{array}$$

$(\theta \circ \alpha)_A(1_A)$

交换性是显然的, 从而我们证明完了这个定理. □

**注 3.3.2** 给定一个预层  $X: \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ , 定义一个新的预层  $X'$ :

$$X' = \text{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_\bullet, X): \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

也即有  $X'(A) = \text{Hom}_{[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]}(H_A, X) \cong X(A)$ , 米田引理告诉我们这个同构是自然的. 也即最后有

$$X' \cong X$$

我们给米田引理一个现代化的写法:

我们定义

$$\mathcal{C}^\wedge := \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}), \quad \mathcal{C}^\vee := \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}^{op}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})^{op}$$

我们定义函子<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C}^\wedge \\ S &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S) \end{aligned}$$

我们有自然的求值函子:

$$\begin{aligned} ev^\wedge: \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}^\wedge &\rightarrow \mathbf{Set} \\ (C, X) &\mapsto X(C) \end{aligned}$$

则米田引理可以写成

**定理 3.3.2: 米田信夫**

存在函子的自然同构  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(\bullet), \bullet) \xrightarrow{\cong} ev^\wedge$ .

**证明:** 只需要证明对于任意的  $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $X \in \text{ob}(\mathcal{C}^\wedge)$ , 映射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(C), X) &\rightarrow X(C) \\ \left[ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, C) \xrightarrow{\varphi} X(\bullet) \right] &\mapsto \varphi_C(\text{id}_C) \end{aligned}$$

是双射且自然, 交换图道尽一切(并非)

$$\begin{array}{ccccc} \text{id}_C & \in & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) & \xrightarrow{\varphi_C} & X(C) & \ni & u_C = \varphi_C(\text{id}_C) \\ \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow X(f) & & \downarrow \\ f & \in & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, C) & \xrightarrow{\varphi_T} & X(T) & \ni & \varphi_T(f) \end{array}$$

□

### 3.4 泛元素与可表性

**推论 3.4.1**

令  $\mathcal{A}$  是一个局部小范畴, 并且  $X: \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  是预层, 则  $X$  的一个表示由一个  $A \in \mathcal{A}$  与  $u \in X(A)$  构成, 其中对于任意的  $B \in \mathcal{A}$ , 和  $x \in X(B)$ , 都有一个唯一的映射  $\bar{x}: B \rightarrow A$  使得  $X(\bar{x})(u) = x$ .

<sup>2</sup>Fct 表示函子范畴 Functor

要把这个东西看清楚，我们需要回忆一下  $X$  的一个表示是一个对象  $A \in \mathcal{A}$  和一个自然同构

$$\alpha: H_A \rightarrow X$$

这个推论说的是这个表示  $(A, \alpha)$  与满足条件的  $(A, u)$  是一一对应的. 一个对  $(B, x)$ , 其中  $B \in \mathcal{A}, x \in X(B)$ , 有时被称作预层  $X$  的一个**元素(elements)**. 这是因为米田引理实际上告诉我们  $x$  对应着一个自然变换  $H_B \Rightarrow X$ , 也就是一个 shape  $H_B$  的广义元素. 满足推论中条件的元素  $u$  有时也被称为  $X$  的**泛元素(universal element)**. 所以推论还告诉我们预层  $X$  的一个表示对应着一个  $X$  的泛元素.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \mathcal{A} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \cong \\ \curvearrowleft \end{array} & \text{Set} \\ & H_A = \mathcal{A}(-, A) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{X} & X(A) & \ni & u \\ \uparrow \bar{x} & & \downarrow X\bar{x} & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{X} & X(B) & \ni & x \end{array}$$

**证明:** 由米田引理，我们只需要证明对于  $A \in \mathcal{A}$  和  $u \in X(A)$ , 自然变换  $\tilde{u}: H_A \rightarrow X$  是一个自然同构当且仅当满足题设条件. 而  $\tilde{u}$  是一个同构当且仅当对于任意的  $B \in \mathcal{A}$ , 都有

$$\tilde{u}_B: H_A(B) \rightarrow \mathcal{A}(B, A) \rightarrow X(B)$$

是一个双射，当且仅当对于任意的  $B \in \mathcal{A}$  和  $x \in X(B)$ , 存在唯一的  $\bar{x} \in H_A(B)$  使得  $(X\bar{x})(u) = \tilde{u}_B(\bar{x}) = x$ , 于是证毕.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & A & \\ & \nearrow 1_A & \\ A & & \\ & \searrow \bar{x} = \alpha_B^{-1}(x) & \\ & B & \end{array} & & \begin{array}{ccc} 1_A & \xrightarrow{\alpha_A} & \alpha_A(1_A) \\ \downarrow \in & & \ni \downarrow \\ H_A(A) = \mathcal{A}(A, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & X(A) \\ \downarrow -\circ\bar{x} & & \downarrow X\bar{x} \\ H_A(B) = \mathcal{A}(B, A) & \xrightarrow{\alpha_B} & X(B) \\ \downarrow \in & & \ni \downarrow \\ \alpha_B^{-1}(x) & \xrightarrow{\alpha_B} & x \\ \leftarrow \alpha_B^{-1} & & \end{array} \end{array}$$

□

实际上，我们的证明过程说明了下面的事实，其实也就是上面推论的一个重述：

**定理 3.4.1: 可表当且仅当泛元素存在**

$\mathcal{A}$  是一个局部小范畴,  $X \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ , 则  $X$  可表当且仅当  $X$  存在泛元素. 并且如果  $X$  可表, 则  $X$  的表示和  $X$  的泛元素是一一对应的. 并且我们可以看到泛元素实际上就是  $\alpha_A(1_A)$ .

其对偶形式为:

**推论 3.4.2**

$\mathcal{A}$  是一个局部小范畴,  $X: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  是一个函子, 则  $X$  的表示与满足下面条件的对  $(A, u)$  一一对应: 其中  $A \in \mathcal{A}, u \in X(A)$ , 对于任何的  $B \in \mathcal{A}$  与  $x \in X(B)$ , 都存在唯一的映射  $\bar{x}: A \rightarrow B$  使得  $(X\bar{x})(u) = x$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{X} & \mathbf{Set} \\ \\ A & \xrightarrow{\quad} & X(A) & & u \\ \bar{x} \downarrow & & \downarrow X\bar{x} & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & X(B) & & x \end{array}$$

### 3.5 米田嵌入

**推论 3.5.1**

$\mathcal{A}$  是局部小范畴, 则米田嵌入是全忠实的.

$$H_\bullet: \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$$

这个推论是在说对于  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 预层间的态射  $H_A \rightarrow H_{A'}$  和  $A \rightarrow A'$  的态射是一回事.

**证明:** 只需要说明对于任意的  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 下面的映射是双射即可

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(A, A') & \rightarrow & [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_A, H_{A'}) \\ f & \mapsto & H_f \end{array}$$

由米田引理, 我们知道

$$\tilde{\circ}: H_{A'}(A) \rightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](H_A, H_{A'})$$

是双射, 所以我们只需要说明这两个操作是一样的就可以了, 给定  $f: A \rightarrow A'$ , 我们要证明

$$\tilde{f} = H_f$$

或者等价证明

$$f = \widehat{H}_f$$

由于

$$\widehat{H}_f = (H_f)_A(1_A) = f \circ 1_A = f$$

所以得证. □

在数学语境中, 一般来说, **嵌入(embedding)** 一般是指一个态射  $A \rightarrow B$  使得  $A$  和它在  $B$  中的像同构. 于是我们知道米田嵌入给出了  $\mathcal{A}$  到  $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$  的一个满子范畴的全忠实且本质满的函子, 于是自然是一个范畴等价, 于是可以称之为一个嵌入.

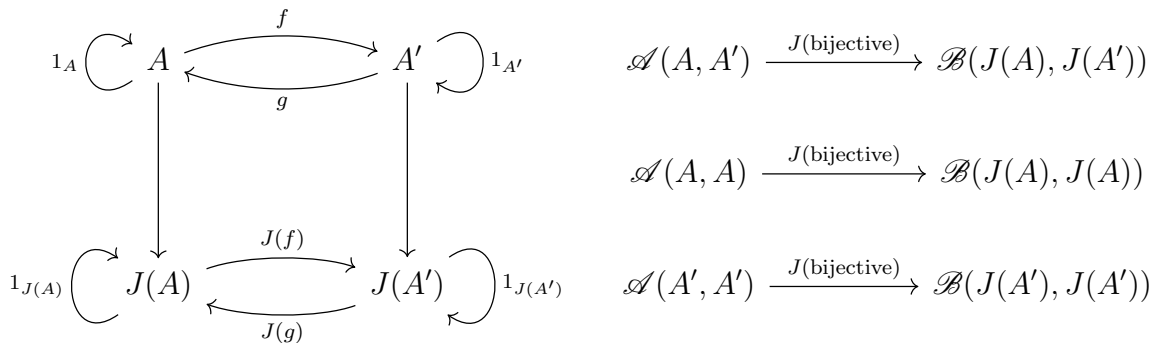
一般来说, 满子范畴是最容易讨论的子范畴. 比如我们给定任意的  $A, A' \in \mathcal{A}$  与  $\mathcal{A}$  的一个包含  $A, A'$  的满子范畴  $\mathcal{A}_0$ , 则我们可以直接说  $A \rightarrow A'$  的态射而不产生歧义, 因为  $\mathcal{A}_0(A, A') = \mathcal{A}(A, A')$ .

**引理 3.5.1**

令  $J: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是一个全忠实函子, 并且  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 则

- (1) 一个  $\mathcal{A}$  中的态射  $f$  是同构当且仅当  $J(f)$  在  $\mathcal{B}$  中是一个同构.
- (2) 对于任何  $\mathcal{B}$  中的同构  $g: J(A) \rightarrow J(A')$ , 则存在唯一的  $\mathcal{A}$  中同构  $f: A \rightarrow A'$  使得  $J(f) = g$ .
- (3) 对象  $A$  和  $A'$  在  $\mathcal{A}$  中同构当且仅当对象  $J(A)$  和  $J(A')$  在  $\mathcal{B}$  中同构.

**证明:** 交换图道尽一切:



□

### 3.6 可表对象同构

我们想要知道什么时候  $H_A \cong H_{A'}$ , 答案是当且仅当  $A \cong A'$ .

## 推论 3.6.1

$\mathcal{A}$  是一个局部小范畴,  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 则

$$H_A \cong H_{A'} \iff A \cong A' \iff H^A \cong H^{A'}$$

**证明:** 由对偶性, 我们只需要证明第一个等价, 这是因为  $H_\bullet: \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$  是全忠实的, 于是由引理 3.5.1 我们知道

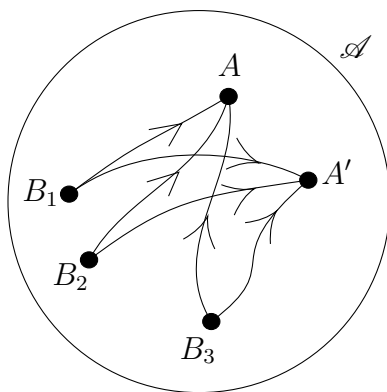
$$H_A \cong H_{A'} \iff A \cong A'$$

□

由于函子总是保持同构, 所以上面的推论等价于是说

$$H_A \cong H_{A'} \Rightarrow A \cong A'$$

换言之, 如果  $\mathcal{A}(B, A) \cong \mathcal{A}(B, A')$  对  $B$  自然, 则  $A \cong A'$ . 我们把  $\mathcal{A}(B, A)$  想成从  $B$  的视角看  $A$ , 则推论告诉我们两个东西是同构的当且仅当从任何一个方向上看都是一样的.



如果说一个东西看起来像一个**鸭子**, 走起来像一个**鸭子**, 并且叫起来也像一个**鸭子**, 那么它大概就是一个**鸭子**. 我们可以把这段话里面的鸭子换成别的数学对象, 那么推论告诉我们这件事情还是成立的.

## 定理 3.6.1: 左伴随在同构意义下是唯一的

给定  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $F, F'$  都是  $G$  的左伴随, 则有  $F \cong F'$ .

**证明:** 给定  $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $F, F'$  都是  $G$  的左伴随, 则有对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$\mathcal{B}(F(A), B) \cong \mathcal{A}(A, G(B)) \cong \mathcal{B}(F'(A), B)$$

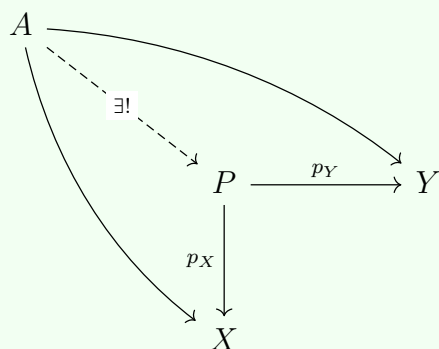
对  $B$  自然, 于是我们有  $H^{F(A)} \cong H^{F'(A)}$ , 所以  $F(A) \cong F'(A)$ . 事实上, 这个同构还是对  $A$  自然的, 所以  $F \cong F'$ . □

# Chapter 4: 极限

## 4.1 积, 等化子和拉回

### 定义 4.1.1: Product

$\mathcal{A}$  是一个范畴,  $X, Y \in \mathcal{A}$ .  $X$  与  $Y$  的一个**积(product)** 由一个对象  $P$  和一组态射  $p_X: P \rightarrow X, p_Y: P \rightarrow Y$  组成, 使得下图泛性质成立:



对于任意的  $A \in \mathcal{A}$  和  $A \rightarrow X, A \rightarrow Y$ , 使得  $A$  唯一地 factor through  $P$ . 态射  $p_X$  和  $p_Y$  被称为**投影(projections)**.

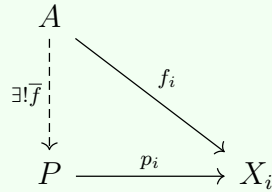
需要注意的是积并不总是存在, 比如在域范畴中就不存在非平凡的积. 其症结体现在直接考虑两个域的直积环会产生零因子  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$ , 而域是不能有零因子的. 并且投影态射要求这个积能够单独处理两个域上的内容, 这自然地导致了一种直积结构, 所以我们可以直观地认识到域范畴是不存在一般的积的. 一些常见范畴中的积为:

Category	Product
<b>Set</b>	笛卡尔积 (Cartesian Product)
<b>Grp</b>	直积 (Direct Product)
<b>Ab / Mod</b>	直积 (Direct Product)
<b>Topo</b>	积空间 (Product Space)

对指标集进行推广, 我们有:

**定义 4.1.2: Product**

令  $\mathcal{A}$  为一个范畴,  $I$  是一个指标集,  $(X_i)_{i \in I}$  是  $\mathcal{A}$  中的一族元素. 则  $(X_i)_{i \in I}$  的积(product) 由一个对象  $P$  和一族态射  $p_i: P \rightarrow X_i$  构成, 使得满足对于任意的  $A$  和  $f_i: A \rightarrow X_i$ ,  $A$  都唯一地 factor through  $P$ , 即



**注 4.1.1** 一般我们称  $P$  为  $\{A_i\}$  的积, 并记为  $\prod_{i \in I} A_i$ .

**注 4.1.2** 由泛性质我们知道积在同构意义下是唯一的.

如果指标集  $I$  是一个空集, 那么我们应该如何理解乘积呢? 一般来说, 一个  $I$  指标集是一个映射(如果  $\text{ob}(\mathcal{A})$  是一个集合的话)  $f: I \rightarrow \text{ob}(\mathcal{A})$ . 则当  $I$  是空集的时候, 我们知道空集是集合范畴的始对象, 于是存在唯一的映射  $f: I \rightarrow \text{ob}(\mathcal{A})$ , 也就是说对象族  $(X_i)_{i \in I}$  是唯一的. 此时如果  $P$  是  $(X_i)_{i \in I}$  的积, 对一个  $\bar{f}: A \rightarrow P$ , 自然有  $p_i \circ \bar{f} = f_i$ , 这是因为  $I$  是空集, 这个式子实际上对  $\bar{f}$  没有任何的要求. 于是我们把泛性质转化为对于任意的  $A$ , 都存在唯一的  $\bar{f}: A \rightarrow P$ , 即  $P$  是  $\mathcal{A}$  的一个终对象. 所以我们得出结论, 空指标集的乘积是范畴中的终对象.

我们知道乘积是不一定存在的, 所以哲学上可以看出来终对象也不一定存在.

**定义 4.1.3: Equalizer**

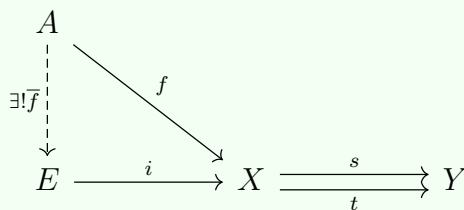
在范畴  $\mathcal{A}$  中, 一个叉子(fork) 由如下资料组成:

$$A \xrightarrow{f} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y$$

使得  $sf = tf$ . 给定  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y$  为  $\mathcal{A}$  中的对象与态射, 则一个关于  $s, t$  的等化子(equalizer) 是一个对象  $E$  和一个态射  $i: E \rightarrow X$  使得

$$E \xrightarrow{i} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y$$

是一个叉子, 并且使得对于任意叉子  $A \xrightarrow{f} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y$ ,  $A$  都唯一地 factor through  $E$ , 即



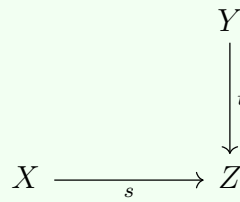
**注 4.1.3** 和积一样, 等化子不一定存在, 如果存在则在同构意义下唯一.

一些常见范畴中的等化子为:

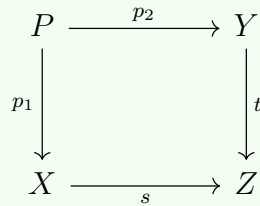
Category	Equalizer of $f, g : X \rightarrow Y$
Set	子集 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$
Grp	子群 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$
Ab / Mod	核 (Kernel) $\text{Ker}(f - g)$
Topo	子空间 (Subspace) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$

**定义 4.1.4: Pullback**

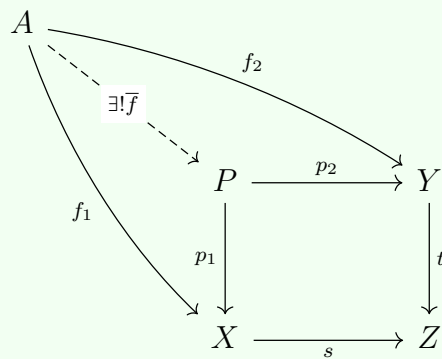
令  $\mathcal{A}$  为一个范畴, 取对象和态射



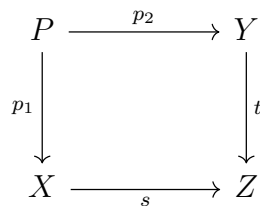
则关于这个图像的**拉回 (pullback)** 是一个对象  $P \in \mathcal{A}$  与态射  $p_1: P \rightarrow X$  和  $p_2: P \rightarrow Y$  使得下图交换



并且对任意使得下图交换的  $A$ , 唯一地 factor through  $P$ :



我们称图



为一个**拉回正方形 (pullback square)** 或者**笛沙格正方形 (Cartesian square)**. 拉回

$P$  的另外一个名字叫做**纤维积(fiber product)**, 记为  $X \times_Z Y$ .

一些常见范畴中的拉回为:

Category	Pullback of $f : B \rightarrow A$ and $g : C \rightarrow A$
<b>Set</b>	纤维积 (Fibered Product) $\{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$
<b>Grp</b>	子群 $\{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$
<b>Ab / Mod</b>	核 $\text{Ker}(f' - g')$ where $f' : B \times C \rightarrow A, g' : B \times C \rightarrow A$ (这等价于 $\{(b, c) \in B \oplus C \mid f(b) = g(c)\}$ )
<b>Topo</b>	积空间的子空间 $\{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$ (赋予子空间拓扑)

## 4.2 极限

前面所提到的三个概念统统都是极限的特例, 现在我们给出极限的定义.

### 定义 4.2.1

令  $\mathcal{A}$  为一个范畴,  $\mathbf{I}$  为一个小范畴, 一个函子  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  称为  $\mathcal{A}$  的一个**形状(shape)  $\mathbf{I}$  的图像(diagram)**.

### 定义 4.2.2: limit

$\mathcal{A}$  是一个范畴,  $\mathbf{I}$  是一个小范畴,  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  是一个  $\mathcal{A}$  中的图, 则我们定义一个  $D$  上的**锥(cone)** 是一个对象  $A \in \mathcal{A}$  和一族态射

$$\left( A \xrightarrow{f_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

使得对于任意  $\mathbf{I}$  中的态射  $I \xrightarrow{u} J$ , 都有下图交换:

$$\begin{array}{ccc} & & D(I) \\ & \nearrow f_I & \downarrow D u \\ A & & \\ & \searrow f_J & \\ & & D(J) \end{array}$$

其中  $A$  称为这个锥的**顶点(vertex)**, 一个  $D$  的**极限(limit)** 是一个锥  $\left( L \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$  使得对于任意的  $D$  上的锥  $\left( A \xrightarrow{f_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$ , 都存在唯一的态射  $\bar{f}: A \rightarrow L$  使得  $p_I \circ \bar{f} = f_I$  对于任意的  $I \in \mathbf{I}$  成立. 态射  $p_I$  被称为极限的**投影(projections)**.

下面三个形状的极限分别对应了积，拉回和等化子：

$$\mathbb{T} = \bullet \quad \bullet, \quad \mathbb{P} = \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}, \quad \mathbb{E} = \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \bullet$$

我们可以粗泛地看到，极限的泛性质告诉我们对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ ，一个态射  $A \rightarrow L$  就唯一地对应了一个以  $A$  为顶点的  $D$  上的锥. 在没有歧义的情况下，有时把  $D$  的一个极限  $(L \xrightarrow{p_I} D(I))_{I \in \mathbf{I}}$  简记为  $L$ ，当强调态射的时候，我们也称  $(L \xrightarrow{p_I} D(I))_{I \in \mathbf{I}}$  为一个**极限锥(limit cone)**. 我们把极限记为

$$L = \varprojlim_{\mathbf{I}} D$$

或者记为

$$L = \lim_{\mathbf{I}} D$$

对于上面那个记号，我们也称之为**逆向极限(inverse limit)** 或者**投射极限(projective limit)**. 这种写法源自于代数和拓扑中的具体构造，其出现早于范畴论. 我们给出极限和余极限的一种理解方式：简单来说，这个命名源于它们在处理一系列（或一个系统）的数学对象时的行为方向：

- 极限 (Limit) / 逆向极限 (Inverse Limit): 箭头通常“汇入”极限对象。它像是所有信息的“终点”或“汇集处”。
- 余极限 (Colimit) / 正向极限 (Direct Limit): 箭头通常从余极限对象“流出”。它像是所有信息的“起点”或“整合体”。

**注 4.2.1** 我们实际上所讨论的  $\mathbf{I}$  都是小范畴，所以我们定义的极限严格来说叫做**小极限 (small limit)**. 不过这就足够了，我们几乎不对其他样子的极限感兴趣.

我们还可以把极限总结称： $D$  上锥构成范畴的终对象. 于是哲学上我们还是能看出来极限并不总是存在.

#### 定义 4.2.3: finite limit

一个范畴称之为**有限的(finite)**，如果这个范畴只有有限多个态射(从而只有有限多个对象). 则一个**有限极限(finite limit)** 是一个形状为有限范畴的极限.

我们前面所说的有限积，终对象，等化子，拉回都是有限极限.

**定义 4.2.4: Complete**

$\mathbf{I}$  是一个小范畴, 我们称一个范畴  $\mathcal{A}$  **拥有形状  $\mathbf{I}$  的极限**(has limits of shape  $\mathbf{I}$ ), 如果对于任何形状  $\mathbf{I}$  的图表  $D$ , 其极限都存在. 我们称一个范畴**拥有小极限**(has small limits), 如果对于任何小范畴  $\mathbf{I}$ , 都存在所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 对于这样的范畴, 我们也称之为**完备的**(complete).

一个自然产生的问题是, 我们如何判断一个范畴是不是完备的, 难不成真的要验证所有形状的极限吗? 下面的定理回答了这个问题:

**定理 4.2.1: 完备和有限极限完备**

$\mathcal{A}$  是一个范畴, 则

- (1) 如果  $\mathcal{A}$  拥有所有的积和等化子, 则  $\mathcal{A}$  是完备的.
- (2) 如果  $\mathcal{A}$  有一个终对象和所有的二元积和等化子, 则  $\mathcal{A}$  拥有所有的有限极限.
- (2') 如果  $\mathcal{A}$  有一个终对象和所有的拉回, 则  $\mathcal{A}$  拥有所有的有限极限.

**证明:** (1) 令  $D: \mathbf{I}: \mathcal{A}$  为  $\mathcal{A}$  中的一个图, 我们定义态射

$$\prod_{I \in \mathbf{I}} D(I) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \prod_{J \xrightarrow{u} K \text{ in } \mathbf{I}} D(K)$$

如下: 给定  $J \xrightarrow{u} K$ , 我们定义  $s_u$  为下面的复合:

$$\prod_{I \in \mathbf{I}} D(I) \xrightarrow{\text{pr}_J} D(J) \xrightarrow{D_u} D(K)$$

其中  $\text{pr}_J$  为乘积投影, 定义  $t_u$  为  $\text{pr}_K$ . 令

$$L \xrightarrow{p} \prod_{I \in \mathbf{I}} D(I)$$

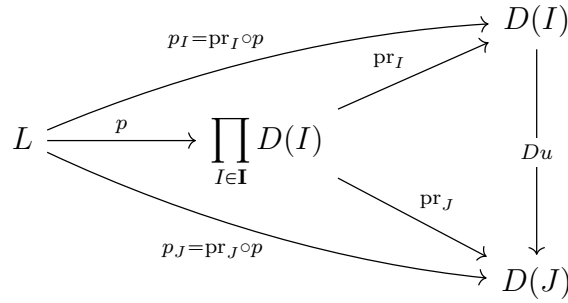
为  $s, t$  的等化子, 下面我们说明

$$\left( L \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

为  $D$  的一个极限锥: 首先说明这是一个锥, 给定任意的  $u: I \rightarrow J$ , 我们有

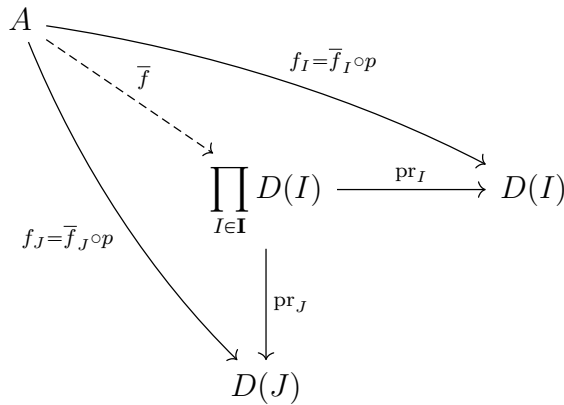
$$s \circ p = t \circ p \Rightarrow s_u \circ p = t_u \circ p \Rightarrow D_u \circ \text{pr}_I \circ p = \text{pr}_J \circ p \Rightarrow D_u \circ p_I = p_J$$

即下面交换图交换

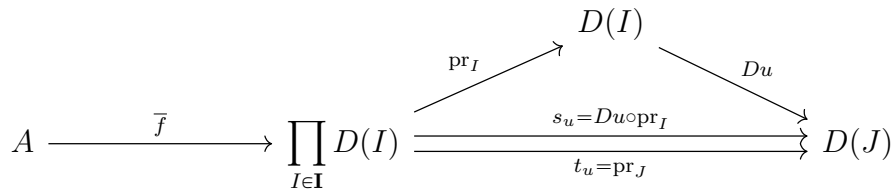


所以我们证明了这确实是一个锥，下面说明这是锥的终对象：

给定任何一个  $D$  上的锥  $(A \xrightarrow{f_I} D(I))_{I \in \mathbf{I}}$ ，我们有交换图：



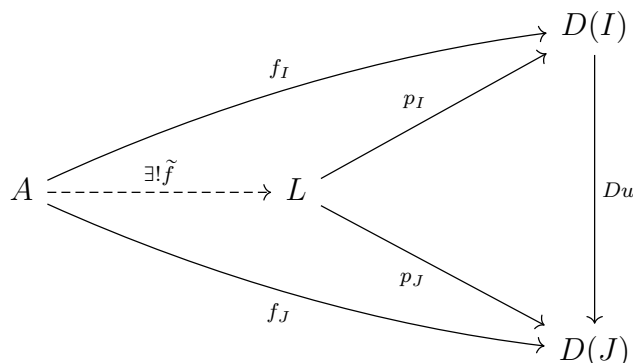
于是由积的泛性质，我们得到了  $\bar{f}: A \rightarrow \prod_{I \in \mathbf{I}} D(I)$ ，并且我们有交换图：



即  $A$  构成了一个 fork:

$$A \xrightarrow{\bar{f}} \prod_{I \in \mathbf{I}} D(I) \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} \prod_{J \xrightarrow{u} K \text{ in } \mathbf{I}} D(K)$$

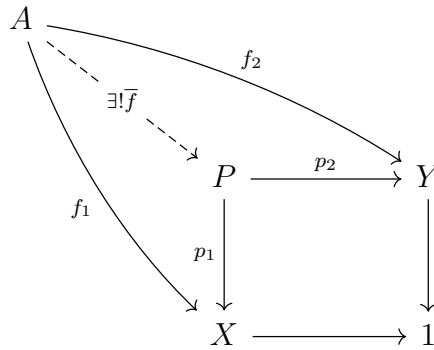
于是由等化子的泛性质，我们知道存在唯一的  $\tilde{f}: A \rightarrow L$  使得下图交换



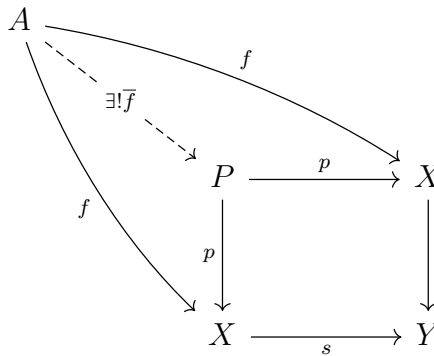
即  $L = \lim_I D$ , 所以极限存在.

(2) 有二元积就说明有非空有限积, 有终对象就说明有空集积, 于是直接仿照 (1) 的方法立刻得证.

(2') 我们只需要说明通过拉回可以得到二元积和等化子即可. 下面的交换图告诉我们存在二元积, 其中 1 是终对象:



下面的交换图告诉我们存在等化子



于是我们知道定理得证. □

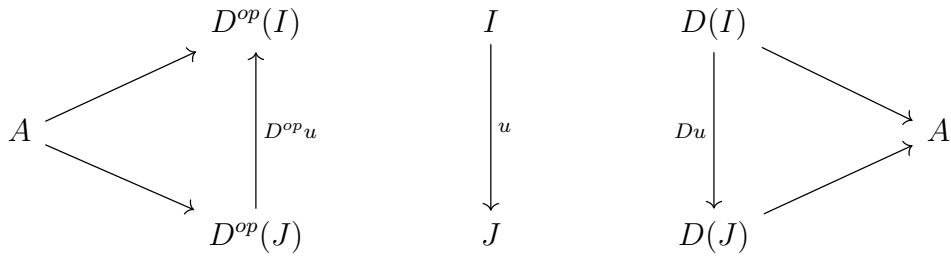
由这个定理, 我们可以立刻验证  $\mathbf{Set}, \mathbf{Topo}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ring}, \mathbf{Vect}_k$  都是完备范畴, 并且左  $R$ -模范畴和右  $R$  模范畴也是完备范畴, 这里甚至不要求  $R$  是交换的.

### 4.3 余极限

**定义 4.3.1: colimit**

$\mathcal{A}$  是一个范畴,  $\mathbf{I}$  是一个小范畴, 令  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  为一个图, 令  $D^{op}$  对应地在  $\mathbf{I}^{op} \rightarrow \mathcal{A}^{op}$  上的函子. 一个  $D$  上的余锥 (cocone) 是一个  $D^{op}$  上的锥, 一个  $D$  的余极限 (colimit) 是一个  $D^{op}$  的极限.

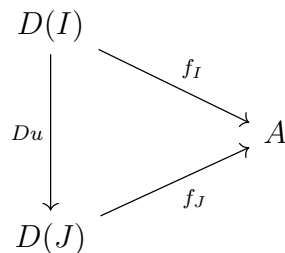
下图中左边是  $\mathcal{A}^{op}$  中的锥，对应到右边就变成了  $\mathcal{A}$  中的余锥：



我们明确地写出来，就是：一个  $D$  上的**余锥(cocone)** 就是一个对象  $A \in \mathcal{A}$  与一族态射

$$\left( D(I) \xrightarrow{f_I} A \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

使得对于任意的  $u: I \rightarrow J$ ，都有



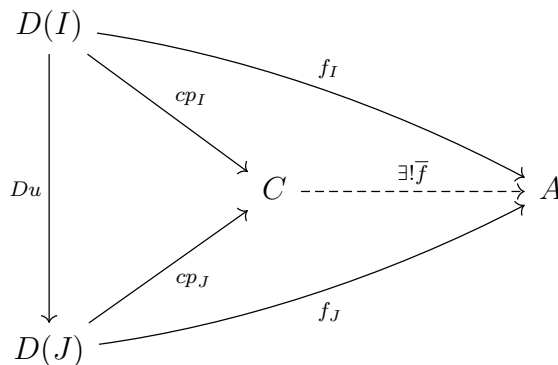
一个  $D$  的**余极限(colimit)** 是一个余锥

$$\left( D(I) \xrightarrow{cp_I} C \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

使得对于任意的余锥  $\left( D(I) \xrightarrow{f_I} A \right)_{I \in \mathbf{I}}$ ，都存在态射  $\bar{f}: C \rightarrow A$  使得

$$\bar{f} \circ cp_I = f_I, \quad \forall I \in \mathbf{I}$$

即下图交换：



我们把极限  $C$  记为

$$C = \varinjlim_{\mathbf{I}} D = \text{colim}_{\mathbf{I}} D$$

余极限也称之为**正向极限(direct limit)** 或者**归纳极限(inductive limit)**，我们称态射  $cp_I$  为**余投影(coprojections)**。

## 利用余极限说明代数闭包的存在性

我们在这里简单介绍一下余极限的一个重要应用：即说明代数闭包的存在性。

**定理 4.3.1: 代数闭包**

域都存在其代数闭包.

**证明:** 我们先交代一下符号,  $K$  是域,

$$\Sigma := \{f \in K[x] : f \text{ 的首项系数为 } 1, \text{ 且 } f \text{ 不可约}\}$$

对于  $f \in \Sigma$ , 对应一个未定元  $x_f$ , 再定义

$$A := K[S], \quad S = \{x_f \mid f \in \Sigma\}$$

令  $a$  表示由所有多项式  $f(x_f)$ ,  $f \in \Sigma$  在  $A$  中生成的理想, 我们来证明  $a \neq (1)$ .

我们假设  $a = (1)$ , 即存在有限的  $a_f \in A$  使得  $\sum a_f f(x_f) = 1$ , 我们考虑域  $K$  的分裂域  $K'$  使得  $f_i$  的根  $\alpha_i$  在内, 则考虑

$$0 = \sum a_f f(\alpha_i) = 1 \in K'$$

这是不可能的, 所以  $a \neq (1)$ .

从而令  $\mathfrak{m}$  是  $A$  中包含  $a$  的极大理想, 令  $K_1 = A/\mathfrak{m}$ , 则  $K_1$  是  $K$  的扩域, 并且每个多项式  $f \in \Sigma$  在  $K_1$  中都有根(从而根都在  $K_1$  中), 我们重复  $K_1$  的造法, 得到  $K_2$ , 以此类推, 我们令

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

则  $L$  是域, 并且其中每个多项式都可以分解成一次因式的乘积, 用  $\overline{K}$  表示  $L$  在  $K$  上代数的哪些元素的集合, 则  $\overline{K}$  就是  $K$  的代数闭包.  $\square$

这个证明对吗? 这个证明在表述上存在一个普遍存在于许多代数教材中的、微妙的集合论上的漏洞, 这个漏洞在于构造序列  $K \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$  并取其并集  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  的过程.

漏洞的关键点在于:  $K_1 = A/\mathfrak{m}$  并不是  $K$  的一个**超集(superset)**, 也就是说,  $K$  不是  $K_1$  的一个子集(subset). 这个问题在迭代过程中会不断累积: 我们从  $K_0 = K$  开始, 构造了  $K_1$  和一个嵌入  $\varphi_0 : K_0 \rightarrow K_1$ , 接下来, 为了构造  $K_2$ , 我们对  $K_1$  重复此过程, 我们会得到一个新域  $K_2$  和一个嵌入  $\varphi_1 : K_1 \rightarrow K_2$ . 依此类推, 我们得到一个域和嵌入的序列:

$$K_0 \xrightarrow{\varphi_0} K_1 \xrightarrow{\varphi_1} K_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$$

因为  $K_n$  并不是  $K_{n+1}$  的子集, 所以表达式  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  是无意义的, 你不能对一族不相互包含的集合取并集. 下面我们用范畴论的语言严谨地重述这个过程:

我们考虑 **域范畴 Field**，其对象 (objects) 是所有的域，其态射 (morphisms) 是域同态. 我们知道，域之间的任何非零同态都是单射(嵌入).

Artin 的构造过程实际上是在 **Field** 范畴中定义了一个图，这个图由一个无穷序列的对象和态射构成：

$$K_0 \xrightarrow{\varphi_0} K_1 \xrightarrow{\varphi_1} K_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$$

其中  $K_0 = K$ ，而  $\varphi_n : K_n \rightarrow K_{n+1}$  是通过构造商环  $K_{n+1} = K_n[\{x_f\}]/m_n$  所诱导的自然嵌入.

这个序列可以更形式化地描述为一个从作为偏序集的自然数范畴  $(\mathbb{N}, \leq)$  到 **Field** 的一个函子 (functor)  $F : (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow \mathbf{Field}$ .

- 对于对象  $n \in \mathbb{N}$ ，函子  $F$  给出域  $F(n) = K_n$ .
- 对于态射  $n \leq m$ ，函子  $F$  给出复合嵌入  $F(n \rightarrow m) : K_n \rightarrow K_m$ .

原证明中的问题是，它试图在**集合范畴 Set** 中对这个序列的对象取并集. 但这个图是存在于 **Field** 范畴中的，其中的态射  $\varphi_n$  只是单态射 (monomorphisms)，而不一定是集合论意义下的包含映射 (inclusion maps).

在范畴论中，能扮演“并集”角色的正确构造是**余极限**，对于这样一个图，它也被称为**正向极限**.

该图  $F$  的余极限是一个对象  $L \in \mathbf{Field}$  (它本身是一个域)，伴随着一族态射  $\psi_n : K_n \rightarrow L$ ，对于所有的  $n \in \mathbb{N}$  都成立. 这个组合  $(L, \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  满足以下两个条件：

对于任意的  $n \in \mathbb{N}$ ，下面的图表是可交换的. 这意味着从  $K_n$  到  $L$  的路径是唯一的，无论你先走到  $K_{n+1}$  再到  $L$ ，还是直接从  $K_n$  到  $L$ .

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{\varphi_n} & K_{n+1} \\ & \searrow \psi_n & \swarrow \psi_{n+1} \\ & L & \end{array}$$

数学上表示为： $\psi_{n+1} \circ \varphi_n = \psi_n$ .

对于任何其他的域  $X$  和任何一族态射  $f_n : K_n \rightarrow X$  使得图表  $(X, \{f_n\})$  也满足上述交换性条件 (即  $f_{n+1} \circ \varphi_n = f_n$ )，则存在一个**唯一的**态射  $u : L \rightarrow X$ ，使得对于所有的  $n$ ，下图可交换：

$$\begin{array}{ccccc} & K_n & & & \\ & \searrow \psi_n & & \searrow f_n & \\ & & L & \xrightarrow{u} & X \\ & \swarrow \psi_{n+1} & & \swarrow f_{n+1} & \\ K_{n+1} & & & & \end{array}$$

数学上表示为： $u \circ \psi_n = f_n$  对所有  $n \in \mathbb{N}$  成立.

这个泛性质精确地刻画了  $L$  的角色：它是包含所有  $K_n$  的“最经济”或“最自然”的域. 任何其他试图扮演这个角色的域  $X$  都必须通过  $L$  进行唯一的分解.

原证明的直觉是正确的, 但其语言是不精确的. 它所描述的“并集”域  $L$  应该被严谨地理解为在 **Field** 范畴中图  $K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots$  的余极限.

幸运的是, 在 **Field** 范畴中, 这种序列的余极限总是存在的.

我们首先取序列中所有域的底层集合的不交并, 记为  $S$ .

$$S = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times K_n)$$

$S$  中的元素是形如  $(n, x)$  的有序对, 其中  $n \in \mathbb{N}$  且  $x \in K_n$ .

我们在  $S$  上定义一个等价关系  $\sim$ . 对于  $S$  中的两个元素  $(n, x)$  和  $(m, y)$ , 我们定义  $(n, x) \sim (m, y)$  当且仅当存在一个足够大的整数  $p \geq n, m$ , 使得  $x$  和  $y$  在  $K_p$  中的像相等. 由于我们的图是一个线性序列, 这个定义可以简化. 不失一般性, 假设  $n \leq m$ . 我们定义:

$$(n, x) \sim (m, y) \iff (\varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \dots \circ \varphi_n)(x) = y$$

为了方便, 我们将从  $K_n$  到  $K_m$  ( $n \leq m$ ) 的复合态射记为  $\varphi_{m,n}$ . 那么,  $(n, x) \sim (m, y) \iff \varphi_{m,n}(x) = y$ . 我们需要验证这是一个等价关系:

- **自反性:**  $(n, x) \sim (n, x)$  因为  $\varphi_{n,n} = \text{id}_{K_n}$  是恒等映射.
- **对称性:** 如果  $(n, x) \sim (m, y)$  且  $n \leq m$ , 则  $\varphi_{m,n}(x) = y$ . 我们需要证明  $(m, y) \sim (n, x)$ . 因为  $\varphi_{m,n}$  是单射, 所以这个关系只有在  $x = \varphi_{m,n}^{-1}(y)$  时成立, 这暗示了从一个方向到另一个方向的定义. 更严谨的定义是:  $(n, x) \sim (m, y)$  当且仅当存在  $p \geq n, m$  使得  $\varphi_{p,n}(x) = \varphi_{p,m}(y)$ . 在这个定义下, 对称性是显然的.
- **传递性:** 假设  $(n, x) \sim (m, y)$  且  $(m, y) \sim (p, z)$ . 不失一般性, 设  $n \leq m \leq p$ . 我们有  $\varphi_{m,n}(x) = y$  和  $\varphi_{p,m}(y) = z$ . 因此  $z = \varphi_{p,m}(\varphi_{m,n}(x)) = (\varphi_{p,m} \circ \varphi_{m,n})(x) = \varphi_{p,n}(x)$ . 故  $(n, x) \sim (p, z)$ .

我们定义集合  $L$  为  $S$  在等价关系  $\sim$  下的商集.

$$L = S / \sim = \{[(n, x)] \mid (n, x) \in S\}$$

其中  $[(n, x)]$  表示包含  $(n, x)$  的等价类. 这个集合  $L$  将成为我们新域的元素集合.

为了说明  $L$  是一个域, 我们在  $L$  上定义加法和乘法.

对于  $L$  中的两个元素  $[(n, x)]$  和  $[(m, y)]$ , 我们定义其和为:

$$[(n, x)] + [(m, y)] = [(p, \varphi_{p,n}(x) + \varphi_{p,m}(y))]$$

其中  $p = \max(n, m)$ .

类似地, 我们定义其积为:

$$[(n, x)] \cdot [(m, y)] = [(p, \varphi_{p,n}(x) \cdot \varphi_{p,m}(y))]$$

其中  $p = \max(n, m)$ .

我们需要证明运算结果不依赖于等价类中代表元的选择.

假设  $[(n, x)] = [(n', x')]$  且  $[(m, y)] = [(m', y')]$ . 我们需要证明:

$$[(n, x)] + [(m, y)] = [(n', x')] + [(m', y')]$$

设  $p = \max(n, m)$  和  $p' = \max(n', m')$ . 根据等价关系, 存在  $q \geq n, n'$  使得  $\varphi_{q,n}(x) = \varphi_{q,n'}(x')$ , 也存在  $r \geq m, m'$  使得  $\varphi_{r,m}(y) = \varphi_{r,m'}(y')$ . 令  $k = \max(p, p', q, r)$ . 我们将所有元素都提升到  $K_k$  中进行计算.

$$\begin{aligned} \varphi_{k,p}(\varphi_{p,n}(x) + \varphi_{p,m}(y)) &= \varphi_{k,n}(x) + \varphi_{k,m}(y) \\ &= \varphi_{k,q}(\varphi_{q,n}(x)) + \varphi_{k,r}(\varphi_{r,m}(y)) \\ &= \varphi_{k,q}(\varphi_{q,n'}(x')) + \varphi_{k,r}(\varphi_{r,m'}(y')) \\ &= \varphi_{k,n'}(x') + \varphi_{k,m'}(y') \\ &= \varphi_{k,p'}(\varphi_{p',n'}(x') + \varphi_{p',m'}(y')) \end{aligned}$$

这表明  $(p, \varphi_{p,n}(x) + \varphi_{p,m}(y)) \sim (p', \varphi_{p',n'}(x') + \varphi_{p',m'}(y'))$ . 因此, 加法是良定义的. 乘法的证明完全类似.

可以逐一验证  $L$  在上述定义的运算下满足域的所有公理.

- 加法/乘法交换律与结合律: 直接继承自每个域  $K_n$  的相应性质.
- 加法单位元:  $0_L = [(0, 0_{K_0})]$ . 对于任意  $[(n, x)]$ , 有  $[(n, x)] + 0_L = [(n, x + 0_{K_n})] = [(n, x)]$ .
- 乘法单位元:  $1_L = [(0, 1_{K_0})]$ .
- 加法逆元:  $-[(n, x)] = [(n, -x)]$ .
- 乘法逆元: 对于  $[(n, x)] \neq 0_L$  (即  $x \neq 0_{K_n}$ ), 其逆元为  $[(n, x^{-1})]$ .
- 分配律: 直接继承自  $K_n$  的分配律.

因此,  $(L, +, \cdot)$  是一个域.

现在我们证明  $(L, \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  是图  $D$  的余极限, 其中  $\psi_n : K_n \rightarrow L$  定义为  $\psi_n(x) = [(n, x)]$ .

我们需要证明图表是交换的, 即  $\psi_{n+1} \circ \varphi_n = \psi_n$ . 对于任意  $x \in K_n$ :

$$(\psi_{n+1} \circ \varphi_n)(x) = \psi_{n+1}(\varphi_n(x)) = [(n+1, \varphi_n(x))]$$

另一方面:

$$\psi_n(x) = [(n, x)]$$

根据我们对等价关系  $\sim$  的定义,  $(n, x) \sim (n+1, \varphi_n(x))$ . 因此  $[(n, x)] = [(n+1, \varphi_n(x))]$ . 交换性成立.

假设存在另一个余锥  $(X, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ , 其中  $X$  是一个域,  $f_n : K_n \rightarrow X$  是域同态, 且满足  $f_{n+1} \circ \varphi_n = f_n$ . 我们需要证明存在一个唯一的域同态  $u : L \rightarrow X$  使得  $u \circ \psi_n = f_n$  对所有  $n$  成立.

- 构造  $u$ : 我们定义  $u: L \rightarrow X$  如下:

$$u([(n, x)]) = f_n(x)$$

- $u$  是良定义的: 假设  $[(n, x)] = [(m, y)]$ . 不失一般性, 设  $n \leq m$ . 这意味着  $\varphi_{m,n}(x) = y$ . 我们需要检验  $f_n(x) = f_m(y)$ . 由于  $\{f_n\}$  是一个余锥, 我们有  $f_m \circ \varphi_{m,n} = f_n$ . 因此:

$$f_m(y) = f_m(\varphi_{m,n}(x)) = (f_m \circ \varphi_{m,n})(x) = f_n(x)$$

所以  $u$  是良定义的.

- $u$  是域同态:

$$\begin{aligned} u([(n, x)] + [(m, y)]) &= u([(p, \varphi_{p,n}(x) + \varphi_{p,m}(y))]) \quad (p = \max(n, m)) \\ &= f_p(\varphi_{p,n}(x) + \varphi_{p,m}(y)) \\ &= f_p(\varphi_{p,n}(x)) + f_p(\varphi_{p,m}(y)) \\ &= (f_p \circ \varphi_{p,n})(x) + (f_p \circ \varphi_{p,m})(y) \\ &= f_n(x) + f_m(y) = u([(n, x)]) + u([(m, y)]) \end{aligned}$$

乘法同态的证明类似.

- 满足  $u \circ \psi_n = f_n$ : 对于任意  $x \in K_n$ :

$$(u \circ \psi_n)(x) = u(\psi_n(x)) = u([(n, x)]) = f_n(x)$$

此条件满足.

- $u$  的唯一性: 假设还存在另一个同态  $u' : L \rightarrow X$  满足  $u' \circ \psi_n = f_n$ . 那么对于任意元素  $[(n, x)] \in L$ :

$$u'([(n, x)]) = u'(\psi_n(x)) = (u' \circ \psi_n)(x) = f_n(x)$$

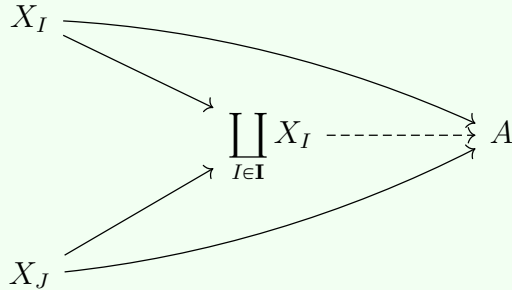
这与我们对  $u$  的定义完全相同, 即  $u'([(n, x)]) = u([(n, x)])$ . 因此  $u' = u$ .

我们成功构造了一个域  $L$  和一族态射  $\{\psi_n\}$ , 并证明了它满足余极限的泛性质. 因此, 域范畴中序列图的余极限总是存在的.

### 4.4 余积, 余等化子和推出

**定义 4.4.1: coproduct**

对象族  $(X_I)_{I \in \mathbf{I}}$  的一个和(sum) 或者叫做余积(coproduct) 是离散范畴  $\mathbf{I}$  的余极限.



由终对象的对偶, 我们知道空集的余积是始对象. 一些常见范畴中的余积为:

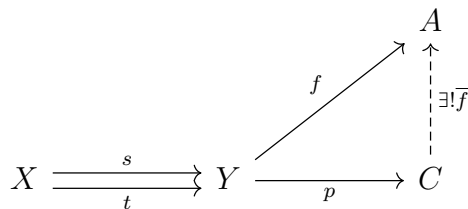
Category	Coproduct
<b>Set</b>	不交并(Disjoint Union)
<b>Grp</b>	自由积(Free Product)
<b>Ab</b>	直和(Direct Sum)
<b>Mod</b>	直和(Direct Sum)
<b>Topo</b>	不交并空间(Disjoint Union Space)

**定义 4.4.2: coequalizer**

一个余等化子(coequalizer) 是一个形状  $\mathbb{E}$  的余极限, 其中

$$\mathbb{E} = \bullet \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \bullet$$

说白了就是下图泛性质所定义的:

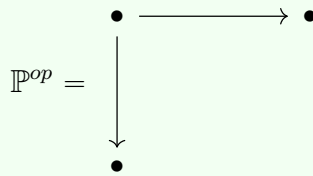


常见范畴中的余等化子为:

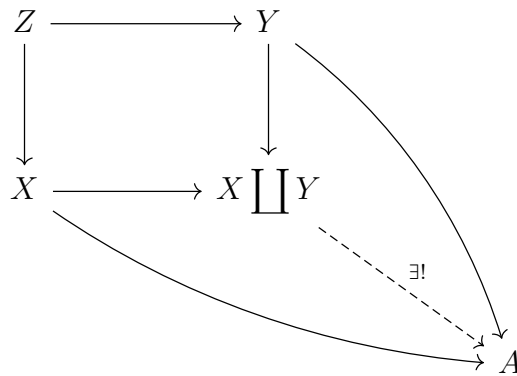
Category	Coequalizer of $f, g : X \rightarrow Y$
<b>Set</b>	商集 (Quotient Set) $Y/f(x) \sim g(x)$
<b>Grp</b>	商群 (Quotient Group) $Y/N(\langle f(x)g(x)^{-1} \mid x \in X \rangle)$
<b>Ab / Mod</b>	余核 (Cokernel) $Y/\text{Im}(f - g)$
<b>Topo</b>	商空间 (Quotient Space) with quotient topology

**定义 4.4.3: pushout**

一个**推出(pushout)** 是一个形状  $\mathbb{P}$  的余极限, 其中



说白了就是下图泛性质所定义的



一些常见范畴中的推出为:

Category	Pushout of $f : A \rightarrow B$ and $g : A \rightarrow C$
<b>Set</b>	融合和 (Amalgamated Sum) $(B \sqcup C)/\sim$ (其中 $\sim$ 是由 $f(a) \sim g(a), \forall a \in A$ 生成的等价关系)
<b>Grp</b>	带核的自由积 (Amalgamated Free Product) $(B * C)/N(\langle f(a)g(a)^{-1} \mid a \in A \rangle)$
<b>Ab / Mod</b>	余积的余核 (Cokernel of the coproduct map) $(B \oplus C)/\text{Im}(f \oplus -g)$
<b>Topo</b>	粘合空间 (Adjunction/Gluing Space) $(B \sqcup C)/\sim$ (赋予商拓扑)

## 4.5 保持, 反映与创造

### 定义 4.5.1: 保极限函子

$\mathbf{I}$  是一个小范畴, 我们称一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  **保持形状为  $\mathbf{I}$  的极限** 如果对于任何的图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  和锥  $\left(A \xrightarrow{p_I} D(I)\right)_{I \in \mathbf{I}}$ , 有

$$\left(A \xrightarrow{p_I} D(I)\right)_{I \in \mathbf{I}} \text{ is a limit cone on } D \implies \left(F(A) \xrightarrow{Fp_I} FD(I)\right)_{I \in \mathbf{I}} \text{ is a limit cone on } FD$$

称  $F$  **保持形状为  $\mathbf{I}$  的余极限** 如果对于任何的图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  和余锥  $\left(D(I) \xrightarrow{p_I} A\right)_{I \in \mathbf{I}}$ , 有

$$\left(D(I) \xrightarrow{p_I} A\right)_{I \in \mathbf{I}} \text{ is a colimit cocone} \implies \left(FD(I) \xrightarrow{Fp_I} F(A)\right)_{I \in \mathbf{I}} \text{ is a colimit cocone}$$

### 定义 4.5.2: continuous functors and cocontinuous functors

一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  **保持极限 (preserves limits)** 如果对于所有小范畴  $\mathbf{I}$ , 都保持形状  $\mathbf{I}$  的极限. 保持极限的函子也称之为**连续函子 (continuous functor)**. 称函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  **保持余极限 (preserves colimits)**, 如果对于所有小范畴  $\mathbf{I}$ , 都保持形状  $\mathbf{I}$  的余极限. 保持余极限的函子也称之为**余连续函子 (cocontinuous functor)**.

我们有另外的方式来描述保持极限的函子, 给定一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 则  $F$  保持极限当且仅当: 对于任意存在极限的图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$ , 其复合  $F \circ D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{B}$  也存在极限, 并且典范映射

$$F \left( \lim_{\mathbf{I}} D \right) \rightarrow \lim_{\mathbf{I}} (F \circ D)$$

是一个同构. 这里的典范映射通过

$$F \left( \lim_{\mathbf{I}} D \right) \xrightarrow{F(p_I)} FD(I)$$

由极限的泛性质给出. 特别地, 如果  $F$  保持极限, 则

$$F \left( \lim_{\mathbf{I}} D \right) \cong \lim_{\mathbf{I}} (F \circ D)$$

相同的论断对余极限也是正确的.

### 定义 4.5.3: reflects

我们称一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  **反映极限 (reflects limits)**, 如果对于任何的小范畴  $\mathbf{I}$  和图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$ , 有

$$\left(A \xrightarrow{p_I} D(I)\right)_{I \in \mathbf{I}} \text{ is a limit cone on } D \iff \left(F(A) \xrightarrow{Fp_I} FD(I)\right)_{I \in \mathbf{I}} \text{ is a limit cone on } FD$$

同理我们可以定义函子**反映余极限 (reflects colimits)**.

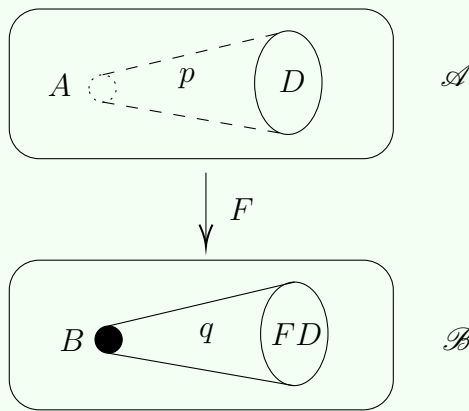
简单来说如果一个东西在  $F$  的作用下是个极限, 那它在作用之前本身就是一个极限, 于是  $F$  反映出了极限的性质, 所以称之为反映.

**定义 4.5.4: creates**

一个函子  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  称之为**创造极限(creates limits)**, 如果对任何的图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$ , 满足

- 对任何  $FD$  上的极限锥  $(B \xrightarrow{q_I} FD(I))_{I \in \mathbf{I}}$ , 存在唯一的锥  $(A \xrightarrow{p_I} D(I))_{I \in \mathbf{I}}$  使得  $F(A) = B$  并且  $Fp_I = q_I$ .
- 并且  $(A \xrightarrow{p_I} D(I))_{I \in \mathbf{I}}$  是  $D$  上的极限锥.

同理我们可以定义函子**创造余极限(creates colimits)**.



我们从创造极限的定义中可以看出  $F$  反映极限. 并且更多地, 我们有

**引理 4.5.1**

令  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  为函子并且  $\mathbf{I}$  是小范畴. 若  $\mathcal{B}$  有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限,  $F$  创造形状  $\mathbf{I}$  的极限, 则  $\mathcal{A}$  有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 并且  $F$  保持形状  $\mathbf{I}$  的极限.

**证明:** 给定  $\mathcal{A}$  中的图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$ , 我们有  $FD: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{B}$ , 于是由  $F$  创造极限, 得到  $\mathcal{A}$  中的形状  $\mathbf{I}$  的极限. 于是  $\mathcal{A}$  中有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限.

并且假设  $A$  是  $\mathcal{A}$  中  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  的极限, 我们对  $A$  的极限锥运用函子  $F$  得到  $\mathcal{B}$  中的一个锥  $F(A)$ . 而由于  $\mathcal{B}$  中有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 于是知道  $FD$  在  $\mathcal{B}$  中有极限  $B$ , 由极限性质我们知道存在态射

$$F(A) \rightarrow B$$

我们把极限  $B$  提升回  $\mathcal{A}$ , 使得  $F(A_0) = B$ , 得到  $D$  的另一个极限  $A_0$ , 由极限在同构意义下唯一, 我们知道存在同构  $A \rightarrow A_0$ , 通过  $F$  把  $A \rightarrow A_0$  映到  $F(A) \rightarrow B$ , 由函子保同构, 我们知道  $F(A)$  也是极限. 所以  $F$  保持极限. □

## 4.6 极限和余极限的函子性

给定一个范畴  $\mathbf{I}$  和  $\mathcal{A}$  与一个对象  $A \in \mathcal{A}$ , 则存在一个函子

$$\Delta A: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$$

将所有对象都映到  $A$ , 所有态射都映到  $1_A$ . 于是我们定义了一个**对角函子(diagonal functor)**

$$\Delta: \mathcal{A} \rightarrow [\mathbf{I}, \mathcal{A}]$$

现在给定一个图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  与一个对象  $A \in \mathcal{A}$ , 一个以  $A$  为顶点的  $D$  上的锥就是一个自然变换

$$\begin{array}{ccc} & \Delta A & \\ \mathbf{I} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{A} \\ & D & \end{array}$$

我们把所有以  $A$  为顶点的  $D$  上的锥记为  $\text{Cone}(A, D)$ , 因此我们可以写成

$$\text{Cone}(A, D) = [\mathbf{I}, \mathcal{A}](\Delta A, D)$$

因此  $\text{Cone}(-, -)$  在  $A, D$  上是函子性的, 对  $A$  是反变的, 对  $D$  是协变的:

$$\begin{array}{ccccc} & & D'(I) & & \\ & & \downarrow D'u & & \\ & & D'(J) & & \\ \Delta A(I) = A & \xrightarrow{\quad} & D(I) & \xrightarrow{\quad} & D(J) \\ \downarrow 1_A & \searrow f & \downarrow Du & \swarrow & \\ \Delta A(J) = A & \xrightarrow{\quad} & D(J) & \xrightarrow{\quad} & \\ & & \Delta A'(I) = A' & & \\ & & \downarrow 1_{A'} & & \\ & & \Delta A'(J) = A' & & \end{array}$$

所以我们可以重塑对于极限的定义:

**命题 4.6.1: 用可表刻画极限**

令  $\mathbf{I}$  为一个小范畴,  $\mathcal{A}$  是一个范畴,  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  是一个图. 则存在一个从  $D$  上的极限锥到函子

$$\text{Cone}(-, D): \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

的一个表示之间的一一映射, 把极限对象一一对应到表示对象.

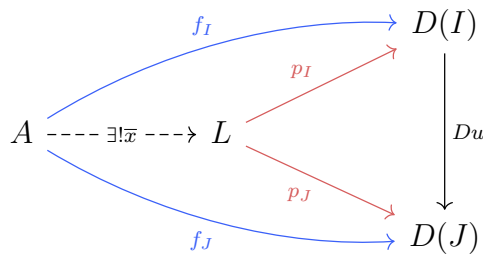
**证明:** 由推论 3.4.1, 一个  $\text{Cone}(-, D)$  的表示是一个对象  $L \in \mathcal{A}$  和一个泛元素  $u \in \text{Cone}(L, D)$ , 而这样的  $u$  是一个  $D$  上的以  $L$  为顶点的锥. 所谓泛元素  $u$  就是满足对于任意的  $A \in \mathcal{A}$  与  $x \in \text{Cone}(A, D)$ , 都存在唯一的从  $A \rightarrow L$  的态射  $\bar{x}$  使得

$$\text{Cone}(-, D)(\bar{x})(u) = x$$

由于泛元素  $u, x$  都是锥, 我们把他们设出来, 设

$$u = \left( L \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}, \quad x = \left( A \xrightarrow{f_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

用交换图吧泛元素的性质写出来实际上就是:

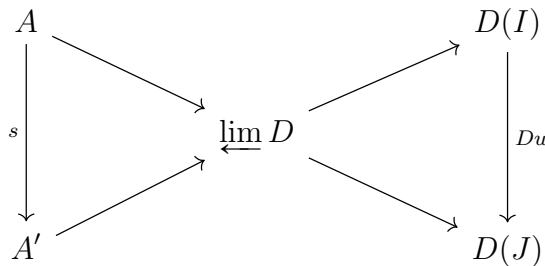


这实际上就是极限的定义. □

命题告诉我们一个  $D$  上的锥一一对应一个到  $\varprojlim_{\mathbf{I}} D$  的态射. 从而如果说  $D$  存在一个极限, 则

$$\text{Cone}(A, D) \cong \mathcal{A}(A, \varprojlim_{\mathbf{I}} D)$$

并且这个同构 naturally in  $A$ . 有交换图



于是我们得到自然同构

$$\text{Cone}(-, D) \cong \mathcal{A}(-, \varprojlim_{\mathbf{I}} D) = H_{\varprojlim_{\mathbf{I}} D}$$

推论 4.6.1: 极限在同构意义下唯一

极限在同构意义下唯一

**证明:** 如果有两个极限  $L$  和  $L'$ , 于是有

$$H_L \cong \text{Cone}(-, D) \cong H_{L'}$$

于是由推论 3.6.1 知道有  $L \cong L'$ . □

我们既然可以换  $\text{Cone}(A, D)$  中的  $A$ , 那么我们是不是可以换  $D$  呢? 然后得到  $D$  的极限和  $D'$  的极限之间的态射.

引理 4.6.1

令  $\mathbf{I}$  是一个小范畴,  $\mathbf{I} \begin{matrix} \xrightarrow{D} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{D'} \end{matrix} \mathcal{A}$ , 设

$$\left( \varprojlim_{\mathbf{I}} D \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}, \quad \left( \varprojlim_{\mathbf{I}} D' \xrightarrow{p'_I} D'(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

为极限锥, 则我们有

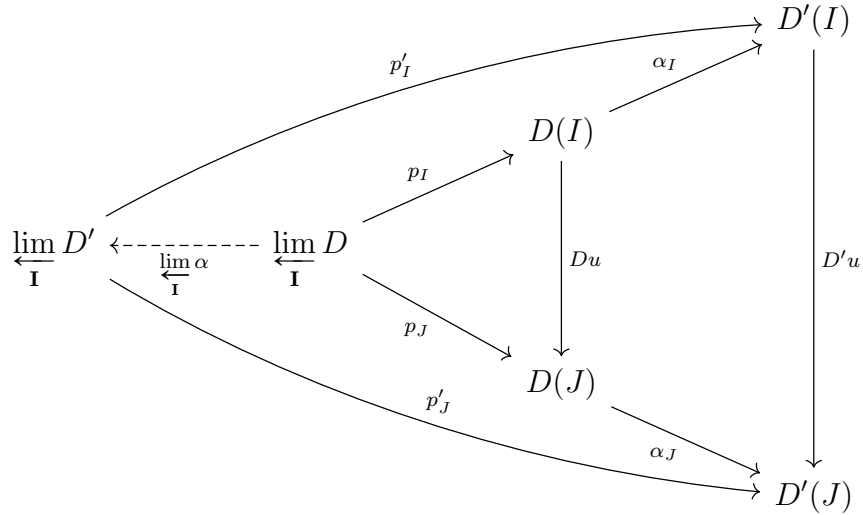
(1) 存在唯一的态射  $\varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha: \varprojlim_{\mathbf{I}} D \rightarrow \varprojlim_{\mathbf{I}} D'$  使得对任意的  $I \in \mathbf{I}$ , 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\mathbf{I}} D & \xrightarrow{p_I} & D(I) \\ \varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha_I \\ \varprojlim_{\mathbf{I}} D' & \xrightarrow{p'_I} & D'(I) \end{array}$$

(2) 给定锥  $(A \xrightarrow{f_I} D(I))_{I \in \mathbf{I}}$  和  $(A' \xrightarrow{f'_I} D'(I))_{I \in \mathbf{I}}$  和态射  $s: A \rightarrow A'$  使得下左图对任何的  $I \in \mathbf{I}$  交换, 则下右图也是交换的:

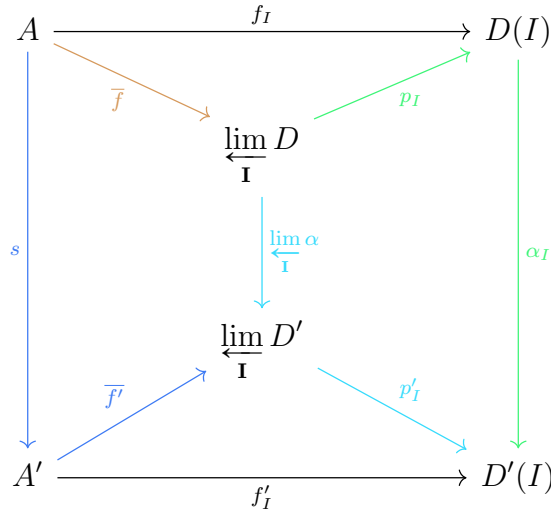
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_I} & D(I) \\ \downarrow s & & \downarrow \alpha_I \\ A' & \xrightarrow{f'_I} & D'(I) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{f}} & \varprojlim_{\mathbf{I}} D \\ \downarrow & & \downarrow \varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha \\ A' & \xrightarrow{\bar{f}'} & \varprojlim_{\mathbf{I}} D' \end{array}$$

**证明:** (1) 我们注意到通过自然变换  $\alpha$  诱导出  $D'$  上的锥:



于是通过泛性质我们就得到了 (a).

(b) 对于每个  $I \in \mathbf{I}$ , 我们都有:



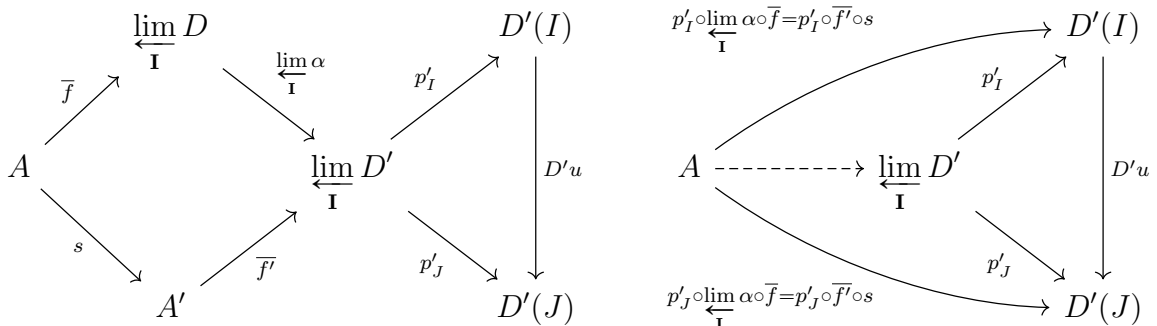
即我们有

$$p'_I \circ \varprojlim_I \alpha \circ \bar{f} = \alpha_I \circ p_I \circ \bar{f} = \alpha_I \circ f_I = f'_I \circ s = p'_I \circ \bar{f}' \circ s$$

也就是说

$$p'_I \circ (\varprojlim_I \alpha \circ \bar{f}) = p'_I \circ (\bar{f}' \circ s)$$

即



但是由泛性质，同一个锥只能唯一得到一个到  $\varprojlim_{\mathbf{I}} D'$  的态射，所以知道

$$\varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha \circ \bar{f} = \bar{f}' \circ s$$

即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{f}} & \varprojlim_{\mathbf{I}} D \\ \downarrow s & & \downarrow \varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha \\ A' & \xrightarrow{\bar{f}'} & \varprojlim_{\mathbf{I}} D' \end{array}$$

□

**定理 4.6.1: 极限和余极限的函子性**

如果给定一个小范畴  $\mathbf{I}$ ， $\mathcal{A}$  存在所有形状  $\mathbf{I}$  的极限，则如果我们人为地为每个图  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  选定一个极限锥<sup>a</sup>，则  $\varprojlim_{\mathbf{I}}: \mathcal{A}^{\mathbf{I}} \rightarrow \mathcal{A}$  是一个从函子范畴  $\mathcal{A}^{\mathbf{I}} = [\mathbf{I}, \mathcal{A}]$  到  $\mathcal{A}$  的一个函子。余极限同理。

<sup>a</sup>因为极限锥不一定唯一，只是在同构下唯一

**证明:** 我们直接给出在对象和态射上的作用即可：

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\mathbf{I}}: & \mathcal{A}^{\mathbf{I}} & \longrightarrow \mathcal{A} \\ & D & \longmapsto \varprojlim_{\mathbf{I}} D \\ & D \xrightarrow{\alpha} D' & \longmapsto \varprojlim_{\mathbf{I}} D \xrightarrow{\varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha} \varprojlim_{\mathbf{I}} D' \end{array}$$

□

## 4.7 函子的极限

### 引理 4.7.1

$\mathbf{I}$  是一个小范畴,  $\mathcal{A}$  是一个局部小范畴,  $D \in \mathcal{A}^{\mathbf{I}}$  是一个图,  $A \in \mathcal{A}$ , 则

$$\text{Cone}(A, D) \cong \mathcal{A}(A, \varprojlim_{\mathbf{I}} D) = H_{\varprojlim_{\mathbf{I}} D}(A) \cong \varprojlim_{\mathbf{I}} H_D(A) = \varprojlim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A, D)$$

对  $A$  和  $D$  自然.

**证明:** 由于  $\mathbf{Set}$  是完备的, 所以图

$$\mathcal{A}(A, D): \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad I \mapsto \mathcal{A}(A, D(I))$$

是有极限的, 我们知道集合范畴的极限可以被直接刻画:

$$\varprojlim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A, D) = \{(f_I)_{I \in \mathbf{I}} \mid f_I \in \mathcal{A}(A, D(I)), \forall I \in \mathbf{I} \ \& \ \mathcal{A}(A, D)(u)(f_I) = f_J, \forall u \in \mathbf{I}(I, J)\}$$

而任意的  $(f_I)_{I \in \mathbf{I}} \in \varprojlim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A, D)$  就正好构成了一个  $D$  上以  $\mathcal{A}$  为顶点的锥. 自然性只需要验证下图交换, 其实是自然的:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{A}(A, \varprojlim_{\mathbf{I}} D) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{A}(A', \varprojlim_{\mathbf{I}} D') & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 (A, D) & \xrightarrow{\quad} & \varprojlim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A, D) & & \\
 \downarrow (s, \alpha) & & \downarrow & & \\
 (A', D') & \xrightarrow{\quad} & \varprojlim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A', D') & & 
 \end{array}$$

□

下面的定理就是重述了上面的引理.

**定理 4.7.1: Representables preserve limits**

令  $\mathcal{A}$  为一个局部小范畴,  $A \in \mathcal{A}$ , 则函子

$$\mathcal{A}(A, -): \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$$

保持极限, 即连续.

**证明:** 令  $\mathbf{I}$  为一个小范畴,  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  是一个有极限的图, 则

$$\mathcal{A}(A, \varprojlim_{\mathbf{I}} D) \cong \varprojlim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A, D)$$

□

这个定理的对偶版本是:

$$\mathcal{A}(-, A): \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

保持极限, 在  $\mathcal{A}^{op}$  中的极限是  $\mathcal{A}$  中的余极限, 所以有

$$\mathcal{A}(\varinjlim_{\mathbf{I}} D, A) \cong \varinjlim_{\mathbf{I}^{op}} \mathcal{A}(D, A) \iff \mathcal{A}(\operatorname{colim}_{\mathbf{I}} D, A) \cong \varinjlim_{\mathbf{I}^{op}} \mathcal{A}(D, A)$$

**例 4.7.1** 考虑  $X$  和  $Y$  余积, 我们有

$$\mathcal{A}(X \coprod Y, A) = \mathcal{A}(X, A) \prod \mathcal{A}(Y, A)$$

考虑积有

$$\mathcal{A}(A, X \prod Y) = \mathcal{A}(A, X) \prod \mathcal{A}(A, Y)$$

在本节下面的讨论中, 我们令  $\mathcal{A}$  是小范畴,  $\mathcal{S}$  是局部小范畴, 从而我们能保证  $[\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  是局部小的.

**定义 4.7.1: evaluation**

令  $\mathcal{B}$  与  $\mathcal{C}$  是范畴, 对于  $B \in \mathcal{B}$ , 存在一个**赋值函子(evaluation)**:

$$\operatorname{ev}_B: [\mathcal{B}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}, \quad X \mapsto X(B)$$

我们将要讨论  $[\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  上的图, 给定一个图  $D: \mathbf{I} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{S}] = \mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ , 对于每一个  $A \in \mathcal{A}$ , 我们都可以给定一个函子

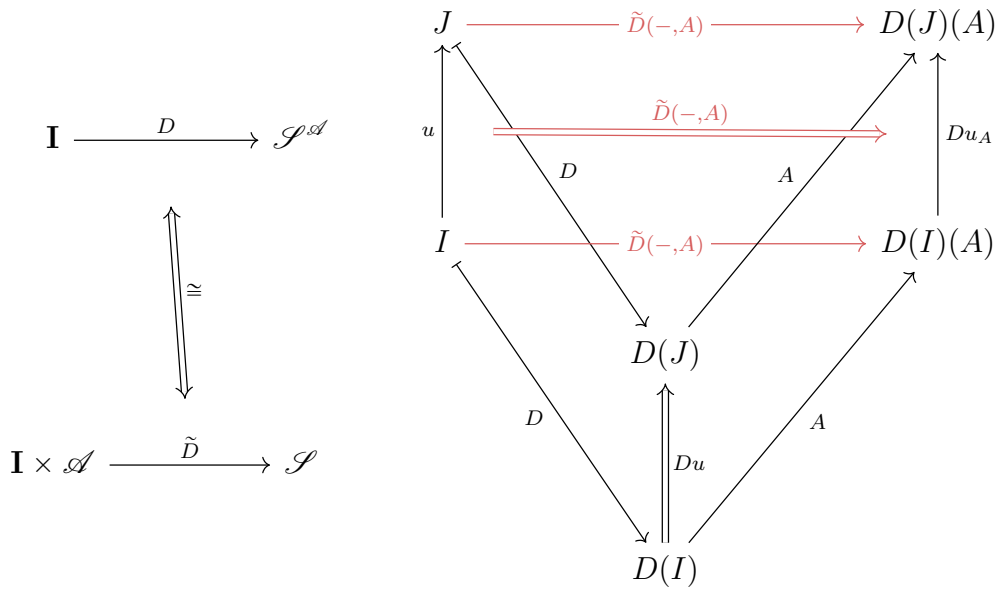
$$\operatorname{ev}_A \circ D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{S}, \quad I \mapsto D(I)(A)$$

我们也把  $\operatorname{ev}_A \circ D$  记为  $D(-)(A)$ .

**定理 4.7.2: 函子范畴中的极限逐点计算**

$\mathcal{A}$  和  $\mathbf{I}$  是小范畴,  $\mathcal{S}$  是局部小范畴, 令  $D: \mathbf{I} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  为一个图, 并且假设对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 图  $D(-)(A): \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{S}$  都有一个极限. 则存在一个  $D$  上的锥, 使得这个锥在  $\operatorname{ev}_A$  的像是一个  $D(-)(A)$  的极限锥. 并且这样子的锥是  $D$  的极限锥.

**证明:** 由于:



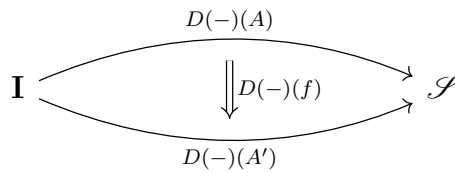
我们可以把  $D(-)(A)$  视为一个  $\mathbf{I} \rightarrow \mathcal{S}$  的一个函子, 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 取一个  $D(-)(A)$  极限锥

$$\left( L(A) \xrightarrow{p_{I,A}} D(I)(A) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

我们要说明

- (1) 存在唯一的方式把  $L$  延拓成一个  $\mathcal{A}$  上的函子使得  $\left( L \xrightarrow{p_I} D \right)_{I \in \mathbf{I}}$  是一个  $D$  上的锥.
- (2) 这个锥  $\left( L \xrightarrow{p_I} D \right)_{I \in \mathbf{I}}$  是一个极限锥.

(1) 任取  $f: A \rightarrow A'$ , 我们考虑自然变换



我们知道极限是函子性的, 我们将上面两个函子和自然变换代入下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\mathbf{I}} D & \xrightarrow{p_I} & D(I) \\ \varprojlim_{\mathbf{I}} \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha_I \\ \varprojlim_{\mathbf{I}} D' & \xrightarrow{p'_I} & D'(I) \end{array}$$

可以得到:

$$\begin{array}{ccc}
 L(A) = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A) & \xrightarrow{p_{I,A}} & D(I)(A) \\
 \downarrow L(f) := \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(f) & & \downarrow \\
 L(A') = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A') & \xrightarrow{p_{I,A'}} & D(I)(A')
 \end{array}$$

于是我们成功定义了  $L(f)$ , 下面我们需要说明定义的  $L$  是一个函子.

$$\begin{array}{ccccc}
 L(A) = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A) & \xrightarrow{p_{I,A}} & & \xrightarrow{\quad} & D(I)(A) \\
 \downarrow L(g \circ f) & \searrow L(f) & & \swarrow D(I)(f) & \downarrow D(I)(g \circ f) \\
 & & L(A') = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A') & \xrightarrow{p_{I,A'}} & D(I)(A') \\
 & \swarrow L(g) & & \searrow D(I)(g) & \downarrow D(I)(g) \\
 L(A'') = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A'') & \xrightarrow{p_{I,A''}} & & \xrightarrow{\quad} & D(I)(A'')
 \end{array}$$

我们只需要验证此图交换, 左边三角形的交换由  $\lim$  的函子性保证, 右边三角的交换由  $D(I)(-)$  的函子性保证. 所以  $L$  确实是一个函子. 并且我们知道  $p_I$  可以看成是  $L \Rightarrow D(I)(-)$  的一个自然变换:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \Downarrow p_I \\ \xrightarrow{D(I)} \end{array} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

所以考虑

$$\left( L \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

作为  $[\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  中的一族态射, 由于

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & D(I)(A) & \\
 p_{I,A} \nearrow & & \downarrow Du_A \\
 L(A) & & D(J)(A) \\
 p_{J,A} \searrow & & \\
 & D(J)(A) & 
 \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc}
 & D(I) & \\
 p_I \nearrow & & \downarrow Du \\
 L & & D(J) \\
 p_J \searrow & & \\
 & D(J) & 
 \end{array}
 \end{array}$$

所以我们得到  $\left( L \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$  是  $[\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  中  $D$  上的锥.

(2) 令  $X \in [\mathcal{A}, \mathcal{S}]$ , 设存在锥  $\left( X \xrightarrow{q_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$ , 则对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 我们有一个锥

$$\left( X(A) \xrightarrow{q_{I,A}} D(I)(A) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

于是存在唯一的态射  $\bar{q}_A: X(A) \rightarrow L(A)$  使得  $p_{I,A} \circ \bar{q}_A = q_{I,A}$  对于任意的  $I \in \mathbf{I}$  成立. 现在说明  $\bar{q}_A$  对  $A$  自然, 即下右图成立:

$$\begin{array}{ccc}
 X(A) & \longrightarrow & D(I)(A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X(A') & \longrightarrow & D(I)(A')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X(A) & \xrightarrow{\bar{q}_A} & L(A) = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A) \\
 \downarrow X(f) & & \downarrow \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(f) \\
 X(A') & \xrightarrow{\bar{q}_{A'}} & L(A') = \varprojlim_{\mathbf{I}} D(-)(A')
 \end{array}$$

而由引理 4.6.1 可以知道只需要说明左边交换, 而左边因为  $q_I$  是自然变换, 所以立刻得到.  $\square$

**注 4.7.1** 这个定理的对偶也是对的, 对于余极限有一样的性质, 即函子的极限可以看成是逐点求极限之后再合起来.

**推论 4.7.1**

令  $\mathbf{I}$  和  $\mathcal{A}$  是小范畴,  $\mathcal{S}$  是局部小范畴, 如果  $\mathcal{S}$  有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 则  $[\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  也有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 并且对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 赋值函子  $\text{ev}_A: [\mathcal{A}, \mathcal{S}] \rightarrow \mathcal{S}$  保持极限.

意思是: 对于任意的图  $D: \mathbf{I} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{S}]$ , 我们有

$$\text{ev}_A(\varprojlim_{\mathbf{I}} D) = L(A) = \varprojlim_{\mathbf{I}} \text{ev}_A \circ D$$

**注 4.7.2** 如果  $\mathcal{S}$  并不拥有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 那么可能会存在  $[\mathcal{A}, \mathcal{S}]$  中的极限不是逐点计算的, 即不能被赋值函子保持.

**推论 4.7.2**

$\mathcal{A}$  是小范畴, 则  $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$  有所有极限和余极限, 即完备和余完备, 并且对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 赋值函子  $\text{ev}_A: [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}] \rightarrow \mathbf{Set}$  保持极限和余极限, 即连续且余连续.

**推论 4.7.3**

对任意的小范畴  $\mathcal{A}$ , 米田嵌入  $H_\bullet: \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$  保持极限.

**证明:** 令  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$  是  $\mathcal{A}$  中的一个图, 令  $\left( \varprojlim_{\mathbf{I}} D \xrightarrow{p_I} D(I) \right)_{I \in \mathbf{I}}$  为一个极限锥, 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 下面的复合函子即  $H^A$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{H_\bullet} [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{\text{ev}_A} \mathbf{Set}$$

而我们知道  $H^A$  是保持极限的(定理 4.7.1), 所以我们知道

$$\left( \text{ev}_A H_\bullet \left( \varprojlim_{\mathbf{I}} D \right) \xrightarrow{\text{ev}_A H_\bullet(p_I)} \text{ev}_A H_\bullet(D(I)) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

是一个极限锥. 并且将定理 4.7.2 应用在  $H_\bullet \circ D$  和  $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$  上, 我们知道下面的锥就是一个极限锥:

$$\left( H_\bullet \left( \varprojlim_{\mathbf{I}} D \right) \xrightarrow{H_\bullet(p_I)} H_\bullet(D(I)) \right)_{I \in \mathbf{I}}$$

所以我们有

$$H_\bullet \left( \varprojlim_{\mathbf{I}} D \right) \cong \varprojlim_{\mathbf{I}} (H_\bullet \circ D)$$

□

**注 4.7.3** 注意米田嵌入并不保持余极限!

**例 4.7.2** 如果  $\mathcal{A}$  是有二元积的小范畴, 则上面推论告诉我们

$$H_{X \times Y} \cong H_X \times H_Y$$

籍此我们可以得到范畴论中的 Fubini 定理, 我们需要先给出一些概念, 注意到

$$[\mathbf{I}, [\mathbf{J}, \mathcal{S}]] \cong [\mathbf{I} \times \mathbf{J}, \mathcal{S}] \cong [\mathbf{J}, [\mathbf{I}, \mathcal{S}]]$$

于是任给一个函子  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{S}$ , 都对应着函子

$$D^\bullet: \mathbf{I} \rightarrow [\mathbf{J}, \mathcal{S}], \quad I \mapsto D(I, -)$$

与

$$D_\bullet: \mathbf{J} \rightarrow [\mathbf{I}, \mathcal{S}], \quad J \mapsto D(-, J)$$

假设  $\mathcal{S}$  是完备的, 所以对应的函子范畴  $[\mathbf{I}, \mathcal{S}]$  和  $[\mathbf{J}, \mathcal{S}]$  都是完备的, 于是我们想问累次极限是否相等

$$\varprojlim_{\mathbf{J}} \varprojlim_{\mathbf{I}} D^\bullet \stackrel{?}{=} \varprojlim_{\mathbf{I}} \varprojlim_{\mathbf{J}} D_\bullet$$

答案是肯定的:

**定理 4.7.3: 极限与极限是交换的**

令  $\mathbf{I}, \mathbf{J}$  都是小范畴,  $\mathcal{S}$  是一个局部小范畴, 有所有形状  $\mathbf{I}$  和形状  $\mathbf{J}$  的极限, 则对任意的函子  $D: \mathbf{I} \times \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{S}$ , 我们有

$$\varprojlim_{\mathbf{J}} \varprojlim_{\mathbf{I}} D^\bullet \cong \varprojlim_{\mathbf{I} \times \mathbf{J}} D \cong \varprojlim_{\mathbf{I}} \varprojlim_{\mathbf{J}} D_\bullet$$

**证明:** 极限的存在性自不必多说, 下面对于任意的  $S \in \mathcal{S}$ , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(S, \varprojlim_{\mathbf{J}} \varprojlim_{\mathbf{I}} D^\bullet) &\cong [\mathbf{J}, \mathcal{S}](\Delta S, \varprojlim_{\mathbf{I}} D^\bullet) \\ &\cong [\mathbf{I}, [\mathbf{J}, \mathcal{S}]](\Delta(\Delta S), D^\bullet) \\ &\cong [\mathbf{I} \times \mathbf{J}, \mathcal{S}](\Delta S, D) \end{aligned}$$

这个同构对  $S$  是自然的, 这就说明

$$\lim_{\mathbf{J}} \lim_{\mathbf{I}} D^{\bullet} \cong \lim_{\mathbf{I} \times \mathbf{J}} D$$

□

## 4.8 预层是表示的余极限

### 定义 4.8.1: category of elements

$\mathcal{A}$  是一个范畴,  $X$  是  $\mathcal{A}$  上的预层, 则  $X$  的**元素范畴(category of elements)  $\mathbf{E}(X)$**  是一个范畴满足:

- (1) 对象为  $(A, x)$ , 其中  $A \in \mathcal{A}$ ,  $x \in X(A)$ .
- (2) 态射  $(A', x') \rightarrow (A, x)$  为  $f: A' \rightarrow A$  使得  $Xf(x) = x'$ .

存在投影函子  $P: \mathbf{E}(X) \rightarrow \mathcal{A}$  定义为  $P(A, x) = A, P(f) = f$ .

下面是本节主定理:

### 定理 4.8.1: Density

$\mathcal{A}$  是一个小范畴,  $X$  是  $\mathcal{A}$  上的预层, 则  $X$  是下面图的余极限:

$$\mathbf{E}(X) \xrightarrow{P} \mathcal{A} \xrightarrow{H_{\bullet}} [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$$

即

$$X \cong \lim_{\mathbf{E}(X)} (H_{\bullet} \circ P)$$

**证明:** 首先注意到  $\mathcal{A}$  是小范畴, 所以  $\mathbf{E}(X)$  也是小范畴, 于是确实是一个 diagram. 现在令  $Y \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ , 一个以  $Y$  为顶点的  $H_{\bullet} \circ P$  的余锥为一族自然变换

$$\left( H_A \xrightarrow{\alpha_{A,x}} Y \right)_{A \in \mathcal{A}, x \in X(A)}$$

满足对于任意的  $f: A' \rightarrow A$ , 与  $x \in X(A)$ , 都有下图交换

$$\begin{array}{ccc} H_{A'} & & Y \\ \downarrow H_f & \searrow \alpha_{A', (Xf)(x)} & \nearrow \alpha_{A,x} \\ H_A & & \end{array}$$

米田引理告诉我们对于任意预层  $Y$  和对象  $A$ , 自然变换  $\text{Nat}(H_A, Y)$  与集合  $Y(A)$  是一一对应的

$$\alpha : H_A \rightarrow Y \iff y \in Y(A)$$

对应关系是  $y = \alpha_A(id_A)$ , 所以知道  $\alpha_{A,x} : H_A \rightarrow Y$  被替换为元素  $y_{A,x} \in Y(A)$ .

所以, 原本复杂的自然变换交换图:

$$\alpha_{A',(Xf)(x)} = \alpha_{A,x} \circ H_f$$

被翻译成了简单的元素等式:

$$y_{A',(Xf)(x)} = (Yf)(y_{A,x})$$

$$\begin{array}{ccc} H_{A'}(A') & & 1_{A'} \\ \downarrow (H_f)_{A'} & & \downarrow f \\ H_A(A') & \xrightarrow{(\alpha_{A,x})_{A'}} & Y(A') \end{array}$$

我们把  $y_{A,x}$  写成  $\bar{\alpha}_A(x)$ , 变成映射族

$$\left( X(A) \xrightarrow{\bar{\alpha}_A} Y(A) \right)_{A \in \mathcal{A}}$$

满足对任意的  $f: A' \rightarrow A$ , 与  $x \in X(A)$ , 都有

$$(Yf)(\bar{\alpha}_A(x)) = \bar{\alpha}_{A'}((Xf)(x))$$

这就定义了一个自然变换  $\bar{\alpha}: X \rightarrow Y$ , 所以对任意的  $Y \in [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ , 我们得到一个典范的双射

$$[\mathbf{E}(X), [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]](H_\bullet \circ P, \Delta Y) \cong [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}](X, Y)$$

所以  $X$  是  $H_\bullet \circ P$  的余极限. □

## 4.9 伴随与极限

### 定理 4.9.1: 伴随保持对应极限

令  $\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$  为一个伴随对, 则左伴随  $F$  保持余极限, 右伴随  $G$  保持极限.

**证明:** 我们只证明  $G$  保持极限: 令  $D: \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{B}$  为一个有极限的图, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A, G(\lim_{\mathbf{I}} D)) &\cong \mathcal{B}(F(A), \lim_{\mathbf{I}} D) \\ &\cong \lim_{\mathbf{I}} \mathcal{B}(F(A), D) \\ &\cong \lim_{\mathbf{I}} \mathcal{A}(A, G \circ D) \\ &\cong \text{Cone}(A, G \circ D) \end{aligned}$$

所以  $G(\lim_{\mathbf{I}} D)$  表示了  $\text{Cone}(A, G \circ D)$ , 即  $G(\lim_{\mathbf{I}} D) = \lim_{\mathbf{I}} G \circ D$ . □

回忆, 对于一个小范畴  $\mathbf{I}$ , 我们可以定义函子范畴

$$\mathcal{C}^{\mathbf{I}} = [\mathbf{I}, \mathcal{C}]$$

有自然的对角函子

$$\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{I}}$$

我们有下面的结论:

**定理 4.9.2**

令  $\mathbf{I}$  是一个小范畴,  $\mathcal{A}$  有所有形状  $\mathbf{I}$  的极限, 则  $\lim_{\mathbf{I}}$  定义了一个从  $[\mathbf{I}, \mathcal{A}]$  到  $\mathcal{A}$  的函子, 同理  $\text{colim}_{\mathbf{I}}$  也定义了一个从  $[\mathbf{I}, \mathcal{A}]$  到  $\mathcal{A}$  的函子, 并且满足伴随关系:

$$\begin{array}{ccc} & \text{colim}_{\mathbf{I}} & \\ \mathcal{A}^{\mathbf{I}} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \perp \\ \Delta \\ \perp \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{A} \\ & \lim_{\mathbf{I}} & \end{array}$$

**证明:** 由命题 4.6.1 我们知道

$$[\mathbf{I}, \mathcal{A}](\Delta -, -) = \text{Cone}(-, -) \cong \mathcal{A}(-, \lim_{\mathbf{I}} -)$$

所以自然有  $\Delta \dashv \lim_{\mathbf{I}}$ . 对于余极限, 我们也有相同的构造, 即

$$[\mathbf{I}, \mathcal{A}](-, \Delta -) \cong \mathcal{A}(\text{colim}_{\mathbf{I}} -, -)$$

于是  $\text{colim}_{\mathbf{I}} \dashv \Delta$ . □

**推论 4.9.1: Fubini定理**

由于极限是右伴随, 余极限是左伴随, 所以极限函子保持极限, 余极限函子保持余极限. 也即极限与极限可以交换, 余极限与余极限可以交换.

## Chapter 5: 局部化

---

## Chapter 6: 加性范畴

---

## Chapter 7: Abel范畴

---

## Chapter 8: 导出范畴

---

## Chapter 9: 三角范畴

---

## Chapter 10: 无穷范畴

---

## Chapter 10: Bibliography

---

- [1] 陈志杰. 代数基础: 模、范畴、同调代数与层. 高等教育出版社.
- [2] Tom Leinster. *Basic category theory*. Vol. 143. Cambridge University Press, 2014.
- [3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. “An Introduction to Categories and Homological Algebra”. In: ().
- [4] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra: Basic category theory*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1994.
- [5] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.
- [6] 李文威. 代数学方法卷一: 基础架构. 高等教育出版社.