

交换代数笔记

学来学去学不明白

慕可 乱写

网络版 (也没有实体版)

编译日期: 2026-08-26

本书没有由任何出版社发行

IMSB: 111-1-11-111111-1

慕可

个人主页: yyhmuke.com



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可. 访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议.

目录

第一章	交换代数	1
1.1	素避引理, 扩张与局限	1
1.2	从 Cayley-Hamilton 定理到 Nakayama 引理	3
1.3	模的张量积	5
1.4	张量积函子的右正合性	10
1.5	代数与代数的张量积	15
1.6	投射与内射的刻画	16
1.7	平坦的刻画	21
1.8	局部化的基本定义	23
1.9	局部化与局部性质	29
1.10	局部化环的扩张和局限理想	31
1.11	准素分解的定义与性质	37
1.12	准素分解的唯一性定理	39
1.13	结合素理想	42
1.14	整性	48
1.15	GOING-UP	50
1.16	GOING-DOWN	54
1.17	赋值环	57
1.18	Krull 维数与超越维数	60
1.19	链条件与模的合成列	63
1.20	Artin 环的结构定理	67

1.21	Noether 环与 Noether 模	71
1.22	环上的 Hilbert 基定理	72
1.23	模上的 Hilbert 基定理	74
1.24	Noether 环上的准素分解	77
1.25	分次环与分次模	78
1.26	Hilbert 零点定理	80
1.27	离散赋值环	83
1.28	Dedekind 整环	86
1.29	分式理想	87
1.30	拓扑与完备化	90
1.31	Artin-Rees 引理	94
1.32	Noether 环与完备化	96
1.33	结合分次环	100
1.34	Hilbert 函数	105
1.35	Krull 主理想定理	109
1.36	Noether 局部环的维数理论	113
1.37	正则局部环	116
1.38	超越维数	118

前言

统一度量衡

我们在此约定一些记号与定义.

- 所出现环若未加强调, 则均默认交换幺环.
- 理想定义为吸收的子环.
- 一般将幂零元根记为 $\mathfrak{N}$, 或者用 Nil 记录, 而 Jacobson 根记为 $\mathfrak{R}$, 或者用 Jac 记录, 或者干脆记作 $J(-)$.
- 理想的 radical 记为 $r(-)$ 或者 $\sqrt{-}$.

致谢

模板来自李文威老师, 在此表示谢意.

第一章

交换代数

1.1 素避引理，扩张与局限

引理 1.1.1 (素避引理) (1) 设 $p_1, \dots, p_n$ 是素理想, $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^n p_i$, 其中 $\mathfrak{a}$ 是理想, 则存在 i 使得 $\mathfrak{a} \subset p_i$.

(2) 设 $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ 是一些理想, 如果 $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$, 其中 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 则存在 i 使得 $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$. 如果 $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, 则存在 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$.

证明 (1) 我们对 n 归纳证明, $n=1$ 时显然, 我们下面假设 $n \geq 2$ 并对于 $n-1$ 成立.

若 $\mathfrak{a} \not\subset p_i$ 对于任意的 i 成立, 则由归纳假设我们知道 $\mathfrak{a}$ 不包含在任意 $n-1$ 个 p_i 的并中. 从而对任意的 p_i , 存在 $x_i \in \mathfrak{a}$, 使得 $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} p_j$, 若有某个 $x_i \notin p_i$, 则 $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^n p_i$, 矛盾, 所以 $x_i \in p_i$. 故我们有

$$y = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} x_j \right) \in \mathfrak{a}$$

但是对于任意的 p_i , 都有 $y \notin p_i$, 矛盾, 结论得证.

(2) 假设 $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}$ 对一切 i 成立, 则存在 $x_i \in \mathfrak{a}_i$, 使得 $x_i \notin \mathfrak{p}$, 于是

$$\prod_{i=1}^n x_i \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$$

但是我们知道 $\prod_{i=1}^n x_i \notin \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ 是素理想, 反证即可), 于是我们知道 $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}$, 矛盾.

若相等, 则

$$\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p} = \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}_i$$

□

定义 1.1.2 (扩张与局限) $f: A \rightarrow B$, 理想 $\mathfrak{a}$ 的像在 B 中生成的理想 $Bf(\mathfrak{a})$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的**扩理想**, 记为 $\mathfrak{a}^e$. $\mathfrak{b}$ 为 B 的一个理想, $f^{-1}(\mathfrak{b})$ 总是 A 中理想, 称为理想 $\mathfrak{b}$ 的**局限理想**, 记为 $\mathfrak{b}^c$.

命题 1.1.3 $f: A \rightarrow B$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 为 A, B 的理想.

$$(1) \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}, \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}.$$

$$(2) \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}, \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}.$$

注记 1.1.4 我们设 $I(A)$ 为 A 的所有理想构成的集合, 其上按包含关系构成偏序范畴, 则对于 $f: A \rightarrow B$, 我们存在伴随:

$$\mathrm{Hom}_{I(B)}(\mathfrak{a}^e, \mathfrak{b}) \cong \mathrm{Hom}_{I(A)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^c)$$

说人话就是

$$\mathfrak{a}^e \subseteq \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}^c$$

于是我们注意到单位和余单位分别诱导了

$$\eta: Id \rightarrow ec, \quad \varepsilon: ce \rightarrow Id$$

于是单位和余单位分别代表了

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}, \quad \mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$$

为方便我们给定函子

$$F(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e, \quad G(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c$$

于是三角恒等式告诉我们有

$$F(\mathfrak{a}) \rightarrow FGF(\mathfrak{a}) \rightarrow F(\mathfrak{a})$$

即

$$\mathfrak{a}^e \subseteq \mathfrak{a}^{ece} \subseteq \mathfrak{a}^e \implies \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$$

同理有

$$\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$$

1.2 从 Cayley-Hamilton 定理到 Nakayama 引理

在初始线性代数时，大家几乎都会遇见一个 Cayley-Hamilton 定理的“错误”证明，即考虑矩阵 M ，其特征多项式为

$$p(x) = \det(xI - M)$$

强行代入 $x = M$ 则有

$$p(M) = \det(MI - M) = 0$$

这个证明看似是错误的，但若将其置于合理的框架之下，这就是正确的。

定理 1.2.1 (Cayley-Hamilton 定理) M 为有限生成 A -模， $e_1, \dots, e_n$ 为其生成元， $\varphi \in \text{End}(M)$ ，设 $P \in M_n(A)$ 为 A 上的 n -阶方阵，使得

$$\varphi(e_1, \dots, e_n)^t = P(e_1, \dots, e_n)^t$$

则有如下自同态环 $\text{End}(M)$ 上的恒等式成立：

$$\det(\varphi I - P) = 0$$

证明 只需在等式

$$(\varphi I - P)(e_1, \dots, e_n)^t = 0$$

的两边乘上伴随矩阵 $(\varphi I - P)^*$ ，就得到

$$\det(\varphi I - P)(e_1, \dots, e_n)^t = 0$$

这告诉我们作为自同态

$$\det(\varphi I - P) = 0$$

详细的步骤见下面的广义情况. □

定理 1.2.2 (广义 Cayley-Hamilton 定理) M 是有限生成 A 模， $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想， φ 是 M 的一个自同态，且 $\varphi(M) \subset \mathfrak{a}M$ ，则存在 $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$ ，使得

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

证明 令 x_i 为 M 的生成元, 有 $\varphi(x_i) = \sum a_{ij}x_j$. 则有

$$0 = \varphi(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})(x_j) = 0$$

令

$$P = \begin{pmatrix} \varphi - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \varphi - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \varphi - a_{nn} \end{pmatrix}$$

知道

$$P(x_1, \dots, x_n)^t = 0$$

令 P^* 为 P 的伴随, 有 $P^*P = \det(P)I$, 我们有

$$\text{diag}\{\det(P), \dots, \det(P)\}(x_1, \dots, x_n)^t = 0$$

也就是 $\det(P)x_i = 0$, 注意到 $\det(P)$ 是一个关于 φ 的首一 n 次多项式, 从而成立. $\square$

推论 1.2.3 M 是有限生成 A 模, 且存在 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 使得 $\mathfrak{a}M = M$, 则存在 $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ 使得 $xM = 0$.

证明 取 $\varphi = \text{id}$ 即可, 注意 id 作用在 M 上就是 A 中幺元作用在 M 上. $\square$

现在我们可以一窥 Nakayama 引理的真容.

定理 1.2.4 (Nakayama-1) M 是有限生成 A 模, $\mathfrak{a}$ 为理想, 若 $\mathfrak{a}M = M$, 则存在 $a \in \mathfrak{a}$ 使得 $(1 + a)M = 0$.

证明 此为上一个推论的重述. $\square$

鉴于当 $\mathfrak{a}$ 含于 Jacobson 根 $\mathfrak{R}$ 时有 $1 + \mathfrak{a} \subset A^\times$, 常将下面的定理称为 Nakayama 定理.

定理 1.2.5 (Nakayama-2) M 是有限生成 A 模, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}$ 为包含在 Jacobson 根中的理想, 若 $\mathfrak{a}M = M$, $M = 0$.

证明 注意到 $\forall a \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}$, 有 $1 + a \in A^\times$, 所以 $(1 + a)M = 0 \implies M = 0$. $\square$

推论 1.2.6 M 是有限生成 A 模, $N \subset M$ 为子模, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}$ 为理想, 若 $M = \mathfrak{a}M + N$, 则 $N = M$.

证明 由于 M/N 有限生成, 从而 $M/N = \mathfrak{a}M/N$, 从而 $M/N = 0$, 所以 $M = N$. $\square$

再鉴于 Jacobson 根在局部环条件下就是极大理想, 我们就得到了最常用的 Nakayama 引理.

定理 1.2.7 (Nakayama-3(局部环情况)) A 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是极大理想, $k = A/\mathfrak{m}$ 是剩余域, M 是有限生成 A -模, 假设 x_i 为 M 中的元素, 使得 $\bar{x}_i$ 构成了 k -线性空间 $M/\mathfrak{m}M$ 的一组基, 则 x_i 生成 M .

证明 令 $N = (x_1, \dots, x_n) \subset M$ 为 M 的子模, 从而

$$M \rightarrow M/\mathfrak{m}M$$

诱导了一个满射

$$N \rightarrow M/\mathfrak{m}M$$

有 $N + \mathfrak{m}M = M$, 推论 1.2.6 表明 $N = M$. $\square$

局部环情况允许我们将模掉极大理想得到的线性空间的基提升为模的生成元, 它将在后面内容中展示风采.

1.3 模的张量积

定义 1.3.1 (张量积的泛性质) 令 A 是一个交换幺环, 令 M, N 为两个 A -模, 则 M 与 N 的**张量积**定义为一个 A -模 H 和一个双线性映射 $\varphi: M \times N \rightarrow H$ 满足下面的泛性质: 对于每一个 A -模 L 和任意的双线性映射 $f: M \times N \rightarrow L$, 存在唯一的同态 $\tilde{f}: H \rightarrow L$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & L \\ \varphi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ H & & \end{array}$$

命题 1.3.2 (张量积的存在和同构唯一性) A 是一个环, M, N 是 A -模, 则张量积 (H, φ) 存在, 并且在同构意义下唯一.

证明 由泛性质我们知道唯一性是显然的, 比如假设还存在 H' , 则有

$$H \longrightarrow H' \longrightarrow H, \quad H' \longrightarrow H \longrightarrow H'$$

从而由 $H \longrightarrow H$, $H' \longrightarrow H'$ 的唯一性知道同构, 下面证明存在性.

考虑自由模 $A^{(M \times N)}$ 带有基 $M \times N$, 令 $\{e_{x,y}\}_{(x,y) \in M \times N}$ 为典范基.

令 L 是形如下面元素生成的子模:

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_{x_1+x_2, y} - e_{x_1, y} - e_{x_2, y}, & \forall x_1, x_2 \in M, \forall y \in N \\ e_{x, y_1+y_2} - e_{x, y_1} - e_{x, y_2}, & \forall x \in M, \forall y_1, y_2 \in N \\ e_{ax, y} - e_{x, ay}, & ae_{x, y} - e_{ax, y}, \quad \forall a \in A, \forall x \in M, \forall y \in N \end{array} \right.$$

令 $H = A^{(M \times N)} / L$, 定义 $x \otimes y$ 为 (x, y) 在 H 中的像, 可以知道

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ (ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y) \end{array} \right.$$

从而我们容易验证 $\tilde{f}(x \otimes y) = f(x, y)$ 是由 f 唯一确定的. □

注记 1.3.3 我们将 M 与 N 的张量积记为 $(M \otimes_A N, \varphi)$, 并且一般省略 φ .

注记 1.3.4 注意 $M \otimes_A N$ 中的所有元素都可以表示为有限和 $\sum x_i \otimes y_i$, 但是一般来说不能表示为 $x \otimes y$.

例 1.3.5 令 $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, 则 $M \otimes_{\mathbb{Z}} N = 0$. 这是因为对于任意的 $(x, y) \in M \times N$, 有

$$x \otimes y = 3(x \otimes y) - 2(x \otimes y) = x \otimes (3y) - (2x) \otimes y = 0$$

命题 1.3.6 (张量积的典范同构) A 是环, M, N, M_i 都是 A 模, 则存在下面的典范同构 (即存在唯一的同构):

- (a) [幺元律] $M \otimes A \cong M$.
- (b) [交换律] $M \otimes N \cong N \otimes M$.
- (c) [结合律] $(L \otimes M) \otimes N \cong L \otimes (M \otimes N)$.
- (d) [分配律] $(\bigoplus M_i) \otimes N \cong \bigoplus (M_i \otimes N)$.

证明 由泛性质均可得, 下面举例说明:

(a) 交换图说明 M 满足 M, A 的张量积的泛性质.

$$\begin{array}{ccc}
 M \times A & \xrightarrow{\varphi: (x,a) \mapsto ax} & M \\
 & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \tilde{f}: x \mapsto f(x,1) \\
 & & L
 \end{array}$$

唯一性是因为图表交换, 所以我们有

$$\tilde{f}(ax) = f(x, a) \stackrel{\text{bilinear map}}{=} f(ax, 1)$$

(b) 交换图说明 $N \otimes M$ 满足 M, N 的张量积的泛性质.

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{\varphi(x,y)=y \otimes x} & N \otimes M \\
 & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \tilde{f}: y \otimes x \mapsto f(x,y) \\
 & & L
 \end{array}$$

(c) 交换图说明 $L \otimes (M \otimes N)$ 满足 $(L \otimes M), N$ 的张量积的泛性质.

$$\begin{array}{ccc}
 (L \otimes M) \times N & \xrightarrow{\varphi: (l \otimes m, n) \mapsto l \otimes (m \otimes n)} & L \otimes (M \otimes N) \\
 & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \tilde{f}: l \otimes (m \otimes n) \mapsto f(l \otimes m, n) \\
 & & L
 \end{array}$$

(d) 交换图说明满足泛性质.

$$\begin{array}{ccc}
 (\bigoplus_{i \in I} M_i) \times N & \xrightarrow{\varphi: (\sum_i x_i, y) \mapsto \sum_i (x_i \otimes y)} & \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N) \\
 & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \tilde{f}: \sum_i (x_i \otimes y) \mapsto \sum_{i \in I} \tilde{f}_i(x_i \otimes y) \\
 & & L \\
 M_i \times N & \xrightarrow{\quad} & M_i \otimes N \\
 & \searrow f_i & \downarrow \exists! \tilde{f}_i \\
 & & L
 \end{array}$$

仔细解释一下, 对于每一个 i , f 诱导了一个双线性映射 $f_i: M_i \times N \rightarrow L$, 进而

有 $\tilde{f}_i: M_i \otimes N \rightarrow L$, 令

$$\psi: \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \times N \rightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes N$$

是典范的映射, 从而我们有 $f = \tilde{f} \circ \psi$, 由此我们知道 $\tilde{f} = \bigoplus_{i \in I} \tilde{f}_i$ 是唯一的分解, 从而满足泛性质. $\square$

推论 1.3.7 如果 M 是自由模, 基为 $\{e_i\}$, 则 $M \otimes N$ 的每一个元素都可以唯一的表示为 $\sum_i e_i \otimes y_i$, $y_i \in N$.

注记 1.3.8 由张量积的结合律, 我们可以定义出有限个 M_i 的张量积 $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$.

定义 1.3.9 (同态的张量积) 设 $u: M \rightarrow M'$, $v: N \rightarrow N'$, 则由泛性质, 我们知道存在唯一的模同态 $u \otimes v: M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$, $u \otimes v$ 被称为 **u 和 v 的张量积**.

注记 1.3.10 所提到的泛性质如下图所示:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\text{canonical}} & M \otimes N \\ & \searrow f: (x,y) \mapsto u(x) \otimes v(y) & \downarrow \exists! u \otimes v: x \otimes y \mapsto u(x) \otimes v(y) \\ & & M' \otimes N' \end{array}$$

定义 1.3.11 (纯量的局限) 设 $\rho: A \rightarrow B$ 是环同态, N 是一个 B 模, 则 ρ 自然地诱导了一个 A 模结构, 即 $a \cdot y = \rho(a)y$, 称为**纯量的局限**.

定义 1.3.12 (纯量的扩充) 令 M 是 A 模, N 是 B 模, 存在环同态 $\rho: A \rightarrow B$, 则我们可以赋予 $M \otimes_A N$ 一个 B 模结构: 对任意的 $b \in B$, 定义 $t_b: N \rightarrow N$, $y \mapsto by$, 对任意的 $z \in M \otimes_A N$, 定义 B 模结构

$$b \cdot z := (1_M \otimes t_b)(z), \quad b(x \otimes y) = x \otimes (by)$$

容易验证这确实是一个 B 模结构. 我们可以定义 B 模 $M \otimes_A B$, 记为 $\rho^* M$, 被称为**纯量的扩充**.

命题 1.3.13 令 $\rho: A \rightarrow B$ 为环同态, M 是 A 模, N, P 是 B 模, 则存在一个典范的 B 模同构:

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P$$

证明 首先说明都可以看做是 B 模结构:

$$\begin{aligned} M \otimes_A \overbrace{(N \otimes_B P)}^{B\text{-Module}} &\xrightarrow{\text{extension to } B\text{-Module}} \overbrace{M \otimes_A (N \otimes_B P)}^{B\text{-Module}} \\ \underbrace{(M \otimes_A N) \otimes_B P}_{B\text{-Module}} &\longrightarrow \underbrace{(M \otimes_A N) \otimes_B P}_{B\text{-Module}} \end{aligned}$$

我们说明 $f: M \otimes_A (N \otimes_B P) \rightarrow (M \otimes_A N) \otimes_B P$, $x \otimes (y \otimes z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$ 是一个 A 线性映射. 对固定的 $x \in M$, 令 $t_x: N \rightarrow M \otimes_A N$, $y \mapsto x \otimes y$. 考虑映射 $h: M \times (N \otimes_B P) \rightarrow (M \otimes_A N) \otimes_B P$, $(x, u) \mapsto (t_x \otimes 1_P)(u)$.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{t_x: y \mapsto x \otimes y} & M \otimes_A N \\ & \searrow & \\ M \times (N \otimes_B P) & \xrightarrow{h: (x, u) \mapsto (t_x \otimes 1_P)(u)} & \overbrace{(M \otimes_A N) \otimes_B P}^{(A)B\text{-Module}} \\ \downarrow \text{canonical} & \nearrow \exists! f & \uparrow \\ M \otimes_A \underbrace{(N \otimes_B P)}_{A(B)\text{-Module}} & \xrightarrow{\text{extension}} & \underbrace{M \otimes_A (N \otimes_B P)}_{B\text{-Module}} \end{array}$$

容易验证 h 是 A 双线性的, 从而由张量积的泛性质, 唯一地诱导出我们所需要的 f . 验证一下即:

$$\begin{array}{ccc} (x, y \otimes z) & \xrightarrow{\text{canonical}} & x \otimes (y \otimes z) \\ & \searrow h & \downarrow f \\ & & (x \otimes y) \otimes z \end{array}$$

同理我们可以完全类似地构造出:

$$g: (M \otimes_A N) \otimes_B P \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P), \quad (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$$

从而我们知道 $f \circ g = 1_{M \otimes_A (N \otimes_B P)}$, $g \circ f = 1_{(M \otimes_A N) \otimes_B P}$.

而 f 和 g 都是会具有自然的 B 线性的结构, 作为 A 模同构说明 f 和 g 即单又满, 而他俩都是 B 线性的, 也就是 B 模同态, 从而可以说明是 B 模同构. $\square$

推论 1.3.14 $\rho: A \rightarrow B$ 是环同态, M 是 A 模, N 是 B 模, 从而有典范同构:

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A (B \otimes_B N) \cong M \otimes_A N$$

1.4 张量积函子的右正合性

定义 1.4.1 (复形与正合) 一个 A 模的**复形**指一列 A 模 M_i , A 模同态 f_i , 满足 $f_{i+1} \circ f_i = 0$, 记作

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

复形称作**正合**的, 如果 $\text{Ker}(f_{i+1}) = \text{Im}(f_i)$ 对于所有可能的 i 成立. 一个正合的复形也称作**正合列**.

注记 1.4.2 我们约定 $f: N' \rightarrow N$ 是模同态, 用 f_M 表示

$$f_M := f \otimes 1_M: N' \otimes M \rightarrow N \otimes M$$

定理 1.4.3 (张量积函子的右正合) 我们已知 A 模正合列

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

则对于任意的 A 模 M , 有下面的正合列成立:

$$N' \otimes M \xrightarrow{f_M} N \otimes M \xrightarrow{g_M} N'' \otimes M \longrightarrow 0$$

证明 g_M 的满射我们可以从 g 的满射立刻得到: 对任意的 $\sum n_i'' \otimes m \in N'' \otimes M$, 我们由 g 的满射, 知道存在 $n_i \in N$ 使得 $g(n_i) = n_i''$, 从而有

$$g \otimes 1_M: \sum n_i \otimes m_i \mapsto \sum n_i'' \otimes m_i$$

故 g_M 是满射, 下面只需要验证 $\text{Im}(f_M) = \text{Ker}(g_M)$, 换句话说¹, 即

$$\text{Coker}(f_M) := N \otimes M / \text{Im}(f_M) \cong N'' \otimes M$$

考虑

$$\tilde{g}: (N \otimes M) / \text{Im}(f_M) \rightarrow N'' \otimes M, \quad \sum n_i \otimes m_i + \text{Im}(f_M) \mapsto \sum g(n_i) \otimes m_i$$

¹这里并不是显然的, 需要注意到显然有 $g_M \circ f_M = 0$, 即 $\text{Im}(f_M) \subset \text{Ker}(g_M)$

我们需要说明 $\tilde{g}$ 是良定义的, 即如果

$$\sum n_i \otimes m_i + \text{Im}(f_M) = \sum \bar{n}_j \otimes \bar{m}_j + \text{Im}(f_M)$$

我们有 $\sum n_i \otimes m_i = \sum \bar{n}_j \otimes \bar{m}_j + \sum f(\hat{n}_k) \otimes \hat{m}_k$, 从而

$$\sum g(n_i) \otimes m_i = \sum g(\bar{n}_j) \otimes \bar{m}_j + \sum gf(\hat{n}_k) \otimes \hat{m}_k = \sum g(\bar{n}_j) \otimes \bar{m}_j$$

故无关代表元的选取, 从而是良定义的.

下面我们再考虑 h 如下定义:

$$h: N'' \times M \rightarrow (N \otimes M) / \text{Im}(f_M), \quad (n'', m) \mapsto n \otimes m + \text{Im}(f_M), n \in g^{-1}(n'')$$

我们验证 h 是良定义的, 即对于 $g(n_1) = g(n_2) = n''$, 有 $n_1 - n_2 \in \text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$, 从而存在 $f(n') = n_1 - n_2$, 故

$$n_1 \otimes m = (n_2 + f(n')) \otimes m = n_2 \otimes m + f(n') \otimes m$$

即 $n_1 \otimes m + \text{Im}(f_M) = n_2 \otimes m + \text{Im}(f_M)$, 故与代表元的选取无关, 从而任意知道 h 是一个双线性映射, 从而由张量积的泛性质, 存在 $\tilde{h}: N'' \otimes M \rightarrow (N \otimes M) / \text{Im}(f_M)$.

下面验证 $\tilde{h}$ 是 $\tilde{g}$ 的逆, 容易验证

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \\ \sum n_i \otimes m_i + \text{Im}(f_M) & & \sum g(n_i) \otimes m_i \\ & \xleftarrow{\tilde{h}} & \end{array}$$

从而我们知道 $N \otimes M / \text{Im}(f_M) \cong N'' \otimes M \cong N \otimes M / \text{Ker}(g_M)$, 结合 $\text{Im}(f_M) \subseteq \text{Ker}(g_M)$ 知道 $\text{Im}(f_M) = \text{Ker}(g_M)$, 即正合. $\square$

上面是纯粹元素的办法, 实际上我们应该掌握下面的方法:

引理 1.4.4 (Hom 函子的左正合性) 对于固定的模 M, N , 我们可以定义函子 $\text{Hom}(-, N)$ 与 $\text{Hom}(M, -)$, 分别是模范畴的反变函子与协变函子. 我们可以证明这两个函子都是左正合函子, 即

(a) 下面序列正合

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

当且仅当对于任意的模 N ，下面序列正合

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M', N)$$

(b) 下面序列正合

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

当且仅当对于任意的模 M ，下面序列正合

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N'')$$

证明 我们只证明 (a), (b) 的过程是同理的，我们先说明如何诱导出 $\bar{u}$ 与 $\bar{v}$ ，诱导过程如下图：

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \nwarrow \bar{u} & \swarrow \bar{v} & \downarrow f & & \\ & & g \circ u & g = f \circ v & N & & \end{array}$$

$\Leftarrow$: 我们假设有 Hom 的正合，则由 $\bar{v}$ 的单射，我们下面要证明 v 是满射的，而证明 v 是满射就等价于证明

$$M'' / \operatorname{Im} v = 0$$

所以我们可以取 $N = M'' / \operatorname{Im} v$ ，从而得到满同态 $M'' \rightarrow N$ ，在 $\bar{v}$ 的作用之下，我们注意到

$$(M'' \rightarrow N) \mapsto (M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow N) = 0$$

于是由 $\bar{v}$ 的单射性，我们知道 $M'' \rightarrow N$ 只能是零映射，也就是说 $N = 0$ ，于是我们知道 v 是满射。

进一步，我们知道 $\bar{u} \circ \bar{v} = 0$ ，也就是 $f \circ v \circ u = 0$ 对任意的 $f \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ 成立，我们取 $N = M''$ ， $f = \operatorname{id}$ ，立刻得到 $v \circ u = 0$ ，也就是说 $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ 。

最后，我们令 $N = M / \operatorname{Im} u$ ，有下面交换图：

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' \\ & \searrow & \downarrow p & \swarrow q & \\ & 0 & M / \operatorname{Im} u & & \end{array}$$

考虑自然同态 $p: M \rightarrow M / \operatorname{Im} u$ ，我们知道 $p \in \operatorname{Ker} \bar{u} = \operatorname{Im} \bar{v}$ ，于是存在 $q \in$

$\text{Hom}(M'', N)$ 使得 $p = q \circ v$, 所以有

$$\text{Ker } v \subset \text{Ker } p = \text{Im } u$$

于是 $\text{Im } u = \text{Ker } v$, 所以正合.

$\Rightarrow$: 假设已知模正合. 对于任意的 N , 我们先证明 $\bar{v}$ 是单射: 若存在 ψ 使得 $\psi \circ v = 0$, 由于 v 是满射所以 ψ 是 0, 得证.

下面再说明 $\text{Im } \bar{v} \subset \text{Ker } \bar{u}$, 这只需要说明 $\bar{u} \circ \bar{v} = 0$ 即可, 由于 $v \circ u = 0$, 这是显然的.

最后取 $\varphi \in \text{Hom}(M, N)$, 使得

$$\bar{u}: \left(M \xrightarrow{\varphi} N \right) \mapsto \left(M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{\varphi} N \right) = 0$$

我们有

$$\text{Ker } v = \text{Im } u \subset \text{Ker } \varphi$$

由于 $\text{Ker } v \subset \text{Ker } \varphi$, 所以我们可以定义 $\psi \in \text{Hom}(M', N)$ 如下:

$$\psi(v(m)) = \varphi(m)$$

容易验证是一个良定义的, 从而我们知道

$$\psi \circ v = \varphi$$

也就是 $\text{Ker } \bar{u} \subset \text{Im } \bar{v}$, 于是正合. □

注记 1.4.5 我们实际上可以得到[蛇引理](#): 已知下面的图交换, 两行均为正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则存在正合列:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f' & \xrightarrow{\bar{u}} & \text{Ker } f & \xrightarrow{\bar{v}} & \text{Ker } f'' \\ & & & & & \swarrow d & \\ & & \text{Coker } f' & \xleftarrow{\bar{u}'} & \text{Coker } f & \xrightarrow{\bar{v}'} & \text{Coker } f'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

引理 1.4.6 (Tensor-Hom 伴随) 我们有自然同构

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

证明 考虑 $f: M \times N \rightarrow P$ 是一个双线性映射, 对于每一个 $x \in M$, 可以定义一个线性映射 $y \mapsto f(x, y)$, 所以 f 诱导了一个从 M 到 $\mathrm{Hom}(N, P)$ 的线性映射.

反过来对于任意 $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$, 我们可以定义一个双线性映射 $(x, y) \mapsto \varphi(x)(y)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & M \times N & \xrightarrow{f \mapsto f(x, \cdot)} & M & \\
 \pi \swarrow & \downarrow \forall f & \xleftrightarrow{\quad} & \downarrow \varphi & \\
 M \otimes N & \xrightarrow[\exists! \bar{f}]{} & P & \xleftarrow{\varphi \mapsto \varphi(x)(y)} & \mathrm{Hom}(N, P)
 \end{array}$$

即我们可以将 $M \times N \rightarrow P$ 的双线性映射一一对应到 $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$ 中, 又因为张量积的泛性质, 我们可以将 $M \times N$ 到 P 的双线性映射一一地对应到 $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$ 中, 故我们可以得到一个典范的同构

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

容易验证此典范同构是自然的. □

下面我们来看如何从这种角度来得到定理 1.4.3:

证明 由于 $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 正合, 所以由引理 1.4.4 知

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}(M'', \mathrm{Hom}(N, P)) \rightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)) \rightarrow \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N, P))$$

正合, 但是由于有自然同构 $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M'', \mathrm{Hom}(N, P)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N, P)) \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M'' \otimes N, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M' \otimes N, P)
 \end{array}$$

从而正合列可以传递下来, 即有正合列

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}(M'' \otimes N, P) \rightarrow \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \rightarrow \mathrm{Hom}(M' \otimes N, P)$$

由此再依据引理 1.4.4 可以知道有正合列:

$$M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$$

□

1.5 代数与代数的张量积

定义 1.5.1 (Algebra) 所谓**代数**就是一个环 B 和一个环同态 $f: A \rightarrow B$.

实际上如果有 $f: A \rightarrow B$, 则我们可以定义

$$a \cdot b = f(a)b$$

所以实际上给环 B 配备了一个 A -模结构. 所以代数实际上就是一个既有模结构又有环的乘法结构的代数结构.

注记 1.5.2 任何环都是一个 $\mathbb{Z}$ -代数.

定义 1.5.3 (代数同态) 已知 $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow C$ 是两个环同态, 一个 **A -代数同态** $h: B \rightarrow C$ 是一个环同态且是 A -模同态.

注记 1.5.4 实际上如果 h 是代数同态, 我们可以得到 $h \circ f = g$.

定义 1.5.5 (finite and finite type) 一个环同态 $f: A \rightarrow B$ 是**有限的**, 并且 B 是一个**有限 A -代数**, 如果 B 作为 A -模是有限生成的. 同态 f 是**有限型 (of finite type)**, 并且 B 是一个**有限生成**的 A -代数, 如果存在 B 中的有限集 $\{x_1, \dots, x_n\}$, 使得 B 中每一个元素都可以写成以 $f(A)$ 中元素为系数的 $x_1, \dots, x_n$ 的多项式, 或者等价地说, 存在一个从 $A[t_1, \dots, t_n]$ 到 B 的满代数同态.

注记 1.5.6 一个环 A 是有限生成的, 如果它是有限生成的 $\mathbb{Z}$ 代数.

定义 1.5.7 (代数的张量积) B, C 是两个 A -代数, 有 $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow C$, 我们可以定义他们的张量积作为一个 A -模 $D = B \otimes_A C$. 考虑映射 $B \times C \times B \times C \rightarrow D$ 如下定义

$$(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$$

容易知道是 A -线性的, 所以诱导了一个 A -模同态

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \rightarrow D$$

所以有一个 A -模同态

$$D \otimes D \rightarrow D$$

所以有一个对应的 A -双线性映射

$$\mu: D \times D \rightarrow D, \quad \mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$$

我们定义 D 上的乘法为

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$$

总体上有

$$\left(\sum_i (b_i \otimes c_i) \right) \left(\sum_j (b'_j \otimes c'_j) \right) = \sum_{i,j} (b_i b'_j \otimes c_i c'_j)$$

从而 D 是一个以 $1 \otimes 1$ 为幺元的环，并且 $a \mapsto f(a) \otimes g(a)$ 是 $A \rightarrow D$ 的环同态，故 D 是一个 A -代数。

1.6 投射与内射的刻画

定义 1.6.1 (Projective 与 Injective) 设 $M, N \in \text{Mod}_A$ ，则

- (1) 如果 $\text{Hom}_A(M, -)$ 为正合函子，则称 M 是一个**投射模**。
- (2) 如果 $\text{Hom}_A(-, N)$ 为正合函子，则称 N 是一个**内射模**。

命题 1.6.2 (投射模的等价刻画) 下面叙述关于 A -模 M 是等价的

- (1) M 投射。
- (2) 对于任一满同态 $X \rightarrow Y$ ，其诱导的同态 $\text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Y)$ 也是满同态。
- (3) 对与任一 $X \twoheadrightarrow Y \leftarrow M$ ，可以找到一个 $M \rightarrow X$ 的提升 (lifting)，即使得下面交换图成立

$$\begin{array}{ccc} X & \twoheadrightarrow & Y \\ & \nwarrow & \uparrow \\ & & M \end{array}$$

证明 证明的本质就是正合列是可以拼接的，也就是由于 Hom 是左正合函子，所以我们总是有

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, Z) \rightarrow \text{Hom}(M, X) \rightarrow \text{Hom}(M, Y)$$

而每一个等价刻画总是可以给我们提供正合列：

$$\text{Hom}(M, X) \rightarrow \text{Hom}(M, Y) \rightarrow 0$$

我们两个正合列分别提供了三处正合，合起来就是我们所需要的正合列。 □

命题 1.6.3 (内射模的等价刻画) 下面叙述关于 A -模 N 是等价的

- (1) N 内射.
- (2) 对于任一单同态 $I \hookrightarrow R$, 有 $\text{Hom}_A(R, N) \rightarrow \text{Hom}_A(I, N)$ 是满同态.
- (3) 对于任一 $N \leftarrow I \hookrightarrow R$, 可以找到一个 $R \rightarrow N$ 的解, 即使得下面交换图成立

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ \downarrow & & \swarrow \text{---} \\ N & & \end{array}$$

证明 证明与投射模的证明几乎一样, 略去不表. □

注记 1.6.4 内射性质刻画的是态射的延拓, 即如果 X 是内射对象, 即若 $A \rightarrow B$ 是单射, 则任意的态射 $A \rightarrow X$ 都可以延拓到 B 上使得 $B \rightarrow X$ 是延拓. 如果对泛函分析比较了解, 就会注意到所谓 Hahn-Banach 定理就是再说域 $\mathbb{K}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上赋范线性空间的内射对象.

定义 1.6.5 (Split) 称短正合列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ **分裂**, 若满足以下性质之一:

- (1) $\exists Y \xrightarrow{h} X$ 使得 $h \circ f = \text{id}_X$.
- (2) $\exists Z \xrightarrow{h} Y$ 使得 $g \circ h = \text{id}_Z$.

引理 1.6.6 (分裂诱导的直和分解) 设 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ 分裂, 则有模的直和分解

$$Y \cong X \oplus Z$$

证明 我们只证一种情况, 另外一种情况是类似的, 假设存在 $h: Y \rightarrow X$ 使得 $h \circ f = \text{id}_X$, 我们构造映射:

$$\varphi: Y \rightarrow Y, \quad y \mapsto y - f \circ h(y)$$

我们给出一些同构:

$$X \cong f(X), \quad Z \cong Y / \text{Ker } g$$

所以我们只需要证明

$$Y \cong f(X) \oplus Y / \text{Ker } g$$

我们容易知道上面构造的 φ 是一个模同态, 并且如果 $y \in \text{Ker } \varphi$, 也就是有 $y = f(h(y)) \in \text{Im } f = \text{Ker } g$, 告诉我们 $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } g$.

反过来, 对于 $y \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, 存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 从而 $x = h(f(x)) = h(y)$, 于是有 $\varphi(y) = y - f(h(y)) = f(x) - f(x) = 0$, 于是 $\text{Ker } g \subset \text{Ker } \varphi$.

综上所述我们知道 $\text{Ker } g = \text{Ker } \varphi$, 所以

$$Y / \text{Ker } g = Y / \text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$$

于是我们知道只需要证明

$$Y \cong f(X) \oplus \text{Im } \varphi$$

对于任意的 $y \in Y$, 我们有

$$y = f(h(y)) + y - f(h(y))$$

于是 $Y = f(X) + \text{Im } \varphi$, 设 $y \in f(X) \cap \text{Im } \varphi$, 我们知道

$$\exists y' \in Y \text{ s.t. } y = y' - f(h(y')), \quad \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)$$

同时作用 h , 有

$$x = h(f(x)) = h(y) = h(y') - h(f(h(y'))) = 0$$

于是 $y = f(x) = 0$, 这就告诉我们是直和. □

注记 1.6.7 更好的记忆方法其实是利用幂等映射来理解, 比如说如果存在 $h: Z \rightarrow Y$ 使得 $g \circ h = \text{id}_Z$, 那么我们就可以构造投影映射

$$P = h \circ g: Y \rightarrow Y$$

有

$$P^2 = h \circ g \circ h \circ g = h \circ \text{id}_Z \circ g = h \circ g = P$$

于是这是一个幂等映射, 对于幂等映射有自然的直和分解

$$Y = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$$

注意到

$$\text{Im } P = \text{Im}(h \circ g) \cong \text{Im } g = Z$$

与

$$\text{Ker } P = \text{Ker}(h \circ g) \cong \text{Ker } g \cong \text{Im } f \cong X$$

于是立刻得到.

命题 1.6.8 $M \oplus N$ 是内射模 (投射模) 当且仅当 M, N 都是内射模 (投射模).

证明 本质上利用 Hom 函子保持极限, 所以

$$\text{Hom}(-, M \oplus N) = \text{Hom}(-, M \times N) = \text{Hom}(-, M) \times \text{Hom}(-, N)$$

与

$$\text{Hom}(M \otimes N, -) = \text{Hom}(M \coprod N, -) = \text{Hom}(M, -) \times \text{Hom}(N, -)$$

所以满射是当且仅当的, 所以内射 (投射) 也是当且仅当的. $\square$

命题 1.6.9 内射对象有以下性质:

- (1) 设有正合列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 如果 X 为内射模, 则正合列分裂, 有 $Y \cong X \oplus Z$.
- (2) 设 X 为内射模, 且有正合列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 则 Y 内射 $\iff Z$ 内射.

证明 (1) 由 $X \xhookrightarrow{f} Y$ 单射可知, $\text{Hom}_A(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_A(X, X)$ 是满射, 于是我们知道存在 $h \in \text{Hom}_A(Y, X)$ 使得 $h \circ f = \text{id}_X$.

(2) 由于 X 是内射模, 从而分裂, 有

$$Y \cong X \oplus Z$$

于是在 X 内射的条件下很显然有 Y 内射当且仅当 X, Z 都内射当且仅当 Z 内射. $\square$

命题 1.6.10 投射对象具有以下性质:

- (1) 设有正合列 $0 \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$, 如果 Y 为投射模, 则正合列分裂, 有 $X \cong W \oplus Y$.
- (2) 设 Y 为投射模, 且有正合列 $0 \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$, 则 W 投射 $\iff X$ 投射.

证明 与内射情况完全同理. $\square$

命题 1.6.11 设 A 为环, 则

- (1) 自由 A -模是投射的.
- (2) 设 $M \in \mathbf{Mod}_A$, 则 M 投射 $\iff M$ 是某个自由模的直和项.

证明 (1) 首先我们先证明自由模是投射的, 设 F 是自由模, 则存在一组基 $\{f_i\}_{i \in I}$, 其中 I 是指标集. 我们假设 $g: Y \rightarrow Z$ 是满射, 则要说明任意的 $\varphi: F \rightarrow Z$ 存在 $\tilde{\varphi}: F \rightarrow Y$ 的提升.

要说明这件事情只需要说明生成元去哪了, 对任意的 f_i , 我们选择 $y_i \in g^{-1}(\varphi(f_i))$, 由于 g 是满射, 所以一定存在这样的 y_i . 然后令 $\tilde{\varphi}(f_i) = y_i$ 即可. (这里对自由模可行是因为自由模的基是自由的, 不必担心任意选择的兼容性)

(2) 若 M 是自由模的直和项, 我们立刻知道 M 是投射的. 反之如果 M 是投射的, 我们以 M 的所有元素为基生成一个自由模 F , 得到自然的满射

$$\pi: F \rightarrow M$$

从而得到正合列

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

由于 M 投射, 正合列分裂, 所以

$$F \cong M \oplus \text{Ker } \pi$$

所以是直和项. □

命题 1.6.12 (Baer) 设 $M \in \text{Mod}_A$, 则 M 为内射模 $\iff$ 对于 A 的任一理想 I , 以及任一 A -模同态 $\varphi: I \rightarrow M$, 存在一个扩张 $\psi: A \rightarrow M$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} I & \xhookrightarrow{\quad} & A \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ & M & \end{array}$$

证明 $\implies$: 这个方向是显然的, 因为理想本身就是一个 A -模.

$\impliedby$: 任给一个单射 $N \rightarrow L$ 与同态 $f: N \rightarrow M$, 由 Zorn 引理, 我们知道存在一个极大的延拓 (N', f') , 如若 $N' \neq L$, 则任取 $x \in L \setminus N'$, 我们要尝试把 f' 的定义域扩大到 $N' + Ax$, 定义理想

$$I = \{a \in A \mid ax \in N'\}$$

于是我们可以定义映射

$$\varphi: I \rightarrow M, \quad a \mapsto f'(ax)$$

由条件我们知道 φ 可以延拓到 A 上得到 $\psi: A \rightarrow M$, 此时我们可以定义

$$f'': N' + Ax \rightarrow M, \quad n' + ax \mapsto f'(n') + \psi(a)$$

于是与 Zorn 引理矛盾, 所以可以延拓到 L 上, 即内射. □

推论 1.6.13 利用 Baer 准则可以立刻得到 $\mathbb{Q}$ 是内射 $\mathbb{Z}$ -模.

注记 1.6.14 Baer 准则实际上是把判断内射的过程变成一个解方程的过程.

1.7 平坦的刻画

定义 1.7.1 (平坦 (flat) 模) N 被称为是**平坦模**, 如果对任意的正合列 E , 有 $E \otimes N$ 仍然正合. 具体地, 如果对任意正合列

$$\cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots$$

有正合列

$$\cdots \rightarrow M_1 \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N \rightarrow \cdots$$

则称 N 是平坦模.

命题 1.7.2 (平坦模的等价刻画) 下面的叙述关于 A -模 N 是等价的

- (1) N 是平坦的.
- (2) 如果 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 正合, 则 $0 \rightarrow M_1 \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N \rightarrow 0$ 正合.
- (3) 如果 $f: M' \rightarrow M$ 是单射, 则 $f \otimes 1: M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ 是单射.
- (4) 如果 $f: M' \rightarrow M$ 是单射, 并且 M 与 M' 都是有限生成的, 则 $f \otimes 1: M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ 是单射.

证明

(1) $\Leftrightarrow$ (2): 把长正合列分裂成短的就可以看出.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 由定理 1.4.3 可知.

(3) $\Rightarrow$ (4): 显然.

(4) $\Rightarrow$ (3): 令 $f: M' \rightarrow M$ 是单射, 令

$$u = \sum x'_i \otimes y_i \in \text{Ker}(f \otimes 1)$$

即

$$\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0 \in M \otimes N$$

令 M'_0 是 $\{x'_i\}$ 有限生成的 M' 的子模, 并且令

$$u_0 = \sum x'_i \otimes y_i \in M'_0 \otimes N$$

我们容易知道存在 M 的有限生成子模 M_0 使得 $f(M'_0) \subset M_0$ (实际上只需要令 M_0 为由 $\{f(x_i)\}$ 有限生成的子模即可), 并且有

$$\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0 \in M_0 \otimes N$$

令 $f_0: M'_0 \rightarrow M_0$ 为 f 在 M_0 上的限制, 从而 $(f_0 \otimes 1)(u_0) = 0$. 由条件我们知道 $u_0 = 0$, 即 $u = 0$. $\square$

命题 1.7.3 平坦模的直和项是平坦的.

证明 设 $F \cong P \oplus K$ 是平坦的, 则我们知道对于正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B$$

有单射

$$0 \rightarrow A \otimes F \rightarrow B \otimes F$$

利用分配律拆开得到正合列

$$0 \rightarrow (A \otimes P) \oplus (A \otimes K) \rightarrow (B \otimes P) \oplus (B \otimes K)$$

很显然如果想要上面的序列正合, 必须要求单射, 这就要求了在直和内的项是单射, 于是有

$$A \otimes P \rightarrow B \otimes P$$

是单射, 所以 P 平坦. $\square$

命题 1.7.4 对于一般的交换环而言, 我们有

$$\text{自由} \implies \text{投射} \implies \text{平坦}$$

证明 因为投射当且仅当时自由模的直和项, 所以自然我们有自由推投射. 现在由于自由模是平坦模, 而投射模是自由模的直和项, 所以投射模是平坦模的直和项, 所以投射模平坦. $\square$

命题 1.7.5 (局部环上平坦的性质) 如果 A 是一个局部环, M 是有限生成 A -模, 则

$$M \text{ 自由} \iff M \text{ 投射} \iff M \text{ 平坦}$$

证明 这个定理实际上是在说局部环上有限生成平坦模是自由模. 设 $\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想, $k = A/\mathfrak{m}$ 是其剩余域. 由于 M 是有限生成的, 所以 k -线性空间 $M/\mathfrak{m}M$ 是有限维的, 设 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 是一组基, 由 Nakayama 定理的推论我们知道 $x_1, \dots, x_n$ 构成了

M 的一组极小生成元. 现在我们构造

$$\varphi: A^n \rightarrow M, \quad e_i \mapsto x_i$$

很显然这是一个满射, 我们只需要说明是单射即可, 考虑正合列

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

由于 M 是平坦模, 所以 $\text{Tor}_1^A(M, k) = 0$, 所以我们仍然有正合列

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \otimes k \rightarrow A^n \otimes k \rightarrow M \otimes k \rightarrow 0$$

利用自然同构我们有

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi / \mathfrak{m} \text{Ker } \varphi \rightarrow (A/\mathfrak{m})^n \rightarrow M/\mathfrak{m}M \rightarrow 0$$

正合, 注意右边是同构, 所以左边有

$$\text{Ker } \varphi / \mathfrak{m} \text{Ker } \varphi = 0$$

即

$$\text{Ker } \varphi = \mathfrak{m} \text{Ker } \varphi$$

由 Nakayama 定理我们知道

$$\text{Ker } \varphi = 0$$

即 M 是自由模. □

1.8 局部化的基本定义

定义 1.8.1 (乘法封闭子集) 设 A 是任意环, A 的乘法封闭子集指的是一个子集 $S \subset A$, S 包含 1 且 S 对乘法是封闭的.

定义 1.8.2 (局部化) 设 S 是 A 的乘法封闭子集, 从而我们可以在 $A \times S$ 上面定义一个等价关系:

$$(a, s) \equiv (b, t) \iff \exists u \in S, \text{ s.t. } (at - bs)u = 0$$

将 (a, s) 所在的等价类称为 a/s , 并记所有等价类的集合为 $S^{-1}A$. 并且我们可以定义加法与乘法:

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st, \quad (a/s)(b/t) = ab/st$$

从而就在 $S^{-1}A$ 上引进了环结构, 称为 A 对于 S 的**局部化**.

注记 1.8.3 常见的等价关系没有 u , 但是注意到在从 $\mathbb{Z}$ 构造 $\mathbb{Q}$ 时, 证明等价关系的传递性时需要用到消去律, 但是这只能在整环中成立, 所以我们在这里多乘上一个 u 以得到传递性.

注记 1.8.4 我们有环同态 $f: A \rightarrow S^{-1}A$, 由 $f(x) = x/1$ 定义, 一般来说不是单的, 因为我们可以考虑

$$y/1 = x/1 \iff \exists u \in S, \text{ s.t. } (x - y)u = 0$$

这个同态有以下性质:

1. $s \in S$, 则 $f(s)$ 是 $S^{-1}A$ 中可逆元.
2. $f(a) = 0$ 则 $\exists s \in S$ s.t. $as = 0$.
3. $S^{-1}A$ 中任一元素均有形状 $f(a)f(s)^{-1}$, 其中 $a \in A, s \in S$.

注记 1.8.5 如果 A 是整环并且 $S = A \setminus \{0\}$, 则 $S^{-1}A$ 就是 A 的分式域.

注记 1.8.6 定义的乘法封闭子集并没有要求不含 0, 事实上如果含 0, 则我们容易得到 $S^{-1}A$ 退化成为一个零环, 这个东西没有研究意义, 所以我们下面一般都假设不含 0.

命题 1.8.7 (局部化的泛性质) 设 $g: A \rightarrow B$ 是一个环同态, 使得对于任意的 $s \in S$, $g(s)$ 都是 B 中的可逆元, 则存在唯一的一个环同态 $h: S^{-1}A \rightarrow B$ 使得 $g = h \circ f$.

证明 唯一性: 如果 h 满足条件, 则 $h(a/1) = hf(a) = g(a)$ 对一切 $a \in A$ 成立, 因此如果 $s \in S$, 则

$$h(1/s) = h((s/1)^{-1}) = h(s/1)^{-1} = g(s)^{-1}$$

从而我们知道 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ 唯一确定.

存在性: 令 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$. 下面只需要证明是良定义即可, 设

$$a/s = a'/s' \iff \exists u \in S, \text{ s.t. } (as' - a's)u = 0$$

因此有

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(u) = 0$$

但是由于 $g(u)$ 可逆, 有

$$g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$$

从而良定义. □

引理 1.8.8 设 $g: A \rightarrow B$ 是一个环同态, 具有性质

- (1) $s \in S$, 则 $g(s)$ 是 B 中可逆元.

(2) $g(a) = 0$ 则 $\exists s \in S$ s. t. $as = 0$.

(3) B 中任一元素均有形状 $g(a)g(s)^{-1}$, 其中 $a \in A, s \in S$.

则存在着唯一的一个同构 $h: S^{-1}A \rightarrow B$ 使得 $g = h \circ f$.

证明 只需要验证 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ 是一个同构即可, 按定义容易验证. $\square$

定义 1.8.9 (模的局部化) S 是 A 的乘法封闭子集, 在 $M \times S$ 上定义等价关系:

$$(m, s) \equiv (m', s') \iff \exists t \in S \text{ s. t. } t(sm' - s'm) = 0$$

用 $S^{-1}M$ 表示所有等价类 m/s 构成的集合, 同理可以引进加法与标量乘法, 从而成为 $S^{-1}A$ 模.

注记 1.8.10 如果 $S = A \setminus \mathfrak{p}$, 记 $S^{-1}M$ 为 $M_{\mathfrak{p}}$. 如果 $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$, 记 $S^{-1}M$ 为 M_f .

注记 1.8.11 设 $u: M \rightarrow N$ 是一个 A 模同态, 则诱导出一个 $S^{-1}A$ 模同态:

$$S^{-1}u: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N, \quad m/s \mapsto u(m)/s$$

我们有 $S^{-1}(u \circ v) = S^{-1}(u) \circ S^{-1}(v)$, 也即 S^{-1} 满足函子性, 成为一个函子.

定理 1.8.12 (S^{-1} 函子的正合性) S^{-1} 函子是正合的, 即若

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

在 M 处正合, 有

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

在 $S^{-1}M$ 处正合.

证明 按定义容易验证. $\square$

注记 1.8.13 如果不想采用追图的方式理解, 我们可以采用滤过余极限的方式来理解. 即局部化实际上是滤过余极限. 任给一个乘法封闭子集 S , 我们定义 S 上的预序关系, 对于 $s, t \in S$, 我们定义

$$s \leq t \iff \exists r \in S, \text{ s. t. } t = r \cdot s$$

从而得到一个预序集, 很显然这是一个滤过集, 我们令 $M_s = M$, 当 $s \leq t \iff t = sr$ 时, 我们定义

$$\varphi_{st}: M_s \rightarrow M_t, \quad m \mapsto m \cdot r$$

很显然这是一个滤过系统, 从而我们对其取余极限

$$L = \operatorname{colim}_{x \in S} M_s = \left(\prod_{s \in S} M_s \right) / \sim$$

容易看出来若 $m \in M_s$, 记为 (m, s) 与 (n, t) 是等价的, 则存在 u 使得 $s \mid u, t \mid u$, 有

$$\varphi_{su}(m) = \varphi_{tu}(n) \implies u(sn - mt) = 0$$

这就是局部化的等价关系, 所以很容易得到局部化 $S^{-1}M$ 到滤过余极限 L 的同构, 并且这个同构是自然的. 而在模范畴里面滤过余极限是正合函子, 从而 S^{-1} 自然就是正合的. 并且我们可以额外得到局部化与张量积交换, 因为张量积是左伴随, 左伴随保持余极限, 所以作为滤过余极限的局部化自然就与张量积交换. 于是我们有

$$S^{-1}(M) \cong S^{-1}(R \otimes M) \cong S^{-1}R \otimes M$$

写成极限的形式即

$$\begin{aligned} S^{-1}M &\cong \operatorname{colim}(M \xrightarrow{s} M) \\ &\cong \operatorname{colim}(R \otimes M \xrightarrow{s \otimes 1} R \otimes M) \\ &\cong \operatorname{colim}((R \xrightarrow{s} R) \otimes M) \\ &\cong S^{-1}R \otimes M \end{aligned}$$

特别地, 若 M' 是 M 的子模, 映射 $S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M$ 是单的, 从而可以把 $S^{-1}M'$ 看成是 $S^{-1}M$ 的子模.

命题 1.8.14 (S^{-1} 函子与有限和, 有限交与同余运算交换) 如果 N, P 都是 A 模 M 的子模, 则下面成立:

- (1) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.
- (2) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$.
- (3) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$.

证明 (1)(2) 按定义容易验证, 对于 (3), 我们只需对

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

施加 S^{-1} 函子立刻得到. □

命题 1.8.15 M 是一个 A 模, 则 $S^{-1}A$ 模 $S^{-1}M$ 与 $S^{-1}A \otimes_A M$ 同构, 确切地说存在自然同构

$$f: S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$$

使得

$$(a/s) \otimes m \mapsto am/s$$

证明 由于

$$(a/s, m) \mapsto am/s$$

是双线性的, 所以由张量积的泛性质, 知道存在唯一的态射 f 满足条件, 下面证明 f 是同构.

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A \times M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ \downarrow & \nearrow \text{---} & \\ S^{-1}A \otimes_A M & & \end{array}$$

显然 f 是满的, 所以只需要证明 f 是单的. 设

$$\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes M$$

令 $s = \prod_i s_i$, $t_i = s/s_i$, 则

$$\sum a_i/s_i \otimes m_i = \sum a_i t_i/s \otimes m_i = \sum \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum a_i t_i m_i$$

所以 $S^{-1}A \otimes M$ 中每个元素都可以表示为 $1/s \otimes m$ 的形式. 则若 $f(1/s \otimes m) = 0$, 即

$$m/s = 0 \iff \exists t \in S \text{ s.t. } tm = 0$$

从而有

$$1/s \otimes m = t/st \otimes m = 1/st \otimes tm = 1/st \otimes 0 = 0$$

故单射, 从而同构. 自然性容易验证, 因为都是典范的, 范畴论道理见前一个 remark. $\square$

引理 1.8.16 $S^{-1}A$ 是平坦 A 模.

证明

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow S^{-1} & & \downarrow S^{-1} & & \downarrow S^{-1} \\
 0 & \longrightarrow & S^{-1}M' & \xrightarrow{S^{-1}u} & S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}v} & S^{-1}M'' \longrightarrow 0 \\
 & & f' \uparrow & & f \uparrow & & f'' \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & S^{-1}A \otimes_A M' & \xrightarrow{1 \otimes u} & S^{-1}A \otimes_A M & \xrightarrow{1 \otimes v} & S^{-1}A \otimes_A M'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

由于 f 是同构，只需要说明下面两行是交换的即可，交换图道尽一切：

$$\begin{array}{ccc}
 m/s & \xrightarrow{S^{-1}u} & u(m)/s \\
 \uparrow f & & \uparrow f'' \\
 1/s \otimes m & \xrightarrow{1 \otimes u} & 1/s \otimes u(m)
 \end{array}$$

□

命题 1.8.17 (局部化与张量积交换) 对任意的 A -模 M, N ，存在唯一的 $S^{-1}A$ 模同构

$$f: S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \rightarrow S^{-1}(M \otimes_A N), \quad (m/s) \otimes (n/t) \mapsto (m \otimes n)/st$$

证明 只需要注意到

$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M, \quad S^{-1}N \cong S^{-1}A \otimes_A N$$

所以由张量积的典范同构，我们可以得到

$$\begin{aligned}
 S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \\
 &\cong (S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A) \otimes_A N \\
 &\cong S^{-1}M \otimes_A N \\
 &\cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_A N \\
 &\cong S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \\
 &\cong S^{-1}(M \otimes_A N)
 \end{aligned}$$

□

1.9 局部化与局部性质

定义 1.9.1 (素理想处的局部化) 设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 则其补集 $S = A \setminus \mathfrak{p}$ 是乘法封闭的 (事实上容易证明 $A \setminus \mathfrak{p}$ 是乘法封闭的当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是素理想). 这时, 将 $S^{-1}A$ 记作 $A_{\mathfrak{p}}$, 称为 A 在 $\mathfrak{p}$ 的局部化.

注记 1.9.2 之所以称为局部化, 是因为在这个操作下 $A_{\mathfrak{p}}$ 称为一个局部环, 我们考虑形如 $A_{\mathfrak{p}}$ 的理想 $\mathfrak{m} = S^{-1}\mathfrak{p}$, 注意到如果 $b/t \notin \mathfrak{m}$, 有 $b \notin \mathfrak{p}$, 从而 $b \in S$, 也就是 b/t 是可逆的. 从而如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想且 $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{a}$ 含有可逆元从而是整个环, 也就是说 $\mathfrak{m}$ 是唯一的极大理想.

注记 1.9.3 设 $f \in A$, $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$, 此时将 $S^{-1}A$ 记为 A_f .

定义 1.9.4 (局部性质) 环 A 或者 A 模 M 的性质 P 称为**局部性质**, 如果 A (或者 M) 具有性质 $P \iff$ 对于 A 的每一个素理想 $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ (或者 $M_{\mathfrak{p}}$) 具有性质 P .

命题 1.9.5 (零模是局部性质) M 是 A 模, TFAE:

- (1) $M = 0$.
- (2) $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, M_{\mathfrak{p}} = 0$.
- (3) 对 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$, $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

证明 (1) 推 (2) 推 (3) 是显然的, 下面证 (3) 推 (1).

假设 $M \neq 0$, 则存在一个非零元 x , 设 $\mathfrak{a} = \text{ann}(x)$, 其中 $\mathfrak{a} \neq (1)$, 则存在一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 包含 $\mathfrak{a}$, 考察元素

$$x/1 \in M_{\mathfrak{m}}$$

我们知道 $M_{\mathfrak{m}} = 0$, 从而 $x/1 = 0$, 从而 x 被 $A - \mathfrak{m}$ 中的元素零化, 与 $\text{ann}(x) \subset \mathfrak{m}$ 矛盾. $\square$

命题 1.9.6 (单射是局部性质) $\varphi: M \rightarrow N$ 是一个 A 模同态, TFAE:

- (1) φ 是单的.
- (2) $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \varphi_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ 是单的.
- (3) 对 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$, $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ 是单的.

证明 (1) 推 (2): 由于 $0 \rightarrow M \rightarrow N$ 正合, 所以 $0 \rightarrow M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ 正合. 所以单.

(2) 推 (3) 显然.

只需要证明 (3) 推 (1). 令 $M' = \text{Ker}(\varphi)$, 则序列

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow N$$

是正合的, 从而我们知道

$$0 \rightarrow M'_m \rightarrow M_m \rightarrow N_m$$

是正合的, 从而我们知道 $M'_m = \text{Ker}(\varphi_m)$, 但是 φ_m 是单的, 从而我们知道 $M'_m = 0$, 由零模是局部性质我们知道 $M = 0$, 从而 φ 是单的. $\square$

注记 1.9.7 满射同样是局部性质, 利用正合列同样证明.

引理 1.9.8 (平坦性在基变换下是稳定的) $f: A \rightarrow B$ 是环同态, M 是平坦 A 模, 则 $M_B = B \otimes_A M$ 是平坦 B 模.

证明 考虑 B 模正合列

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

注意到

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow N' \otimes_B (B \otimes_A M) & \rightarrow & N \otimes_B (B \otimes_A M) & \rightarrow & N'' \otimes_B (B \otimes_A M) & \rightarrow & 0 \\ \text{canonical} \cong & & \text{canonical} \cong & & \text{canonical} \cong & & \\ 0 \rightarrow (N' \otimes_B B) \otimes_A M & \rightarrow & (N \otimes_B B) \otimes_A M & \rightarrow & (N'' \otimes_B B) \otimes_A M & \rightarrow & 0 \\ \text{canonical} \cong & & \text{canonical} \cong & & \text{canonical} \cong & & \\ 0 \longrightarrow N' \otimes_A M & \longrightarrow & N \otimes_A M & \longrightarrow & N'' \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \otimes_A M & & \otimes_A M & & \otimes_A M & & \\ 0 \longrightarrow N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \square$$

命题 1.9.9 (平坦性是局部性质) M 是 A 模, TFAE:

- (1) M 是平坦 A 模.
- (2) $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, $M_{\mathfrak{p}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 模.
- (3) 对 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$, $M_{\mathfrak{m}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{m}}$ 模.

证明 (1) 推 (2): 由于有环同态 $f: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, 从而我们知道 $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 模,

故由 1.8.15 知道

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N' \otimes_{A_p} (A_p \otimes_A M) & \longrightarrow & N \otimes_{A_p} (A_p \otimes_A M) & \longrightarrow & N'' \otimes_{A_p} (A_p \otimes_A M) \longrightarrow 0 \\
 & & \text{canonical} \cong & & \text{canonical} \cong & & \text{canonical} \cong \\
 0 & \longrightarrow & N' \otimes_{A_p} M_p & \longrightarrow & N \otimes_{A_p} M_p & \longrightarrow & N'' \otimes_{A_p} M_p \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(2) 推 (3) 显然.

(3) 推 (1): 设 $N \rightarrow P$ 是同态, $\mathfrak{m}$ 是任意的极大理想, 则我们知道

$$\begin{aligned}
 N \hookrightarrow P &\Rightarrow N_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow P_{\mathfrak{m}} \\
 &\Rightarrow N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow P_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \\
 &\Rightarrow (N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow (P \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}, \text{ by 1.8.17} \\
 &\Rightarrow N \otimes_A M \hookrightarrow P \otimes_A M
 \end{aligned}$$

从而我们知道 M 是平坦的. □

1.10 局部化环的扩张和局限理想

还是考虑 A 的乘法封闭子集 S , 由自然的同态

$$f: A \rightarrow S^{-1}A, \quad x \mapsto x/1$$

令 C 为 A 的所有局限理想的集合, E 为 $S^{-1}A$ 的所有扩充理想的集合. 我们知道如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想, 则 $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$.

命题 1.10.1 (局部化的理想对应) (1) $S^{-1}A$ 中的每一个理想都是扩充理想.

(2) $\mathfrak{a}$ 是 A 中的理想, 则 $\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$. 从而 $\mathfrak{a}^e = (1)$ 当且仅当 $\mathfrak{a}$ 与 S 有交.

(3) $\mathfrak{a} \in C$ 当且仅当 S 中的元素不是 $A/\mathfrak{a}$ 中的零因子.

(4) $S^{-1}A$ 的素理想与 A 中与 S 不交的素理想一一对应 ($\mathfrak{p} \longleftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$).

(5) 函子 S^{-1} 与有限和, 乘积, 交集与根运算交换.

证明 (1) 设 $\mathfrak{b}$ 为 $S^{-1}A$ 的理想, 令 $x/s \in \mathfrak{b}$, 则我们知道 $x/1 \in \mathfrak{b}$, 从而知道 $x \in \mathfrak{b}^c$, 从而我们知道 $x/s \in \mathfrak{b}^{ce}$, 但是由于 $\mathfrak{b}^{ce} \subset \mathfrak{b}$, 所以我们知道 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$.

(2) $x \in \mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c \iff x/1 = a/s$ 对于某些 $a \in \mathfrak{a}, s \in S$ 成立 $\iff (xs - a)t = 0$ 对于某些 $t \in S$ 成立 $\iff xst \in \mathfrak{a} \iff x \in \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$. 并且我们知道 $\mathfrak{a}^e = (1) \iff \exists a \in \mathfrak{a}$ 使得 $a/s = 1/1 \iff (a - s)t = 0 \iff \mathfrak{a}^e \ni at = st \in S$.

(3) $\mathfrak{a} \in C \iff \mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a} \iff$ 存在 $s \in S$ 使得 $sx \in \mathfrak{a}$, 可以推出 $x \in \mathfrak{a} \iff S$ 中的元素都不是 $A/\mathfrak{a}$ 的零因子.

有必要解释一下第二个等价号, $\mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a}$ 当且仅当 $\mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c = S^{-1}\mathfrak{a} \cap A \subset \mathfrak{a}$, 这告诉我们如果 $x/s = y \in A$, 则 $y \in \mathfrak{a}$, 也就是说如果 $x = sy \in \mathfrak{a}$, 则 $y \in \mathfrak{a}$.

(4) 若 $\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想, 则 $\mathfrak{q}^c$ 是 A 的与 S 无交的素理想. 相反地, 若 $\mathfrak{p}$ 是 A 中的素理想, 则 $A/\mathfrak{p}$ 是整环, 设 $\bar{S}$ 为 S 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像, 我们知道

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$$

所以如果 S 与 $\mathfrak{p}$ 相交, 则 $\bar{S}$ 中有 0, 也就是说 $\bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}) = 0$, 也就是说 $S^{-1}\mathfrak{p} = (1)$. 反之如果 $\mathfrak{p}$ 与 S 无交, 则由于 $A/\mathfrak{p}$ 是整环, 其分式化也是整环, 从而 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想.

(5) 按定义验证即可. □

注记 1.10.2 由定理我们可见:

- 定理的第一条实际上再说若 $S^{-1}A$ 是 A 的局部化, 则 $S^{-1}A$ 的理想 I 满足 $S^{-1}(I \cap A) = I$, 也即局部化之后的理想先局限再扩张就等于自身.
- 第二条在说 A 中的理想若先扩张再局限回来往往会变大, 多出来的东西是那些只要乘上某个 $s \in S$ 之后就在 $\mathfrak{a}$ 中的元素.
- 第四条给出了 $S^{-1}A$ 中素理想与 A 中与 S 无交的素理想的一一对应, 并且是在包含关系下的一一对应, 这也暗示了局部化后 Krull 维数不会上升.

注记 1.10.3 我们需要给出一些说明, 首先给出一些基本的内容:

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}, \quad \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$$

在这个基础上我们来说明 (4) 中确实是一一对应, 首先对于任意的素理想 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S^{-1}A)$, 我们知道 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ce}$, 于是一个方向唯一性得到了验证, 下面验证另一个方向.

对于 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, 且 $\mathfrak{p}$ 与 S 无交, 我们要证明 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$, 我们已知 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^{ec}$, 所以只需要证明 $\mathfrak{p}^{ec} \subset \mathfrak{p}$, 由于

$$\mathfrak{p}^{ec} = S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$$

设 $y = x/s \in S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$, 我们知道 $\exists t \in S$ 使得 $(x - sy)t = 0$, 也就是 $(st)y = tx \in \mathfrak{p}$, 由于 $st \in S$, 不在 $\mathfrak{p}$ 中, 所以 $y \in \mathfrak{p}$, 所以有 $\mathfrak{p}^{ec} \subset \mathfrak{p}$, 故有 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.

所以素理想之间确实是一一对应的.

注记 1.10.4 事实上, 我们不仅有素理想的一一对应, 还有 A 中与 S 无交的饱和理想与 $S^{-1}A$ 中真理想的一一对应.

我们先给饱和理想一个定义: 一个 A 的理想 I 是 **S -饱和的**, 如果对于任意的 $a \in A$ 和 $s \in S$, 如果有 $sa \in I$, 则 $a \in I$. 或者等价的, I 饱和当且仅当 $I = \{a \in A: \exists s \in S, \text{s.t. } as \in I\}$.

则我们由上面命题 (3) 的证明过程可以知道, 如果一个理想 $\mathfrak{a}$ 是饱和的, 则告诉我们对于任意的

$$y \in \mathfrak{a}^{ec} = S^{-1}\mathfrak{a} \cap A$$

存在 $x \in \mathfrak{a}, s \in S$ 使得 $y/1 = x/s$, 也就是 $sty = tx \in \mathfrak{a}$, 由饱和性我们知道 $y \in \mathfrak{a}$, 也就是 $\mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a}$, 进而有 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$, 所以 $\mathfrak{a}$ 就是局限理想, 反过来也是正确的.

所以所有 S -饱和的理想与 A 中的局限理想一一对应, 而所有局限理想又是和 $S^{-1}A$ 中的理想一一对应的, 故结论得证.

注记 1.10.5 我们知道非幂零元一定不被某个素理想包含, 采用分式环的语言可以让证明非常简洁: 考虑集合 $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$ 不包含 0, 则 $S^{-1}A = A_f$ 不是零环, 从而存在极大理想, 而这个极大理想在 A 中的局限理想是素理想 $\mathfrak{p}$, 由上面命题我们知道 $\mathfrak{p}$ 与 S 不相交, 因此 $f \notin \mathfrak{p}$.

注记 1.10.6 我们用范畴论的语言来重新总结一下这个命题. 首先 (1) 是在说对于局部化而言右伴随 c 是左伴随 e 的一个截面, 或者说余单位 $\varepsilon: ce \rightarrow \text{id}_Y$ 在局部化中是同构, 也就是说扩张 e 是满射, 局限 c 是单射, 也就是说 $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}$. 这里稍微解释一下, 由于我们知道

$$\mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c$$

由局限 c 是单射知道

$$\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}$$

这就说明了 (1). 而 (2) 实际上是一种饱和化 (saturation) 的行为, 我们本质上是定义了一种复合函子

$$T = c \circ e: I(A) \rightarrow I(A), \quad \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}^{ec}$$

这个函子具有幂等性, 因为在 (1) 中我们已经证明

$$ec = \text{id}$$

于是

$$T^2 = cece = c(ec)e = ce = T$$

我们可以看出 $\mathfrak{a}^{ec}$ 就是 $\mathfrak{a}$ 的饱和化, 它包含了所有“在局部化之后看起来属于 $\mathfrak{a}$ ”的元素. 若 x 在局部化之后看起来属于 $\mathfrak{a}$, 这就说明存在 $s \in S$ 使得 $sx \in \mathfrak{a}$, 也就是

说 $x = x/1 = sx/s \in S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^e$, 所以 $x \in \mathfrak{a}^{ec}$. 反过来如果 $x \in \mathfrak{a}^{ec}$, 这也说明存在 $s, t \in S, a \in \mathfrak{a}$, 使得 $t(sx - a) = 0$, 即

$$stx \in \mathfrak{a}$$

所以我们发现

$$\mathfrak{a}^{ec} = \{x \in A : \exists s \in S \text{ s.t. } sx \in \mathfrak{a}\} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$$

这也对应了我们在上面的 remark 中提到的饱和理想的概念, 你会发现所谓的 S -饱和就是在 T 下保持不变的理想. 现在也可以理解为什么我们称 T 为饱和化了, 因为 $T^2 = T$, 所以任何理想在 T 下都会成为饱和理想. 对于 (3), 实际上我们会发现所谓局限理想 C 实际上就是饱和理想, 因为如果 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$, 则有 $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{a}$, 即饱和, 反之亦然. 所谓 (3) 提供了一个局部化中饱和理想的判别法. 把 (3) 翻译一下即若 $s \in S, y \in A$, 则

$$sy \in \mathfrak{a} \implies y \in \mathfrak{a}$$

这正是在说饱和理想.

推论 1.10.7 (1) $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, 有 $\text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ 为同胚.

(2) $\forall f \in A$, $\text{Spec}(A_f) \rightarrow D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$ 是同胚.

注记 1.10.8 $\text{Spec}(A/\mathfrak{p}) \cong V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A) : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}$, $A_{\mathfrak{p}}$ 有极大理想 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, 令 $S = A \setminus \mathfrak{p}$, $\bar{S}$ 为 S 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像, 其实就是 $A/\mathfrak{p} - \{0\}$. 我们有

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}) = \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$$

推论 1.10.9 $\mathfrak{N}$ 是 A 的小根, 则 $S^{-1}\mathfrak{N}$ 是 $S^{-1}A$ 的小根.

证明 由于 A 中与 S 不交的素理想与 $S^{-1}A$ 中的素理想一一对应, 则我们知道

$$\mathfrak{N}_{S^{-1}A} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S^{-1}A)} \mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} S^{-1}\mathfrak{p}$$

注意到如果 $\mathfrak{p} \cap S$ 不空, 则

$$S^{-1}\mathfrak{p} = (1)$$

所以我们有

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} S^{-1}\mathfrak{p} &= \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset} S^{-1}\mathfrak{p} \right) \cap \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), \mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset} (1) \right) \\
 &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} S^{-1}\mathfrak{p} \\
 &= S^{-1} \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \mathfrak{p} \right) \\
 &= S^{-1}\mathfrak{N}
 \end{aligned}$$

□

推论 1.10.10 如果 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想, 则局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 中的素理想与 A 中包含在 $\mathfrak{p}$ 中的素理想一一对应.

证明 令 $S = A \setminus \mathfrak{p}$, 知道 $A_{\mathfrak{p}}$ 中素理想与 A 中与 S 无交的素理想一一对应. □

注记 1.10.11 从 A 到 $A_{\mathfrak{p}}$ 的过程消灭了包含于 $\mathfrak{p}$ 之外的所有素理想, 而从 A 到 $A/\mathfrak{p}$ 的过程消灭了包含 $\mathfrak{p}$ 之外的所有素理想.

现在假设 $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ 是一对素理想, 我们先对 $\mathfrak{p}$ 局部化在对 $\mathfrak{q}$ 取同余类 (这两个次序是可以交换的), 这样我们就可以把注意力只集中在 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{q}$ 之间的素理想上来, 特别地, 如果 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, 则得到一个域, 称为其在理想 $\mathfrak{p}$ 处的 residue 域. 他可以作为整环 $A/\mathfrak{p}$ 的分式域或者 $A_{\mathfrak{p}}$ 的剩余类域得到.

命题 1.10.12 M 是有限生成 A 模, S 是一个乘法封闭子集, 则

$$S^{-1}(\operatorname{ann}(M)) = \operatorname{ann}(S^{-1}M)$$

证明 首先我们证明如果对 M, N 成立, 则对 $M + N$ 成立.

$$\begin{aligned}
 S^{-1}(\operatorname{ann}(M + N)) &= S^{-1}(\operatorname{ann}(M) \cap \operatorname{ann}(N)) \\
 &= S^{-1}(\operatorname{ann}(M)) \cap S^{-1}(\operatorname{ann}(N)) \\
 &= \operatorname{ann}(S^{-1}M) \cap \operatorname{ann}(S^{-1}N) \\
 &= \operatorname{ann}(S^{-1}M + S^{-1}N) = \operatorname{ann}(S^{-1}(M + N))
 \end{aligned}$$

从而我们只需要对一个元素生成的模 M 证明即可. 注意到单元生成模满足

$$M \cong A/\mathfrak{a}$$

其中 $\mathfrak{a} = \text{ann}(M)$, 而我们知道

$$S^{-1}M \cong S^{-1}(A/\mathfrak{a}) \cong S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a}$$

所以我们知道

$$\text{ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}(\text{ann}(M))$$

□

推论 1.10.13 N, P 为 M 的子模, P 是有限生成的, 则 $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$.

证明 注意到 $(N : P) = \text{ann}(N + P/N)$, 有

$$S^{-1}(N : P) = S^{-1}(\text{ann}(N + P/N)) = \text{ann}(S^{-1}(N + P)/S^{-1}N) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$$

□

命题 1.10.14 设 $A \rightarrow B$ 是环同态, $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想, 那么 $\mathfrak{p}$ 是 B 中某个素理想的局限当且仅当 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.

证明 若 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$, 则我们知道 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$. 这是因为

$$\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$$

代入 $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ 立刻得到.

另一方面, 如果 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$, 令 S 为 $A - \mathfrak{p}$ 在 B 中的像, 我们知道 $\mathfrak{p}^e$ 与 S 无交², 从而我们知道其在 $S^{-1}B$ 中的扩张理想是一个真理想, 因此包含在某个极大理想 $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ 中, 如果 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$ 在 B 中的局限, 则我们知道 $\mathfrak{q}$ 是素理想, 并且 $\mathfrak{p}^e \subset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. 从而 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & S^{-1}B \\ & & \mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathfrak{p}^e & \longrightarrow & S^{-1}\mathfrak{p}^e \subset \mathfrak{m} \\ & & \mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c & \longleftarrow & \mathfrak{q} = \mathfrak{m}^c & \nwarrow & \end{array}$$

□

注记 1.10.15 这就是我们前面所说局限理想就是饱和理想. 其集合视角就是说如果 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$, 则 $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的纤维不是空集.

注记 1.10.16 代数几何的视角下这个命题是在描述 $\text{Spec } f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 的像集.

²因为 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$, 也就是说 $f^{-1}(Bf(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$, 从而 $f(A - \mathfrak{p}) \cap Bf(\mathfrak{p}) = \emptyset$.

注记 1.10.17 第二部分的证明还可以使用**整环注入定理**³: 一个整环单射进入环 R , 则一定存在 R 的某个素理想的局限是 (0) . 使用这个定理我们只需要考虑整环的单射:

$$A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{p}B$$

于是存在 $\bar{q} \in \text{Spec}(B/\mathfrak{p}B)$ 使得

$$\bar{q}^c = (0)$$

即

$$\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$$

1.11 准素分解的定义与性质

准素分解, 又称 Lasker-Noether 准素分解或 Lasker-Noether 定理, 是 20 世纪初的代数学家对理想唯一分解的推广尝试, 指的是 Noether 环的理想都能写成有限多个准素理想的交, 且有较弱的唯一性.

在现代交换代数中被废弃, 完全由结合素理想的理论所取代

定义 1.11.1 (准素理想) 环 A 中的理想 $\mathfrak{q}$ 是准素的, 如果 $\mathfrak{q} \neq A$, 并且对于 $xy \in \mathfrak{q}$, 有 $x \in \mathfrak{q}$ 或者存在 $n \geq 1$ 使得 $y^n \in \mathfrak{q}$.

注记 1.11.2 换言之, $\mathfrak{q}$ 准素, 当且仅当 $A/\mathfrak{q} \neq 0$ 并且 $A/\mathfrak{q}$ 的零因子都是幂零的.

注记 1.11.3 显然, 素理想都是准素的. 并且注意到 $f: A \rightarrow B$, 如果 $\mathfrak{q}$ 是 B 的准素理想, 我们有 $A/\mathfrak{q}^c$ 同构于 $B/\mathfrak{q}$ 的某个子环, 从而零因子都幂零, 也就是说**准素理想的局限都是准素的**.

命题 1.11.4 $\mathfrak{q}$ 是环 A 的准素理想, 则 $r(\mathfrak{q})$ 是包含 $\mathfrak{q}$ 的最小素理想.

注记 1.11.5 如果 $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$, 则 $\mathfrak{q}$ 称为 $\mathfrak{p}$ -准素.

注记 1.11.6 发现如果 $\mathfrak{q}$ 是准素的, $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$, 则若 $xy \in \mathfrak{q}$, 则 $x \in \mathfrak{q}$ 或者 $y \in \mathfrak{p}$.

注记 1.11.7 素理想的幂不一定是准素理想, 准素理想也不一定是素理想的幂.

- 令 $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$, 则 $\mathfrak{p} = (\bar{x}, \bar{z})$ 是素理想 (因为 $A/\mathfrak{p} \cong k[y]$ 是整环), 我们有 $\overline{xy} = \bar{z}^2 \in \mathfrak{p}^2$, 但是 $\bar{x} \notin \mathfrak{p}^2, \bar{y} \notin r(\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{p}$. 因此我们知道 $\mathfrak{p}^2$ 不是准素的.
- 令 $A = k[x, y]$, $\mathfrak{q} = (x, y^2)$, 则我们知道 $A/\mathfrak{q} \cong k[y]/(y^2)$, 在 $A/\mathfrak{q}$ 中, 零因子都是 y 的倍元, 因此幂零, 所以 $\mathfrak{q}$ 准素. 其根为 $\mathfrak{p} = (x, y)$, 但是 $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. 因此

³证明和上面同理.

不是素理想的幂.

命题 1.11.8 $r(\mathfrak{a})$ 是极大理想, 则 $\mathfrak{a}$ 准素. 特别地, 极大理想的幂是准素的.

证明 令 $\mathfrak{m} = r(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{m}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 中的像是 $A/\mathfrak{a}$ 的幂零元根. 从而我们知道 $A/\mathfrak{a}$ 只有一个素理想 (这是因为 $A/\mathfrak{a}$ 的素理想之交为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$, 由于包含 $\mathfrak{a}$ 的理想与 $A/\mathfrak{a}$ 中理想一一对应, 注意到 $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ 为极大理想, 从而知道只有唯一素理想).

只有唯一素理想, 即幂零元根就是极大理想, 从而我们知道 $A/\mathfrak{a}$ 中的每一个元素要么是幂零元, 要么是可逆元 (这里是因为每一个不可逆元都包含在某个极大理想中, 但是这里只有一个极大理想, 所以所有不可逆元都在极大理想中), 从而每一个零因子都是幂零的, 故准素. $\square$

注记 1.11.9 根理想 $r(\mathfrak{a})$ 在商环 $A/\mathfrak{a}$ 中的像为其幂零元根.

引理 1.11.10 (准素理想的交也是准素的) 若 $\mathfrak{q}_i$ 都是 $\mathfrak{p}$ 准素的, 则 $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的.

证明 注意到

$$r(\mathfrak{q}) = r\left(\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i\right) = \bigcap_{i=1}^n r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$$

再假设 $xy \in \mathfrak{q}$, 其中 $y \notin \mathfrak{q}$, 则我们知道存在一个 $\mathfrak{q}_j$, 使得 $xy \in \mathfrak{q}_j$, 并且 $y \notin \mathfrak{q}_j$, 故 $x \in \mathfrak{p}$. 所以 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的. $\square$

引理 1.11.11 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的, $x \in A$, 则

- (1) $x \in \mathfrak{q}$, 则 $(\mathfrak{q} : x) = (1)$.
- (2) $x \notin \mathfrak{q}$, 则 $(\mathfrak{q} : x)$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的, 故 $r(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{p}$.
- (3) $x \notin \mathfrak{p}$, 则 $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.

证明 (1)(3) 由定义立刻得到.

(2) 如果 $y \in (\mathfrak{q} : x)$, 则 $xy \in \mathfrak{q}$, 但是 $x \notin \mathfrak{q}$, 所以 $y \in \mathfrak{p}$, 所以有 $\mathfrak{q} \subset (\mathfrak{q} : x) \subset \mathfrak{p}$, 取根有 $r(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{p}$. 令 $yz \in (\mathfrak{q} : x)$, 有 $xyz \in \mathfrak{q}$, 若 $y \notin \mathfrak{p}$, 则有 $xz \in \mathfrak{q}$, 也就是 $z \in (\mathfrak{q} : x)$, 即 $(\mathfrak{q} : x)$ 准素. $\square$

定义 1.11.12 (准素分解) A 中的理想 $\mathfrak{a}$ 是**可分解的**, 如果存在**准素分解**:

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$$

其中 $\mathfrak{q}_i$ 都是准素理想. 一个准素分解成为**极小的 (约化的)**, 如果 $r(\mathfrak{q}_i)$ 互不相同, 并且 $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ 对于任意的 i 成立.

注记 1.11.13 一般来说, 准素分解不一定存在.

1.12 准素分解的唯一性定理

引理 1.12.1 $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ 是理想, $\mathfrak{p}$ 是素理想, 若 $\mathfrak{p} \supset \bigcap \mathfrak{a}_i$, 则存在 i 使得 $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$. 特别地, 若 $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_i$, 则存在 i 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$.

定理 1.12.2 (第一唯一性定理) $\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ 是一个极小准素分解, 令 $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$. 则 $\mathfrak{p}_i$ 恰好是 $A = \{r(\mathfrak{a} : x) : x \in A\}$ 中出现的所有素理想. 从而与 $\mathfrak{a}$ 如何分解无关.

证明 对于任意的 $x \in A$, 我们知道

$$(\mathfrak{a} : x) = (\bigcap \mathfrak{q}_i : x) = \bigcap (\mathfrak{q}_i : x)$$

因此

$$r(\mathfrak{a} : x) = \bigcap r(\mathfrak{q}_i : x) = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_i} \mathfrak{p}_i$$

下面假设 $r(\mathfrak{a} : x)$ 是素理想, 我们知道 $r(\mathfrak{a} : x) = \mathfrak{p}_j$ 对于某个 j 成立 (由引理). 因此每一个素理想都在 $\{\mathfrak{p}_j\}$ 中.

反过来, 由于分解是极小的, 所以对于每一个 i , 存在 $x_i \notin \mathfrak{q}_i$, $x_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$. 从而我们有

$$r(\mathfrak{a} : x_i) = r\left(\bigcap \mathfrak{q}_j : x_i\right) = \bigcap r(\mathfrak{q}_j : x_i) = r(\mathfrak{q}_i : x_i) = \mathfrak{p}_i \quad \square$$

注记 1.12.3 将 $A/\mathfrak{a}$ 看成是 A 模, 定理告诉我们 $\mathfrak{p}_i$ 恰好是作为 $A/\mathfrak{a}$ 的元素的零化子的根理想而出现的素理想.

注记 1.12.4 定理中的素理想 $\mathfrak{p}_i$ 称为属于 $\mathfrak{a}$ 的, 或者与 $\mathfrak{a}$ 相伴. 理想 $\mathfrak{a}$ 是准素的当且仅当它只有一个相伴的素理想: 一方面, 如果 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 准素的, 则 $r(\mathfrak{a} : x)$ 要么是 (1) 要么是 $\mathfrak{p}$, 从而只有一个相伴的素理想. 另一方面, 如果只有一个相伴的素理想, 也就是说 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$, 这是由极小性保证的.

注记 1.12.5 集合 $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ 的极小元素叫做属于 $\mathfrak{a}$ 的极小的或孤立的素理想, 其余的叫做嵌入素理想.

命题 1.12.6 设 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解理想, 那么任何素理想 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ 都包含一个属于 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想, 因此 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想恰好是包含 $\mathfrak{a}$ 的所有素理想集合中的极小元.

证明 如果 $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{q}_i$, 则 $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{p}) \supset \bigcap r(\mathfrak{q}_i) = \bigcap \mathfrak{p}_i$. 因此我们知道存在某个 i 使得 $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$. □

命题 1.12.7 $\mathfrak{a}$ 是可分解理想, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ 是一个极小准素分解, $r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$, 则

$$\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \{x \in A : (\mathfrak{a} : x) \neq \mathfrak{a}\}$$

特别地, 如果零理想是可分解的, A 的零因子的集合 D 是属于 0 的素理想的并.

证明 如果 $\mathfrak{a}$ 是可分解的, 那么 0 在 $A/\mathfrak{a}$ 中是可分解的: 即容易证明 $\mathfrak{q}_i$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 中的像仍然准素, 所以 $\bar{0} = \bigcap \bar{\mathfrak{q}}_i$.

因此只需要证明对零理想成立, 我们容易知道

$$D = \bigcup_{x \neq 0} r(0 : x)$$

我们还知道对某个 i 有下面式子成立 ($0 = \bigcap \mathfrak{q}_i$ 分解极小):

$$r(0 : x) = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_i} \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_i$$

所以我们知道 $D \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, 我们知道每一个 $\mathfrak{p}_i$ 都形如 $r(0 : x)$, 所以反方向的包含关系也成立.

此时我们知道结论对零理想成立, 我们推回去: 已知 0 在 $A/\mathfrak{a}$ 中准素, 有

$$\bigcup_{i=1}^n \bar{\mathfrak{p}}_i = \{\bar{x} \in A/\mathfrak{a} : (0 : \bar{x}) \neq 0\}$$

对上面的式子取原像, 容易知道

$$\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = LHS = RHS = \{x \in A : (\mathfrak{a} : x) \neq \mathfrak{a}\}$$

□

注记 1.12.8 当零理想可分解的时候, 我们知道:

- 零因子的集合等于所有属于 0 的素理想的并.
- 幂零元的集合等于所有属于 0 的极小素理想的交.

第二条是因为 0 的极小素理想恰好就是所有包含 0 的素理想中的极小元 (命题 1.12.6), 而任意素理想都包含 0 , 所以成立.

下面研究准素理想在局部化下的变化.

命题 1.12.9 令 S 是乘法封闭的, 令 $\mathfrak{q}$ 是一个 $\mathfrak{p}$ 准素理想.

(1) 若 $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, 则 $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$.

(2) 若 $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, 则 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 准素的, 并且其在 A 中的局限理想为 $\mathfrak{q}$.

注记 1.12.10 所以我们注意到命题 1.10.1 中的 A 中与 S 不交的素理想与 $S^{-1}A$ 的素理想的一一对应将准素理想对应到准素理想.

证明 (1) 若 $s \in S \cap \mathfrak{p}$, 则知道 $s^n \in S \cap \mathfrak{q}$ 对于某个 $n > 0$, 从而 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 包含 $s^n/1$, 在 $S^{-1}A$ 中可逆.

(2) 若 $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, 那么 $s \in S$ 与 $as \in \mathfrak{q}$ 推出 $a \in \mathfrak{q}$. 从而设 $x \in A$ 满足 $x/1 \in S^{-1}\mathfrak{q}$, 则存在 $t \in S$ 使得 $tx \in \mathfrak{q}$, 也就是 $x \in \mathfrak{q}$. 所以知道 $\mathfrak{q}^{ec} = \mathfrak{q}$.

并且我们有

$$r(S^{-1}\mathfrak{q}) = S^{-1}r(\mathfrak{q}) = S^{-1}\mathfrak{p}$$

并且容易推出是准素理想. 最后结合准素理想的局限仍然是准素理想, 我们证明了结论, 也即考虑 $f: A \rightarrow S^{-1}A$ 是标准映射, 则

$$f^*: \{S^{-1}A \text{ 中的理想}\} \rightarrow \{A \text{ 中与 } S \text{ 无交的理想}\}, \quad \mathfrak{a} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{a})$$

将准素理想一一对应到准素理想. □

注记 1.12.11 对于乘法封闭子集 S , 以及理想 $\mathfrak{a}$, 我们把 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 在 A 中的局限理想记为 $S(\mathfrak{a})$.

命题 1.12.12 S 是一个乘法封闭子集, $\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想. 令 $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ 为极小准素分解. 令 $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$ 并且假设 $\mathfrak{q}_i$ 按顺序排开有: S 与 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ 无交, 与 $\mathfrak{p}_{m+1}, \dots, \mathfrak{p}_n$ 相交. 则

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}\mathfrak{q}_i, \quad S(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$$

并且为极小的准素分解.

证明 我们有

$$S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}(\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i) = \bigcap_{i=1}^n S^{-1}\mathfrak{q}_i = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}\mathfrak{q}_i$$

并且 $S^{-1}\mathfrak{q}_i$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ 准素的. 由于 $\mathfrak{p}_i$ 互不相同, 所以 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ 互不相同 (有素理想的一一对应关系), 从而得到一个极小的准素分解 (极小性由 $\mathfrak{q}_i$ 的极小性保证, 反之如果不成立, 则存在 i 使得 $\bigcap_{i \neq j} S^{-1}\mathfrak{q}_j \subset S^{-1}\mathfrak{q}_i$, 也就是说 $S^{-1}(\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j) \subset S^{-1}\mathfrak{q}_i$. 接着利用 $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \not\subset \mathfrak{q}_i$ 即可得到矛盾.).

对两边再次取极限, 我们有

$$S(\mathfrak{a}) = (S^{-1}\mathfrak{a})^c = \bigcap_1^m (S^{-1}\mathfrak{q}_i)^c = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i \quad \square$$

注记 1.12.13 属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想集合 Σ 叫做**孤立的**, 如果它满足下面的条件: 如果 $\mathfrak{p}'$ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想且 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$, 对某个 $\mathfrak{p} \in \Sigma$, 则 $\mathfrak{p}' \in \Sigma$.

换言之, 孤立的即向下封闭的.

注记 1.12.14 由于属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想是有限的, 所以孤立集合自然也是有限集合.

令 Σ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的孤立的素理想集合, 令 $S = A - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$, 我们容易证明 S 是乘法封闭的. 对于属于 $\mathfrak{a}$ 的任何素理想 $\mathfrak{p}'$, 我们有

$$\mathfrak{p}' \in \Sigma \implies \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$$

$$\mathfrak{p}' \notin \Sigma \implies \mathfrak{p}' \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p} \implies \mathfrak{p}' \cap S \neq \emptyset$$

定理 1.12.15 (第二唯一性定理) 设 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{a}$ 的极小准素分解, 令 $\{\mathfrak{p}_{i_1}, \dots, \mathfrak{p}_{i_m}\}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的素理想的孤立集合. 则 $\mathfrak{q}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{i_m}$ 与分解无关.

证明 我们有

$$\mathfrak{q}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{i_m} = S(\mathfrak{a})$$

其中 $S = A - \mathfrak{p}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{i_m}$, 因此只依赖 $\mathfrak{a}$. $\square$

推论 1.12.16 孤立准素分支 (即与极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ 相对应的准素分支 $\mathfrak{q}_i$) 由 $\mathfrak{a}$ 唯一决定.

1.13 结合素理想

结合素理想是交换代数中的重要概念, 是准素分解理论的现代版本. 代数地看, 它是可以作为模中元素零化子的素理想; 几何地看, 它是拟凝聚层截面支集的不可约分支.

在本节中, 约定 A 是一个环, M 是一个 A -模.

定义 1.13.1 (Associated prime) 如果 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足以下等价条件之一, 则称 $\mathfrak{p}$ 为 M 的**结合素理想**.

- (1) 存在 $x \in M$ 使得 $\text{ann}(x) = \mathfrak{p}$.
- (2) M 包含了一个同构于 $A/\mathfrak{p}$ 的子模.

我们记 M 的结合素理想构成的集合为 $\text{Ass}_A(M)$ 或者 $\text{Ass}(M)$.

注记 1.13.2 我们简单说明一下这两个条件为什么是等价的：如果 $\exists x \in M$ 使得 $\text{ann}(x) = \mathfrak{p}$ ，我们考虑模同态 $A \rightarrow Ax$, $a \mapsto ax$ ，我们知道 $\text{Ker} = \mathfrak{p}$ ，于是 $A/\mathfrak{p} \cong Ax \subset M$ 。于是得到了一个同构于 $A/\mathfrak{p}$ 的子模。

反过来，假设存在这样一个子模 $f: A/\mathfrak{p} \cong N$ ，设 $x = f(\bar{1}) \in N$ ，则我们知道 $N = Af(\bar{1})$ ，于是我们知道 $\text{ann}(x) = \{a \in A: f(\bar{a}) = 0\} = \mathfrak{p}$ 。

注记 1.13.3 虽然结合素理想是对于一般的情况定义的，但是它往往只对 Noether 环表现良好，所以我们一般更关心 Noether 环上的情况。

命题 1.13.4 令 $\mathfrak{p}$ 为集合 $\{\text{ann}(x): x \in M, x \neq 0\}$ 中的一个极大元，则 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ 。

证明 我们只需要说明 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想即可，令 $\mathfrak{p} = \text{ann}(x)$ ，假设 $ab \in \mathfrak{p}$ ，并且 $b \notin \mathfrak{p}$ ，我们知道 $abx = 0$ ，由于 $\text{ann}(bx) \supseteq \text{ann}(x) = \mathfrak{p}$ ，但是由于 $\mathfrak{p}$ 是极大元，于是 $\text{ann}(bx) = \text{ann}(x)$ ，所以我们知道 $a \in \text{ann}(bx) = \text{ann}(x) = \mathfrak{p}$ 。于是 $\mathfrak{p}$ 是素理想。 $\square$

推论 1.13.5 若 A 是 Noether 环，则 $\text{Ass}(M) = \emptyset \iff M = 0$ 。

证明 由于 A Noetherian，故若 $M \neq 0$ ，则 $\{\text{ann}(x): x \in M, x \neq 0\}$ 有极大元，故 $\text{Ass}(M) \neq \emptyset \iff M \neq 0$ 。 $\square$

推论 1.13.6 若 A 是 Noether 环，则 M 的零因子的集合是 M 的结合素理想的并。

注记 1.13.7 利用环商掉素理想是整环，我们知道如果 R 是环 (不必 Noether)， $\mathfrak{p}$ 是其素理想，则 $\text{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ 。

命题 1.13.8 设有 A -模短正合列 (此处 A 不必 Noether)

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$$

则 $\text{Ass}(N) \subset \text{Ass}(M) \subset \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(Q)$ ，第二个包含关系在正合列分裂时为等号。

证明 由于可以把 N 看成是 M 的子模，所以第一个包含号由定义是显然的，下面我们来证明第二个。

设 $\mathfrak{p} = \text{ann}(m) \in \text{Ass}(M)$ ，记 m 在 Q 中的像为 $\bar{m}$ ，我们知道 $\mathfrak{p} \subset \text{ann}(\bar{m})$ 。如果取等号，则 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(Q)$ 。如果是真包含关系，取 $a \in \text{ann}(\bar{m}) \setminus \mathfrak{p}$ ，有 $a\bar{m} = 0$ 但是 $am \neq 0$ ，即 $am \in N$ 且非零，由 $\mathfrak{p}$ 是素理想，我们知道 $\text{ann}(am) = \mathfrak{p}$ 。即 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(N)$ ，所以有第二个包含关系。

当正合列分裂时， N, Q 都是 M 的子模，所以有 $\text{Ass}(M) \supset \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(Q)$ ，于是有等号成立。 $\square$

注记 1.13.9 实际上, 只需要正合列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow Q$$

就可以得到

$$\text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(Q)$$

事实上, 任取 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$, 取 M 的同构于 $A/\mathfrak{p}$ 的一个子模 M_0 , 如果 $N \cap M_0 = \{0\}$, 则说明 M_0 同构于 Q 的一个子模, 所以 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(Q)$. 反之如果存在 $0 \neq x \in N \cap M_0$, 则由于 $M_0 \cong A/\mathfrak{p}$ 是一个整环, 于是 $\mathfrak{p} = \text{ann}(x) \in \text{Ass}(N)$.

命题 1.13.10 A 是 Noether 环, M 是有限生成 A -模, 则存在滤链

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

以及一系列素理想 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ 使得 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$.

证明 由于 M 是 Noether 环的有限生成模, 于是 M 是 Noether 模, 所以我们考虑子模集合

$$\{N \subset M: \text{命题对 } N \text{ 成立}\}$$

显然非空, 因为 0 在其中, 从而有 M 是 Noether 模我们知道这个集合有极大元, 设为 N , 下面我们取证明 $N = M$.

如果 $N \subsetneq M$, 取 M/N 的结合素理想 $\mathfrak{p}$ 以及元素 $\bar{m}$ 使得 $\text{ann}(\bar{m}) = \mathfrak{p}$, 则我们知道 $A\bar{m} \cong A/\mathfrak{p}$.

取 $\bar{m}$ 的一个原像 $m \in M$, 令 $N' = N + Am$, 则我们知道 $N \subsetneq N'$, 并且 $N'/N = A\bar{m} \cong A/\mathfrak{p}$, 于是与 N 极大矛盾, 所以 $N = M$, 也即命题对 M 成立. $\square$

推论 1.13.11 A 是 Noether 环, M 是有限生成 A -模, 则 $\text{Ass}_A(M)$ 有限.

证明 由命题, 我们知道存在滤链

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

以及一系列素理想 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ 使得 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$. 于是我们知道有正合列

$$0 \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_n \rightarrow M_n/M_{n-1} \rightarrow 0$$

于是有

$$\text{Ass}_A(M) = \text{Ass}_A(M_n) \subset \text{Ass}_A(M_{n-1}) \cup \text{Ass}(M_n/M_{n-1})$$

接着同理我们有

$$\text{Ass}_A(M_{n-1}) \subset \text{Ass}_A(M_{n-2}) \cup \text{Ass}(M_{n-1}/M_{n-2})$$

于是最终有

$$\text{Ass}_A(M) \subset \text{Ass}_A(M_1/M_0) \cup \text{Ass}_A(M_2/M_1) \cup \cdots \cup \text{Ass}_A(M_n/M_{n-1})$$

结合 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$, 我们知道 $\text{Ass}_A(M_i/M_{i-1}) = \text{Ass}_A(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$. 于是我们知道是有限的. $\square$

引理 1.13.12 (与局部化的关系) A 是 Noether 环, M 是 A -模, 令 S 为 A 的一个乘法封闭子集, 则有

$$\text{Ass}_A(S^{-1}M) = f(\text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)) = \text{Ass}_A(M) \cap \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \text{Ass}_A(M) \cap f(\text{Spec } S^{-1}A)$$

其中 f 是自然映射 $\text{Spec}(S^{-1}A) \rightarrow \text{Spec}(A)$.

证明 设 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(S^{-1}M)$, 则 $\mathfrak{p} = \text{ann}_A(x)$ 对某个非零的 $x \in S^{-1}M$ 成立, 且 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 若 $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, 则存在 $s \in \mathfrak{p} \cap S$, 使得 $sx = 0$, 但是我们知道 s 在 $S^{-1}A$ 中是可逆的, 这与 $x \neq 0$ 矛盾. 所以我们知道 $\mathfrak{p}$ 是 A 中与 S 无交的素理想.

反过来, 对于 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$, 则 $\mathfrak{p} = \text{ann}_{S^{-1}A}(y)$ 对某个非零 $y \in S^{-1}M$ 成立, 由于 $S^{-1}A$ 的素理想都是扩张理想, 所以我们设 $\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q}$, 其中 $\mathfrak{q}$ 是 A 中与 S 无交的素理想, 我们知道

$$\text{ann}_{S^{-1}A}(y) = S^{-1} \text{ann}_A(y)$$

也就是

$$S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1} \text{ann}_A(y)$$

由于 $\mathfrak{q}$ 是理想的局限, 所以是饱和理想, 下面我们说明 $\text{ann}_A(y)$ 是饱和理想, 从而由与 S 无交的饱和理想与 $S^{-1}A$ 中理想的一一对应, 我们可以得到 $\mathfrak{q} = \text{ann}_A(y)$, 从而得证第一个等式.

对于任意的 $x \in A$, $s \in S$, 设 $sx \in \text{ann}_A(y)$, 从而我们知道, 从而我们知道 $sxy = 0 \in S^{-1}M$, 也就是说存在 $t \in S$ 使得 $tsxy = 0 \in M$, 于是我们有 $(ts)xy = 0 \in M$, 于是有 $xy = 0 \in S^{-1}M$, 所以有 $x \in \text{ann}_A(y)$, 所以 $\text{ann}_A(y)$ 是 S -饱和的.

现在证明第二个等式, 取 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(S^{-1}M)$, 设为 $\text{ann}_A(m/s)$, $m \in M, s \in S$, 由 Noether 性知道 $\mathfrak{p}$ 是有限生成的, 设为 $(a_1, \cdots, a_n)$, 由 $a_i m/s = 0 \in S^{-1}M$ 知道存在 $s_i \in S$ 使得 $a_i s_i m = 0 \in M$.

从而不难发现 $\text{ann}_A(s_1 \cdots s_n m) = \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$, 故

$$\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M) \cap \text{Ass}_A(S^{-1}M) \subset \text{Ass}_A(M) \cap f(\text{Spec}(S^{-1}A))$$

而对于任意的 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M) \cap f(\text{Spec}(S^{-1}A))$, 我们知道 $\mathfrak{p} = \text{ann}_A(m)$, 并且 $\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}A$ 的素理想, 我们注意到令 $n = m/1 \in S^{-1}M$, 显然有

$$\mathfrak{p} \subset \text{ann}_A(n)$$

而对于任意的 $x \in \text{ann}_A(n)$, 有 $xn = 0 \in S^{-1}M$, 也就是存在 $s \in S$ 使得 $sxn = 0 \in M$, 所以 $sx \in \mathfrak{p}$, 但是由于 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, 所以 $x \in \mathfrak{p}$, 于是有

$$\mathfrak{p} = \text{ann}_A(n) \in \text{Ass}_A(S^{-1}M)$$

所以我们得证. □

注记 1.13.13 这个引理是在说局部化筛掉了那些与 S 有交的结合素理想.

定义 1.13.14 (模的支集) A -模 M 的**支集**指的是满足 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合, 记作 $\text{Supp}_A(M)$, 无歧义时省略下标 A .

定理 1.13.15 (与支集的关系) $\text{Ass}_A(M) \subseteq \text{Supp}_A(M)$. 如果 A 是 Noether 环, 则 $\text{Supp}_A(M)$ 中的极小元都在 $\text{Ass}_A(M)$ 中. 特别地, 如果 M 有限生成, 则有

$$\overline{\text{Ass}_A(M)} = \text{Supp}_A(M), \quad \sqrt{\text{ann}_A(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$$

证明 如果 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$, 则我们知道 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$, 故 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, 所以 $\text{Ass}_A(M) \subseteq \text{Supp}_A(M)$.

如果 $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M)$ 极小, 则 $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$, 故我们知道 $\text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$ (因为 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M) \iff \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$), 于是我们知道 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$. 如果 M 有限生成, 则我们知道 $\text{Supp}_A(M) = V(\text{ann}(M))$ 在 A 的素谱中是闭集, 所以由 $\text{Ass}_A(M) \subset \text{Supp}_A(M)$ 可以得到

$$\overline{\text{Ass}_A(M)} \subseteq \text{Supp}_A(M)$$

现在我们要证明反过来的方向也是正确的, 任取 $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M)$, 由 Noether 环的性质, 我们知道存在极小元 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, 由于极小元都落在 $\text{Ass}_A(M)$ 中, 所以我们知道 $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_A(M)$. 而由于 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, 我们知道

$$\mathfrak{p} \in \overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq \overline{\text{Ass}_A(M)}$$

所以最终我们有

$$\text{Supp}_A(M) \subseteq \overline{\text{Ass}_A(M)} \implies \text{Supp}_A(M) = \overline{\text{Ass}_A(M)}$$

最后, 由于

$$\sqrt{\text{ann}_A(M)} = \bigcap_{\text{ann}_A(M) \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

对有限生成模 M 有

$$\text{ann}_A(M) \subseteq \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in V(\text{ann}_A(M)) = \text{Supp}_A(M)$$

所以

$$\sqrt{\text{ann}_A(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_A(M)} \mathfrak{p}$$

而所有极小元都在 $\text{Ass}_A(M)$ 里面, 所以最终有

$$\sqrt{\text{ann}_A(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$$

□

注记 1.13.16 对于有限生成模而言我们会有

$$\text{Supp}_A(M) = V(\text{ann}(M))$$

大概就是如果消灭了零化子就不为零了.

命题 1.13.17 A 是 Noether 环, M 是 A -模, 则自然映射

$$M \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)} M_{\mathfrak{p}}$$

是单射.

证明 若存在 $m \neq 0$ 使得 m 在自然映射的核里面, 则我们取 Am 的一个结合素理想 $\mathfrak{p}$, 不妨设

$$\mathfrak{p} = \text{ann}(m)$$

注意到 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$, 于是存在 $s \in A - \mathfrak{p}$ 使得 $sm = 0$, 这与

$$\text{ann}(m) = \mathfrak{p}$$

矛盾, 所以 $m = 0$, 即单射.

□

命题 1.13.18 A 是 Noether 环, $f: M \rightarrow N$ 是 A -模同态, 如果对于每个 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(M)$, f 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化都是单射, 那么 f 就是单射.

证明 取 $K = \text{Ker } f$, 知道 K 是 M 的子模, 于是 K 的结合素理想都是 M 的结合素理想, 然后由于局部化都是单射, 知道

$$K_{\mathfrak{p}} = \text{Ker}(f)_{\mathfrak{p}} = \text{Ker}(f_{\mathfrak{p}}) = 0$$

结合

$$K \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(K)} K_{\mathfrak{p}}$$

是单射, 我们知道 $K = 0$, 即 f 是单射. □

1.14 整性

定义 1.14.1 (整元) B 是一个环, A 是 B 的含么子环, 元素 $x \in B$ 是 A 上的**整元**, 如果 x 是一个 $A[x]$ 中的**首一**多项式的根.

定义 1.14.2 (整闭包与整闭性) 设 $A \subset B$ 为子环, 令

$$C := \{b \in B : b \text{ 是 } A \text{ 上的整元}\}$$

称 C 为 A 在 B 中的**整闭包**, 如果 $C = A$, 则称 A 在 B 中是**整闭的**. 如果 $C = B$, 则称 B **在 A 上是整的**.

注记 1.14.3 设 A 是整环, 如果 A 在其分式域 K 上是整闭的, 我们此时直接省略 K , 简称 A 是整闭的.

如 $\mathbb{Z}$ 是整闭的, 一般来说, 可以证明 UFD 都是整闭的. 我们给出一个简单的证明: 设 R 为一个 UFD, K 是其分式域, 我们下面证明 R 在 K 中整闭, 假设 $a \in K$ 在 R 上整, 则存在首一多项式 $f \in R[x]$ 使得 $f(a) = 0$, 不妨设有

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0 = 0$$

设 $a = p/q$, 其中 $p, q \in R$, 把分母除掉有

$$p^n + c_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + c_1pq^{n-1} + c_0q^n = 0$$

有

$$p^n = -(c_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + c_1pq^{n-1} + c_0q^n)$$

由于 R 是 UFD, 我们不妨设 p 与 q 没有公共的不可约因子, 从而看上式右边可以被 q 整除, 所以 $q \mid p$, 再结合没有公共不可约因子, 从而我们知道 q 是单位, 从而 $a \in R$, 从而 R 是整闭.

命题 1.14.4 $A \subset B$, 则 TFAE:

- (1) $x \in B$ 是 A 上的整元.
- (2) $A[x]$ 是有限生成 A 模.
- (3) $A[x]$ 包含于 B 的一个子环 C , 其中 C 是有限生成 A 模.
- (4) 存在一个忠实的 $A[x]$ -模 M (即 $\text{ann}_{A[x]}(M) = 0$), 作为 A 模是有限生成的.

证明 (1) 推 (2): 显然.

(2) 推 (3): 取 $C = A[x]$ 即可.

(3) 推 (4): 取 $M = A[x]$, 容易知道 $1 \in M$, 从而忠实.

(4) 推 (1): 考虑 M 到自身的同态 $x: M \rightarrow M, m \mapsto xm$, 由于 M 作为 A 模是有限生成的, 行列式办法告诉我们存在 $a_1, \dots, a_n \in A$ 使得有

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

从而 $x^n + \dots + a_n \in A[x]$ 将 M 零化, 因此由忠实性我们知道

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \in A[x]$$

于是我们知道 $x \in B$ 在 A 上是整元. □

推论 1.14.5 若 $x_1, \dots, x_n \in B$ 均在 A 上整, 则 $A[x_1, \dots, x_n]$ 是一个有限生成的 A -模.

证明 对 n 归纳立刻得到. □

推论 1.14.6 B 中在 A 上的整元构成一个包含 A 的子环 C .

证明 若 $x, y \in C$, 我们知道 $A[x, y]$ 有限生成, 从而 $x \pm y, xy$ 在 A 上整 (由于 $A[x \pm y] \subset A[x, y], A[xy] \subset A[x, y]$ 由命题 1.14.4 立刻得到). 当然也可以利用 Kronecker 积的方式通过构造矩阵特征值的方法来证明. □

定义 1.14.7 令 $f: A \rightarrow B$ 是一个环同态, 从而 B 是 A -代数, 如果 B 在子环 $f(A)$ 上是整的, 那么 f 叫做**整的**, B 叫做整的 A -代数.

注记 1.14.8 使用术语, 我们知道上面的结果告诉我们

有限生成代数 + 整性 = 有限代数 (即作为模是有限生成的)

推论 1.14.9 (整性的传递性) 若 $A \subset B \subset C$ 是环, B 在 A 上整, C 在 B 上整, 则 C 在 A 上整.

证明 令 $x \in C$, 我们有方程

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \quad (b_i \in B)$$

我们知道 $B' = A[b_1, \dots, b_n]$ 是有限生成 A -模, 并且 $B'[x]$ 是有限生成 B' 模, 因此我们知道 $B'[x]$ 是有限生成的 A -模, 我们知道 x 在 A 上整. $\square$

推论 1.14.10 令 $A \subset B$ 是环, C 是 A 在 B 中的整闭包, 那么 C 在 B 中是整闭的.

证明 令 $x \in B$ 在 C 上整, 我们知道 x 在 A 上整, 从而 $x \in C$. $\square$

下面的命题指出整性被商环与局部化保留.

命题 1.14.11 (整性被商环与局部化保留) 令 $A \subset B$ 是环, B 在 A 上整.

(1) 若 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$, 则 $B/\mathfrak{b}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 上整.

(2) 若 S 是 A 的乘法封闭子集, 那么 $S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整.

证明 (1) 首先我们要说明可以诱导一个 $A/\mathfrak{a}$ 到 $B/\mathfrak{b}$ 的一个嵌入, 我们可以考虑 $x + \mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a}$, 嵌入到 $x + \mathfrak{b} \in B/\mathfrak{b}$, 这个是良定义的因为如果 $x - y \in \mathfrak{a}$, 则一定有 $x - y \in \mathfrak{b}$, 从而 $x + \mathfrak{b} = y + \mathfrak{b}$, 于是是一个嵌入. 若 $x \in B$, 有

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

其中 $a_i \in A$, 两边同时模 $\mathfrak{b}$ 结论得证.

(2) 令 $x/s \in S^{-1}B (x \in B, s \in S)$, 在上面等式中两边除掉 s^n , 我们知道

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s^n = 0$$

所以 x/s 在 $S^{-1}A$ 上整. $\square$

1.15 GOING-UP

命题 1.15.1 $A \subset B$ 是整环, B 在 A 上整, 那么 B 是域当且仅当 A 是域.

证明 若 A 是域, 令 $y \in B$, $y \neq 0$, 令 y 的最低次的零化首一多项式为

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A)$$

由于 B 是整环, 所以我们有 $a_n \neq 0$. 否则 y 有零因子, 于是有

$$y^{-1} = -a_n^{-1} (y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \in B$$

因此 B 是域, 反之若 B 是域, 设 $x \in A$, 则 $x^{-1} \in B$ 在 A 上整, 我们有方程

$$x^{-m} + a'_1 x^{-m+1} + \cdots + a'_m = 0 \quad (a'_i \in A)$$

因此 $x^{-1} = -(a'_1 + a'_2 x + \cdots + a'_m x^{m-1}) \in A$. 因此 A 是域. $\square$

注记 1.15.2 实际上我们有结论是整扩张保持 Krull 维数不变, 从而有

$$\dim A = \dim B$$

所以如果二者之一的维数是 0, 则都是零, 零维整环就是域.

推论 1.15.3 $A \subset B$ 是环, B 在 A 上整, 令 $\mathfrak{q}$ 是 B 的素理想, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$. 则 $\mathfrak{q}$ 是极大的当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大的.

证明 我们知道 $B/\mathfrak{q}$ 在 $A/\mathfrak{p}$ 上整, 所以 $B/\mathfrak{q}$ 是域当且仅当 $A/\mathfrak{p}$ 是域. $\square$

推论 1.15.4 (Incomparability Theorem) 令 $A \subset B$ 是环, B 在 A 上整. 令 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ 是 B 的素理想使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, 并且 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}$. 那么 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

证明 由于商环和局部化保持整扩张, 所以首先可见

$$A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{q}$$

是整环的整扩张, 考虑 $S = A/\mathfrak{p} - \{0\}$, 有局部化

$$S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \rightarrow S^{-1}(B/\mathfrak{q})$$

是整扩张, 前者是域, 后者自然也是域, 而 $\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}$ 显然与 S 无交, 故 $S^{-1}(\mathfrak{q}'/\mathfrak{q})$ 是 $S^{-1}(B/\mathfrak{q})$ 的真理想, 而域的真理想是 (0) , 故可见

$$S^{-1}(\mathfrak{q}'/\mathfrak{q}) = 0 \implies \mathfrak{q}'/\mathfrak{q} = 0 \implies \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$$

故得证. $\square$

注记 1.15.5 这个命题叫做不可比较定理, 也就是说只要 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$ 都在 $\mathfrak{p}$ 的上方, 就没法比较他们的大小, 除非他们相等. 其几何视角的含义是 $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 的同一根纤维上不能发生包含关系, 如果两个点投影到同一个点, 那么要么完全一样, 要么毫无关系 (没有包含关系).

我们也可以从维数的角度来理解, $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}'$ 意味着

$$\dim B/\mathfrak{q} > \dim B/\mathfrak{q}'$$

但是整扩张是保持维数不变的, 如果在上面的维数下降了, 那么在 A 中的维数也要下降, 但是他们投影下来的是同一个 $\mathfrak{p}$ 维数没变, 所以只能相等.

定理 1.15.6 (整扩张诱导素谱的满射 (Lying Over Theorem)) 令 $A \subset B$ 是环, B 在 A 上整. $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 那么存在 B 的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

证明 首先 $B_{\mathfrak{p}}$ 在 $A_{\mathfrak{p}}$ 上整.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

图表交换, 水平箭头是单射. 令 $\mathfrak{n}$ 是 $B_{\mathfrak{p}}$ 一个极大理想, 那么我们有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A_{\mathfrak{p}}$ 是极大的 (推论 1.15.3), 因此是局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 唯一的极大理想 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A & \longleftarrow & \text{Spec } B \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{m} \cap A & \longleftarrow & \mathfrak{n} \cap B \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A_{\mathfrak{p}} & \longleftarrow & \mathfrak{n} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} & \longleftarrow & \text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

如果 $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \cap B$, 那么 $\mathfrak{q}$ 是素的, 我们有 $\mathfrak{q} \cap A = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$. □

记注 1.15.7 这个定理的另外一个表述是: $A \subset B$, B 是 A 的整扩张, 则有 $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 是满射.

定理 1.15.8 (Going-up theorem) 令 $A \subset B$ 是环, B 在 A 上整, $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ 是 A 的素理想链, $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ ($m < n$) 是 B 的素理想链, 使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ ($1 \leq i \leq m$).

那么链 $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ 可以扩充成链 $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ 使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 成立.

证明 使用归纳法我们立刻得到只需要证明 $m = 1$, $n = 2$ 的情况.

令 $\bar{A} = A/\mathfrak{p}_1$, $\bar{B} = B/\mathfrak{q}_1$, 那么有

$$\bar{A} \subset \bar{B}$$

我们知道 $\bar{B}$ 在 $\bar{A}$ 上整. 由 Lying Over Theorem 知道存在 $\bar{B}$ 的素理想 $\bar{\mathfrak{q}}_2$ 使得 $\bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \bar{A} = \bar{\mathfrak{p}}_2$, 其中 $\bar{\mathfrak{p}}_2$ 是 $\mathfrak{p}_2$ 在 $\bar{A}$ 中的像. 把 $\bar{\mathfrak{q}}_2$ 映回 B , 我们得到所需的 $\mathfrak{q}_2$. $\square$

注记 1.15.9 我们给出 going up 的另外一个表述: $A \subset B$ 是整扩张, 则对于任意的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{Spec } A$ 使得 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, 则对于任意的 $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$, 存在 $\mathfrak{q}'$ 使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ 并且 $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}'$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec } A & \longleftarrow & \text{Spec } B \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{p}' = \mathfrak{q}' \cap A & \longleftarrow & \mathfrak{q}' \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \bar{\mathfrak{p}}' = \bar{\mathfrak{q}}' \cap A/\mathfrak{p} & \longleftarrow & \bar{\mathfrak{q}}' \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Spec } A/\mathfrak{p} & \longleftarrow & \text{Spec } B/\mathfrak{q}
 \end{array}$$

定理 1.15.10 (整扩张保持 Krull 维数) 如果 $A \subseteq B$ 是整扩张, 则其 Krull 维数相等.

证明 设 A 有素理想升链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

由 Lying Over 我们知道存在 $\mathfrak{q}_0 \in \text{Spec } B$ 使得 $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$, 于是由 Going up 我们知道存在 B 中的素理想升链

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$$

所以我们知道

$$\dim B \geq \dim A$$

反过来, 如果 B 中存在素理想升链

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$$

把它映回 A 中得到

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$$

如果 $\dim B > \dim A$, 则一定存在 $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{i+1}$, 由 Incomparability Theorem 我们知道

$q_i = q_{i+1}$, 矛盾. 所以有

$$\dim B \leq \dim A$$

于是

$$\dim A = \dim B$$

□

1.16 GOING-DOWN

命题 1.16.1 (局部化保持整闭包) $A \subset B$ 是环, C 是 A 在 B 中的整闭包, S 为 A 的一个乘法闭子集, 则 $S^{-1}C$ 是 $S^{-1}A$ 在 $S^{-1}B$ 中的整闭包.

证明 由前面结论, 我们知道 $S^{-1}C$ 在 $S^{-1}A$ 上整, 反过来, 如果 $b/s \in S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整, 则我们有

$$(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0$$

令 $t = s_1 \cdots s_n$, 我们对上面的方程两边同时乘 $(st)^n$, 所以我们有 bt 在 A 上整, 于是 $bt \in C$, 从而我们知道 $b/s = bt/st \in S^{-1}C$. □

命题 1.16.2 (整闭是局部性质) A 是一个整环, TFAE:

- (1) A 是整闭的.
- (2) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的.
- (3) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}}$ 是整闭的.

证明 令 C 为 A 在 $K = \text{Frac}(A)$ 中的整闭包, 则有

$$A \subset C \subset K$$

上面命题告诉我们 $C_{\mathfrak{p}}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 在 K 中的整闭包. 于是考虑含入映射

$$f: A \hookrightarrow C$$

我们知道 A 整闭当且仅当 f 是满射, 而我们知道满射是局部性质, 从而知道 f 是满射当且仅当对于任意的 $\mathfrak{p}$, 有 $f_{\mathfrak{p}}$ 是满射, 这又当且仅当对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$, $f_{\mathfrak{m}}$ 是满射, 于是命题得证. □

注记 1.16.3 $A \subset B$ 是环, $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想. B 的元素称为在 $\mathfrak{a}$ 上整的, 如果满足 A 上的整相关条件, 并且系数都在 $\mathfrak{a}$ 中. $\mathfrak{a}$ 在 B 中的整闭包是 B 中所有在 $\mathfrak{a}$ 中整的元素的集合.

引理 1.16.4 令 C 是 A 在 B 中的整闭包, $\mathfrak{a}^e$ 表示 $\mathfrak{a}$ 在 C 中的扩理想, 那么 $\mathfrak{a}$ 在 B 中的整闭包是 $r(\mathfrak{a}^e)$ (因此对加法与乘法封闭).

证明 如果 $x \in B$ 在 $\mathfrak{a}$ 上整, 则存在 $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$, 使得

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

于是我们知道 $x \in C$, 并且 $x^n = -(a_1x^{n-1} + \dots + a_n) \in \mathfrak{a}^e$, 于是有 $x \in r(\mathfrak{a}^e)$.

反过来, 如果 $x \in r(\mathfrak{a}^e)$, 则有

$$x^n = \sum a_i x_i$$

对于某个 $n > 0$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $x_i \in C$ 成立. 由于 x_i 都是 A 上的整元, 于是我们知道 $M = A[x_1, \dots, x_n]$ 是有限生成 A -模, 并且我们有 $x^n M \subset \mathfrak{a}M$, 从而我们由定理 1.2.2 知道, 取 $\varphi = x^n$, 知道 x^n 在 $\mathfrak{a}$ 上整, 于是 x 在 $\mathfrak{a}$ 上整. $\square$

命题 1.16.5 $A \subset B$ 是整环, A 是整闭的, $x \in B$ 在 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 上整. 那么 x 在 A 的分式域 K 上代数, 并且如果 x 在 K 上的极小多项式是 $t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$, 那么 $a_1, \dots, a_n \in r(\mathfrak{a})$.

证明 设 x 被系数在 $\mathfrak{a}$ 中的首一多项式 f 零化, 显然我们知道 x 在 K 上代数, 令 L 为 f_x 在 K 上的分裂域, $x_1, \dots, x_n$ 为 f_x 所有的根, 显然我们有 x_i 在 $\mathfrak{a}$ 上整.

x 在 K 上的极小多项式的根一定在 x_i 中, 于是我们由 Vieta 定理知道极小多项式的系数一定是 x_i 的多项式, 结合 x_i 在 $\mathfrak{a}$ 上整, 由上面引理 (对加法与乘法封闭) 我们知道系数在 $\mathfrak{a}$ 上整, 再结合 A 是整闭的 (在上面引理中 $C = A$), 再由上面的引理我们可以知道这些系数一定在 $r(\mathfrak{a})$ 中. $\square$

定理 1.16.6 (Going-down theorem) 令 $A \subset B$ 是整环, A 整闭, B 在 A 上整. 令 $\mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_n$ 是 A 的素理想链, $\mathfrak{q}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{q}_m$ ($m < n$) 是 B 的素理想链, 使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ ($1 \leq i \leq m$), 那么链 $\mathfrak{q}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{q}_m$ 可以扩充成链 $\mathfrak{q}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{q}_n$, 使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ ($1 \leq i \leq n$).

证明 我们只需要对二元形式证明即可, 考虑 $m = 1, n = 2$, 由于 B 中包含于 $\mathfrak{q}_1$ 的素理想与 $B_{\mathfrak{q}_1}$ 中的素理想一一对应, 我们可以考虑去说明 $\mathfrak{p}_2$ 是 $B_{\mathfrak{q}_1}$ 中素理想的局限. 这等价于说明

$$B_{\mathfrak{q}_1} \mathfrak{p}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$$

对于任意的 $x \in B_{\mathfrak{q}_1} \mathfrak{p}_2$, 一定是形如 y/s , 其中 $y \in B \mathfrak{p}_2, s \in B - \mathfrak{q}_1$, 由引理 1.16.4 知道 (在引理中令 $C = B$) $y \in B \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2^e \subset r(\mathfrak{p}_2^e)$, 于是 y 在 $\mathfrak{p}_2$ 上整, 于是我们知道 y

在 K 上极小多项式的系数都在 $r(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_2$ 中, 即形如

$$y^r + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_r = 0$$

其中 $u_1, \dots, u_r \in \mathfrak{p}_2$. 现在假设 $x \in B_{\mathfrak{q}_1} \mathfrak{p}_2 \cap A$, 则 $s = yx^{-1}$, 其中 $x^{-1} \in K$, 所以 s 在 K 中的极小多项式就是

$$s^r + v_1 s^{r-1} + \cdots + v_r = 0$$

其中 $v_i = u_i/x^i$, 所以有

$$x^i v_i = u_i \in \mathfrak{p}_2$$

由于 s 在 A 上整, 所以在上面命题中取 $\mathfrak{a} = (1)$, 可以知道 $v_i \in r((1)) = A$, 假设 $x \notin \mathfrak{p}_2$, 则有 $v_i \in \mathfrak{p}_2$, 从而有 $s^r \in B\mathfrak{p}_2 \subset B\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{q}_1$, 因此 $s \in \mathfrak{q}_1$, 这与 $s \in S = B - \mathfrak{q}_1$ 矛盾. 于是 $x \in \mathfrak{p}_2$, 因此 $B_{\mathfrak{q}_1} \mathfrak{p}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ 得证. $\square$

注记 1.16.7 我们给出 going down 定理的另外一个叙述: $A \subset B$ 是整扩张, A, B 都是整环, 并且 A 整闭, 则对任意的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{Spec } A$ 使得 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$, 且存在 $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ 使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, 则存在 $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B$ 使得 $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ 并且 $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}' \cap A$.

命题 1.16.8 A 是一个整闭的整环, K 是其分式域, L 是 K 的一个有限可分代数扩张, B 是 A 在 L 中的整闭包. 那么存在 L 在 K 上的基 $v_1, \dots, v_n$ 使得 $B \subset \sum_{i=1}^n Av_i$.

证明 我们选取 L 在 K 上的一组基 $v_1, \dots, v_n$, 为了方便, 我们可以不妨假设它们都属于 B (乘上一个充分大的分母即可). 我们定义一个双线性型

$$(x, y) \mapsto \text{tr}_{L/K}(xy)$$

由于扩张可分, 所以这个二次型非退化, 从而存在对偶基 $u_1, \dots, u_n$ 使得

$$\text{tr}_{u_i v_j} = \delta_{ij}$$

现在任取 $b \in B$, 我们知道 b 可以写成

$$b = \sum_{j=1}^n c_j u_j$$

两边同时乘 v_i 并取 trace, 得到

$$\text{tr}(bv_i) = \text{tr}\left(\sum c_j u_j v_i\right) = \sum \text{tr}(c_j u_j v_i) = c_j$$

结合 b, v_i 都在 B 中, 我们知道

$$c_j = \text{tr}(bv_i) \in A$$

所以我们知道

$$B \subset \sum_{i=1}^n Au_i$$

□

注记 1.16.9 这个定理告诉我们整闭包的扩张不会超过域的扩张次数.

1.17 赋值环

定义 1.17.1 (赋值环) 令 B 是一个整环, K 是其分式域, B 叫做 K 的一个赋值环, 如果对于每一个 $x \neq 0$, $x \in B$ 或者 $x^{-1} \in B$ 至少成立一个.

定理 1.17.2 (赋值环的理想全序) 若 B 是一个赋值环, 则 B 的理想在包含关系之下是全序集.

证明 考虑 $I \neq J$, 假设 $I \not\subseteq J$, 则存在 $a \in I - J$, 任取 $b \in J$ 非零, 我们知道 a/b 或者 b/a 中至少有一个落在 B 中. 如果 $r = a/b \in B$, 则 $a = rb \in J$, 矛盾. 所以 $r = b/a \in B$, 所以 $b = sa \in I$, 故 $J \subset I$. □

推论 1.17.3 赋值环都是局部环.

证明 由于理想在包含关系下是全序的, 所以只有唯一的极大理想, 所以是局部环. □

命题 1.17.4 (赋值环是局部整闭整环) B 是 K 的赋值环, 则 B 是局部整闭整环.

证明 整环是定义, 局部环我们已经得到, 对任意的 $x \in K$ 在 B 上整, 我们有

$$x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

其中 $b_i \in B$. 若 $x \in B$ 则已经成立, 反之如果 $x \notin B$, 则 $x^{-1} \in B$, 这导致

$$x = -(b_1 + b_2x^{-1} + \cdots + b_nx^{-(n-1)}) \in B$$

从而我们知道无论如何 x 都在 B 中, 于是整闭. □

定义 1.17.5 (支配) 设 K 是域, 局部环 $A, B \subset K$, 若 $A \subset B$ 并且 $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$, 则称 B 支配 A .

定理 1.17.6 (总能找到赋值环支配) A 是整环, K 是其分式域, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, 则存在一个 K 的赋值环 B , 使得 $A \subset B \subset K$ 并且 $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{p}$.

证明 考虑 A 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化 $A_{\mathfrak{p}}$, 我们将 A 替换成 $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}$ 被 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 替换为极大理想. 令

$$\mathcal{F} = \{B \text{ 包含 } A \text{ 为 } K \text{ 的子环, 并且 } 1 \notin \mathfrak{p}B\}$$

很显然 $A \in \mathcal{F}$, 所以不是空集, 对 $\mathcal{F}$ 的全序子集, 我们容易知道所有东西的并仍然落在里面, 所以由 Zorn 引理我们知道存在一个极大元 B , 由于 $\mathfrak{p}B \neq B$, 于是存在包含 $\mathfrak{p}B$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 注意到 $B \subseteq B_{\mathfrak{m}}$, 而显然 $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{m}} \neq B_{\mathfrak{m}}$, 所以 $B_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{F}$, 于是由极大性可以保证

$$B = B_{\mathfrak{m}}$$

并且 B 是局部环, 还有 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, 结合 $\mathfrak{p}$ 是 A 的极大理想, 于是 $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}$, 现在我们只需要证明 B 是 K 的赋值环. 现在假设 $x \in K, x \notin B$, 则我们知道 $B[x] \notin \mathcal{F}$, 所以有

$$1 \in \mathfrak{p}B[x]$$

即存在 $a_i \in \mathfrak{p}B$, 使得

$$1 = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

由于 $a_0 \in \mathfrak{m} = \mathfrak{A}$, 所以 $1 - a_0$ 是单位, 于是我们可以变成

$$1 = b_1x + \cdots + b_nx^n$$

其中 $b_i \in \mathfrak{m}$, 在所有情况中选择使得 n 最小的情况, 此时如果 $x^{-1} \notin B$, 我们同理有

$$1 = c_1x^{-1} + \cdots + c_mx^{-m}$$

其中 $c_i \in \mathfrak{m}$, 同理选择使得 m 最小的情况, 如果 $n \geq m$, 我们在上式同时乘 b_nx^n , 会得到一个比 n 更小的情况, 矛盾. 如果 $n < m$, 同理可得矛盾, 所以 $x^{-1} \in B$, 即 B 是赋值环. $\square$

定理 1.17.7 (赋值环是支配关系下的极大元) 局部整环 A 是 $\text{Frac } A$ 中在支配关系下的极大元当且仅当 A 是赋值环.

证明 我们先证明赋值环一定是极大元, 如果 A 是赋值环, 存在 B 支配 A , 假设 $B \neq A$, 则存在 $x \in B - A$, 从而 $x^{-1} \in A$, 显然 x^{-1} 在 A 中不可逆, 否则 $x \in A$, 所以

$$x^{-1} \in \mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_B$$

但是 $x \in B$, 所以 x^{-1} 在 B 中可逆, 所以 x^{-1} 在 B 中是单位, 所以矛盾. 故 $B = A$,

所以赋值环是支配极大元.

反过来, 我们要证明支配极大元是赋值环, 考虑 A 是一个支配极大元, 由定理 1.17.6 可知存在赋值环 B 支配 A , 但是 A 已经是支配极大元, 所以 $B = A$, 所以 A 是赋值环. $\square$

推论 1.17.8 A 是一个整环, K 为其分式域, 则其 K 中的整闭包 $\bar{A}$ 可以写成

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset B \subset K, B \text{ is a valuation ring of } K} B$$

证明 如果 $A \subset B \subset K$, 对于 K 的赋值环, 则由于 B 是整闭的, 我们知道 $\bar{A} \subset B$.

反过来, 对于 $x \in K$, 并且 $x \notin \bar{A}$, 我们将找到一个赋值环 B 使得 $A \subset B \subset K$, 并且 $x \notin B$. 令 $y = x^{-1}$, 考虑 $A' = A[y] \subset K$, 则 $1 \notin yA'$, 否则

$$1 = a_1 y + \cdots + a_n y^n, \quad a_i \in A$$

这告诉我们 x 是 A 上的整元, 矛盾.

从而我们知道 y 不是 A' 中的单位, 从而存在极大理想 $\mathfrak{m}' \subset A'$, 使得 $y \in \mathfrak{m}'$. 从而由上面定理我们知道存在 K 的赋值环 B , 使得 $B \supset A'$, 并且 $\mathfrak{m}_B \cap A' = \mathfrak{m}'$, 则 $y = x^{-1} \in \mathfrak{m}_B$, 这告诉我们 $x \notin B$. $\square$

定理 1.17.9 (赋值环的等价定义) 设 A 是整环, K 是其分式域, TFAE:

- (1) A 是赋值环.
- (2) A 的主理想在包含关系下全序.
- (3) A 的理想在包含关系下全序.
- (4) A 是局部环并且 A 的有限生成理想都是主理想.

证明 (1) 推 (2) 已知, (2) 推 (3): 设 $I \not\subseteq J$, 取 $a \in I - J$, 对任意的 $b \in J$ 都有 $a \notin (b)$, 从而 $(b) \subseteq (a) \subset I$, 故 $J \subset I$. (3) 推 (4): 理想全序知极大理想唯一, 所以局部, 对任意 $a, b \in A$, 知道必然有 $(a) \subset (b)$ 或者 $(b) \subset (a)$, 不妨设为前者, 则可见 $(a, b) = (b)$, 所以有限都是单生成.

最后 (4) 推 (1): 对非零的 $a, b \in A$, 知 $I = (a, b)$ 是主理想, 可见 $I/\mathfrak{m}I$ 是一维 $A/\mathfrak{m}$ 空间 (Nakayama 引理保证 $I/\mathfrak{m}I$ 非零), 因此 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 线性相关, 所以存在 $u, v \in A$ 使得其中至少有一个可逆的, 满足

$$ua + vb = xa + yb, \quad x, y \in \mathfrak{m}$$

若 $u \in A^\times$, 则 $u - x \in A^\times$, 从而 $a/b = (y - v)(u - x)^{-1} \in A$, 反之若 $v \in A^\times$, 则 $b/a \in A$, 所以可见 $\text{Frac } A$ 中非零元素与其逆至少有一个在 A 中, 所以 A 是赋值环. $\square$

定义 1.17.10 (赋值环的赋值定义) $(\Gamma, \leq, +)$ 为一个全序 Abel 群, K 是一个固定的域, K 上的一个在 Γ 中的**赋值**是一个映射

$$v: K^\times \rightarrow \Gamma$$

使得对任意的 $x, y \in K^\times$, 满足

$$(1) v(xy) = v(x) + v(y).$$

$$(2) v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}, x \neq -y.$$

令 $v(0) = \infty$, $\infty > a, \forall a \in \Gamma$. 即对 Γ 进行一个延拓, 从而得到

$$v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$$

注记 1.17.11

- 若 $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ 是一个赋值, 则 $R_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ 是一个赋值环, 带有极大理想 $\mathfrak{m} = \{x \in K: v(x) > 0\}$.
- 若 $A \subset K$ 是一个赋值环, 令 $\Gamma = K^\times / A^\times$, 对任意的 $\xi = [x], \eta = [y]$, 我们定义 $\xi \geq \eta \iff xy^{-1} \in A$. 容易验证是一个良定义的全序关系, 则我们可以定义一个赋值

$$v: K^\times \rightarrow \Gamma$$

为典范映射, 于是我们得到了一个赋值.

于是我们知道

域 K 中的赋值环与其上的赋值是一一对应的.

1.18 Krull 维数与超越维数

定义 1.18.1 (Krull dimension) 我们定义 A 的 **Krull 维数**(简称**维数**) 为所有素理想严格升链

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

长度 n 的上确界, 记为 $\dim A$, 其值为一个非负整数或者 $+\infty$.

例 1.18.2 域的 Krull 维数为 0, $\mathbb{Z}$ 的 Krull 维数为 1.

定义-定理 1.18.3 (超越度) 设 A 是整环, 并且是 K -代数, 则其一组**超越基**定义为 A 的极大 K -代数无关组, 任意一组超越基的集合基数称为 A 在 K 上的**超越度**, 记为 $\text{trdeg}_K(A)$.

证明 其需要证明的部分在于良定义性, 存在性由 Zorn 引理自动保证, 而任意两组超越基的基数相等在有限情况时可由结式证明, 无限情况需要集合论基数论证, 对交换代数的学习并无裨益, 故此略去. $\square$

注记 1.18.4 注意整环条件是必要的, 如果存在非平凡零因子就可能会导致不同超越基的基数不同, 比如考虑

$$A = K[X] \times K[Y, Z]$$

存在两组极大的超越基 $(X, 0)$ 与 $(0, Y), (0, Z)$, 其基数不同.

注记 1.18.5 注意对于整环 A , $\text{trdeg}_K(A)$ 与 $\text{Frac}(A)/K$ 的超越次数相同, 因为 A 的超越基同样也是 $\text{Frac}(A)$ 的超越基. 有些书上也将 $\text{trdeg}_K(A)$ 定义为 $\text{Frac}(A)/K$ 的超越次数.

命题 1.18.6 (多项式环的超越度) 设 K 是域, 则 $\text{trdeg}_K(K[X_1, \dots, X_n]) = n$.

证明 显然 $x_1, \dots, x_n$ 代数无关, 故超越度大于等于 n . 设 $f_0, \dots, f_n$ 为任意 $n+1$ 个多项式, 设 x_j 在 f_i 中的最高次数为 v_{ij} , 则对整数 N 而言, 每个 x_i 的次数都小于等于 N 的多项式作为线性空间的维数为 $O(N^n)$, 而使得

$$a_0 v_{0j} + a_1 v_{1j} + \dots + a_n v_{nj} \leq N, \forall j$$

的情况数为 $O(N^{n+1})$, 所以对充分大的 N , 所有可能的

$$f_0^{a_0} \dots f_n^{a_n}$$

数量超过线性空间的维数, 从而线性相关, 故可知 $f_0, \dots, f_{n+1}$ 代数相关. $\square$

定理 1.18.7 (超越维数与 Krull 维数相等) 设 $A = K[x_1, \dots, x_N]/\mathfrak{p}$, 其中 $\mathfrak{p}$ 为 $K[x_1, \dots, x_N]$ 的素理想, 则 $\dim A = \text{trdeg}_K(A)$.

注记 1.18.8 需在脑海中保有超越维数就是坐标轴个数, Krull 维数就是体, 线, 面这样的几何体, 如此可有直观.

证明 首先证明 $\dim A \leq \text{trdeg}_K(A)$, 对超越度 n 归纳, 当 $n = 0$ 时, A 是 K 的整扩张, 结合 A 是整环, K 是域, 立刻得到 A 也是域, 从而 $\dim A = 0$ 得证. 下面假设 $n > 0$, 考察 A 的素理想升链

$$0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m$$

其中 $m > 0$, 于是 $A/\mathfrak{p}_1$ 就有对应长度 $m - 1$ 的素理想升链, 如此只需要证明任意 n 个元素都代数相关, 如此由归纳假设可知 $m - 1 \leq n - 1$, 即 $m \leq n$, 从而 $\dim A \leq n$.

现在反证, 设 $a_1, \dots, a_n$ 在 $A/\mathfrak{p}_1$ 中的像代数无关, 如此可知 $a_1, \dots, a_n$ 在 A 中代数无关, 从而构成超越基. 取 $a \in \mathfrak{p}_1 - \{0\}$, 很显然 $a, a_1, \dots, a_n$ 的代数相关式不能只涉及 a , 否则可见 a 是 K 的代数元, 即 $K[a] = K(a) \subset A$, 即 a 可逆, 不可能落在素理想中. 如此可得到 $a, a_1, \dots, a_n$ 的 K -代数相关式含有 $a_1, \dots, a_n$ 中的元素, 商掉 $\mathfrak{p}_1$ 即可得到其非平凡代数相关式, 与代数无关矛盾. 如此得证 $\dim A \leq \operatorname{trdeg}_K(A)$.

现在证明 $\dim A \geq \operatorname{trdeg}_K(A)$. 仍然对超越度 n 归纳证明, $n = 0$ 显然. 设 $n > 0$, $a_1, \dots, a_n \in A$ 为超越基, 考虑

$$A' = A \otimes_K K(a_1)$$

即将基域扩张, 如此可见

$$\operatorname{trdeg}_{K(a_1)} A' = n - 1$$

由归纳假设知道 A' 中素理想升链极大长度为 $n - 1$, 取出一个为

$$0 = \mathfrak{p}'_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}'_{n-1}$$

设 $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}'_k \cap A$ 为在 A 上的限制, 很显然构成 A 中素理想升链, 若 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 是极大理想, 则 $A/\mathfrak{p}_{n-1}$ 是有限生成 K 代数并且是域, 从而由 Zariski 引理 1.26.2 知道是 K 的有限扩张, 于是 $\overline{a_1} \in A/\mathfrak{p}_{n-1}$ 是代数元, 即存在 $f \in K[X]$ 使得 $f(\overline{a_1}) = 0$, 这说明

$$f(a_1) \in \mathfrak{p}_{n-1} \implies f(a_1) \in \mathfrak{p}'_{n-1}$$

而 $f(a_1)$ 在 $K(a_1)$ 中, 从而在 A' 中是可逆元, 矛盾. 故 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 非极大理想, 知道存在极大理想 $\mathfrak{p}_n \supsetneq \mathfrak{p}_{n-1}$, 也就是 $\dim A \geq \operatorname{trdeg}_K(A)$. $\square$

命题 1.18.9 (零维有限生成 K -代数) A 是有限生成 K -代数, TFAE:

- (1) $\dim A = 0$.
- (2) A 在 K 上代数.
- (3) A 作为 K -线性空间的维数 $\dim_K(A) < \infty$.
- (4) A 是 Artin 的.
- (5) A 只有有限个极大理想.

1.19 链条件与模的合成列

命题 1.19.1 令 Σ 是一个偏序集, TFAE:

- (1) 每一个升链 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ 都会停止.
- (2) 每一个 Σ 的非空子集都有极大元.

证明 把 Zorn 引理叙述出来就已经得证. □

定义 1.19.2 (链条件) 令 Σ 为 M 的子模集合, 令偏序关系为 $\subseteq$, 则我们称升链必停止为**升链条件**, 简称 a.c.c. 一个模如果满足升链条件, 则称之为 **Noether 模**. 如果令偏序关系为 $\supseteq$, 我们称降链必停止为**降链条件**, 简称 d.c.c. 一个模如果满足降链条件, 则称之为 **Artin 模**.

命题 1.19.3 (正合列性质) 令 $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ 是模正合列, 则

- (1) M Noetherian $\iff M'$ 与 M'' Noetherian.
- (2) M Artinian $\iff M'$ 与 M'' Artinian.

证明 $\Rightarrow$: 我们只需要注意到 M', M'' 的子模升链或者降链都由 M 的子模由子模或者商模的形式给出, 所以由 M 的链条件可以得到 M', M'' 的链条件.

$\Leftarrow$: 令 (L_n) 为 M 的子模升链, 则我们知道 $(\alpha^{-1}(L_n))$ 为 M' 的子模升链, $(\beta(L_n))$ 为 M'' 的子模升链, 对于充分大的 n 这两个升链都停止, 然后可以证明 (L_n) 也停止. □

推论 1.19.4 如果 M_i Noetherian(或者 Artinian), 则 $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ 也 Noetherian(或者 Artinian).

推论 1.19.5 A Noetherian(或者 Artinian), M 是有限生成 A -模, 则 M Noetherian(或者 Artinian).

例 1.19.6 • 任何域都是 Noether 且 Artin 的.

- 环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是 Noether 且 Artin 的.
- 环 $\mathbb{Z}$ 是 Noether 的, 但并非 Artin 的.
- PID 都是 Noether 的.
- $k[x_1, x_2, \cdots]$ 不是 Noether 的, 但是由于是一个整环, 我们可以考虑其分式域 K , K 是 Noether 的, 于是我们知道一个 Noether 环的子环不一定是 Noether 的.

- 考虑 X 是一个无限的紧 Hausdorff 空间, $C(X)$ 是其上的实值函数环, 取一个严格递减的闭集套

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

令 $\mathfrak{a}_n = \{f \in C(X) : f(F_n) = \{0\}\}$, 则我们知道 $\mathfrak{a}_n$ 构成了一个严格上升理想列, 所以我们知道 $C(X)$ 不是 Noether 的.

命题 1.19.7 (Noether/Artin 环的商环也是 Noether/Artin 的) A 是 Noether 环 (或者 Artin 环), $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想, 则 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether 环 (或者 Artin 环).

证明 由

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{a} \rightarrow 0$$

我们知道 $A/\mathfrak{a}$ 作为一个 A -模是 Noether/Artin 的, 于是我们知道作为 $A/\mathfrak{a}$ 模也是成立的. $\square$

定义 1.19.8 (合成列) 一个 M 的 **合成列** 是一个形如

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

的有限长度链, 并且是极大的, 即 M_i/M_{i+1} 是单模.

命题 1.19.9 (合成列的长度唯一性) 若 M 有一个长度为 n 的合成列, 则每一个 M 的合成列的长度都是 n , 并且每一个链都可以扩充为一个合成列.

证明 我们令

$$\ell(M) = M \text{ 中合成列的最短长度}$$

其中如果 M 没有合成列, 则 $\ell(M) = +\infty$.

Claim 1: 若 $\ell(M) < +\infty$, 则对于 $N \subsetneq M$, 有 $\ell(N) < \ell(M)$.

考虑 $\{M_i\}$ 为 M 的最短长度的合成列, 则我们注意到

$$N_i = M_i \cap N \subset N$$

并且

$$N_i/N_{i+1} \subset M_i/M_{i+1}$$

所以我们知道 $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ 或者 0 , 从而 $\{N_i\}$ (去掉某些重复项) 是 N 的合成列, 于是 $\ell(N) \leq \ell(M)$. 如果取等, 说明所有的 $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$, 于是 $N_{n-1}/N_n = M_{n-1}/M_n$, 由于 $N_n = M_n = 0$, 于是 $N_{n-1} = M_{n-1}$, 于是 $N_{n-2} = M_{n-2}$, 以此类推, 这告诉我们 $N = M$.

Claim 2: 所有合成列都有相同的长度.

如果 M 的某个合成列 $\{M_i\}$ 的长度为 k , 我们知道 M_1 的合成列长度为 $k-1$,

而我们知道 $\ell(M_1) < \ell(M) = n$, 于是 $k \leq n$. 所以所有合成列的长度都小于等于 n . 再假设存在某个合成列长度小于 n , 这与 n 的取法矛盾, 于是我们知道所有合成列长度相同. 假设某个链的长度小于 n , 我们知道肯定不是合成列, 从而可以往其中插入某些项使得长度更大, 重复操作我们得到结论. $\square$

命题 1.19.10 (合成列 $\iff$ a.c.c + d.c.c) M 有一个合成列 $\iff M$ 满足两个链条件 (即 a.c.c 与 d.c.c).

证明 $\Rightarrow$ 是显然的.

$\Leftarrow$: 由于满足两个 a.c.c, 我们知道存在一个极大的子模 $M_1 \subset M_0 = M$, 同理 M_1 存在极大子模 M_2 , 以此类推得到一个降链, 但是由于 d.c.c, 我们知道降链是有限的, 于是我们得到了一个 M 的合成列. $\square$

定义 1.19.11 M 是**有限长度的**, 如果 M 有一个合成列.

注记 1.19.12 $\ell(\bullet)$ 其实是一个加性函数, 我们考虑正合列

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

我们知道 $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$.

定理 1.19.13 (Jordan-Hölder) 若 M 有合成列, 则其任意两个合成列商出的单模在相差一个置换下相等.

命题 1.19.14 $\ell(\cdot)$ 是有限长度 A -模的一个加性函数.

证明 考虑正合列

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$$

我们要说明 $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$. 取 M' 的一个合成列在 α 的像, 再取 M'' 的一个合成列在 β 下的原像, 我们知道

$$\alpha(M') = \beta^{-1}(0)$$

于是我们可以把这两个合成列合起来, 即

$$M = \beta^{-1}(M_0'') \supsetneq \beta^{-1}(M_1'') \supsetneq \cdots \supsetneq \beta^{-1}(M_s'' = 0) = \alpha(M_0') \supsetneq \alpha(M_1') \supsetneq \cdots \supsetneq \alpha(M_t') = 0$$

得到一个新的合成列, 于是我们知道

$$\ell(M) = s + t = \ell(M') + \ell(M'')$$

所以是一个加性函数. $\square$

命题 1.19.15 V 是域 k 上的一个线性空间, TFAE:

- (1) V 有限维.
- (2) V 作为 k -模是有限长度.
- (3) V 作为 k -模 a.c.c.
- (4) V 作为 k -模 d.c.c.

证明 (1) 推 (2) 是显然的, (2) 推 (3),(4) 我们在之前已经说明过, 有限长度当且仅当满足两个链条件. 现在只需要说明 (3) 推 (1) 和 (4) 推 (1), 我们假设 V 不是有限维的, 取出一组无限基 v_i , 我们令

$$U_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}, \quad V_n = \text{span}\{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots\}$$

我们知道 U_n 是无限升链, V_n 是无限降链, 于是与 a.c.c 与 d.c.c 矛盾. $\square$

推论 1.19.16 A 是一个环, A 的极大理想 (可以重复) $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ 满足 $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_n = (0)$, 则 A Noether $\iff$ Artin.

证明 考虑 $A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$, 我们知道 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1} / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ 是一个 $A/\mathfrak{m}_i$ 上的线性空间, 于是 a.c.c $\iff$ d.c.c.

我们知道 A a.c.c(或者 d.c.c) 当且仅当每一个 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1} / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ a.c.c(或者 d.c.c), 这是因为有正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}_1 \rightarrow 0$$

所以 A a.c.c(或者 d.c.c) 当且仅当 $\mathfrak{m}_1$ 与 $A/\mathfrak{m}_1$ a.c.c(或者 d.c.c), 然后考虑正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \rightarrow \mathfrak{m}_1 / \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \rightarrow 0$$

知道 $\mathfrak{m}_1$ a.c.c(或者 d.c.c) 当且仅当 $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ 与 $\mathfrak{m}_1 / \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ a.c.c(或者 d.c.c), 以此类推, 结合 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0)$ 会停止, 且自动 a.c.c(或者 d.c.c), 可见上面的论断成立. 此外需要注意 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1} / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ 作为 A -模的结构与作为 $A/\mathfrak{m}_i$ -线性空间的结构完全一样, 故 a.c.c(或者 d.c.c) 性质也完全共享, 这也是允许在线性空间中进行操作的原因. $\square$

1.20 Artin 环的结构定理

把 Artin 环看做是 Noether 环的对偶是有误导性质的，事实上我们将说明 Artin 环一定是一个 Noether 环，并且是非常特殊的 Noether 环. 在某种意义上 Artin 环是除了域之外最简单的环，我们研究 Artin 环并非是为了他的一般性，而是因为它简单.

命题 1.20.1 (Artin 环是零维的) Artin 环 A 的每个素理想都是极大的.

证明 令 $\mathfrak{p}$ 为 A 的素理想， $B = A/\mathfrak{p}$ 是一个 Artin 整环，令 $x \in B$ ， $x \neq 0$ ，由于 d.c.c，我们知道存在 n 使得 $(x^n) = (x^{n+1})$ ，所以我们知道 $x^n = x^{n+1}y$ 对某个 y ，于是有 $xy = 1$ ，从而我们知道 x 可逆，也就是 B 是一个域，所以 $\mathfrak{p}$ 是极大的. $\square$

推论 1.20.2 Artin 环中 Jacobson 根与幂零元根是相同的.

命题 1.20.3 (极大理想有限) Artin 环只有有限个极大理想.

证明 考虑所有极大理想有限交的集合 S ，由于 d.c.c，我们知道这个集合存在极小元，记为

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$$

由于对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$ ，我们都有

$$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$$

所以我们知道

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}$$

由于素避引理，存在某个 $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}$ ，所以有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. $\square$

命题 1.20.4 (Artin 环的幂零元根幂零) A 是 Artin 环，则 A 的幂零元根 $\text{Nil}(A)$ 是幂零的.

证明 我们令 $\mathfrak{R} = J(A) = \text{Nil}(A)$ ，考虑

$$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}^2 \supset \cdots$$

由 d.c.c 知存在 k 使 $\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{k+1} = \cdots$. 由 Nakayama 引理 1.2.5 可见 $\mathfrak{R}^k = 0$. $\square$

定理 1.20.5 (Artin 环当且仅当零维 Noether) A 是 Artin 环 $\iff A$ 是零维 Noether 环.

证明 $\Rightarrow$: 由于 Artin 环的素理想都极大，我们知道是 $\dim A = 0$ ，我们再令 $\mathfrak{m}_i (1 \leq$

$i \leq n$) 为 A 的所有极大理想, 由 Artin 环的幂零根幂零, 我们知道存在 k 使得

$$\prod_{i=1}^n (\mathfrak{m}_i)^k \subset \left(\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \right)^k = \mathfrak{N}^k = 0$$

于是由推论 1.19.16 知道是 Noether 的.

$\Leftarrow$: 由于零维, 所以素理想都是极大理想, 而幂零元根由 Noether 性是有限生成的, 所以设

$$\mathfrak{N} = (x_1, \dots, x_m)$$

设 $x_i^{n_i} = 0$, 则可见

$$\mathfrak{N}^{n_1 + \dots + n_m} = 0$$

而 Noether 性保证了幂零元根可由有限个极小素理想交出, 故可见

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i = \mathfrak{N}$$

同样由推论 1.19.16 知道是 Artin 的. □

推论 1.20.6 A 是环, 则 A 是 Artin $\iff \ell(A) < +\infty$.

证明 我们知道有合成列等价于满足两个链条件, 于是 Artin, 反过来, 一个环是 Artin 的, 则自然是 Noether 的, 于是满足两个链条件, 所以有合成列. □

如果 A 是一个 Artin local ring, 唯一的极大理想为 $\mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{m}$ 是 A 唯一的素理想, 所以 $\mathfrak{m}$ 就是 A 的幂零元根. 因此我们知道 $\mathfrak{m}$ 的每一个元素都是幂零的, 并且 $\mathfrak{m}$ 自身就是幂零的. A 中的元素不是单位就是幂零元.

命题 1.20.7 A 是一个 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 是其极大理想, 则下面两个陈述恰有一个是正确的:

- (1) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ 对于任何 $n \geq 1$ 成立.
- (2) $\mathfrak{m}^n = 0$ 对于某个 n 成立, 此时 A 是一个 Artin 局部环.

证明 假设 $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$, 令 $M = \mathfrak{m}^n$, 我们有 $M = \mathfrak{m}M$, 则由 Nakayama 引理我们有 $M = \mathfrak{m}^n = 0$, 则 $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, 有 $0 = \mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p}$, 取 radical 知道 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, 于是 $\dim A = 0$, 从而 A 是 Artin 的. □

注记 1.20.8 如果 A 是一个 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 是极大理想, 令 $k = A/\mathfrak{m}$, 则由 $\mathfrak{m}$ 有限生成可见 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 < +\infty$.

命题 1.20.9 A 是一个 Artin 局部环, $k = A/\mathfrak{m}$ 为其剩余域, TFAE:

(1) A 的理想都是主理想.

(2) 极大理想 $\mathfrak{m}$ 是主理想.

(3) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$.

证明 (1) 推 (2) 推 (3) 是显然的, 下面说明 (3) 推 (1): 如果 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$, 则 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, 于是由 Nakayama 我们知道 $\mathfrak{m} = 0$, 从而 A 是一个域, 得证.

如果 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$, 由推论, 知道 $\mathfrak{m}$ 是一个主理想, 令 $\mathfrak{m} = (x)$. 令 $\mathfrak{a}$ 为 A 的一个理想, $\mathfrak{a} \neq (0), (1)$, 我们知道 $\mathfrak{m}$ 是幂零元根, 由 $\mathfrak{m}$ 是幂零的知道存在 $r > 0$ 使得

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^r, \quad \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}^{r+1}$$

于是存在 $y \in \mathfrak{a}$ 使得 $y = ax^r \notin (x^{r+1})$, 于是知道 $a \notin (x) = \mathfrak{m}$, 所以 a 是一个单位, 所以 $x^r \in \mathfrak{a}$, 因此 $\mathfrak{m}^r = (x^r) \subset \mathfrak{a}$, 所以 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r = (x^r)$, 因此 $\mathfrak{a}$ 是主理想. $\square$

引理 1.20.10 令 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 为 A 的理想, 如果 $r(\mathfrak{a})$ 与 $r(\mathfrak{b})$ 是互素的, 则 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 就是互素的.

证明 由于

$$r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) = r((1)) = (1)$$

所以我们知道 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. $\square$

定理 1.20.11 (中国剩余定理) A 是一个环, $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ 是其理想, 定义同态

$$\varphi: A \rightarrow \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i, \quad x \mapsto (x + \mathfrak{a}_1, \dots, x + \mathfrak{a}_n)$$

我们有以下结论:

(1) φ 满射 $\iff \mathfrak{a}_i$ 与 $\mathfrak{a}_j$ 互素, $\forall i \neq j$.

(2) φ 单射 $\iff \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = (0)$.

特别地, 如果 $\mathfrak{a}_i$ 两两互素, 我们有

$$A / \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \cong \prod_{i=1}^n A / \mathfrak{a}_i$$

定理 1.20.12 (Artin 环的结构定理) Artin 环 A 是有限个 Artin 局部环的直积, 并且在同构意义下是唯一的.

证明 令 $\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq n)$ 为 A 的所有不同极大理想, 我们知道这些极大理想都是互素的, 即 $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = (1) (\forall i \neq j)$. 并且我们知道存在 $k > 0$ 使得 $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = 0$, 由引理知

道 $\mathfrak{m}_i^k$ 与 $\mathfrak{m}_j^k$ 也是互素的, 所以有

$$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = \prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = 0$$

于是由中国剩余定理我们知道

$$A \cong \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{m}_i^k$$

其中 $A/\mathfrak{m}_i^k$ 是 Artin 局部环. 下面说明唯一性. 如果有

$$A \cong \prod_{i=1}^n A_i$$

其中 A_i 为 Artin 局部环, 其极大理想记为 $\mathfrak{m}'_i$, 可见此时 A 的极大理想只能为

$$A_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}'_i \times \cdots \times A_n$$

这唯一对应着 A 的那些极大理想 $\mathfrak{m}_i$. 我们对极大理想做局部化得到

$$A_{\mathfrak{m}_i} \cong \left(\prod_{i=1}^n A_i \right)_{A_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}'_i \times \cdots \times A_n} \cong (A_i)_{\mathfrak{m}} \cong A_i$$

对分解 $A/\mathfrak{m}_i^k$ 做同样的操作可见

$$A/\mathfrak{m}_i^k \cong A_{\mathfrak{m}_i}$$

故

$$A_i \cong A/\mathfrak{m}_i^k$$

唯一性得证. □

注记 1.20.13 这也告诉我们 Artin 环对应的几何是离散的点, 不过这个点可能比较胖, 会存在幂零信息.

1.21 Noether 环与 Noether 模

定义 1.21.1 (Noether 环) 设 R 是一个交换幺环, 如果 R 的任意理想都是有限生成的, 则 R 被称为 **Noether 环**.

命题 1.21.2 (Noether 环的等价定义) TFAE:

1. R 是诺特环.
2. R 的严格理想升链必停止.
3. R 的理想构成的非空子集有极大元.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 任取一个理想升链

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

取 $I = \bigcup I_n$, 容易知道 I 是一个理想, 由 R 诺特, 知道 I 有限生成, 我们设

$$I = (f_1, \cdots, f_k)$$

从而我们知道一定存在某个 I_t 使得 $(f_1, \cdots, f_k) \subset I_t$, 从而有

$$I_t = I_{t+1} = \cdots$$

(2) $\Rightarrow$ (3): 任意非空子集可以取出一个升链, 从而由升链必停止知道有极大元.

(3) $\Rightarrow$ (1): 如果存在理想不有限生成, 则一直可以取出

$$(f_1) \subsetneq (f_1, f_2) \subsetneq (f_1, f_2, f_3) \subsetneq \cdots$$

没有极大元, 与条件矛盾. □

定义 1.21.3 (Noether 模) 若 R -模 M 的子模都是有限生成的, 则称 M 为 **Noether 模**.

命题 1.21.4 (Noether 模等价定义) 下面条件等价:

- (1) M 是诺特模.
- (2) M 的严格子模升链必停止.
- (3) M 子模构成的非空子集有极大元.

注记 1.21.5 注意到我们把模 M 取称 R , 此时诺特模即变成诺特环. 所以诺特模是比诺特环更加一般的概念.

命题 1.21.6 (局部化保持诺特) A 是一个 Noether 环, S 是一个乘法封闭子集, 则 $S^{-1}A$ 是诺特环.

证明 对于任意 $S^{-1}A$ 的理想 $\mathfrak{a}$, 我们知道 $\mathfrak{a}^e$ 作为 A 的理想有限生成, 设由 $x_1, \dots, x_n$ 生成, 于是我们知道 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ce} = S^{-1}\mathfrak{a}^e$ 由 $x_1/1, \dots, x_n/1$ 生成, 于是任意理想有限生成, 所以是 Noether 的. $\square$

注记 1.21.7 另证: 我们知道 $S^{-1}A$ 的理想与 A 中与 S 无交的局限理想一一对应, 从而我们知道满足有限升链条件.

推论 1.21.8 A 是 Noether 环, $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 则 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 Noether 环.

1.22 环上的 Hilbert 基定理

定理 1.22.1 (Hilbert Basis Theorem) R 是交换幺环, R 诺特, 则 $R[x]$ 诺特.

证明 我们先定义首项的概念, 如果

$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

则称 $a_n x^n$ 为 f 的首项, a_n 为 f 的首项系数. 令 $I \subset R[x]$ 为 R 中理想, 令 f_1 为 I 中次数最低的元素, 下面归纳定义 f_i : 对 $i \geq 1$, 如果 $(f_1, \dots, f_i) \neq I$, 取 f_{i+1} 为 I 中不在 $(f_1, \dots, f_i)$ 里次数最低的元素, 如果 $(f_1, \dots, f_i) = I$, 则结论成立.

下面令 a_j 为 f_j 的首项系数, 由于 R 诺特, 则理想

$$J = (a_1, a_2, \dots)$$

是有限生成的, 设 m 是最小的使得 $J = (a_1, \dots, a_m)$ 成立的整数, 我们下面说明

$$I = (f_1, \dots, f_m)$$

反之, 存在 f_{m+1} , 但是注意到 f_{m+1} 的首项系数

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^m u_j a_j$$

我们定义

$$g = \sum_{j=1}^m u_j f_j x^{\deg f_{m+1} - \deg f_j} \in (f_1, \dots, f_m)$$

则我们知道 $f_{m+1} - g$ 是 I 中不在 $(f_1, \dots, f_m)$ 里且次数比 f_{m+1} 更低的多项式, 这与条件矛盾. 从而我们知道结论成立. $\square$

注记 1.22.2 这个证明还是有些限制, 我们后面会在分次环与 Gröbner 基中看到其他想法的证明, 会更加一般化.

推论 1.22.3 诺特环的同态像也是诺特环. 更多的, 如果 R_0 是诺特环, R 是有限生成 R_0 代数, 则 R 是诺特的.

证明 由于 R 的同态像一定同构于 R/J , 其中 J 为 R 中理想, 从而我们知道 R/J 中理想的原像是有限生成的, 从而知道生成元的像生成理想.

由 R 为 R_0 上的有限生成代数, 从而我们知道 R 是 $S = R_0[x_1, \dots, x_r]$ 的同态像, 从而我们知道 S 诺特, 从而由于 R 是 S 的同态像, 知道 R 是诺特的. $\square$

命题 1.22.4 (幂级数环上的 Hilbert 基定理) 若 R 是诺特环, 则 $R[[x]]$ 是诺特环.

证明 此时无法去考虑最低次数的多项式, 但是我们可以反向考虑最低项的次数, 我们考虑如下:

设 I 为 $R[[x]]$ 的一个理想, 定义其系数理想

$$J_n := \{a: \exists f = ax^n + \sum_{k>n} a_k x^k \in I\}$$

我们显然知道有

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots$$

由于 R 诺特, 从而存在 N 使得任意 $n \geq N$ 有 $J_n = J_N$. 对于每一个 $0 \leq k \leq N$, 存在 J_k 的有限生成元 $\{g_{k1}, \dots, g_{ks}\}$.

对于每一个 g_{ki} , 存在对应的幂级数 f_{ki} , 我们下面说明 $\{f_{ki}\}$ 生成了 I .

对于任意的 $f \in I$, 设 f 的最低项为 ax^k , 有 $a \in J_k$, 从而存在生成元

$$a = \sum a_i g_{ki}$$

考虑 $f - \sum a_i f_{ki}$ 最低次数更高, 我们逐步归纳地可以将最低次数提升上去, 最后由幂级数的收敛性我们得到证明. $\square$

命题 1.22.5 (Artin-Tate) $A \subset B \subset C$ 为环, A 是 Noether 环, C 为有限生成 A -代数, 并且 C 满足下面两个条件之一

(1) C 是有限生成 B -模.

(2) C 是 B 的整扩张.

则 B 是有限生成 A 代数.

证明 由于 C 是有限生成 A -代数, 从而更是有限生成 B -代数, 于是我们知道条件 (1) (2) 在这个意义下是等价的, 因为

$$\text{有限生成代数} + \text{整扩张} \iff \text{有限代数}$$

我们令 $x_1, \dots, x_m$ 为 C 作为 A -代数的生成元, 令 $y_1, \dots, y_n$ 为 C 作为 B -模的生成元, 我们有

$$x_i = \sum_j b_{ij} y_j, \quad b_{ij} \in B; \quad y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k, \quad b_{ijk} \in B$$

令 B_0 是 b_{ij} 与 b_{ijk} 生成的有限生成 A -代数, 我们知道 B_0 是 Noether 的, 有 $A \subset B_0 \subset B$.

由于 C 的任何元素都是系数在 A 中的 $x_1, \dots, x_m$ 的多项式, 所以我们反复使用上面的关系降次可以知道 C 中的元素是 y_i 的线性组合, 所以 C 是有限生成 B_0 模, 由于 B_0 是 Noether 的, 所以 B 作为 C 的子模是有限生成 B_0 -模, 又由于 B_0 是有限生成 A -代数, 所以知道 B 是有限生成 A -代数. $\square$

1.23 模上的 Hilbert 基定理

定理 1.23.1 (Hilbert Basis Theorem on Modules) R 是诺特环, M 是有限生成 R -模, 则 M 是诺特模.

证明 设 M 由 $f_1, \dots, f_t$ 生成, 令 N 为 M 的子模, 我们下面证明 N 是有限生成的.

如果 $t = 1$, 则显然成立, 下面假设 $t > 1$, 且小于 t 时成立. 则 N 在 M/Rf_1 中的像 $\tilde{N}$ 是有限生成的, 令 $g_1, \dots, g_s$ 为 N 中的元素, 其像生成 $\tilde{N}$. 由于 $Rf_1 \subset M$, 且由 f_1 生成. 由 $N \cap Rf_1$ 为 Rf_1 的子模由归纳假设知道是有限生成的, 记生成元为 $h_1, \dots, h_r$.

我们下面说明 $h_1, \dots, h_r$ 和 $g_1, \dots, g_s$ 生成了 N : 对于任意的 $n \in N$, 则 n 在 $\tilde{N}$ 中的像为 g_i 的像的线性组合, 则我们知道 N 中的元素可以表示为 $\tilde{N}$ 中一个原像与 $N \cap Rf_1$ 中元素的和, 从而我们得证. $\square$

我们下面通过正合列的手段来看一下现代的证明方法.

命题 1.23.2 已知模的正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

未定稿: 2026-08-26

则 B 是诺特模当且仅当 A, C 都是诺特模.

证明 $\Rightarrow$: 已知 B 是诺特模, 由于 A 可以看成是 B 的子模, 从而 A 显然是诺特的 (诺特模子模的子模还是诺特模的子模, 从而有限生成). 又由于 C 可以看做是 B 的商模, 显然诺特模的商模还是诺特的, 从而 C 也诺特.

$\Leftarrow$: 若 A, C 都是诺特模, 我们下面说明 B 满足升链条件, 设 B 的一个子模升链为

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots$$

通过满射 $g: B \rightarrow C$, 我们可以得到 C 中的子模升链:

$$g(N_1) \subset g(N_2) \subset \cdots$$

从而由于 C 诺特, 知道存在 k 使得

$$g(N_k) = g(N_{k+1}) = \cdots$$

把 A 视作是 B 的子模, 我们得到 A 中的子模升链

$$A \cap N_1 \subset A \cap N_2 \subset \cdots$$

同理有存在 l , 使得

$$A \cap N_l = A \cap N_{l+1} = \cdots$$

所以我们取 $i \geq \max\{k, l\}$, 对任意的 $n \in N_{i+1}$, 存在 $m \in N_i$ 使得 $g(n) = g(m)$, 从而 $n - m \in \text{Ker } g = A$. 我们知道 $N_i \cap A = N_{i+1} \cap A$, 从而有 $n - m \in N_{i+1} \cap A = N_i \cap A$, 从而有

$$n = n - m + m \in N_i$$

所以有 $N_{i+1} \subset N_i$, 即 $N_i = N_{i+1}$. 从而升链最终稳定, 我们知道 B 诺特. $\square$

注记 1.23.3 这是一个非常有用的结论, 我们有如下应用: 若 A, B 是诺特模, 则 $A \oplus B$ 是诺特模, 因为有

$$0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$$

若 R 是诺特模, 则有

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^2 \rightarrow R \rightarrow 0$$

从而 $R^2 = R \oplus R$ 诺特, 然后通过归纳, 我们得到

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^n \rightarrow R^{n-1} \rightarrow 0$$

即 R^n 诺特.

最后我们再来看一下模上 Hilbert 基定理利用正合列的证明:

证明 M 是有限生成 R -模, 设生成元为 $f_1, \dots, f_n$, 我们知道

$$M \cong R^n / \text{Ker } f, \quad f: (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$$

从而我们有

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow R^n \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

所以由于 R^n 是诺特环, 我们得到 M 是诺特环. $\square$

命题 1.23.4 (PID 上自由模的子模还是自由模) 设 D 是 PID, M 是 D 上有限秩自由模, 若 N 是 M 的子模, 则 N 是 D 上自由模.

证明 由模上的 Hilbert 基定理, 由于 D 诺特, M 有限生成, 从而知道 M 是诺特模, 从而 N 有限生成, 设生成元为

$$u_1, \dots, u_r$$

设 M 的生成元为

$$v_1, \dots, v_n$$

有

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

我们知道存在 D 上可逆矩阵 P, Q 使得

$$P \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} Q Q^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \text{diag} \{d_1, \dots, d_m, 0, \dots, 0\} Q^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

令

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

从而知道 $N \cong D(d_1 e_1) \oplus D(d_2 e_2) \oplus \cdots D(d_m e_m)$ 为自由模. $\square$

1.24 Noether 环上的准素分解

定义 1.24.1 (Irreducible ideals) 一个理想 $\mathfrak{a}$ 称为**不可约的**, 如果

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ or } \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$$

换言之, $\mathfrak{a}$ 不能表示为两个真包含 $\mathfrak{a}$ 的理想的交.

引理 1.24.2 A 是 Noether 环, 则 A 的每一个理想都是有限个不可约理想的交.

证明 假设不成立, 则 A 中不满足条件的理想构成的集合非空, 从而由 A Noether, 知道有极大元 $\mathfrak{a}$, 由于 $\mathfrak{a}$ 是不能表示为不可约理想的交, 所以 $\mathfrak{a}$ 是可约的, 即存在 $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{c}$, 使得 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. 但是我们知道 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{c}$ 都是有限个不可约理想的交, 所以 $\mathfrak{a}$ 也是, 矛盾. $\square$

引理 1.24.3 Noether 环中的不可约理想都是准素的.

证明 我们先说明可以传递到商环中, 即如果 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 是准素的, 则 $A/\mathfrak{a}$ 的零理想是准素理想, 反过来如果 $A/\mathfrak{a}$ 的 (0) 是准素理想, 则其原像 $\mathfrak{a}$ 也是准素的.

所以现在我们只需要对于不可约的零理想证明即可, 令 $xy = 0$, 并且 $y \neq 0$, 则我们知道

$$\text{ann}(x) \subset \text{ann}(x^2) \subset \cdots$$

会停止, 从而存在 n 使得 $\text{ann}(x^n) = \text{ann}(x^{n+1}) = \cdots$, 这告诉我们

$$(x^n) \cap (y) = 0$$

这是因为如果 $a \in (y)$ 则 $ax = 0$, 则如果 $a \in (x^n)$, 即 $a = bx^n$, 有 $bx^{n+1} = 0$, 因此有 $b \in \text{ann}(x^{n+1}) = \text{ann}(x^n)$, 于是 $bx^n = 0$, 也就是 $a = 0$.

由于 (0) 是不可约的, 并且 $(y) \neq 0$, 所以我们知道 $(x^n) = (0)$, 也就是 $x^n = 0$, 所以 (0) 是准素的. $\square$

命题 1.24.4 (Lasker-Noether) Noether 环 A 的每个理想都有一个准素分解.

证明 由于每个理想都是有限个不可约理想的交, 而不可约理想都是准素的, 得证. $\square$

命题 1.24.5 在 Noether 环 A 中, 每个理想 $\mathfrak{a}$ 都包含其根 $r(\mathfrak{a})$ 的一个幂次.

证明 令 $x_1, \cdots, x_k$ 生成 $r(\mathfrak{a})$, 由于 $x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$, 令 $m = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) + 1$, 我们知道 $r(\mathfrak{a})^m$ 由 $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$ 生成, 其中 $\sum r_i = m$, 由抽屉原理我们知道至少有一个 $r_i \geq n_i$,

从而我们知道 $r(\mathfrak{a})^m \subset \mathfrak{a}$. □

推论 1.24.6 诺特环的幂零元根是幂零的.

证明 正在上面命题中取 $\mathfrak{a} = (0)$ 即可. □

推论 1.24.7 A 是 Noether 环, $\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想, $\mathfrak{q}$ 是 A 的理想, TFAE:

- (1) $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$ -准素的.
- (2) $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$.
- (3) $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ 对于某个 $n > 0$ 成立.

证明 (1) 推 (2) 是定义, (2) 推 (1) 是命题 1.11.8, (2) 推 (3) 就是上面的命题, (3) 推 (2) 取根之后是显然的. □

定理 1.24.8 A 是 Noether 环, $I \subset A$ 是理想, 则

- (1) $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, 其中 $\mathfrak{q}_i \subset A$ 是准素理想并且 $\forall i \neq j$, 有 $r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$.
- (2) 令 $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$, 则 $\text{Ass}_A(A/I) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ 由 I 唯一决定.
- (3) 如果 $\mathfrak{p} \supset I$ 是包含 I 的一个极小素理想, 则存在 i 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \in \text{Ass}_A(A/I)$ 并且对应的准素理想 $\mathfrak{q}_i$ 被 I 与 $\mathfrak{p}_i$ 唯一决定.

证明 考虑准素分解的第一和第二唯一性定理即可. □

注记 1.24.9 只有有限多个包含 I 的极小素理想. 我们还是假设 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, 我们知道有

$$r(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I, \mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I, \mathfrak{p} \text{ minimal}} \mathfrak{p}$$

最右端是一个有限交.

1.25 分次环与分次模

定义 1.25.1 (Graded Ring) 一个分次环是指一个环 R 和一个直和分解

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

其中的直和为 Abel 群的直和, 并且满足

$$R_i R_j \subset R_{i+j}, \quad \forall i, j \geq 0$$

R 中的一个**齐次元素**是 R_i 中的一个元素, **齐次理想**是由齐次元素生成的理想. 对任意的 $f \in R$, 有唯一的写法

$$f = f_0 + f_1 + \cdots, \quad f_i \in R_i$$

注记 1.25.2 比如一个常见的例子, 考虑 $S = K[x_1, \cdots, x_r]$, 有

$$S = S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots$$

其中 S_i 为 i 次齐次多项式.

定义 1.25.3 (分次模) 已知 $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots$ 是一个分次环, 则 R 上的**分次模** M 定义为

$$M = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} M_n \quad \text{as abelian groups}$$

满足 $R_i M_j \subset M_{i+j}$, $\forall i, j$.

定义 1.25.4 (分次模同态) M, N 都是分次 A -模, 则一个**分次模同态** f 是一个模同态 $f: M \rightarrow N$ 满足 $f(M_n) \subset N_n$.

引理 1.25.5 I 为分次环 R 的一个齐次理想, I 由齐次元素 $f_1, \cdots, f_s$ 生成, 则对齐次元素 $f \in I$, 我们可以写成

$$f = \sum g_i f_i$$

其中 g_i 都是齐次元素且次数为 $\deg g_i = \deg f - \deg f_i$.

证明 我们首先知道

$$f = \sum G_i f_i$$

可以将 G_i 分解成齐次元素的和, 有

$$G_i = \sum g_{ik}$$

从而

$$f = \sum G_i f_i = \sum \sum g_{ik} f_i = \sum g_i f_i + (\Delta)$$

其中 $\deg g_i = \deg f - \deg f_i$, 而 Δ 中元素的次数都不等于 f , 从而在最终表达式中必定为 0, 即有

$$f = \sum g_i f_i$$

□

定理 1.25.6 (Hilbert Basis Theorem on Graded Rings) $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ 是分次环, 则

R 为诺特环 $\Leftrightarrow R_0$ 是诺特环且 R 是有限生成 R_0 代数.

证明 首先我们知道, 如果 R_0 诺特, 且 R 是有限生成 R_0 代数, 则由推论 1.22.3 知道 R 诺特.

反之, 如果 R 诺特, 我们有 $\bigoplus_{i \geq 1} R_i$ 是 R 的理想, 且有 $R_0 \cong R / \bigoplus_{i \geq 1} R_i$, 从而 R_0 诺特.

由 $\bigoplus_{i \geq 1} R_i$ 为 R 的理想, 结合 R 诺特, 我们知道 $\bigoplus_{i \geq 1} R_i$ 是有限生成的, 设生成元为 $f_1, \dots, f_m$, 将每一个 f_i 拆成齐次元素的和, 我们可以设 $\bigoplus_{i \geq 1} R_i$ 的生成元为 $x_1, \dots, x_s$, 其中 x_i 都是齐次元素.

设 $R' = R_0[x_1, \dots, x_s]$, 我们下面说明 $R' = R$, 这只需要说明对于任意的 $k \geq 0$, 有

$$R_k \subset R'$$

我们对 k 进行归纳, $k = 0$ 时自不必说, 下面假设 $k \leq m - 1$ 时成立, 考虑 $\forall y \in R_m \subset \bigoplus_{i \geq 1} R_i$, 我们由生成元可以知道

$$y = \sum_{i=1}^s a_i x_i$$

并且由引理知道可以选择 a_i 均为齐次元, 有 $\deg a_i = \deg y - \deg x_i = m - \deg x_i$, 从而有

$$a_i \in R_{m - \deg x_i}$$

由归纳假设知道 $a_i \in R'$, 从而有 $y \in R'$, 即 $R_m \subset R'$.

最后我们知道 $R = R' = R_0[x_1, \dots, x_s]$. □

1.26 Hilbert 零点定理

定理 1.26.1 (Noether 正规化定理) k 是一个域, $A \neq 0$ 是有限生成的 k -代数, 则存在 k -代数无关的 $t_1, \dots, t_n \in A$, 使得 A 在 $k[t_1, \dots, t_n]$ 上整并且是有限代数.

证明 令 $y_1, \dots, y_m \in A$, 使得 $A = k[y_1, \dots, y_m]$, 如果 $y_1, \dots, y_m$ 本身就是代数无关的, 则结束. 如果不是代数无关的, 则存在 $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ 使得

$$f(y_1, \dots, y_m) = 0$$

设 $d = \deg(f) + 1$, 对于任意的单项式

$$\alpha = ax_1^{d_1} \cdots x_m^{d_m}$$

令 $\ell(\alpha) = dd_1 + d^2d_2 + \cdots + d^{m-1}d_{m-1} + d_m$.

则对于任意的 f 中单项式 $\alpha \neq \beta$, 则 $\ell(\alpha) \neq \ell(\beta)$. 于是对于任意的 $1 \leq i \leq m-1$, 令 $x_i = y_i - y_m^{d^i}$, 则

$$f(x_1 + y_m^d, x_2 + y_m^{d^2}, \cdots, x_{m-1} + y_m^{d^{m-1}}, y_m) = 0$$

从而对于任意的 f 中单项式 $\alpha = ax_1^{d_1} \cdots x_m^{d_m}$, 得到 $ay_m^{\ell(\alpha)}$. 从而 y_m 在 $k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 上整, 并且

$$A = k[x_1, \cdots, x_{m-1}, y_m]$$

于是 A 在 $k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 上整, 那么归纳, 知道存在 $B \subset k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 同构于多项式代数, 并且 $k[x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 在 B 上整, 则 A 在 B 上整. $\square$

推论 1.26.2 (Zariski 引理) A 是有限生成 k -代数, 若 A 是一个域, 则 A 是一个 k 的有限扩张.

证明 由 Noether 正规化定理我们知道存在一个同构于多项式环的 k -子代数 $R \subset A$, 使得 A 在 R 上整, 我们下面说明 $R = k$. 反证, 则 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$, 则 $x_1^{-1} \in A \setminus R$, 这不可能, 这是因为多项式环是整闭的. $\square$

推论 1.26.3 (弱零点定理) k 是代数闭域, $n \geq 1$, 考虑 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$, 则

- (1) 任意 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 都形如 $(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$.
- (2) $I \subsetneq k[x_1, \cdots, x_n]$ 是理想, 则存在 $(a_1, \cdots, a_n) \in k^n$, 使得

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \quad \forall f \in I$$

证明 (1) 对于任意的 $\mathfrak{m} \subset R$ 是极大理想, 我们知道

$$k[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m}$$

是 k 的一个有限扩张, 再由 k 是代数闭, 我们知道

$$k[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m} \cong k$$

令 a_i 为 x_i 在 $R/\mathfrak{m}$ 中的像, 我们知道

$$(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) \subset \mathfrak{m}$$

再由于是极大理想, 我们知道 $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \mathfrak{m}$.

(2) 任取极大理想 $\mathfrak{m} \supset I$, 我们知道 $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, 则我们知道成立. $\square$

定理 1.26.4 (零点定理代数形式) k 是域, A 是有限生成 k 代数, 则 (用 $J(A)$ 表示 A 的大根, 也叫 Jacobson 根)

$$J(A) = \text{Nil}(A)$$

证明 不妨设 $A \neq 0$, 若 $J(A) \supsetneq \text{Nil}(A)$, 取 $a \in J(A) \setminus \text{Nil}(A)$, 则我们取

$$S = \{1, a, a^2, \dots\} \subset A$$

为一个乘法封闭子集, 我们知道 $A_a \neq 0$, 取一个 A_a 的极大理想 $\mathfrak{p}$, 并且我们知道 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$ 是 $\mathfrak{p}$ 在 $A \rightarrow A_a$ 的原像, 结合前面的推论我们知道 $A_a/\mathfrak{p}$ 是 k 的有限扩张.

由于 $A/\mathfrak{q} \subset A_a/\mathfrak{p}$, 由于是有限生成的, 我们由等价条件知道 $A/\mathfrak{q}$ 在 k 上整, 这告诉我们 $A/\mathfrak{q}$ 是域, 即 $\mathfrak{q}$ 是极大理想, 但是与 $a \notin \mathfrak{q}$ 矛盾. $\square$

推论 1.26.5 k 是域, $I \subsetneq k[x_1, \dots, x_n]$ 为理想, 则

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ max ideal}} \mathfrak{m}$$

证明 我们只需要考虑 $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$, 我们有

$$J(A) = \text{Nil}(A)$$

注意这里的 $\text{Nil}(A)$ 在商环原像就是 $\sqrt{I}$, 而 $J(A)$ 拉回去的原像就是所有包含 I 的极大理想之交. $\square$

定理 1.26.6 (Hilbert's Nullstellensatz(强形式)) k 是代数闭域, 考虑环 $k[x_1, \dots, x_n]$, 则映射

$$\Phi: \{\text{根理想}\} \rightarrow \{\mathbb{A}^n(k) \text{ 中闭集}\}, \quad \mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$$

是一个双射, 其逆映射 Φ^{-1} 定义为

$$V \mapsto \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \forall x \in V : f(x) = 0\}$$

证明 实际上是想说明

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

利用前面的零点定理的代数形式可以更快速地得到. 考虑 $\mathfrak{a}$ 是 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的一个理

想, 我们可以得到

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ max ideal}} \mathfrak{m}$$

注意到若令 $p = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathfrak{m}_p = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, 则

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_p \iff \forall f \in \mathfrak{a}, f(p) = 0 \iff p \in V(\mathfrak{a})$$

所以我们注意到

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{p \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}_p = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ max ideal}} \mathfrak{m}$$

所以得到了

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ max ideal}} \mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

□

注记 1.26.7 注意到代数形式并不要求 k 是代数闭的, 所以代数形式实际上对应的是更加普遍的情况.

注记 1.26.8 其背后的代数结构为: 有限生成代数一定是 Jacobson 环. 所谓 Jacobson 环指满足所有素理想都是极大理想的交的环. 其证明也很简单, 我们考虑 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 则 $B = A/\mathfrak{p}$ 仍然是有限生成代数, 所以

$$J(B) = \text{Nil}(B)$$

拉回到 A 中即

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$$

1.27 离散赋值环

命题 1.27.1 A 是一个一维的 Noether 整环, 则 A 的每个非零理想都可以唯一地表示为准素理想的乘积, 并且这些准素理想的 radical 都是互不相同的.

证明 由于 A Noether, $\mathfrak{a}$ 有一个极小准素分解

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$$

其中 $\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$ -准素的, 由于 $\dim A = 1$, 所以我们知道整环 A 的非零素理想都是极大

理想, 于是我们知道 $\mathfrak{p}_i$ 是两两互素的, 于是我们知道 $\mathfrak{q}_i$ 是两两互素的, 于是

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{q}_i = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i = \mathfrak{a}$$

反过来, 如果 $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$, 则我们知道 $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$, 这是 $\mathfrak{a}$ 的一个极小准素分解, 其中每个 $\mathfrak{q}_i$ 都是 isolated primary component, 从而被唯一决定. $\square$

定义 1.27.2 (DVR) K 是一个域, 则 K 上的一个**离散赋值 (discrete valuation)** 是从 K^* (作为乘法群) $\rightarrow \mathbb{Z}$ 的一个满射, 使得

$$(1) \ v(xy) = v(x) + v(y), \text{ 即 } v \text{ 是一个同态.}$$

$$(2) \ v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)).$$

集合 $\{0\} \cup \{x \in K^*: v(x) \geq 0\}$ 构成一个环, 我们称之为 v 的**赋值环**, 离散赋值的赋值环称为**离散赋值环 (DVR)**.

例 1.27.3 • p 是素数, 考虑 $\nu_p: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ 为 p -adic 赋值, 则得到 p 进整数环 $\mathbb{Z}_{(p)}$.

• k 是域, 令 $K = k(x) \supset k[x] \ni f$, 其中 f 为不可约多项式, 考虑 $\mathfrak{p}_f = (f)$ 为素理想, 则

$$\nu_f: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$$

有其赋值环 $k[x]_{\mathfrak{p}_f}$.

定义 1.27.4 一个整环 A 称为**离散赋值环 (DVR)**, 如果存在其分式域 K 上的一个离散赋值, 使得赋值环为 A .

注记 1.27.5 首先我们知道赋值环是局部环, 并且其极大理想是

$$\{x \in K: v(x) > 0\}$$

注记 1.27.6 我们考虑离散赋值环 A 中两个不同的元素 x, y , 满足 $v(x) = v(y)$, 于是有 $v(xy^{-1}) = 0$, 令 $u = xy^{-1}$ 不在 A 的极大理想中, 从而是一个单位. 所以有 $(x) = (y)$.

引理 1.27.7 A 是 DVR, 则 A 是 Noether 局部一维整环, 并且 A 的所有非零理想都是其极大理想 $\mathfrak{m}$ 的一个幂次.

证明 由前面的 remark 我们知道 A 是一个局部环, 对于 $\forall 0 \neq \mathfrak{a} \subset A$ 为理想, 存在一个极小的 $k \in \mathbb{N}$ 使得存在 $a \in \mathfrak{a}$, 有 $v(a) = k$. 由于

$$v: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$$

满射告诉我们对于任意的 $y \in A$, $v(y) \geq k$, 存在 $u \in A$ 使得 $v(u) = v(y) - v(a) \geq 0$, 有 $(ua) = (y)$, 于是我们知道 $y \in \mathfrak{a}$, 所以有

$$\mathfrak{m}_k := \mathfrak{a} = \{y \in A: v(y) \geq k\}$$

得到唯一的降链

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_3 \supset \cdots$$

所以我们知道 A 是 Noether 的, 因为任何的升链都是上面降链的一个从右往左的子链, 必在有限步内停止. 再由于 $v: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ 是满射, 存在 $x \in \mathfrak{m}$ 使得 $v(x) = 1$, 于是 $\mathfrak{m} = (x)$, $\mathfrak{m}_k = (x)^k$. 所以 $\mathfrak{m}$ 是唯一的非零素理想, 于是 $\dim A = 1$.

综上我们知道 A 是一个一维的 Noether 局部整环. □

命题 1.27.8 A 是一个 Noether 局部整环, 维数为 1, $\mathfrak{m}$ 是其极大理想, $k = A/\mathfrak{m}$ 是其剩余域, TFAE:

- (1) A 是 DVR.
- (2) A 整闭.
- (3) $\mathfrak{m}$ 是主理想.
- (4) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$.
- (5) 所有非零理想都是 $\mathfrak{m}$ 的幂.
- (6) 存在 $x \in A$ 使得所有非零理想都形如 (x^k) , $k \geq 0$.

证明 我们先给出两个 remarks:

(A) 如果 $\mathfrak{a}$ 是非 $(0), (1)$ 的理想, 则 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ -准素的, 并且存在 n 使得 $(\mathfrak{m})^n \subset \mathfrak{a}$. 这是根据推论 1.24.7.

(B) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$, $\forall n \geq 0$, 这是根据命题 1.20.7.

(1) $\Rightarrow$ (2): 由于赋值环都是整闭的, 所以 DVR 是整闭的.

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $a \in \mathfrak{m}$, $a \neq 0$, 由 (A) 知道存在整数 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subset (a)$, $\mathfrak{m}^{n-1} \not\subset (a)$. 选择 $b \in \mathfrak{m}^{n-1} - (a)$, 令 $x = a/b \in K$, 其中 K 为 A 的分式域, 我们知道 $x^{-1} \notin A$, 否则 $b \in (a)$, 与 b 的取法矛盾. 所以 x^{-1} 在 A 上不是整元, 于是我们知道 $x^{-1}\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}$, 否则有 $x^{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, 可以推出 $A[x^{-1}]\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, 并且在整环上, 所以 $\mathfrak{m}$ 是一个忠实 $A[x^{-1}]$ 模, 并且是一个有限生成的 A 模, 由命题 1.14.4 这代表着 x^{-1} 在 A 上整, 矛盾.

但是因为 $a \in \mathfrak{m}$, $x^{-1}\mathfrak{m} = \frac{b}{a}\mathfrak{m} \subset \frac{\mathfrak{m}^n}{a} \subset A$, 这告诉我们 $x^{-1}\mathfrak{m} = A$, 所以 $\mathfrak{m} = Ax = (x)$ 是主理想.

(3) $\Rightarrow$ (4): 由于 $\mathfrak{m}$ 是主理想, 所以 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$, 再由 (B) 知道 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (5): 由于 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$, 由推论 1.2.7 我们知道 $\mathfrak{m}$ 是主理想, 对于任意的理想 $0 \neq \mathfrak{a} \subsetneq A$, 由 (A) 知道存在 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}$, 考虑 $A/\mathfrak{m}^n$ 是零维诺特局部环, 于是是 Artin 局部环. 由命题 1.20.9 的证明过程知道 $\mathfrak{a}$ 在 $A/\mathfrak{m}^n$ 中的像 $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}^n$ 是 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ 的幂, 于是 $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^n$, 由商环理想的一一对应知道 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r$, 于是是 $\mathfrak{m}$ 的幂.

(5) $\Rightarrow$ (6): 我们知道 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, 从而存在 $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, 但是我们知道 $(x) = \mathfrak{m}^r$, 我们知道 $r = 1$, $(x) = \mathfrak{m}$, $(x^k) = \mathfrak{m}^k$, 故得证.

(6) $\Rightarrow$ (1): 由 $\mathfrak{m} = (x)$, 由 (B) 知道 $(x^k) \neq (x^{k+1})$, 所以如果 a 是 A 的任何非零元, 我们知道

$$(a) = (x^k)$$

对于某一个确定的 k 成立, 我们可以定义

$$v: K^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad v(a) = k, a \in A, \quad v(a/b) = v(a) - v(b)$$

我们知道 v 是一个良定义的离散赋值, 并且 A 是其赋值环. □

1.28 Dedekind 整环

定理 1.28.1 A 是一个一维诺特整环, TFAE:

- (1) A 整闭.
- (2) A 的每个准素理想都是一个素理想的幂.
- (3) A 的每个局部化 $A_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{p} \neq 0)$ 都是 DVR.

证明 (1) $\iff$ (3): 回忆整闭是一个局部性质, 并且一维诺特局部整闭整环是 DVR, 故得证.

(2) $\iff$ (3): 回忆准素理想和理想的幂在局部化中表现良好, 结合上面命题可以说明. □

定义 1.28.2 (Dedekind 整环) 我们称一维整闭诺特整环为 **Dedekind 整环**.

注记 1.28.3 根据上面的定理我们知道 Dedekind 整环有等价定义, 满足上面定理中的任何一个条件即可.

注记 1.28.4 由于 DVR 是一维诺特整闭整环, 所以 DVR 自然是 Dedekind 整环.

例 1.28.5 • PID 是 Dedekind 整环: 首先 PID A 是 Noether 的, 并且容易说明是一维的, 再考虑其局部化环仍为主理想整环, 所以局部化 $A_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想是主理想, 于是有 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 DVR, 于是知道 Dedekind 整环.

- 考虑 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张, $\mathcal{O}_K$ 为 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的整闭包, 则 $\mathcal{O}_K$ 是 Dedekind 整环.
- k 是代数闭域, K 是 k 的一个有限生成一次超越扩张, 即存在 $K/k(x)$ 是有限扩张, 令 A_1 为 $k[x]$ 在 K 中的整闭包, A_2 在 $k[x^{-1}]$ 在 K 中的整闭包, 则 A_1, A_2 是 Dedekind 整环.

定义 1.28.6 (Algebraic Number Field) 我们称 $\mathbb{Q}$ 的一个有限代数扩张 K 为**代数数域**, 其**代数整数环**为 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的整闭包.

定理 1.28.7 (代数整数环是 DDK) K 是代数数域, 则其代数整数环是 Dedekind 整环.

证明 我们知道 K 是 $\mathbb{Q}$ 的一个有限可分扩张, 令 A 为其代数整数环, 由命题 1.16.8 知道存在 K 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组基 $v_1, \dots, v_n$ 使得

$$A \subset \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}v_i$$

从而我们知道 A 是一个有限生成 $\mathbb{Z}$ -模, 从而是 Noether $\mathbb{Z}$ -模, 容易说明 A 作为环是 Noether 的. 再根据 A 是整闭包, 知道 A 是整闭的. 下面只需要说明是一维的, 即所有非零素理想都是极大理想. 考虑 A 的非零素理想 $\mathfrak{p}$, 由推论 1.15.4 知道如果 $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = 0$, 则 $\mathfrak{p} = 0$, 所以 $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ 不为零, 且为 $\mathbb{Z}$ 的非零素理想, 所以 $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ 是极大理想, 再由推论 1.15.3 知道 $\mathfrak{p}$ 是极大理想. 于是一维. $\square$

1.29 分式理想

定义 1.29.1 (Fractional Ideals) A 是整环, K 是 A 的分式域, 一个 A -模 $M \subset K$ 称为 A 的**分式理想**, 如果 $xM \subset A$ 对于某个 $A \ni x \neq 0$. 我们记

$$(A : M) = \{x \in K : xM \subset A\}$$

容易知道 $(A : M)$ 为一个 K 中的 A -模.

注记 1.29.2 特别地, 我们平时所称的理想, 现在称之为**整理想 (integral ideals)** 是 $x = 1$ 的分式理想, 任何元素 $u \in K$ 都可以生成一个分式理想, 记为 (u) 或者 Au , 称之为主理想.

例 1.29.3 $M \subset K$ 是一个有限生成的 A -模, 则 M 是分式理想. 这是因为我们考虑 M 的一组生成元 $a_1/b_1, \dots, a_n/b_n$, 我们考虑 $x = b_1 \cdots b_n \in A$ 有 $xM \subset A$, 于是 M 是分式理想.

特别地, 如果 A 是 Noether 的, 则

$$\{\text{分式理想}\} = \{\text{有限生成 } A\text{-模} \subset K\}$$

定义 1.29.4 (Invertible ideal) 一个 A -模 $M \subset K$ 称为**可逆理想**, 如果存在 A -模 $N \subset K$, 使得 $MN = A$. 事实上这样的 N 是唯一的并且等于 $(A : M)$.

注记 1.29.5 唯一且等于 $(A : M)$ 的原因是: 显然我们有 $N \subset (A : M) = (A : M)MN = ((A : M)M)N \subset AN = N$.

例 1.29.6 对于任意的 $x \in K^\times$, 有 $Ax \subset K$ 是一个分式理想, 且有 $(A : Ax) = Ax^{-1}$.

注记 1.29.7 设 M 为 A 的一个分式理想, 我们知道存在 $x \in A$ 使得 $xM \subset A$ 为 A 的整理想, 如果 xM 可逆, 即存在 A -模 N 使得 $xMN = (A)$, 其中 $N = (A : xM)$, 令 $L = xN$, 我们有 $ML = A$, 即 M 是可逆理想.

所以如果想证明所有的非零分式理想可逆, 只需要证明所有的整理想可逆.

引理 1.29.8 (可逆理想是分式理想) 一个 A -模 $M \subset K$ 是可逆理想, 则 M 是有限生成 A -模, 从而是分式理想.

证明 由于 M 是可逆理想, 所以有 $M(A : M) = A$, 所以存在 $x_i \in M$ 与 $y_i \in (A : M)$ 使得

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$$

因此对于任何的 $x \in M$ 我们有 $x = \sum_{i=1}^n (y_i x) x_i$, 其中 $y_i x \in A$, 所以 M 被 $x_1, \dots, x_n$ 生成. $\square$

命题 1.29.9 (可逆理想是局部性质) M 是 A 的分式理想, TFAE:

- (1) M 是可逆理想.
- (2) M 是有限生成的, 且对于任意的 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, $M_{\mathfrak{p}}$ 是可逆的.
- (3) M 是有限生成的, 且对于任意的极大理想 $\mathfrak{m} \subset A$, 有 $M_{\mathfrak{m}}$ 可逆.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 由局部化的性质, 我们知道

$$A_{\mathfrak{p}} = (M \cdot (A : M))_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \cdot (A_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}})$$

由可逆理想知道有限生成, 由上式知道是 $M_{\mathfrak{p}}$ 是可逆理想.

(2) $\Rightarrow$ (3): 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1): 令 $\alpha = M \cdot (A : M)$ 是一个整理想, 对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$, 我们有

$$\alpha_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}} \cdot (A_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) = A_{\mathfrak{m}}$$

所以我们知道 $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}$, 所以 $\mathfrak{a} = A$, 于是 $\mathfrak{m}$ 是可逆理想. $\square$

命题 1.29.10 (局部整环中 DVR $\iff$ 非零分式理想都可逆) A 是一个局部整环, 则 A 是 DVR $\iff A$ 的每个非零分式理想都是可逆理想.

证明 $\Rightarrow$: 由于 DVR 的非零理想都是主理想, 我们设极大理想 $\mathfrak{m}$ 的生成元为 x , 设 $M \neq 0$ 为 A 的一个分式理想, 则存在 $y \in A$ 使得 $yM \subset A$, 因此 yM 是一个整理想, 也就是说 $yM = (x^r)$, 因此 $M = (x^{r-s})$, 其中 $s = v(y)$.

$\Leftarrow$: 每一个非零的整理想都是可逆理想, 因此是有限生成的, 所以 A 是一个 Noether 环. 所以只需要证明所有的非零整理想都是极大理想 $\mathfrak{m}$ 的幂.

假设这是错的, 令 Σ 为所有不是 $\mathfrak{m}$ 的幂的非零理想构成的集合, 我们知道其有极大元 $\mathfrak{a}$. 则 $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{m}$. 因此有 $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{m}$, 因此有 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \subsetneq A$, 是一个整理想. 并且 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$, 如果 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, 则知道 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}$, 由 Nakayama 引理知道 $\mathfrak{a} = 0$, 因此有 $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$, 因此有 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个幂, 从而 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的幂, 矛盾. $\square$

定理 1.29.11 (整环中 Dedekind $\iff$ 非零分式理想都是可逆理想) A 是一个整环, 则 A 是 Dedekind 整环 $\iff A$ 的每个非零分式理想都是可逆理想.

证明 $\Rightarrow$: 设 M 是非零分式理想, A 是 Noether 的, 知道 M 是有限生成的, 考虑 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, 由 $M_{\mathfrak{p}}$ 是局部整环 DVR $A_{\mathfrak{p}}$ 的非零分式理想, 从而知道 $M_{\mathfrak{p}}$ 可逆, 结合可逆是局部性质, 知道 M 可逆.

$\Leftarrow$: 由于每个非零的整理想都是可逆理想, 从而是 Noether 的. 我们下面说明对于任意的 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, $A_{\mathfrak{p}}$ 是 DVR, 这等价于证明 $A_{\mathfrak{p}}$ 的每个非零分式理想都是可逆理想, 进而只需要证明所有整理想可逆, 令 $\mathfrak{b}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 的非零整理想, 令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$. 我们知道 $\mathfrak{a}$ 可逆, 由可逆是局部性质, 知道 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ 可逆. 所以 A 是 Dedekind 整环. $\square$

推论 1.29.12 A 是一个 Dedekind 整环, 则 $I = \{A \text{ 的非零分式理想}\}$ 构成了一个 Abel 群.

注记 1.29.13 这个群被称为 A 的 group of ideals, 记为 I , 并且这个 Abel 群还是自由 Abel 群, 其基为 $\text{Spec } A - \{0\}$.

令 $K^\times$ 为 A 的分式域去掉零之后的乘法群, 每一个 $u \in K^\times$ 定义了一个分式理想 (u) , 并且映射

$$u \mapsto (u)$$

诱导了一个同态

$$\varphi: K^\times \rightarrow I$$

其像 P 是所有主分式理想, 我们称商群 (同时也是 $\text{Coker } \varphi$) $H = I/P$ 为 A 的**理想类群 (ideal class group)**. 其核 $U = \text{Ker } \varphi$ 为所有 $u \in K^\times$ 使得 $(u) = (1)$ 的元素构成

的集合, 所以是 A 的单位群. 我们得到正合列

$$1 \rightarrow U \rightarrow K^\times \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow 1$$

注记 1.29.14 • 如果 $A = \mathcal{O}_K$, 其中 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张, 则 H 是一个有限群. 这个性质对于一般的 Dedekind 整环不成立.

- A 是 Dedekind 整环, 则

$$H \text{ trivial} \iff A \text{ is a PID} \iff A \text{ is a UFD}$$

1.30 拓扑与完备化

令 G 是一个拓扑 Abel 群.(不必 Hausdorff). 如果 $\{0\}$ 在 G 中是闭集, 则 $G \times G$ 的对角是闭集, 因为可以看做

$$(x, y) \rightarrow x - y$$

的原像, 从而 G 是 Hausdorff 的.(实际上对于拓扑群而言, T_0 可以推 $T_{3.5}$) 由于平移映射 $T_a: x \mapsto x + a$ 是同胚, 所以 G 的拓扑完全由在 0 处的局部基所决定.

为方便起见, 假设 G 在 0 处存在可数邻域基, 则 G 的完备化 $\hat{G}$ 按照通常方式定义 Cauchy 列来诱导. 具体来说一个序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 如果对 0 的任意邻域 U , 都存在 $N_U > 0$, 使得 $m, n > N_U$ 时, 有

$$x_m - x_n \in U$$

两个 Cauchy 列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 被称为等价的, 如果

$$x_n - y_n \rightarrow 0 \in G$$

记 $\hat{G}$ 为 Cauchy 列的等价类. 容易看出来 $\hat{G}$ 是一个 Abel 群. 对于任意的 $x \in G$, 我们可以定义常值映射

$$\varphi: G \rightarrow \hat{G}, \quad x \mapsto [(x_n = x)]$$

于是自然诱导了一个 Abel 群同态

$$\varphi: G \rightarrow \hat{G}$$

注意 φ 一般来说并不是一个单射，实际上我们有

$$\text{Ker } \varphi = \bigcap_{0 \in U} U$$

所以 φ 是单射当且仅当 G Hausdorff. 如果 H 是另外一个拓扑 Abel 群，并且有连续同态

$$f: G \rightarrow H$$

则很显然 f 将 Cauchy 列映为 Cauchy 列，从而自然诱导了一个映射

$$\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \hat{H}$$

并且这个也是连续的，我们还注意到是保持复合的，即

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$$

我们现在聚焦一些特殊情况，假设 $0 \in G$ 有由子群 $G_n < G$ 构成的邻域基，即

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots$$

使得 $U \subseteq G$ 是 0 的一个邻域当且仅当包含某个 G_n . 一个典型例子就是 $\mathbb{Z}$ 上的 p -adic 拓扑，其中 $G_n = p^n \mathbb{Z}$. 注意在这种情况下 G_n 是既开又闭的，我们考虑 $g \in G_n$ ，则 $g + G_n \subseteq G_n$ 为 g 的邻域，从而 G_n 开，另外一方面由于 $h + G_n$ 是开集，所以我们有

$$G - G_n = \bigcup_{h \notin G_n} (h + G_n)$$

是开集，所以 G_n 是闭集.

下面我们以一种代数的方法来刻画完备化，任何一个柯西列在 G/G_n 中都是最终常值的，所以我们可以定义映射

$$\theta_{n+1}: G/G_{n+1} \rightarrow G/G_n$$

为截断映射，很容易看出来这诱导了一个逆向极限，即

$$\hat{G} = \varprojlim G/G_n$$

可以证明通过取 Cauchy 列的等价类得到的完备化与逆向极限是同构的，这种同构是代数同构与拓扑同胚. 这种逆向极限的定义有很多好处. 首先很容易观察出来 θ_{n+1} 总是满射. 我们称满足这样的逆向系统为满射逆向系统. 设 $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}$ 为三个逆

向系统满足正合列的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n \longrightarrow 0
 \end{array}$$

这很自然诱导了一个逆向极限之间的态射

$$0 \rightarrow \varprojlim A_n \rightarrow \varprojlim B_n \rightarrow \varprojlim C_n \rightarrow 0$$

但是这不一定正合. 不过我们有命题：

命题 1.30.1 如果 $0 \rightarrow \{A_n\} \rightarrow \{B_n\} \rightarrow \{C_n\} \rightarrow 0$ 为逆向系统的正合列，则

$$0 \rightarrow \varprojlim A_n \rightarrow \varprojlim B_n \rightarrow \varprojlim C_n$$

总是正合的，如果 $\{A_n\}$ 还是一个满射逆向系统，则正合：

$$0 \rightarrow \varprojlim A_n \rightarrow \varprojlim B_n \rightarrow \varprojlim C_n \rightarrow 0$$

证明 注意到逆向极限是右伴随，所以左正合，考虑 $\varprojlim$ 的导出函子，有正合列

$$0 \rightarrow \varprojlim A_n \rightarrow \varprojlim B_n \rightarrow \varprojlim C_n \rightarrow \varprojlim^1 A_n \rightarrow \varprojlim^1 B_n \rightarrow \varprojlim^1 C_n$$

满射系统显然满足 Mittag-Leffler 条件，从而可见 $\varprojlim^1 A_n = 0$ ，故正合。 $\square$

推论 1.30.2 令 $0 \rightarrow G' \rightarrow G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 0$ 为一个群的正合列， G 有由子群集 $\{G_n\}$ 产生的拓扑， G', G'' 给予诱导拓扑和商拓扑，则

$$0 \rightarrow \hat{G}' \rightarrow \hat{G} \rightarrow \hat{G}'' \rightarrow 0$$

正合.

证明 我们注意到正合列

$$0 \rightarrow \frac{G'}{G' \cap G_n} \rightarrow \frac{G}{G_n} \rightarrow \frac{G''}{p(G_n)} \rightarrow 0$$

并且交换图性质是自然的，而 $\{G'/(G' \cap G_n)\}$ 为满射系统，所以取逆向极限之后即

$$0 \rightarrow \hat{G}' \rightarrow \hat{G} \rightarrow \hat{G}'' \rightarrow 0$$

正合. □

推论 1.30.3 $\hat{G}_n$ 是 $\hat{G}$ 的子群, 并且有

$$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n$$

证明 要看出来是子群, 对

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow G \rightarrow G/G_n \rightarrow 0$$

取逆向极限即可, 而在 G/G_n 中, $\{0\}$ 是一个开集, 所以是一个离散拓扑, 离散拓扑的完备化还是自己, 所以

$$\widehat{G/G_n} \cong G/G_n$$

所以我们对上式取逆向极限即

$$0 \rightarrow \hat{G}_n \rightarrow \hat{G} \rightarrow G/G_n \rightarrow 0$$

所以

$$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n$$

□

我们对上式再取逆向极限, 有

$$\hat{\hat{G}} \cong \hat{G}$$

我们称 G 是完备的, 如果 $\varphi: G \rightarrow \hat{G}$ 是同构. 所以我们知道完备化之后的 G 就是完备的. 同时我们注意到

$$\hat{G} \subseteq \prod_g G/G_n$$

其中 $\hat{G}$ 为那些满足相容性的元素组成, 由于 G/G_n 是离散, 从而 Hausdorff, 而 Hausdorff 任意可乘, 所以 $\hat{G}$ 作为 Hausdorff 空间的子空间自然也是 Hausdorff 的.

我们所考虑的此类拓扑群中, 最重要的一类例子由 $G = A$, $G_n = \mathfrak{a}^n$ 给出, 其中 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的一个理想. 如此在 A 上定义的拓扑称为 **$\mathfrak{a}$ -进拓扑**, 或者简称为 **$\mathfrak{a}$ -拓扑**. 由于 $\mathfrak{a}^n$ 都是理想, 不难验证在赋以此拓扑后 A 成为一个拓扑环, 即其环运算是连续的. 该拓扑是 Hausdorff 的 $\iff \bigcap \mathfrak{a}^n = (0)$, 道理是若 $x \neq y$, 则考虑 $x + \mathfrak{a}^n$ 与 $y + \mathfrak{a}^n$, 这样子对充分大的 n 总会无交, 故而 Hausdorff. A 的完备化 $\hat{A}$ 仍然是一个拓扑环; $\varphi: A \rightarrow \hat{A}$ 是一个连续环同态, 其核为 $\bigcap \mathfrak{a}^n$.

在脑海中构造 $\mathfrak{a}$ -进拓扑的一个好办法是引入**伪度量**, 即对 $x, y \in A$, 将 $d(x, y)$ 定义为 c^{-n} ($c > 1$), 其中 n 使得 $x - y \in \mathfrak{a}^n$ 并且 $x - y \notin \mathfrak{a}^{n+1}$, 这样 $d(x, y)$ 越小, x 与 y 越近. 当 A 的 $\mathfrak{a}$ -拓扑是 Hausdorff 的, 伪度量就变成度量, 并且是一个超度量, 即满足强三角不等式.

对于 A -模 M 也有类似结论: 取 $G = M$, $G_n = \mathfrak{a}^n M$. 这定义了 M 上的 $\mathfrak{a}$ -拓扑, M 的完备化 $\hat{M}$ 是一个拓扑 $\hat{A}$ -模 (即 $\hat{A} \times \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ 是连续的), 道理在于 $M/\mathfrak{a}^n M$ 是 $A/\mathfrak{a}^n$ -模, 同时取逆向极限即看出来 $\hat{M}$ 是 $\hat{A}$ -模. 连续的话取乘积拓扑的拓扑基 $(a + \hat{\mathfrak{a}}^l) \times (m + \hat{\mathfrak{a}}^k \hat{M})$, 我们观察 $am + \hat{\mathfrak{a}}^n \hat{M}$, 显然有

$$(a + \hat{\mathfrak{a}}^n) \cdot (m + \hat{\mathfrak{a}}^n \hat{M}) \subset am + \hat{\mathfrak{a}}^n \hat{M}$$

所以在 am 处连续, 故连续. 如果 $f: M \rightarrow N$ 是任意 A -模同态, 则有 $f(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n f(M) \subseteq \mathfrak{a}^n N$, 因此 f 是连续的 (关于 M 和 N 上的 $\mathfrak{a}$ -拓扑), 从而定义了 $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \hat{N}$.

例 1.30.4 (1) $A = k[x]$, 其中 k 是一个域且 x 是不定元; $\mathfrak{a} = (x)$. 此时 $\hat{A} = k[[x]]$, 即形式幂级数环.

(2) $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (p)$, p 为素数. 此时 $\hat{A}$ 是 p -进整数环. 其元素为无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, 其中 $0 \leq a_n \leq p-1$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 我们有 $p^n \rightarrow 0$.

1.31 Artin-Rees 引理

定义 1.31.1 (filtration) A 是一个环, $M \in \text{Mod}_A$, M 的一个滤过是一个子模链

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

其中 M_i 为 M 的子模, 滤过记为 (M_n) . 对于 $I \subset A$ 是理想, (M_n) 称为 **I -滤过**, 如果 $IM_n \subset M_{n+1}$ 对于每个 n 成立; 称为一个 **稳定 I -滤过**, 如果 $IM_n = M_{n+1}$ 对于充分大的 n 成立; 称为 **I -adic**, 如果 $M_n = I^n M$, $\forall n \geq 0$.

引理 1.31.2 如果 $(M_n), (M'_n)$ 都是 M 的稳定 (stable) I -滤过, 则存在一个整数 n_0 使得有 bounded difference, 即:

$$M_{n+n_0} \subset M'_n, \quad M'_{n+n_0} \subset M_n, \quad \forall n \geq 0$$

证明 由于 M_n 稳定, 所以存在 k 使得对于任意的 $n \geq 0$, 都有

$$M_{n+k} = I^n M_k$$

于是我们注意到

$$M_{n+k} \subseteq I^n M \subseteq M_n$$

同理存在 l 使得

$$M'_{n+l} \subseteq I^n M \subseteq M'_n$$

取 $n_0 = \max k, l$, 我们有

$$M_{n+n_0} \subseteq M_{n+k} \subseteq I^n M \subseteq M'_n$$

同理

$$M'_{n+n_0} \subseteq M'_{n+l} \subseteq I^n M \subseteq M_n$$

□

注记 1.31.3 这个引理告诉我们所有稳定 I -滤过定义的拓扑都是一样的, 统一称之为 I -拓扑.

定义 1.31.4 (Rees 代数) 我们定义 A 相对 I 的 **Rees 代数** 为

$$\mathcal{R}_I A = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots \cong A[tI]$$

如果 M 是一个 A -模, 并且 (M_n) 是一个 I -滤过, 定义

$$\mathcal{R}_I M = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} M_n$$

为对应分次 $\mathcal{R}_I A$ -模.

引理 1.31.5 A 是一个 Noether 环, M 是一个有限生成 A -模, (M_n) 是一个 I -滤过, TFAE:

(1) $\mathcal{R}_I M$ 是一个有限生成 $\mathcal{R}_I A$ -模.

(2) (M_n) 是稳定的.

证明 A Noether, M 有限生成, 从而 M 是 Noether A -模, 于是我们知道 M_n 都是有限生成的, 所以我们令

$$Q_n = \bigoplus_{r=0}^n M_r$$

Q_n 是 $\mathcal{R}_I M$ 的一个子群, 但是一般来说不是 $\mathcal{R}_I A$ -模, 但是它可以生成一个, 即

$$M_n^* = M_0 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus IM_n \oplus I^2 M_n \oplus \cdots = Q_n \oplus IM_n \oplus I^2 M_n \oplus \cdots$$

由于 Q_n 作为 A -模是有限生成的, 我们知道 M_n^* 作为 $\mathcal{R}_I A$ 模是有限生成的. 我们知道 M_n^* 构成了一个升链, 其并为 $\mathcal{R}_I M$, 由于 $\mathcal{R}_I A$ Noether, 我们知道 $\mathcal{R}_I M$ 作为 $\mathcal{R}_I A$ -模有限生成 $\iff$ 这个升链会停止, 即存在 n_0 使得 $\mathcal{R}_I M = M_{n_0}^* \iff M_{n_0+r} = I^r M_{n_0}$ 对 $\forall r \geq 0 \iff$ 滤过是稳定的. □

定理 1.31.6 (Artin-Rees Lemma) A 是一个 Noether 环, I 是 A 的一个理想, M 是一个有限生成 A -模, (M_n) 是一个稳定 I -滤过, 如果 M' 是 M 的一个子模, 则 $(M' \cap M_n)$ 是 M' 的一个稳定 I -滤过.

证明 我们有

$$I(M' \cap M_n) \subset IM' \cap IM_n \subset M' \cap M_{n+1}$$

因此我们知道 $(M' \cap M_n)$ 是一个 I -滤过, 因此其定义了一个分次 $\mathcal{R}_I A$ 模, 并且是 $\mathcal{R}_I M$ 的子模, 因此是有限生成的, 从而由上面引理知道成立. $\square$

若令 $M_n = I^n M$, 则我们有

推论 1.31.7 (常用的 Artin-Rees) 存在整数 n_0 使得对于任意的 $n \geq n_0$ 与 $k \geq 1$ 有

$$(I^{n+k} M) \cap M' = I^k((I^n M) \cap M')$$

定理 1.31.8 A 是一个 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 是理想, M 是有限生成 A -模, M' 是 A 的子模. 则滤过 $\mathfrak{a}^n M'$ 和 $\mathfrak{a}^n M \cap M'$ 有 bounded difference. 特别地, M' 的 $\mathfrak{a}$ -拓扑和 M' 在 M 的 $\mathfrak{a}$ -拓扑下的诱导拓扑相同.

证明 结合引理 1.31.2 和 Artin-Rees Lemma 1.31.6 立刻得到. $\square$

Artin-Rees 引理导出了上面的定理, 而上面定理说明了 $\mathfrak{a}$ -拓扑在子空间意义下表现良好, 从而使得完备化在正合列上表现良好:

命题 1.31.9 令

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

是诺特环 A 上有限生成模的正合列, $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想, 则关于 $\mathfrak{a}$ -adic 的完备化仍然正合:

$$0 \rightarrow \hat{M}' \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{M}'' \rightarrow 0$$

证明 由于 M' 的 $\mathfrak{a}$ -拓扑与其在 M 中的子空间拓扑相同, 由定理 1.31.8 和推论 1.30.2 立刻得到. $\square$

1.32 Noether 环与完备化

考虑 $\mathfrak{a}$ -进拓扑, 由于存在自然态射

$$A \rightarrow \hat{A}$$

所以我们可以把 $\hat{A}$ 看成是 A -代数, 于是对任何的 A -模 M , 可以得到 $\hat{A}$ -模 $\hat{A} \otimes_A M$. 很自然的问题是它和 $\hat{A}$ -模 $\hat{M}$ 之间是什么关系? 注意到 A -模同态 $M \rightarrow \hat{M}$ 诱导了

$$\hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{A} \otimes_A \hat{M} \rightarrow \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}$$

对于一般的 A , 这既不是单射也不是满射, 但是我们有

命题 1.32.1 对于任何的环 A , 如果 M 是有限生成的, 则 $\hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{M}$ 是满射, 如果额外 A 还是 Noether 的, 则是同构.

证明 完备化是逆向极限, 所以和有限直和交换, 因此如果 $F \cong A^n$, 则有

$$\hat{A} \otimes_A F \cong \hat{A}^n \cong \hat{F}$$

于是看到命题对有限秩自由模成立, 现在假设 M 是有限生成的, 则自然存在某个有限秩自由模 F 使得

$$0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

由张量积的右正合和推论 1.30.2, 我们得到

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{A} \otimes_A N & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A F & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & \hat{N}_{\text{ind}} & \longrightarrow & \hat{F} & \xrightarrow{\delta} & \hat{M} \longrightarrow 0 \end{array}$$

上下都是正合列, 其中 $\hat{N}_{\text{ind}}$ 是诱导拓扑的完备化, 由于 β 是同构, δ 是满射, 从而 γ 是满射, 第一部分得证.

下面假设 A 是 Noether 环, 则 N 也是有限生成的, $\hat{N}_{\text{ind}}$ 就是 $\hat{N}$, 所以 α 自然也是满射, 结合上下两个正合列, 蛇引理告诉我们

$$\text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$$

是正合列, 而 $\text{Ker } \beta = \text{Coker } \alpha = 0$, 所以 $\text{Ker } \gamma = 0$, 即 γ 还是单射, 所以同构. $\square$

命题 1.32.2 如果 A 是诺特环, $\mathfrak{a}$ 是理想, $\hat{A}$ 是 $\mathfrak{a}$ -adic 完备化, 则 $\hat{A}$ 是一个平坦 A -代数.

证明 由命题 1.7.2, 我们知道只需要对有限生成 A -模的单射 $M' \rightarrow M$ 证明 $\hat{A} \otimes_A M' \rightarrow \hat{A} \otimes_A M$ 是单射, 而我们有自然同构

$$\hat{A} \otimes_A M' \cong \hat{M}', \quad \hat{A} \otimes_A M \cong \hat{M}$$

所以由

$$\hat{M}' \rightarrow \hat{M}$$

是单射得到 $\hat{A}$ 确实是一个平坦 A -代数. □

命题 1.32.3 如果 A 是诺特的, $\hat{A}$ 是 $\mathfrak{a}$ -adic 完备化, 则

$$(1) \hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a} \cong \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}.$$

$$(2) \widehat{\mathfrak{a}^n} = (\hat{\mathfrak{a}})^n.$$

$$(3) \mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n / \hat{\mathfrak{a}}^{n+1}.$$

$$(4) \hat{\mathfrak{a}} \subseteq J(\hat{A}).$$

证明 由于 A Noether, $\mathfrak{a}$ 是有限生成的, 于是我们有同构

$$\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \cong \hat{\mathfrak{a}}$$

所以得到 (1). 现在对 $\mathfrak{a}^n$ 使用 (1) 就得到

$$\widehat{\mathfrak{a}^n} = \hat{A}\mathfrak{a}^n = (\hat{A}\mathfrak{a})^n = \hat{\mathfrak{a}}^n$$

利用推论 1.30.3 得到

$$A/\mathfrak{a}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n$$

考虑

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1} & \longrightarrow & A / \mathfrak{a}^{n+1} & \longrightarrow & A / \mathfrak{a}^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{a}}^n / \hat{\mathfrak{a}}^{n+1} & \longrightarrow & \hat{A} / \hat{\mathfrak{a}}^{n+1} & \longrightarrow & \hat{A} / \hat{\mathfrak{a}}^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

五引理告诉我们 ψ 是同构, 故 (3) 成立. 对于任意的 $x \in \hat{\mathfrak{a}}$, 可见

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

在 $\hat{A}$ 中收敛, 所以 $1-x$ 在 $\hat{A}$ 中是单位, 所以 $x \in J(\hat{A})$, (4) 得证. □

注记 1.32.4 注意这里 (3) 还可以利用平坦模的性质证明, 考虑正合列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}^{n+1} & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}^n & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A (\mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{a}}^{n+1} & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{a}}^n & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A M \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 $M = \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$, 于是我们有

$$\hat{A} \otimes_A (\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}) \cong \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$$

所以只需要计算 $\hat{A} \otimes_A M$ 即可, 我们可以对更广泛的 M 计算, 只要 $\mathfrak{a}M = 0$, 那么可以知道 M 作为 A 模和作为 $A/\mathfrak{a}$ 模是一样的, 所以可见

$$\begin{aligned} \hat{A} \otimes_A M &\cong \hat{A} \otimes_A (A/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M) \\ &\cong (\hat{A} \otimes_A A/\mathfrak{a}) \otimes_{A/\mathfrak{a}} M \\ &\cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M \\ &\cong A/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M \cong M \end{aligned}$$

倒数第二步使用了 $\hat{A}/\hat{\mathfrak{a}} \cong A/\mathfrak{a}$.

命题 1.32.5 A 是一个诺特局部环, $\mathfrak{m}$ 是极大理想, 则 $\mathfrak{m}$ -adic 完备化 $\hat{A}$ 是一个局部环, 极大理想是 $\hat{\mathfrak{m}}$.

证明 我们有

$$\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$$

所以 $\hat{\mathfrak{m}}$ 是极大理想, 又由于

$$\hat{\mathfrak{m}} \subset J(\hat{A}) \subset \hat{\mathfrak{m}}$$

所以 $\hat{\mathfrak{m}}$ 是唯一的极大理想, 故 $\hat{A}$ 是局部环. □

定理 1.32.6 (Krull Intersection Theorem) A 是一个 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 是理想, M 是有限生成 A -模, $\hat{M}$ 是 $\mathfrak{a}$ -adic 完备化, 则 $M \rightarrow \hat{M}$ 的 kernel

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$$

由被 $1 + \mathfrak{a}$ 的某些元素零化的 $x \in M$ 构成.

证明 $M \rightarrow \hat{M}$ 由商映射

$$M \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M$$

诱导, $x \in M$ 映为 0 当且仅当在每一个有限情况中都为 0, 所以可见

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$$

由于 M 是 Noether 环 A 上的有限生成模, 所以 M 是 Noether 模, 从而 E 是有限生成的, 则 Artin-Rees 引理 1.31.7 告诉我们存在 $c \geq 0$ 使得对任意 $n \geq c$, 都有

$$E \cap \mathfrak{a}^n M = \mathfrak{a}^{n-c} (E \cap \mathfrak{a}^c M)$$

但是回忆 E 的定义, 交上 $\mathfrak{a}^n M$ 还是 E , 所以

$$E = \mathfrak{a}E$$

所以 Nakayama 引理 1.2.4 知道存在 $a \in \mathfrak{a}$ 使得

$$(1 - a)E = 0$$

所以可见 E 中元素都被 $1 + \mathfrak{a}$ 中元素零化, 反过来, 如果 $x \in M$ 被 $1 - a \in 1 + \mathfrak{a}$ 零化, 即

$$(1 - a)x = 0$$

即

$$x = ax = a^2x = \cdots \implies x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$$

所以反过来也对. □

推论 1.32.7 (常用 Krull 交定理) 令 A 为一个 Noether 整环, $\mathfrak{a} \neq (1)$ 为 A 的一个理想, 则 $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

推论 1.32.8 令 A 为一个 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个被 Jacobson 根包含的理想, 令 M 为一个有限生成 A -模. 则 M 的 $\mathfrak{a}$ -拓扑是 Hausdorff 的, 即 $\bigcap \mathfrak{a}^n M = 0$.

推论 1.32.9 A 为 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 是极大理想, M 是一个有限生成 A -模, 则 M 的 $\mathfrak{m}$ -拓扑是 Hausdorff 的.

1.33 结合分次环

定义 1.33.1 (Associated Graded Ring) A 是一个环, I 是 A 的一个理想, 定义

$$\mathrm{gr} A = \mathrm{gr}_I A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n / I^{n+1}$$

为 A 的**结合分次环**，乘法自然定义. 对于 A -模 M 及 M 的一个 I -滤过 $\{M_n\}$ ，我们可以定义

$$\mathrm{gr} M = \mathrm{gr}_I M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n / M_{n+1}$$

这是一个分次 $\mathrm{gr} A$ -模，记

$$\mathrm{gr}_n M = M_n / M_{n+1}$$

命题 1.33.2 令 A 是一个 Noether 环， $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，则

- (1) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ 是 Noether 的.
- (2) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ 与 $\mathrm{gr}_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ 作为分次环是同构的.
- (3) 若 M 是有限生成 A -模， (M_n) 是 M 的稳定 $\mathfrak{a}$ -滤过，则 $\mathrm{gr} M$ 是一个有限生成分次 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ -模.

证明 (1) 由于 A Noether， $\mathfrak{a}$ 有限生成，设为 $(x_1, \dots, x_s)$ ，令 $\overline{x_i}$ 为其在 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ 中的像，则

$$\mathrm{gr} A = (A/\mathfrak{a})[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_s}]$$

由于 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether 的，由 Hilbert 基定理可见 $\mathrm{gr} A$ 是 Noether 的.

(2) 由命题 1.32.3 知道 $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$ ，从而可见 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}} A \cong \mathrm{gr}_{\hat{\mathfrak{a}}} \hat{A}$.

(3) 由于稳定，故存在 n_0 使得对任意的 $r \geq 0$ 有 $M_{n_0+r} = \mathfrak{a}^r M_{n_0}$. 因此 $\mathrm{gr} M$ 由 $\bigoplus_{n \leq n_0} \mathrm{gr}_n M$ 生成，而每一个

$$\mathrm{gr}_n M = M_n / M_{n+1}$$

都是 Noether 的，并且被 $\mathfrak{a}$ 零化，因此是有限生成 $A/\mathfrak{a}$ -模，从而可见 $\mathrm{gr} M$ 是有限生成 $\mathrm{gr} A$ -模. $\square$

引理 1.33.3 令 $\varphi: A \rightarrow B$ 为滤过群的态射，即 $\varphi(A_n) \subseteq B_n$ ，令

$$\mathrm{gr} \varphi: \mathrm{gr} A \rightarrow \mathrm{gr} B, \quad \hat{\varphi}: \hat{A} \rightarrow \hat{B}$$

为诱导的态射，则

- (1) $\mathrm{gr} \varphi$ 是单射 $\implies \hat{\varphi}$ 是单射.
- (2) $\mathrm{gr} \varphi$ 是满射 $\implies \hat{\varphi}$ 是满射.

注记 1.33.4 我们给出这个引理的直觉理解，我们要在 $\hat{B}$ 中解方程 $\hat{\varphi}(x) = y$. 首先在第 0 步， $A/A_0 = 0 \rightarrow B/B_0 = 0$ 是平凡的，现在假设已经找到了一个近似解 $x_n \in A$

使得 $y - \varphi(x_0) \in B_n$, 这个误差在分次意义下可以看做 $\bar{e} \in B_n/B_{n+1}$, 由于

$$\mathrm{gr}_n \varphi: A_n/A_{n+1} \rightarrow B_n/B_{n+1}$$

是满射, 所以存在 $\Delta x \in A_n$ 使得

$$\varphi(\Delta x) - e \in B_{n+1}$$

则我们令 $x_{n+1} = x_n + \Delta x$, 有

$$\varphi(x_{n+1}) = \varphi(x_n) + \varphi(\Delta x) = y + \text{something} \in y + B_{n+1}$$

即 $\varphi(x_{n+1}) - y \in B_{n+1}$, 而在完备空间 $\hat{A}$ 中, 对 $m > n$, 有

$$x_m - x_n \in A_n$$

所以 x_n 自然是收敛的, 故可以看出是满射.

证明 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{gr}_n \varphi & & \downarrow \alpha_{n+1} & & \downarrow \alpha_n & & \\ 0 & \longrightarrow & B_n/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

蛇引理告诉我们

$$0 \rightarrow \mathrm{Ker} \mathrm{gr}_n \varphi \rightarrow \mathrm{Ker} \alpha_{n+1} \rightarrow \mathrm{Ker} \alpha_n \rightarrow \mathrm{Coker} \mathrm{gr}_n \varphi \rightarrow \mathrm{Coker} \alpha_{n+1} \rightarrow \mathrm{Coker} \alpha_n \rightarrow 0$$

对于满射情况, 我们有 $\mathrm{Coker} \mathrm{gr}_n \varphi = 0$, 从而可以看到

$$\mathrm{Coker} \alpha_{n+1} = \mathrm{Coker} \alpha_n = \cdots \mathrm{Coker} \alpha_0 = 0$$

所以每个 α_n 都是满射, 于是可见正合列

$$0 \rightarrow \mathrm{Ker} \alpha_n \rightarrow A/A_n \rightarrow B/B_n \rightarrow 0$$

只需要满足 $\mathrm{Ker} \alpha_n \rightarrow \mathrm{Ker} \alpha_{n+1}$ 是满射, 则由命题 1.30.1 可知有正合列

$$0 \rightarrow \varprojlim \mathrm{Ker} \alpha_n \rightarrow \hat{A} \rightarrow \hat{B} \rightarrow 0$$

即 $\hat{\varphi}$ 是满射, 而由于 $\text{Coker gr}_n \varphi = 0$, 所以上面的蛇引理告诉我们有正合列

$$\text{Ker } \alpha_{n+1} \rightarrow \text{Ker } \alpha_n \rightarrow 0$$

所以满射, 故得证. 下面讨论单射情况, 若 $\text{Ker gr}_n \varphi = 0$ 并且 $\text{Ker } \alpha_n = 0$, 则由蛇引理正合列可以看出

$$\text{Ker } \alpha_{n+1} = 0$$

所以由 $\text{Ker } \alpha_0 = 0$ 可以看出所有 α_n 都是单射, 从而对

$$0 \rightarrow A/A_n \rightarrow B/B_n$$

取逆向极限得到

$$0 \rightarrow \hat{A} \rightarrow \hat{B}$$

即 $\hat{\varphi}$ 是单射. □

于是可以得到这一节的主定理

定理 1.33.5 A 是一个环, $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想, M 是 A -模, (M_n) 是稳定 $\mathfrak{a}$ -滤过. 假设 A 在 $\mathfrak{a}$ -拓扑下是完备的并且 M 在滤过拓扑下是 Hausdorff 的. 假设 $\text{gr } M$ 是有限生成 $\text{gr } A$ -模, 则 M 是有限生成 A -模.

证明 选定 $\text{gr } M$ 的一组有限生成元, 将其拆分成齐次部分, 记为 $\xi_i (1 \leq i \leq r)$, 其中 ξ_i 的次数为 n_i , 也就是说 $\xi_i \in M_{n_i}/M_{n_i+1}$, 我们把每个 ξ_i 提升到 M 中, 即选取 $x_i \in M$ 使得其在商模 M_{n_i}/M_{n_i+1} 中的像为 ξ_i . 我们下面证明 $x_1, \dots, x_r$ 生成 M .

考虑 A -模 $F^i \cong A$ 赋予稳定 $\mathfrak{a}$ -滤过, 即 $F_k^i = \mathfrak{a}^{k-n_i}$ (当 $k - n_i \leq 0$ 时为 A), 令

$$F = \bigoplus_{i=1}^r F^i$$

则把每个 F^i 的生成元 1 送到 x_i , 定义了同态

$$\varphi: F \rightarrow M$$

这是滤过群的同态, 于是得到

$$\text{gr } \varphi: \text{gr } F \rightarrow \text{gr } M$$

这是 $\text{gr } A$ -模的同态, 由构造这很显然是满射, 从而由引理 1.33.3 可见 $\hat{\varphi}$ 是满射, 考

虑交换图

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \hat{F} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{M} \end{array}$$

由于 F 是自由模, 并且 $A = \hat{A}$, 所以 α 是一个同构, 由于 M 是 Hausdorff 的所以 β 是一个单射, 所以 $\hat{\varphi}$ 的满射告诉我们 φ 是一个满射, 所以 $x_1, \dots, x_r$ 生成了 M . $\square$

推论 1.33.6 A 是一个环, $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想, M 是 A -模, (M_n) 是稳定 $\mathfrak{a}$ -滤过. 假设 A 在 $\mathfrak{a}$ -拓扑下是完备的并且 M 在滤过拓扑下是 Hausdorff 的. 则若 $\text{gr } M$ 是 Noether $\text{gr } A$ -模, 则 M 是 Noether A -模.

证明 我们需要证明 M 的子模 M' 是有限生成的, 令 $M'_n = M' \cap M_n$ 构成 M' 的 $\mathfrak{a}$ -滤过, 则单射 $M'_n \rightarrow M_n$ 给出了单射

$$M'_n/M'_{n+1} \rightarrow M_n/M_{n+1}$$

因此给出了单射

$$\text{gr } M' \rightarrow \text{gr } M$$

而 $\text{gr } M$ 是 Noether 的, 所以 $\text{gr } M'$ 是有限生成的, 而 M' 也是 Hausdorff 的, 因此由定理 1.33.5 可见 M' 是有限生成的. $\square$

从而可以推出

定理 1.33.7 A 是 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 是理想, 则 $\mathfrak{a}$ -adic 完备化 $\hat{A}$ 也是 Noether 的.

证明 我们知道

$$\text{gr}_{\hat{\mathfrak{a}}} \hat{A} \cong \text{gr}_{\mathfrak{a}} A$$

由于 $\text{gr}_{\mathfrak{a}} A$ Noether, 从而 $\text{gr}_{\hat{\mathfrak{a}}} \hat{A}$ Noether, 从而我们在上面推论中令 $M = \hat{A}$ 就得到 (滤过为 $\hat{\mathfrak{a}}^n$, 完备化之后自动是 Hausdorff 的) $\hat{A}$ Noether. $\square$

推论 1.33.8 (幂级数环上的 Hilbert 基定理) 若 A Noether, 则 $A[[x_1, \dots, x_n]]$ Noether.

证明 由于 $A[x_1, \dots, x_n]$ 诺特, 幂级数环就是 $A[x_1, \dots, x_n]$ 关于 $(x_1, \dots, x_n)$ -adic 的完备化, 从而 Noether. $\square$

1.34 Hilbert 函数

令 $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ 为 Noether 分次环, 我们知道 A_0 是 Noether 环, 并且 A 是有限生成 A_0 代数, 设生成元为 $x_1, \dots, x_s$, 并且不妨设这些生成元都是齐次的, 次数为 $k_1, \dots, k_s$. 令 M 为有限生成分次 A -模, 则 M 被有限个齐次元素生成, 记为 $m_j (1 \leq j \leq t)$, 令 $r_j = \deg m_j$. 令 M_n 为 n 次齐次元素, 齐次元素必定形如

$$\sum_j f_j(x) m_j$$

其中 $f_j(x) \in A$ 是齐次元素, 次数为 $n - r_j$. 从而 M_n 是有限生成 A_0 模, 生成元是 $g_j(x) m_j$, 其中 $g_j(x)$ 是 $x_1, \dots, x_s$ 的单项式, 使得总次数为 $n - r_j$.

定义 1.34.1 (Poincare 级数) 令 λ 为一个取值在 $\mathbb{Z}$ 中的加性函数, 定义在所有有限生成 A_0 -模上. 我们定义 M 的 **Poincare 级数** 为 $\lambda(M_n)$ 的生成函数, 即

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$$

定理 1.34.2 (Hilbert-Serre) $P(M, t)$ 是一个有理函数, 形如

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^s (1 - t^{k_i})}, \quad f(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

证明 我们对 A 在 A_0 上生成元的数量来归纳, 当 $s = 0$ 时, 对任意的 $n > 0$ 都有 $A_n = 0$, 所以 $A = A_0$. 而 M 变成了有限生成 A_0 -模, 从而当 n 充分大的时候有 $M_n = 0$, 于是 $P(M, t)$ 是一个多项式, 从而满足命题.

现在假设 $s > 0$, 并且定理对 $s-1$ 成立, 我们注意到乘上 x_s 是一个从 $M_n \rightarrow M_{n+k_s}$ 的同态, 于是我们有正合列

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \xrightarrow{x_s} M_{n+k_s} \rightarrow L_{n+k_s} \rightarrow 0$$

令 $K = \bigoplus K_n$, $L = \bigoplus L_n$, 由于 K 是 M 的子模, L 是 M 的商模, 从而它们都是有限生成的, 并且都被 x_s 零化, 于是我们知道它们都是 $A[x_1, \dots, x_{s-1}]$ -模, 所以对上面正合列作用 λ 得到

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0$$

乘 t^{n+k_s} 之后求和得到

$$(1 - t^{k_s})P(M, t) = P(L, t) - t^{k_s}P(K, t) + g(t)$$

其中 $g(t)$ 是一个整系数多项式, 从而归纳得证. $\square$

$P(M, t)$ 在 $t = 1$ 处极点的阶数我们记为 $d(M)$, 在一定程度上它度量了 M 的大小 (当然和 λ 相关). 特别地, $d(A)$ 也是有定义的, 当 $k_i = 1$ 的情况特别简单.

推论 1.34.3 若每个 $k_i = 1$, 则对于充分大的 n , 有 $\lambda(M_n)$ 是一个关于 n 的有理系数的 $d - 1$ 次⁴的多项式.

证明 由前面的定理我们知道 $\lambda(M_n)$ 是 $f(t)(1 - t)^{-s}$ 的 n 次项系数. 通过上下同时约去 $(1 - t)$, 我们不妨设 $s = d$. 此时 $f(1) \neq 0$, 设

$$f(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k$$

由于

$$(1 - t)^{-d} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{d-1} t^k$$

于是我们有

$$\lambda(M_n) = \sum_{k=0}^N a_k \binom{d+n-k-1}{d-1}$$

对于任意的 $n \geq N$ 成立. 而右边式子都是 $d - 1$ 次有理系数多项式的和. 容易验证首项

$$\frac{(\sum a_k)n^{d-1}}{(d-1)!} = \frac{f(1)}{(d-1)!}n^{d-1} \neq 0$$

故得证. $\square$

推论 1.34.4 对充分大的 n , 映射

$$n \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda(M_n)$$

是一个 $d(M)$ 次的多项式.

⁴我们这里令零多项式的次数为 -1 , 并且令 $\binom{n}{-1} = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ 1, & n = -1 \end{cases}$.

注记 1.34.5 对于使得任意的整数 n 都有 $f(n)$ 是整数的多项式 $f(x)$ 不必是整系数的多项式, 比如 $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$.

定义 1.34.6 (Hilbert Function) 对充分大的 n 定义的多项式 $\lambda(M_n)$ 称为 M 的关于 λ 的 **Hilbert 函数**, 记为 $H_M(n)$.

回忆我们有正合列

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \xrightarrow{x_s} M_{n+k_s} \rightarrow L_{n+k_s} \rightarrow 0$$

如果我们将 x_s 替代为 $x \in A_k$, 使得 x 不是 M 的零因子, 则 $K = 0$, 于是我们通过

$$(1 - t^{k_s})P(M, t) = P(L, t) - t^{k_s}P(K, t) + g(t) = P(L, t) + g(t)$$

得到

$$d(L) = d(M) - 1$$

所以我们证明了

命题 1.34.7 如果 $x \in A_k$ 不是 M 的零因子, 则有

$$d(M/xM) = d(M) - 1$$

我们将会在 A_0 是 Artin 环且 $\lambda(M) = l(M)$ 时考虑一些东西, 其中 $l(M)$ 是有限生成 A_0 -模 M 的长度. 我们在前面已经证明 l 是一个加性函数.

例 1.34.8 令 $A = A_0[x_1, \dots, x_s]$, 其中 A_0 是 Artin 环, x_i 为代数无关的超越元. 则 A_n 是一个自由的 A_0 -模, 由次数为 n 的单形式为基, 容易知道维数为

$$\binom{s+n-1}{s-1}$$

结合 l 是加性函数, 我们有

$$l(A_n) = \binom{s+n-1}{s-1} l(A_0)$$

于是可以知道

$$P(A, t) = l(A_0)(1-t)^{-s}$$

命题 1.34.9 令 A 为一个 Noetherian 局部环, $\mathfrak{m}$ 是极大理想, M 是一个有限生成 A -模, $\mathfrak{q}$ 为 A 中理想, 满足下列等价条件之一:

(1) 对所有的 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$, 若 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$.

(2) $\text{Supp}(M/\mathfrak{q}M) \subset \{\mathfrak{m}\}$

M_n 是一个稳定的 $\mathfrak{q}$ -滤过, 则

(1) M/M_n 是有限长的.

(2) 对于充分大的 n , 长度是一个小于等于 s 次的关于 n 的多项式 $g(n)$, 其中 s 是 $\mathfrak{q}$ 最小的生成元数量.

(3) $g(n)$ 的次数和首项系数仅与 M 和 $\mathfrak{q}$ 决定, 与滤过的选择无关.

证明 (1) 令

$$\text{gr } A = \bigoplus_n \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^{n+1}, \quad \text{gr } M = \bigoplus_n M_n / M_{n+1}$$

$\text{gr } A$ 是诺特环, 且 $\text{gr } M$ 是一个有限生成的分次 $\text{gr } A$ -模 (见命题 1.33.2). 每个 $\text{gr}_n M = M_n / M_{n+1}$ 是一个被 $\mathfrak{q}$ 零化的诺特 A -模, 因此它是一个诺特 $A/\mathfrak{q}$ -模. 由于: 如果一个 Noether 环上的有限生成模, 其支撑集仅包含极大理想, 那么这个模必然是有限长的. 因此 M/M_n 具有有限长度, 且长度满足:

$$l_n = l(M/M_n) = \sum_{r=1}^n l(M_{r-1}/M_r)$$

(2) 若 $x_1, \dots, x_s$ 生成 $\mathfrak{q}$, 则 x_i 在 $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ 中的像 $\bar{x}_i$ 生成作为 $A/\mathfrak{q}$ -代数的 $\text{gr } A$, 且每个 $\bar{x}_i$ 的次数为 1, 因此记 $l(M_n/M_{n+1}) = f(n)$, 其中对于所有充分大的 n , $f(n)$ 是关于 n 的次数 $\leq s-1$ 的多项式 (见推论 1.34.3). 既然由 (1) 我们有 $l_{n+1} - l_n = f(n)$, 由此推知对于所有充分大的 n , l_n 是次数 $\leq s$ 的多项式 $g(n)$.

(3) 设 $(\tilde{M}_n)$ 是 M 的另一个稳定 $\mathfrak{q}$ -过滤, 并令 $\tilde{g}(n) = l(M/\tilde{M}_n)$, 可知这两个过滤具有 bounded difference, 即存在整数 n_0 使得对所有 $n \geq 0$, 有 $M_{n+n_0} \subseteq \tilde{M}_n$ 以及 $\tilde{M}_{n+n_0} \subseteq M_n$; 从而我们有:

$$g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n), \quad \tilde{g}(n+n_0) \geq g(n).$$

由于对充分大的 n , g 和 $\tilde{g}$ 都是多项式, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/\tilde{g}(n) = 1$, 因此 g 和 $\tilde{g}$ 具有相同的次数和首项系数. $\square$

注记 1.34.10 可以把 $\mathfrak{q}$ 强化成 $\mathfrak{m}$ -准素理想, 目的都是为了使 $l(M/M_n)$ 是有限长的.

定义 1.34.11 (Hilbert-Samuel 多项式) 滤过 $\mathfrak{q}^n M$ 对应的多项式 $g(n)$ 记为 $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$, 对充分大的 n 有

$$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$$

称之为 **Hilbert-Samuel 多项式**, 如果 $M = A$, 我们直接记 $\chi_{\mathfrak{q}}^A(n)$ 为 $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$.

推论 1.34.12 对充分大的 n , 有

$$l(M/\mathfrak{q}^n M) = \chi_{\mathfrak{q}}(n)$$

其中 $\deg \chi_{\mathfrak{q}} \leq s$, s 是 $\mathfrak{q}$ 的最小的生成元数量.

命题 1.34.13 $(A, \mathfrak{m})$ 诺特局部环, $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$ -准素理想, 则

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}(n) = \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n)$$

即次数与 $\mathfrak{q}$ 的选择无关.

证明 我们知道存在 $r > 0$ 使得

$$\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$$

于是

$$\mathfrak{m}^{rn} \subseteq \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{m}^n$$

因此

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(rn)$$

对任意的 n 成立, 这很显然能看出来次数一样. □

1.35 Krull 主理想定理

定义 1.35.1 (高度与维数) $A \neq 0$ 为环, 对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, 我们定义其**高度**为

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{n: \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A\}$$

对 A 的真理想 $\mathfrak{a}$, 定义其**高度**为

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) = \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}): \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\}$$

对 A -模 M , 定义其**维数**为

$$\dim M = \dim(A/\operatorname{ann}_A(M))$$

从而我们知道 A 的 Krull 维数可以写成

$$\dim A = \sup\{\text{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \text{Spec } A\}$$

由定义容易验证下面两个式子

$$\dim A/\mathfrak{a} + \text{ht}(\mathfrak{a}) \leq \dim A, \quad \dim A_{\mathfrak{p}} = \text{ht}(\mathfrak{p})$$

定理 1.35.2 (弱主理想定理) R 是 Noether 环, $\mathfrak{p}$ 是主理想 $(a) \neq R$ 上的极小素理想 (即 $V((a))$ 中的极小素理想), 则 $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. 特别地, R 的非平凡主理想高度不超过 1.

证明 我们用 $R_{\mathfrak{p}}$ 替代 R , 因为 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 包含 $a \in R_{\mathfrak{p}}$ 的极小素理想, 并且

$$\text{ht}_R(\mathfrak{p}) = \text{ht}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$$

所以我们不妨假设 $(R, \mathfrak{p})$ 是局部环与极大理想, 此时 R/aR 有唯一的素理想 $\mathfrak{p}/aR$. 所以 R/aR 是零维 Noether 故而 Artin 的.

考虑 R_a 中的理想降链 $I_1 \supsetneq \cdots$, 令 $J_n = I_n \cap R$, 这列理想打到 R/aR 仍然是降链, 即

$$J_n + aR \supseteq J_{n+1} + aR$$

而 R/aR 是 Artin 的, 故存在 N , 使得 $n > N$ 时有

$$J_n + aR = J_{n+1} + aR \implies J_n \subset J_{n+1} + aR$$

现在对任意的 $x \in J_n$, 都存在 $y \in R$ 使得

$$x - ay \in J_{n+1} \subset J_n \implies ay \in J_n \subset I_n$$

而 a 在 R_a 中可逆, 故 $y \in I_n \cap R = J_n$, 于是可见

$$J_n \subset J_{n+1} + aJ_n \subset J_n + aJ_n = J_n$$

故

$$J_n = J_{n+1} + aJ_n$$

由 $(a) \subset \mathfrak{p} = \text{Jac}(R)$ 与 Nakayama 引理 1.2.6 可见 $J_n = J_{n+1}$. 由 $I_n = R_a J_n$ 可见 $I_n = I_{n+1}$, 从而 R_a 是 Artin 的. 现在倘若 R 中有素理想 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, 那么有 $\mathfrak{p}$ 的取法知道

$a \notin \mathfrak{q}$, 可见 $R_{\mathfrak{q}}$ 是 R_a 的局部化, 所以 $R_{\mathfrak{q}}$ 的维数不超过 R_a , 从而是零维的, 这说明

$$\text{ht}(\mathfrak{q}) \leq 0 \implies \text{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$$

□

引理 1.35.3 R 是 Noether 环, $a \in R$, 若 R 中素理想升链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 满足 $a \in \mathfrak{p}_n$, 则存在 R 中令一素理想升链 $a \in \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_n$ (注意长度短了一个).

注记 1.35.4 引理再说的事情可以如下理解: 我们在 n -维大空间里面有素理想升链, 并且满足 $a \in \mathfrak{p}_n$, 即 $\mathfrak{p}_n \subset V(a)$, 也就是 $\mathfrak{p}_n$ 对应的几何对象落在 $a = 0$ 的超平面上, 也就是 $n - 1$ -维的空间里面, 那么我们就可以在这个 $n - 1$ -维超平面里面找到一个 $n - 1$ 维的升链对象 $\mathfrak{q}_i$.

证明 对 n 归纳, $n = 1$ 显然. 下面设 $n > 1$, 假设对 $< n$ 的情况都成立, 若 $a \in \mathfrak{p}_{n-1}$, 那么我们直接用 $n - 1$ 情况的归纳假设即可得证. 下面假设 $a \notin \mathfrak{p}_{n-1}$. 取 $\mathfrak{q}_{n-1}$ 是含有 $\mathfrak{p}_{n-2} + (a)$ 又含于 $\mathfrak{p}$ 中的极小素理想 (由于 $\mathfrak{p}_n$ 满足, 所以存在). 根据

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{n-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$$

的归纳假设, 可以得到

$$a \in \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$$

由弱主理想定理可见 $\text{ht}_{R/\mathfrak{p}_{n-2}}(\mathfrak{q}_{n-1}) \leq 1$, 而 $\text{ht}_{R/\mathfrak{p}_{n-2}}(\mathfrak{p}_n) \geq 2$, 可见有真包含关系 $\mathfrak{q}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}_n$. □

定理 1.35.5 (Krull 主理想定理) R 是 Noether 环, $\mathfrak{p}$ 是 $(a_1, \dots, a_n) \neq R$ 上的极小素理想, 则 $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$.

证明 对 n 归纳, $n = 1$ 情况就是弱定理, 下面设 $n > 1$, 设 $I = (a_1, \dots, a_n)$, 则 $I/a_n R$ 为 $R/a_n R$ 的 $n - 1$ 生成理想, 并且 $\mathfrak{p}/a_n R$ 的极小性仍然满足, 由归纳假设可见

$$\text{ht}_{R/a_n R}(\mathfrak{p}/a_n R) \leq n - 1$$

现在假设 R 中任意素理想升链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}$$

由引理 1.35.3 可见存在 $a_n \in \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_k = \mathfrak{p}$, 这一串链在 $R/a_n R$ 中的像是长度为 $k - 1$ 的链, 于是可见

$$k - 1 \leq \text{ht}_{R/a_n R}(\mathfrak{p}/a_n R) \leq n - 1$$

故 $k \leq n$, 可见 $\text{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq n$. □

推论 1.35.6 Noether 环中的素理想高度不超过生成元个数, 从而高度有限.

定理 1.35.7 (Krull's principal ideal theorem) 令 A 为一个 Noether 环, $x \in A$ 既不是零因子又不是单位, 则 (x) 的极小素理想的高度都是 1.

证明 首先知道 $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$, 如果 $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, 则 $\mathfrak{p}$ 是极小素理想, 从而 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$, 也就是说 $\mathfrak{p}$ 落在 A 的零因子集中, 但是 $x \in \mathfrak{p}$ 不是零因子, 矛盾. □

推论 1.35.8 A 是一个 Noether 局部环, $x \in \mathfrak{m}$ 不是零因子, 则

$$\dim A/(x) = \dim A - 1$$

证明 令 $d = \dim A/(x)$, 我们知道

$$d = d(A/(x)) \leq d(A) - 1 \leq \dim A - 1$$

另一方面, 令 $x_i (1 \leq i \leq d)$ 为 $\mathfrak{m}$ 的元素使得在 $A/(x)$ 的像中生成一个 $\mathfrak{m}/(x)$ -准素理想, 则我们知道理想

$$(x, x_1, \dots, x_d) \subseteq A$$

是一个 $\mathfrak{m}$ -准素的, 从而

$$d + 1 \geq \dim A$$

所以

$$\dim A/(x) = \dim A - 1$$

□

定理 1.35.9 (Krull 主理想定理逆定理) R 是 Noether 环, $\text{ht}(\mathfrak{p}) = n$, 则存在 $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p}$ 在 $I = (a_1, \dots, a_n)$ 上极小.

证明 我们归纳地证明存在 $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{p}$ 使得当 $k \leq n$ 时总有

$$\text{ht}(a_1, \dots, a_k) = k$$

这样 $k = n$ 时就可以得到 $\mathfrak{p}$ 是其上极小素理想.

$k = 1$ 时, 考虑 (0) 上极小素理想构成的集合 $\mathcal{M}$, 很显然其中元素高度都为 0, 故不可能包含 $\mathfrak{p}$, Noether 性告诉我们 $\mathcal{M}$ 是有限集, 从而素避引理告诉我们 $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathcal{M}} \mathfrak{p}$ 不包含 $\mathfrak{p}$, 取 $a_1 \in \mathfrak{p} - \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathcal{M}} \mathfrak{q}$, 可见 (a_1) 上的一个极小素理想 $\mathfrak{q}'$ 一定包含一个 $\mathfrak{q} \in \mathcal{M}$, 并且 $a_1 \notin \mathfrak{q}$, 所以

$$\text{ht}(\mathfrak{q}') > \text{ht}(\mathfrak{q}) = 0$$

而 Krull 主理想定理告诉我们

$$\text{ht}(\mathfrak{q}') \leq 1$$

故 $\text{ht}(\mathfrak{q}') = 1$, 如此 $k = 1$ 情况得证. 下设 $k > 1$, 我们假设已经取好 $a_1, \dots, a_{k-1}$, 同样令 $\mathcal{M}$ 为 $(a_1, \dots, a_{k-1})$ 上极小素理想构成的集合, 同理可取 $a_k \in \mathfrak{p} - \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathcal{M}} \mathfrak{q}$, 同理可证 $\text{ht}(a_1, \dots, a_k) = k$. $\square$

定义-定理 1.35.10 (参数系统) $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, 令 δ 为使存在 $x_1, \dots, x_\delta \in \mathfrak{m}$ 使得 $\sqrt{(x_1, \dots, x_\delta)} = \mathfrak{m}$ 的最小的正整数, 则 $\dim R = \delta$. 将 $x_1, \dots, x_{\dim R}$ 称为 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 的**参数系统**.

证明 这等价于说 $\mathfrak{m}$ 是 $(x_1, \dots, x_\delta)$ 上的极小素理想, 所以自然

$$\dim R = \text{ht}(\mathfrak{m}) \leq \delta$$

这是 Krull 主理想定理告诉我们的, 然后由逆定理, 我们知道存在 $d = \dim R$ 个元素 $y_1, \dots, y_d$ 使得 $\mathfrak{m}$ 为 $(y_1, \dots, y_d)$ 上的极小素理想, 结合局部环性质, 即

$$\sqrt{(y_1, \dots, y_d)} = \mathfrak{m}$$

由 δ 取法可见 $\delta \leq d = \dim R$, 综上可见 $\delta = \dim R$. $\square$

推论 1.35.11 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, 则 $\dim R \leq \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

证明 由 Nakayama 引理 1.2.7, 我们知道 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $R/\mathfrak{m}$ -线性空间的基生成 $\mathfrak{m}$, 设基为 n 个, 则得到

$$\dim R = \text{ht}(\mathfrak{m}) \leq n = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

$\square$

1.36 Noether 局部环的维数理论

命题 1.36.1 设 A 为 Noether 环, M 是有限生成 A -模, TFAE:

- (1) M 是有限长的 A -模.
- (2) $A/\text{ann}(M)$ 是 Artin 环.
- (3) $\dim M = 0$.

定义 1.36.2 (Noether 局部环的次数) 设 A 为 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 为极大理想, 定义 A 的次数为

$$d(A) := \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n) = \deg \chi_{\mathfrak{q}}(n)$$

由前面的定理我们知道 $d(A)$ 仅与 A 相关, 因为极大理想是唯一的, 而次数与准素理想的选取无关. 根据定义, 当 n 充分大的时候, 我们有

$$\begin{aligned} d(A) &= \deg l(A/\mathfrak{m}^n) \\ &= \deg \left(\sum_{k=0}^{n-1} l(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}) \right) \\ &= d(\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A) \end{aligned}$$

令 A 为一个 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 是他的极大理想. 令 $\delta(A)$ 为 A 的 $\mathfrak{m}$ -准素理想的最少的生成元的数量, 我们的目的是证明

$$\delta(A) = d(A) = \dim A$$

命题 1.36.3 $\delta(A) \geq d(A)$.

证明 我们已经证明了 $\delta(A) \geq \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n)$, 所以得证. $\square$

命题 1.36.4 记号同上, M 是一个有限生成的 A -模, $x \in A$ 不是 M 的零因子, 则有

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M/xM} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^M - 1$$

证明 记 $M' := M/xM$, $N := xM \subset M$, 由于 x 不为零因子, 所以有 A -模的同构 $N = xM \simeq M, xm \mapsto m$. 取 M 的稳定 $\mathfrak{q}$ -滤过 $(\mathfrak{q}^n M)$, 置 $N_n := N \cap \mathfrak{q}^n M, n \geq 0$, 根据 Artin-Rees 引理可知 (N_n) 是 N 的稳定 $\mathfrak{q}$ -滤过.

于是由 $N \simeq M$ 和命题 1.34.9 可知, 当 n 充分大时, 多项式 $n \mapsto l(N/N_n)$ 对应多项式的首项和 $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ 的首项相等. 我们有自然的正合列

$$0 \rightarrow N/N_n \rightarrow M/\mathfrak{q}^n M \rightarrow M'/\mathfrak{q}^n M' \rightarrow 0$$

于是当 n 充分大时, 有

$$l(N/N_n) - \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0$$

而 $l(N/N_n)$ 和 $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ 相减消去了最高次项, 因此 $\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^M - 1$. $\square$

推论 1.36.5 A 是 Noether 局部环, x 不是 A 的零因子, 则有

$$d(A/(x)) \leq d(A) - 1$$

命题 1.36.6 $d(A) \geq \dim A$.

证明 对 A 的次数 $d := d(A)$ 归纳.

如果 $d = 0$, 则当 n 充分大时, 整值函数 $n \mapsto l(A/\mathfrak{m}^n)$ 为常数, 所以对任意充分大的 n 有 $l(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 0$, 但 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 是域 $A/\mathfrak{m}$ 上的线性空间, 并且其 $A/\mathfrak{m}$ -子空间必为 A -子模, 所以只能 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = 0$, 进而由 Nakayama 引理可知 $\mathfrak{m}^n = 0$, 因此 A 为 Artin 环, 也即 $\dim A = 0$.

现在设 $d > 0$, 结论对 $\leq d-1$ 成立, 任取 A 中素理想链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

设 $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, 置 $x' := \bar{x}$ 为 x 在整环 $A' := A/\mathfrak{p}_0$ 中的像, 则由 $x' \neq 0$ 知 x' 不为 A' 的零因子, 于是有

$$d(A'/(x')) \leq d(A') - 1$$

设 $\mathfrak{m}' \subset A'$ 为极大理想, 则 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}_0$, 于是有满的环同态 $A/\mathfrak{m}^n \rightarrow A'/\mathfrak{m}'^n$, 所以 $l(A/\mathfrak{m}^n) \geq l(A'/\mathfrak{m}'^n)$ 恒成立, 由此推出

$$d(A) \geq d(A') \geq d(A'/(x')) + 1$$

根据归纳假设有 $d(A'/(x')) \geq \dim(A'/(x'))$, 所以 $d(A) \geq \dim(A'/(x')) + 1$, 又因为 $x \in \mathfrak{p}_1$, 所以

$$\overline{\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\mathfrak{p}_r/\mathfrak{p}_0}$$

是 $A'/(x')$ 中的素理想链, 于是

$$d(A) \geq \dim(A'/(x')) + 1 \geq (r-1) + 1 = r$$

根据 r 的任意性可得 $d(A) \geq \dim A$. □

从而可以推出, Noether 环必为局部有限维的, 即 Noether 环的局部化必为有限维, 进而 Noether 环的任一素理想都具有有限高度; 进而一个 Noether 环中素理想的降链也必然是有限的, 即一个由 Noether 环中素理想构成的非空集合必存在极小元.

注记 1.36.7 我们也可以定义 $\mathfrak{p}$ 的深度, 即从 $\mathfrak{p}$ 开始的素理想升链长度, 很显然我们有

$$\text{depth } \mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}$$

命题 1.36.8 令 A 为一个 d 维的诺特局部环. 则存在一个 $\mathfrak{m}$ -准素理想由 d 个元素生成, 从而 $\dim A \geq \delta(A)$.

证明 考虑定理 1.35.10 立刻得到. □

于是我们得到了:

定理 1.36.9 (维数定理) 对于 Noether 局部环 A 而言, 我们有

$$\delta(A) = d(A) = \dim A$$

例 1.36.10 考虑域上的 n 元多项式环 $k[x_1, \dots, x_n]$, 这是 Noether 的, 并且有极大理想 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$, 考虑

$$A = k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}}$$

是 Noether 局部环, 而 $\text{gr}_{\mathfrak{m}} k[x_1, \dots, x_n]$ 是 k 上的 n 元多项式环, 从而有

$$\dim A = d(A) = n$$

由于

$$\dim k[x_1, \dots, x_n] = \sup \text{ht}(k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{p}}) = \sup \text{ht}(k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}}) = n$$

所以域上多项式环的超越维数就是 Krull 维数.

推论 1.36.11 令 $\hat{A}$ 为 $\mathfrak{m}$ -adic 完备化, 则 $\dim A = \dim \hat{A}$.

证明 只需要注意到

$$A/\mathfrak{m}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$$

于是

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \chi_{\hat{\mathfrak{m}}}(n)$$

所以相等. □

1.37 正则局部环

命题 1.37.1 $(A, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, 设 $\mathfrak{q} = (x_1, \dots, x_d)$ 满足 $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, 令 $f \in A[t_1, \dots, t_d]$ 是 s -次齐次多项式, 如果 $f(x_1, \dots, x_d) \in \mathfrak{q}^{s+1}$, 则 f 的系数均在 $\mathfrak{m}$ 中.

证明 我们熟知, 分次环 $\text{gr}_{\mathfrak{q}} A$ 由 $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ 在 $A/\mathfrak{q}$ 上生成, 所以有环的满同态

$$\begin{aligned} \alpha : (A/\mathfrak{q})[t_1, \dots, t_d] &\twoheadrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{q}} A \\ t_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

记 $\bar{f}$ 为 f 在 $(A/\mathfrak{q})[t_1, \dots, t_d]$ 中的像, 则 $\bar{f} \in \text{Ker } \alpha$, 于是得到满同态

$$(A/\mathfrak{q})[t_1, \dots, t_d]/(\bar{f}) \twoheadrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{q}} A.$$

如果存在 f 的系数不在 $\mathfrak{m}$ 中, 则该系数为 A 中单位, 于是可知 $\bar{f}$ 不为零因子, 所以

$$\begin{aligned} d(A) = d(\operatorname{gr}_{\mathfrak{q}} A) &\leq d((A/\mathfrak{q})[t_1, \dots, t_d]/(\bar{f})) \\ &\leq d((A/\mathfrak{q})[t_1, \dots, t_d]) - 1 = d - 1, \end{aligned}$$

注意到由维数定理, 我们有

$$d(\operatorname{gr}_{\mathfrak{q}} A) = d$$

从而矛盾. $\square$

推论 1.37.2 $(A, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, 满足剩余域 $k = A/\mathfrak{m} \subseteq A$ 为子环, 设 $x_1, \dots, x_d$ 是一个参数系统, 则它们在 k 上是代数无关的.

证明 假设存在 k 系数的非零多项式 f 使得 $f(x_1, \dots, x_d) = 0$, 记 f_s 为 f 的最低次 (记为 s 次) 的齐次部分, 显然有 $f_s \neq 0$. 于是我们知道

$$f_s(x_1, \dots, x_d) = 0 \in \mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$$

即

$$f_s(x_1, \dots, x_d) \in \mathfrak{m}^{s+1}$$

从而由命题 1.37.1 知 f_s 的系数都在 $\mathfrak{m}$ 中, 从而由 f 的系数都在 $A/\mathfrak{m}$ 中知 $f_s = 0$. $\square$

定义-定理 1.37.3 (正则局部环) 满足下面等价条件之一的 Noether 局部环 $(A, \mathfrak{m}, k)$ 称为**正则局部环**, 令 $d = \dim A$:

- (1) $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A \cong k[t_1, \dots, t_d]$.
- (2) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A = d$.
- (3) $\mathfrak{m}$ 可以由 d 个元素生成.

证明 (1) $\implies$ (2): 由于 $\operatorname{gr}_1 A = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 与一次齐次多项式同构, 从而

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d = \dim A$$

(2) $\implies$ (3): 由 Nakayama 定理推论立刻得到.

(3) $\implies$ (1): 设 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d)$, 考虑映射

$$\alpha: k[t_1, \dots, t_d] \rightarrow \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A, \quad t_i \mapsto x_i$$

对任意的 $f \in \operatorname{Ker} \alpha$, 容易知道 f 的系数在 $\mathfrak{m}$ 中, 但是 f 是 k -系数, 从而 $f = 0$, 所以 α 为同构. $\square$

引理 1.37.4 A 是一个环, $\mathfrak{a}$ 是理想, 若 $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$, 则 $\text{gr}_{\mathfrak{a}} A$ 是整环 $\iff A$ 是整环.

证明 对任意的 $x, y \in A$, $x, y \neq 0$, 由 $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$ 可知存在 $r, s \geq 0$, 使得

$$x \in \mathfrak{a}^r - \mathfrak{a}^{r+1}, \quad y \in \mathfrak{a}^s - \mathfrak{a}^{s+1}$$

所以 x 在 $\mathfrak{a}^r/\mathfrak{a}^{r+1}$ 和 y 在 $\mathfrak{a}^s/\mathfrak{a}^{s+1}$ 中的像均不为 0, 所以 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 在 $\text{gr}_{\mathfrak{a}} A$ 中的像均不为零, 于是

$$\overline{xy} \neq 0 \iff xy \neq 0 \quad \square$$

命题 1.37.5 设 A 为正则局部环, 则 A 是整环.

证明 我们只需要证明 $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$, 这是显然的, 因为

$$\text{gr}_{\mathfrak{m}} A \cong k[t_1, \dots, t_d]$$

没有什么非零元是无穷次的, 所以我们知道 $\text{gr}_{\mathfrak{m}} A$ 同构与域上多项式环, 所以是整环, 所以 A 是整环. $\square$

命题 1.37.6 令 A 为一个 Noether 局部环, 则 A 正则当且仅当 $\mathfrak{m}$ -adic 完备化 $\hat{A}$ 正则.

证明 由命题 1.32.5 知道 $\hat{A}$ 是 Noether 局部环, 由命题 1.36.11 知道 $\dim A = \dim \hat{A}$, 由命题 1.33.2 知道

$$\text{gr}_{\hat{\mathfrak{m}}} \hat{A} \cong \text{gr}_{\mathfrak{m}} A \cong (A/\mathfrak{m})[t_1, \dots, t_d] \cong (\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}})[t_1, \dots, t_d]$$

由定理 1.37.3 立刻得到. $\square$

1.38 超越维数

假设 k 是一个代数闭域, V 是一个 k 上的不可约代数簇, 因此我们知道 V 的坐标环形如

$$A(V) = k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$$

其中 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想, $A(V)$ 的分式域被称为 V 上的有理函数域, 记为 $k(V)$. 它是 k 的有限生成扩张, 因此有有限的超越维数 (即最大代数无关元的数量). 这个同时也定义了 V 的维数. 由零点定理, 我们知道 V 上的点与 $A(V)$ 的极大理想一一对应, 如果 P 对应 $\mathfrak{m}$, 则我们称

$$\dim A(V)_{\mathfrak{m}}$$

为 V 在 P 点的局部维数.

引理 1.38.1 $B \subseteq A$ 都是整环, B 是整闭的, A 在 B 上整. $\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大理想, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$. 则 $\mathfrak{n}$ 也是极大理想, 并且 $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim B_{\mathfrak{n}}$.

证明 只需要证明两个方向的不等式, 分别利用 Going-UP 和 Going-Down 即可. $\square$

定理 1.38.2 对于任意的 k 上不可约代数簇 V , 其在任意点处的局部维数与 V 的维数相同.

证明 由 Noether 正规化定理, 我们可以找到一个多项式环 $B = k[x_1, \dots, x_d] \subseteq A(V)$ 使得 $d = \dim A(V)$ 并且 $A(V)$ 在 B 上整. 由于 B 是 UFD, 很显然是整闭的, 从而我们可以说明

$$\dim A(V)_{\mathfrak{m}} = \dim B_{\mathfrak{n}}$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是 $A(V)$ 的极大理想, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$ 为 B 的一个极大理想, 所以我们只需要说明结论对 B 成立即可, 而 B 是多项式环, 很显然是成立的. $\square$

推论 1.38.3 对于 $A(V)$ 的极大理想, 我们有

$$\dim A(V) = \dim A(V)_{\mathfrak{m}}$$

从而我们有

$$\dim V = \dim A(V)$$

证明 注意到

$$\dim A(V) = \sup \dim A(V)_{\mathfrak{m}}$$

所以结合 $\dim A(V)_{\mathfrak{m}}$ 是定值 $\dim V$ 立刻得证. $\square$