

好难学啊

---

# 代数拓扑笔记

真有人能学会吗

---

慕可

网络版 · 编译于 2026-08-26

**网络版 (也没有实体版)**

**编译日期: 2026-08-26**

本书没有由任何出版社发行

IMSB: 111-1-11-111111-1

慕可

个人主页: [yyhmuke.com](http://yyhmuke.com)



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可. 访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议.

# 目录

|      |                                                          |    |
|------|----------------------------------------------------------|----|
| 第一章  | 同伦论                                                      | 1  |
| 1.1  | 对拓扑空间的操作                                                 | 1  |
| 1.2  | CW 复形                                                    | 4  |
| 1.3  | 映射同伦与空间伦型                                                | 9  |
| 1.4  | 基本群                                                      | 9  |
| 1.5  | van Kampen 定理及其应用                                        | 9  |
| 1.6  | 覆叠空间                                                     | 9  |
| 1.7  | 覆叠空间的基本群                                                 | 11 |
| 1.8  | 映射提升准则                                                   | 13 |
| 1.9  | 覆叠空间的分类与万有覆叠                                             | 14 |
| 1.10 | 曲面的拓扑分类                                                  | 17 |
| 第二章  | 同调论                                                      | 31 |
| 2.1  | 奇异同调群                                                    | 31 |
| 2.2  | 链复形                                                      | 34 |
| 2.3  | Singular homology of a star-shaped set in $\mathbb{R}^n$ | 36 |
| 2.4  | 链同伦                                                      | 38 |
| 2.5  | 拓扑同伦诱导链同伦                                                | 40 |
| 2.6  | Acyclic Model Theorems                                   | 45 |
| 2.7  | 重心剖分                                                     | 54 |
| 2.8  | Mayer-Vietoris 序列                                        | 64 |

2.9 球面同调群与 Brouwer 不动点定理 . . . . . 65

2.10 Jordan-Brouwer 分离定理. . . . . 68

2.11 约化同调 . . . . . 74

2.12 相对同调 . . . . . 77

2.13 切除定理与相对同调的拓扑意义 . . . . . 81

2.14 单纯复形 . . . . . 85

2.15 细分. . . . . 89

2.16 全子复形与强形变收缩核 . . . . . 94

2.17 有序单纯同调与 Mayer-Vietoris 序列 . . . . . 99

2.18 定向单纯同调 . . . . . 104

2.19 单纯逼近 . . . . . 112

2.20 Lefschetz-Hopf 不动点定理 . . . . . 115

2.21 同调理论 . . . . . 124

2.22 胞腔同调 . . . . . 130

# 第一章 同伦论

## 1.1 对拓扑空间的操作

首先我们来考虑乘积空间上的一些运算：对于内部和闭包来说

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

对于乘积空间中的边界，我们有莱布尼茨律：

$$\partial(A \times B) = \overline{A} \times \partial B \cup \partial A \times \overline{B}$$

在商空间上，我们需要知道的就是商空间上诱导的同伦：考虑  $\sim$  与  $\approx$  分别是  $X$  与  $Y$  上的等价关系，则如果  $H: I \times X \rightarrow Y$  是一个同伦，满足：

$$x \sim x' \Rightarrow H(t, x) \approx H(t, x'), \forall t \in I$$

则存在  $\overline{H}: I \times X / \sim \rightarrow Y / \approx$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} I \times X & \xrightarrow{H} & Y \\ 1 \times q_X \downarrow & & \downarrow q_Y \\ I \times X / \sim & \xrightarrow{\overline{H}} & Y / \approx \end{array}$$

我们可以很容易把这个  $\overline{H}$  构造出来, 即

$$\overline{H}(t, [x]) = [H(t, x)]$$

剩下简单验证连续性即可.

我们现在需要了解一些新的空间种类, 我们先引入一个**空间偶范畴  $\mathbf{Top}^2$** , 其对象为一对拓扑空间  $(X, A)$ , 其中  $A \subset X$ , 对象之间的态射为  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , 其中  $f: X \rightarrow Y$  是连续映射并且  $f(A) \subset B$ . 容易验证  $\mathbf{Top}^2$  构成一个范畴.

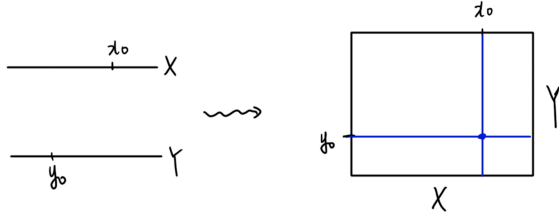
一个特殊情况是**带基点的空间 pointed space**, 即  $(X, A)$  中的  $A$  为单点集, 此时  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  要求  $f(x_0) = y_0$ . 于是所有带基点空间即其态射构成了**带基点空间范畴  $\mathbf{Top}_*$** , 带基点空间范畴中的态射也称之为**保基点映射 (basepoint preserving maps)**.

我们定义带基点空间的乘积空间为:

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (x_0, y_0))$$

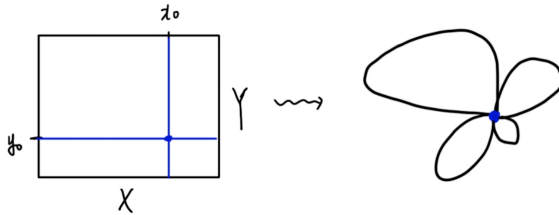
我们可以定义带基点空间的**楔和 (wedge sum)**, 也即单点并空间

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \vee Y, *) := (X \amalg Y / (x_0 \sim y_0), * = [x_0] = [y_0]) \cong (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y, (x_0, y_0))$$



还可以定义带基点空间**楔积 (压缩积)(smash product)**为:

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \wedge Y, *) = (X \times Y / X \vee Y, * = [X \vee Y])$$



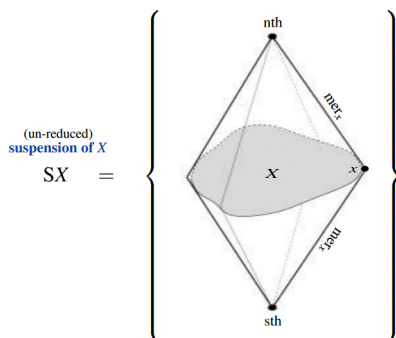
将  $S^1 \vee S^1$ ,  $S^1 \times S^1$  和  $S^1 \wedge S^1$  嵌入到  $\mathbb{R}^3$  中就分别得到了:



前两个都很好理解，最后一个我们放到 CW 复形的时候详细说.

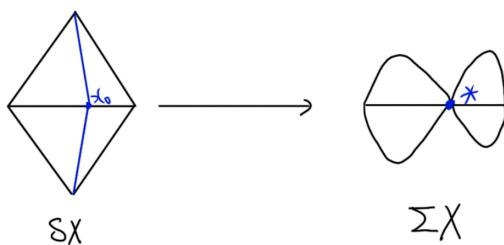
我们下面定义**悬挂 (双角锥)(suspension)**: 给定一个拓扑空间  $X$ , 我们定义  $X$  的悬挂  $SX$  为

$$SX = X \times I / \sim, \quad (x, 1) \sim (x', 1) \text{ \& } (x, 0) \sim (x', 0)$$



我们还可以定义**约化悬挂 (reduced suspension)**, 这是对于带基点空间讨论的, 对  $(X, x_0)$ , 定义

$$\Sigma X = SX / \{x_0\} \times I$$



其基点就取  $\{x_0\} \times I$  坍缩成的那个点, 我们可以观察到

$$\Sigma X = X \wedge S^1$$

这是因为  $S^1 = I/(0 \sim 1)$ , 所以我们知道

$$X \wedge S^1 = X \times I / ((X \times \{0, 1\}) \cup \{x_0\} \times I) = \Sigma X$$

下面定义**锥 (cone)**，给定一个拓扑空间  $X$ ，定义

$$CX = X \times I / X \times \{0\}$$

于是我们自然会有

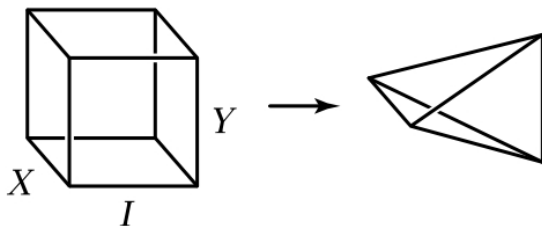
$$SX = CX / X \times \{1\}$$

实际上，悬挂在代数拓扑中是相对重要的，悬挂可以看成是一个函子  $S$ ，对态射的作用由下图得到：

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X \times I & \xrightarrow{q_X} & SX = X \times I / \sim \\ \downarrow f & & \downarrow f \times 1 & & \downarrow Sf = \widetilde{f \times 1} \\ Y & \longrightarrow & Y \times I & \xrightarrow{q_Y} & SY = Y \times I / \sim \end{array}$$

最后我们可以定义两个空间的**连接 (join)**，给定  $X, Y$ ，我们定义

$$X * Y = X \times I \times Y / \sim, \quad (x, y, 0) \sim (x, y', 0) \quad \& \quad (x, y, 1) = (x', y, 1)$$



## 1.2 CW 复形

CW 复形的名字来自其构造，其中 C 代表 Closure-finite，即闭包有限型，W 代表 Weak topology，即赋予弱拓扑。但实际上这里的弱拓扑与我们常说的弱拓扑并不是同一种东西，由于一些历史因素导致命名冲突，在后面讲到 CW 复形的拓扑的时候我们再谈。

**定义 1.2.1 (CW 复形)** 一个 **CW 复形** 是一个如下构造的空间  $X$ ：

- (1) 从一个离散空间  $X^0$  出发，其中的点称为  $X$  的 **0-胞腔 (0-cell)**。
- (2) 归纳地从  $X^{n-1}$  构造  $X^n$ ，我们将  **$n$ -胞腔 ( $n$ -cells)**  $e_\alpha^n$  通过映射  $\varphi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  粘到  $X^{n-1}$  上以得到  $X^n$ 。换句话说， $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n / (x \sim \varphi_\alpha(x), \forall x \in S^{n-1})$ 。

$\partial D_\alpha^n$ ). 作为一个集合,  $X^n = X^{n-1} \amalg_\alpha e_\alpha^n$ , 其中  $n$ -胞腔  $e_\alpha^n$  是  $n$  维开圆盘.

- (3) 这个过程可以在有限步内停止或者可数无穷地进行下去. 如果在有限步内停止, 比如说  $n$  步, 我们就令  $X = X^n$ ; 如果是无穷步, 我们令  $X = \bigcup_n X^n$ . 在后一种情况中, 我们赋予  $X$  **弱拓扑 (weak topology)**: 集合  $A \subset X$  是开集 (或闭集) 当且仅当  $A \cap X^n$  是  $X^n$  中的开集 (或闭集), 对于所有  $n$  成立.

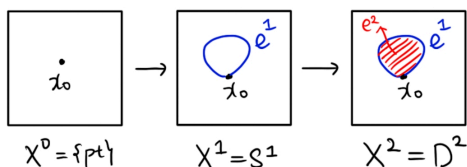
如此构造的  $X$  有时也称之为 **胞腔复形 (cell complex)**.

**注记 1.2.2** 上面提到的弱拓扑实际上是历史原因, 我们可以将其理解为终拓扑, 即由映射族

$$\{i_n: X^n \hookrightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$$

所决定的终拓扑, 即  $A \subset X$  是开集当且仅当对所有的  $n$ ,  $i_n^{-1}(A) = A \cap X^n$  在  $X^n$  中是开集. 此乃使得所有嵌入  $i_n$  连续的  $X$  上的最精细的拓扑, 某种意义上认为是最强的拓扑. 所以弱拓扑这个名字的描述是不准确的, 但是历史上我们如此称呼它, 遂延续下来.

一个 naive 的 CW 复形的例子是取  $n = 2$ :

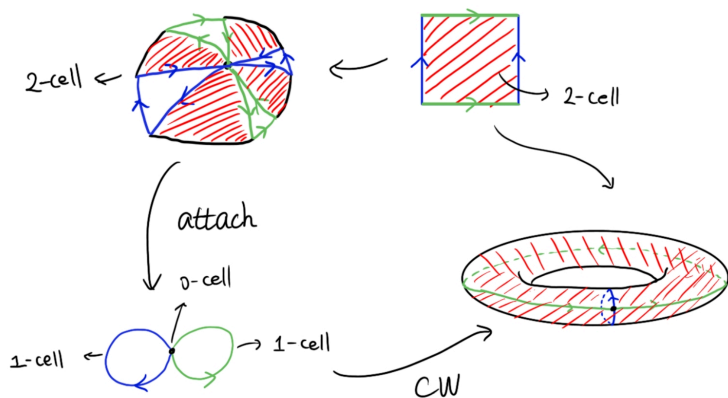


基本的想法是: 拓扑空间太复杂, 那我们就取一些标准件来描述它, 把标准件研究清楚就可以把复杂的拓扑空间刻画明白. 我们下面来讨论一个重要的例子, 即如何把二维环面看成是 CW 复形.

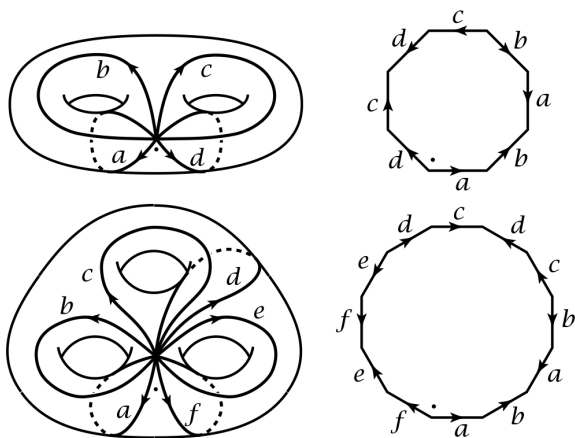
首先, 一个环面可以由一个矩形对边粘起来得到:



我们从这个角度出发, 构造  $X^0$  为单点集,  $X^1$  为  $S^1 \vee S^1$ , 然后如图粘上一个圆盘就得到环面:



然后就可以照葫芦画瓢去画这些：



CW 复形  $X$  的每一个胞腔  $e_\alpha^n$  会有一个**特征映射 (characteristic map)**  $\Phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X$ , 使得  $\Phi_\alpha$  作为  $\varphi_\alpha$  的延拓, 并且是从  $(D_\alpha^n)^\circ$  到  $e_\alpha^n$  的同胚. 实际上我们可以显式地把  $\Phi_\alpha$  描述为下面的复合映射:

$$D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$$

一个 CW 复形  $X$  的**子复形**是指一个闭子空间  $A \subset X$ , 使得  $A$  是一堆胞腔的并. 由于  $A$  是闭的, 所以每一个  $A$  中胞腔的特征映射的像都在  $A$  中, 特别地粘贴映射  $\varphi_\alpha$  的像也在  $A$  中, 所以  $A$  自己就成为一个 CW 复形. 一个对  $(X, A)$ , 满足  $X$  是 CW 复形,  $A$  是  $X$  的子复形, 称为**CW 对 (CW pair)**.

我们可以定义 CW 复形之间的**乘积**: 给定 CW 复形  $X, Y$ , 则  $X \times Y$  拥有 CW 复形的结构, 其胞腔为  $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ , 其中  $e_\alpha^n$  取遍  $X$  的胞腔,  $e_\beta^n$  取遍  $Y$  的胞腔. 比如

$S^1 \times S^1$  的胞腔结构就可以理解为

$$(e^0, e_1^1) \times (e^0, e_2^1) = (e^0, e^0 \times e_2^1 + e_1^1 \times e^0, e^2)$$

这是非正式的写法，但是你可以想象出来这个就是  $S^1 \vee S^1$  再粘上一个圆盘，得到的就是环面。

对于一般的 CW 复形  $X, Y$ ，它们作为 CW 复形的拓扑有时会比乘积拓扑要更细，但当  $X, Y$  都是有限的 CW 复形的时候是一样的。

我们定义 CW 复形的商 (quotients)，如果  $(X, A)$  是一个 CW 对，则商空间  $X/A$  自然地继承了  $X$  的胞腔结构： $X/A$  的胞腔就是  $X$  中所有不被  $A$  包含的胞腔添加上一个新的 0-胞腔 (即  $A$  在  $X/A$  中的像)。对于一个  $X - A$  的胞腔  $e_\alpha^n$ ，其在  $X$  中的粘贴映射为  $\varphi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ ，则对应于  $X/A$  中的粘贴映射为

$$S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \twoheadrightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$$

最后我们可以看一下压缩积在 CW 复形中是如何表现的。如果  $X, Y$  都是 CW 复形， $x_0, y_0$  都是 0-胞腔，我们给  $X \times Y$  赋予胞腔乘积拓扑，现在我们知道

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

其中  $X \vee Y$  视为  $X \times Y$  的子复形。

一个经典的例子就是球面的压缩积仍然为球面：我们先看如何通过 CW 复形构造  $S^n$ ，显然是一个非常自然的过程，由于  $S^n \cong D^n / \partial D^n$ ，所以我们只需要两个胞腔，一个零位胞腔  $e^0$  和一个  $n$  维胞腔  $e^n$ ，其中

$$\{\text{pt}\} = X^0 = X^1 = \dots = X^{n-1} \subset X^n = S^n$$

其中  $e^n$  的粘贴映射为： $\varphi: S^{n-1} \rightarrow \{\text{pt}\}$  为常值映射，于是

$$X^n = D^n \coprod \{\text{pt}\} / (\partial D^n \cup \{\text{pt}\}) = D^n / \partial D^n = S^n$$

于是我们知道  $S^m \wedge S^n$  的胞腔结构为

$$S^m \times S^n / S^m \vee S^n$$

的胞腔结构， $S^m \times S^n$  有一个 0-胞腔，一个  $m$ -胞腔，一个  $n$ -胞腔和一个  $m+n$ -胞腔， $S^m \vee S^n$  有一个 0-胞腔，一个  $m$ -胞腔和一个  $n$ -胞腔，所以  $S^m \wedge S^n$  有一个 0-胞腔和一个  $m+n$ -胞腔，即  $S^{m+n}$ ，所以我们得到

$$S^m \wedge S^n = S^{m+n}$$

我们知道一个有限的 CW 复形很明显是紧的, 那么问题来了, 一个 CW 复形的紧子空间是不是包含在一个有限子复形里面呢?

**定理 1.2.3** 一个 CW 复形的紧子空间被包含在一个有限子复形里面.

**证明** 我们首先证明 CW 复形  $X$  中的紧集  $C$  最多只与  $X$  的有限个胞腔相交. 反设存在一个无穷点列  $x_i \in C$ , 其中的点位于不同的胞腔中. 那么集合  $S = \{x_1, x_2, \dots\}$  在  $X$  中是闭集.

具体来说, 对维数  $n$  进行归纳, 假设  $S \cap X^{n-1}$  在  $X^{n-1}$  中是闭集, 那么对于  $X$  的每个胞腔  $e_\alpha^n$ ,  $\varphi_\alpha^{-1}(S)$  在  $\partial D_\alpha^n$  中是闭集, 并且  $\Phi_\alpha^{-1}(S)$  在  $D_\alpha^n$  中至多增加一个点, 所以  $\Phi_\alpha^{-1}(S)$  在  $D_\alpha^n$  中是闭集. 因此对每个  $n$ ,  $S \cap X^n$  在  $X^n$  中是闭集, 从而  $S$  在  $X$  中是闭集.

相同的论证表明  $S$  的任意子集都是闭集, 所以  $S$  具有离散拓扑. 但  $S$  是紧集  $C$  的闭子集, 因此它也是紧的. 所以  $S$  必须是有限集, 这便产生矛盾.

由于  $C$  包含于有限个胞腔的并集, 我们只需证明有限个胞腔的并集包含于  $X$  的一个有限子复形中. 有限个有限子复形的并集仍然是有限子复形, 所以问题归结为证明单个胞腔  $e_\alpha^n$  包含于一个有限子复形中.

对于  $e_\alpha^n$ , 其粘贴映射  $\varphi_\alpha$  的像是紧的, 因此根据对维数的归纳, 该像包含于一个有限子复形  $A \subset X^{n-1}$  中. 所以  $e_\alpha^n$  包含于有限子复形  $A \cup e_\alpha^n$  中.  $\square$   $\square$

现在我们彻底明白了 CW 复形中的  $C$  到底是什么含义了: 每个胞腔的闭包只与有限多个其他胞腔相交, 这是前面命题的推论, 因为一个胞腔的闭包是紧的, 即为一个特征映射的像.

下面我们不加证明地引入一些关于 CW 复形的性质, 更详细的内容可以在 [hatcher2002algebraic] 中找到.

**定理 1.2.4** 给定一个 Hausdorff 空间  $X$  和一族映射  $\Phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X$ , 则这些映射为  $X$  上的一个 CW 结构的特征映射当且仅当:

- (1) 每个  $\Phi_\alpha$  限制在  $\text{int } D_\alpha^n$  上是一个同胚, 其像为  $X$  中的一个胞腔  $e_\alpha^n \subset X$ , 这些胞腔两两不交且它们的并集为  $X$ .
- (2) 对每个胞腔  $e_\alpha^n$ ,  $\Phi_\alpha(\partial D_\alpha^n)$  包含在有限个维度小于  $n$  的胞腔的并集中.
- (3)  $X$  的一个子集是闭集当且仅当它与  $X$  中每个胞腔的闭包的交集为闭集.

**定理 1.2.5** CW 复形是  $T_4$  的. 特别地是 Hausdorff 的.

## 1.3 映射同伦与空间伦型

所谓映射同伦就是在映射空间的连续变化, 给定  $f, g: X \rightarrow Y$ , 称  $f$  与  $g$  是**同伦 (homotopic)**, 或者为了与后面提到的相对同伦作比较, 我们也有时称之为**自由同伦 (freely homotopic)**, 是指存在一个连续函数  $H: X \times I \rightarrow Y$ , 使得

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x)$$

记为  $H: f \simeq h$  或者  $f \simeq_H g$ , 其中  $H$  为从  $f$  到  $g$  的一个**同伦 (homotopy)**. 在不强调具体的同伦的时候, 记为  $f \simeq g$ .

**定义 1.3.1 (Congruence)** 范畴  $\mathcal{C}$  上的一个**同余 (congruence)**是指  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  上的一个等价关系:

- (1)  $f \in \text{Hom}(A, B)$ , 则  $f \sim f' \implies f' \in \text{Hom}(A, B)$ .
- (2)  $f \sim f', g \sim g'$ , 则如果  $g \circ f$  存在, 有  $g \circ f \sim g' \circ f'$ .

## 1.4 基本群

## 1.5 van Kampen 定理及其应用

## 1.6 覆叠空间

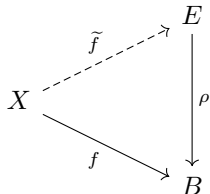
**定义 1.6.1 (覆叠空间)** 设  $E$  和  $B$  都是道路连通且局部道路连通的拓扑空间, 有  $\rho: E \rightarrow B$  连通. 若  $\forall b \in B$ , 存在开邻域  $U$  使得  $\rho^{-1}(U)$  是  $E$  上一组互不相交的开集  $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  的并集, 并且  $\rho$  把每个  $V_\lambda$  同胚地映到  $U$ , 则称  $\rho$  是一个**覆叠映射**, 称  $(E, \rho)$  是  $B$  上的一个**覆叠空间**, 称  $B$  为该覆叠空间的**底空间**, 称具有上述性质的开集  $U$  为该覆叠空间的一个**基本邻域**.

从定义我们可以立刻得到如下性质:

- (1)  $\forall b \in B$ , **纤维**  $\rho^{-1}(b)$  是  $E$  中的离散子空间.
- (2)  $\rho$  是局部同胚.
- (3)  $\rho$  是满射, 且是开映射, 从而  $\rho: E \rightarrow B$  是商映射,  $B$  具有商拓扑.

由于底空间  $B$  是局部道路连通的, 所以任意点都存在道路连通的基本邻域  $U$ , 此时  $V_\lambda$  就是  $\rho^{-1}(U)$  的道路连通分支, 简称  $V_\lambda$  为  $\rho^{-1}(U)$  的**分支**. 在下面的讨论中, 我们总是假设所取的基本邻域都是道路连通的.

**定义 1.6.2 (提升)** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为覆叠映射,  $f: X \rightarrow B$  连续, 若存在  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  使得  $\rho \circ \tilde{f} = f$ , 则称  $\tilde{f}$  为  $f$  的一个**提升**.



**定理 1.6.3 (提升唯一性定理)** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为覆叠映射,  $X$  为连通空间,  $f: X \rightarrow B$  为连续映射. 若  $\tilde{f}_1$  与  $\tilde{f}_2$  都是  $f$  的提升, 且存在  $x_0 \in X$  使得  $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ , 则  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .

**证明** 只需要令

$$A = \{x \in X \mid \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$$

然后证明  $A$  既开又闭就可以了. 开的话利用  $E$  中一个点附近的基本邻域嵌入  $B$  再利用交换图拉回到  $X$  中说明. 闭的话证明补集是开集同理可证.  $\square$

**定理 1.6.4 (覆叠道路提升引理)** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间,  $b_0 \in B$ , 有  $\sigma: (I, 0) \rightarrow (B, b_0)$  为  $B$  中道路. 任取  $e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$ , 则唯一存在  $E$  中道路  $\tilde{\sigma}: (I, 0) \rightarrow (E, e_0)$  使得  $\tilde{\sigma}$  是  $\sigma$  的以  $e_0$  为起点的道路提升.

**证明**  $\forall x \in B$ , 取  $x$  的一个基本邻域  $U_x$ , 则  $\{\sigma^{-1}(U_x) \mid x \in B\}$  是  $I$  的开覆盖. 由勒贝格引理, 存在  $I$  的一个分割  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ , 使得每个  $I_j = [t_{j-1}, t_j]$  含于某个  $\sigma^{-1}(U_x)$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $x \in X$ . 下面逐段来提升  $\sigma$ .

首先在  $I_1$  上提升  $\sigma|_{I_1}$ . 对于  $b_0$  的道路连通的基本邻域  $U_{b_0}$ , 取  $\rho^{-1}(U_{b_0})$  的包含  $e_0$  的分支  $V_1$ . 令  $\tilde{\sigma}_1: I_1 \rightarrow E$ , 对任意  $t \in I_1$ ,  $\tilde{\sigma}_1(t) = p|_{V_1}^{-1} \circ \sigma(t)$ , 则  $\tilde{\sigma}_1$  连续,  $\tilde{\sigma}_1(0) = e_0$ ,  $p \circ \tilde{\sigma}_1 = \sigma|_{I_1}$ .

假设  $\tilde{\sigma}_i: [0, t_i] \rightarrow E$  已有定义, 满足  $\tilde{\sigma}_i(0) = e_0$ ,  $p \circ \tilde{\sigma}_i = \sigma|_{[0, t_i]}$ .

设  $\sigma(I_{i+1})$  含于基本邻域  $U$ , 取  $\rho^{-1}(U)$  的包含  $\tilde{\sigma}_i(t_i)$  的分支  $V$ . 令  $\tau: I_{i+1} \rightarrow E$ , 对于  $t \in I_{i+1}$ ,  $\tau(t) = p|_V^{-1} \circ \sigma(t)$ , 则  $\tau(t_i) = p|_V^{-1} \circ \sigma(t_i) = \tilde{\sigma}_i(t_i)$ , 从而  $\tilde{\sigma}_i$  和  $\tau$  可乘. 令  $\widetilde{\sigma_{i+1}}: [0, t_{i+1}] \rightarrow E$ ,

$$\widetilde{\sigma_{i+1}}(t) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_i(t), & t \in [0, t_i], \\ \tau(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

则  $\widetilde{\sigma_{i+1}}$  连续,  $\widetilde{\sigma_{i+1}}(0) = e_0$ ,  $p \circ \widetilde{\sigma_{i+1}} = \sigma|_{[0, t_{i+1}]}$ .

最后, 所得的道路  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_n : I \rightarrow E$  即为所求. 提升的唯一性由提升唯一性定理保证.  $\square$

**定理 1.6.5 (覆盖同伦提升定理)** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间,  $b_0 \in B$ ,  $e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$ .  $X$  是局部连通空间,  $x_0 \in X$ , 连续映射  $f: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$  存在提升  $\tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$ . 若进一步有  $H: f \simeq g$ , 则存在  $H$  的唯一提升  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$ , 使得  $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{f}(x)$ .

## 1.7 覆叠空间的基本群

**定理 1.7.1** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为覆叠映射,  $b_0 \in B$ ,  $e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$ , 则

$$\rho_*: \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

为单同态.

**证明** 设  $\langle \tilde{\sigma} \rangle, \langle \tilde{\tau} \rangle \in \pi_1(E, e_0)$ . 若  $p_* \langle \tilde{\sigma} \rangle = p_* \langle \tilde{\tau} \rangle$ , 则

$$\sigma = p \circ \tilde{\sigma} \simeq_p p \circ \tilde{\tau} = \tau,$$

即有定端同伦  $H: \sigma \simeq_p \tau$ . 往证  $\langle \tilde{\sigma} \rangle = \langle \tilde{\tau} \rangle$ .

由覆盖同伦提升定理, 存在  $H$  的唯一提升  $\tilde{H}: I \times I \rightarrow E$ , 使得对任意  $s \in I$ ,  $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\sigma}(s)$ . 又对任意  $t \in I$ ,  $p \circ (\tilde{H}(0, t)) = H(0, t) = b_0$ , 而  $\{0\} \times I$  是连通的, 故  $\tilde{H}(0, t) = \{e_0\}$ ; 同理,  $\forall t \in I$ ,  $\tilde{H}(1, t) = \{e_0\}$ . 这样,  $\tilde{\sigma}$  和  $\tilde{\tau}$  分别是  $\sigma$  和  $\tau$  的以  $e_0$  为基点的提升, 且  $\tilde{H}: \tilde{\sigma} \simeq_p \tilde{\tau}$ , 即  $p_*$  是单同态.  $\square$

**定理 1.7.2 (纤维基数相同)** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间, 则对任意的  $b \in B$ ,  $\rho^{-1}(b)$  的基数都相等.

**证明** 往证对任意  $b_0, b_1 \in B$ , 在集合  $\rho^{-1}(b_0)$  和  $\rho^{-1}(b_1)$  之间存在一个双射.

设  $\alpha$  是  $B$  中从  $b_0$  到  $b_1$  的一个道路. 对于  $x \in \rho^{-1}(b_0)$ , 知道  $\alpha$  有以  $x$  为起点的唯一的道路提升  $\tilde{\alpha}_x: I \rightarrow E$ , 则  $\rho \circ \tilde{\alpha}_x(1) = \alpha(1) = b_1$ , 故  $\tilde{\alpha}_x(1) \in \rho^{-1}(b_1)$ . 定义映射  $\varphi: \rho^{-1}(b_0) \rightarrow \rho^{-1}(b_1)$ ,  $\varphi(x) = \tilde{\alpha}_x(1)$ .

类似地, 对于  $\alpha$  的逆道路  $\alpha^{-1}$  (它是  $B$  中从  $b_1$  到  $b_0$  的道路), 可以定义  $\psi: \rho^{-1}(b_1) \rightarrow \rho^{-1}(b_0)$ , 对于  $y \in \rho^{-1}(b_1)$ ,  $\psi(y) = \tilde{\alpha}_y^{-1}(1)$ .

对于  $x \in \rho^{-1}(b_0)$ , 取  $y = \varphi(x) = \tilde{\alpha}_x(1)$ . 易知,  $\psi\varphi = \text{id}_{\rho^{-1}(b_0)}$ ,  $\varphi\psi = \text{id}_{\rho^{-1}(b_1)}$ , 于是  $\varphi$  是双射.  $\square$

**定义 1.7.3** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间, 对于任意  $b \in B$ , 称  $\rho^{-1}(b)$  的基数为该覆叠的叶数或重数.

设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆盖空间,  $b \in B$ ,  $e \in \rho^{-1}(b)$ , 我们已知

$$\rho_*: \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

是一个单同态, 记

$$H_e = \rho_*(\pi_1(E, e))$$

则  $H_e$  是  $\pi_1(B, b)$  的一个同构于  $\pi_1(E, e)$  的子群, 则我们有如下定理

**定理 1.7.4** 设  $(E, \rho)$  是  $B$  的覆盖空间,  $b \in B$ ,  $e \in \rho^{-1}(b)$ , 则

$$[\pi_1(B, b), H_e] = \# \rho^{-1}(b)$$

即指数等于覆盖重数.

**证明** 任取  $x \in \rho^{-1}(b)$ , 令  $\tilde{\alpha}_x$  是  $E$  中从  $e$  到  $x$  的一个道路, 则  $\alpha_x = \rho \circ \tilde{\alpha}_x \in \Omega(B, b)$ . 令  $\eta: \rho^{-1}(b) \rightarrow \pi_1(B, b)/H_e$ ,  $x \mapsto \langle \alpha_x \rangle H_e$ . 只需证明  $\eta$  是双射即可.

设  $\langle \alpha_x \rangle H_e = \langle \beta_y \rangle H_e$ , 则  $\langle \alpha_x \rangle = \langle \beta_y \rangle \rho_*(\langle \gamma \rangle)$ , 其中  $\gamma \in \Omega(E, e)$ , 即

$$\rho \circ \tilde{\alpha}_x = \alpha_x \simeq_p \beta_y (\rho \circ \gamma) = (\rho \circ \tilde{\beta}_y) (\rho \circ \gamma) = \rho \circ (\tilde{\beta}_y \gamma_y),$$

其中  $\gamma_y$  是  $\rho \circ \gamma$  的始于  $y$  的道路提升, 且仍是闭路. 由  $\tilde{\alpha}_x \simeq_p \tilde{\beta}_y \gamma_y$ , 于是  $x = y$ , 即  $\eta$  是单射.

$\forall \langle \alpha \rangle \in \pi_1(B, b)$ , 记  $\alpha$  的始于  $e$  的唯一道路提升为  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha}(1) = x$ , 则  $\eta(x) = \langle \alpha \rangle H_e$ , 于是  $\eta$  是满射, 从而又是双射.  $\square$

**定理 1.7.5 (子群共轭定理)** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆盖空间, 则  $\{H_e \mid e \in \rho^{-1}(b)\}$  构成  $\pi_1(B, b)$  的一个子群共轭类.

**证明** 设  $e, e' \in \rho^{-1}(b)$ , 令  $\alpha$  是  $E$  中从  $e$  到  $e'$  的一个道路,  $\alpha' = \rho \circ \alpha \in \Omega(B, b)$ . 任取  $\langle \sigma \rangle \in \pi_1(E, e)$ ,

$$\begin{aligned} \rho_* \alpha_{\#} \langle \sigma \rangle &= \rho_* \langle \alpha^{-1} \sigma \alpha \rangle = \langle (\rho \circ \alpha^{-1}) (\rho \circ \sigma) (\rho \circ \alpha) \rangle \\ &= \langle \alpha'^{-1} (\rho \circ \sigma) \alpha' \rangle = \alpha'_{\#} \circ \rho_* \langle \sigma \rangle, \end{aligned}$$

从而  $\rho_* \alpha_{\#} = \alpha'_{\#} \circ \rho_*$ . 故

$$\begin{aligned} H_{e'} &= \rho_*(\pi_1(E, e')) = \rho_* \alpha_{\#} (\pi_1(E, e)) \\ &= \alpha'_{\#} \circ \rho_*(\pi_1(E, e)) = \alpha'_{\#} H_e. \end{aligned}$$

注意到  $\alpha'$  是一个以  $b$  为基点的闭路, 即知  $H_e$  与  $H_{e'}$  是共轭的.

另一方面, 设  $G$  是  $\pi_1(B, b)$  的一个与  $H_e$  共轭的子群, 即存在  $\langle \gamma \rangle \in \pi_1(B, b)$ , 使得  $G = \gamma^{-1} H_e \gamma$ . 设  $\gamma'$  是  $\gamma$  的以  $e$  为起点的 (唯一) 道路提升,  $e' = \gamma'(1)$ , 则如上,  $G = \gamma_{\#} H_e = H_{e'}$ .  $\square$

## 1.8 映射提升准则

设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间,  $f: X \rightarrow B$  连续,  $x_0 \in X$ ,  $b_0 = f(x_0)$ ,  $e \in \rho^{-1}(b_0)$ , 若  $f$  有提升

$$\tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$$

则有

$$\begin{aligned} f_*(\pi_1(X, x_0)) &= (\rho \circ \tilde{f})_*(\pi_1(X, x_0)) \\ &= \rho_* \circ \tilde{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \\ &\subset \rho_*(\pi_1(E, e_0)) = H_{e_0} \end{aligned}$$

在某些特定情况下, 这也是提升存在的充分条件.

**定理 1.8.1 (映射提升准则)** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间,  $X$  是道路连通且局部道路连通的空间,  $f: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$  连续,  $e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$ , 若  $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset H_{e_0}$ , 则  $f$  存在唯一的提升  $\tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$ .

**证明** 相信它.  $\square$

**推论 1.8.2** 设  $(E, \rho)$  为  $B$  的覆叠空间,  $X$  是单连通且局部道路连通的空间,  $f: (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$  连续,  $e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$ , 则  $f$  总存在唯一的提升  $\tilde{f}: (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$ .

**例 1.8.3** 比如当  $n > 2$  时, 任意两个连续映射  $f, g: S^n \rightarrow S^1$  都是同伦的. 由于  $S^n$  在  $n > 2$  时单连通且局部道路连通, 从而可以提升到  $\mathbb{R}$  上, 而  $\mathbb{R}$  是凸集, 所以提升的道路是同伦的, 于是  $f$  和  $g$  同伦.

**例 1.8.4** 在比如每个连续映射  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow S^1$  都是; 零伦的. 由于  $\pi_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , 而  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  没有二阶元, 所以像只能是平凡的, 也就是说满足条件可以提升.

## 1.9 覆叠空间的分类与万有覆叠

**定义 1.9.1 (覆叠空间范畴)** 底空间  $B$  上的覆叠空间范畴的对象是覆叠空间  $(E, \rho)$ ，而态射是  $h: E_1 \rightarrow E_2$ ，使得  $\rho_2 \circ h = \rho_1$ ，此即满足一定条件的切片范畴。若态射  $h$  还是同胚，则称  $(E_1, \rho_1)$  与  $(E_2, \rho_2)$  同构或者等价。

**定理 1.9.2 (覆叠空间等价的刻画)** 设  $(E_1, \rho_1)$  与  $(E_2, \rho_2)$  是  $B$  上的覆叠空间， $b \in B$ ， $e_i \in \rho_i^{-1}(b)$ ，则  $(E_1, \rho_1)$  与  $(E_2, \rho_2)$  等价当且仅当  $\rho_{1*}(\pi_1(E_1, e_1))$  和  $\rho_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$  是共轭的。

**证明**  $\Rightarrow$ : 设  $h: E_1 \rightarrow E_2$  为同构， $h(e_1) = e_2$ 。因  $\rho_2 \circ h = \rho_1$ ，

$$H_{e_1} = \rho_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = (\rho_2 \circ h)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = \rho_{2*}(\pi_1(E_2, e_2)) = H_{e_2},$$

故  $H_{e_1}$  和  $H_{e_2}$  的共轭类相同。

$\Leftarrow$ : 对于  $e_1 \in \rho_1^{-1}(b)$ ，可取  $e_2 \in \rho_2^{-1}(b)$ ，使得  $\rho_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = \rho_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ 。由映射提升准则，存在同态  $h: E_1 \rightarrow E_2, k: E_2 \rightarrow E_1$ ，使得  $h(e_1) = e_2, k(e_2) = e_1$ 。于是， $k \circ h: E_1 \rightarrow E_1$  是  $E_1$  的自同态，满足  $k \circ h(e_1) = e_1$ 。

另一方面， $\text{id}: E_1 \rightarrow E_1$  是  $E_1$  的自同态，满足  $\text{id}(e_1) = e_1$ 。由提升的唯一性定理， $k \circ h = \text{id}$ 。同理， $h \circ k = \text{id}$ 。于是， $h$  是同胚。故  $(E_1, \rho_1)$  和  $(E_2, \rho_2)$  是等价的。□ □

**定义 1.9.3** 设  $\rho: E \rightarrow B$  是覆叠映射，若自同胚  $h: E \rightarrow E$  满足  $\rho \circ h = \rho$ ，则称  $h$  是一个覆叠变换。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E \\ & \searrow \rho & \swarrow \rho \\ & B & \end{array}$$

很显然覆叠变换就是覆叠空间上的自同构，并且覆叠变换的复合还是覆叠变换，所以  $(E, \rho)$  的全体覆叠变换在复合运算下构成一个群，称之为  $(E, \rho)$  的覆叠变换群，记作  $\mathcal{D}(E, \rho)$ 。

**定理 1.9.4** 设  $\rho: E \rightarrow B$  是覆叠映射， $e \in E, b = \rho(e), e' \in \rho^{-1}(b)$ ，则存在  $h \in \mathcal{D}(E, \rho)$  使得  $h(e) = e'$  的充分必要条件是  $H_e = H_{e'}$ 。

**证明**  $\Rightarrow$ : 设有  $h \in \mathcal{D}(E, \rho)$  使得  $h(e) = e'$ 。因  $\rho \circ h = \rho$ ， $H_e = \rho_*(\pi_1(E, e)) = (\rho \circ h)_*(\pi_1(E, e)) = \rho_*(\pi_1(E, e')) = H_{e'}$ 。

$\Leftarrow$ : 若  $H_e = H_{e'}$ ，则由映射提升准则，存在  $\rho: E \rightarrow B$  的提升  $h, h': E \rightarrow E$ ，使得  $h(e) = e', h'(e') = e$ 。于是， $h' \circ h: E \rightarrow E$  也是  $\rho: E \rightarrow B$  的提升，且  $h' \circ h(e) = e$ 。

另一方面， $\text{id}: E \rightarrow E$  也是  $\rho: E \rightarrow B$  的提升，满足  $\text{id}(e) = e$ 。由提升的唯一性定理， $h' \circ h = \text{id}$ 。同理， $h \circ h' = \text{id}$ 。于是， $h$  是自同胚，从而是覆盖变换， $h(e) = e'$ 。□

**定义 1.9.5** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为覆叠映射, 若对某个  $e \in E$ ,  $H_e$  是  $\pi_1(B, \rho(e))$  的正规子群, 则称  $\rho$  为**正规覆叠映射**, 称  $(E, \rho)$  为  $B$  上的**正规覆叠空间**.

若  $(E, \rho)$  为  $B$  上的正则覆叠空间,  $\forall e' \in E$ ,  $H_{e'}$  都是  $\pi_1(B, \rho(e'))$  的正规子群. 事实上, 从  $e$  到  $e'$  的道路  $\gamma$  和道路  $\rho\gamma$  诱导的同构有以下的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, e) & \xrightarrow{\gamma\#} & \pi_1(E, e') \\ \downarrow \rho_* & & \downarrow \rho_* \\ \pi_1(B, \rho(e)) & \xrightarrow{(\rho\gamma)\#} & \pi_1(B, \rho(e')) \end{array}$$

于是我们知道

$$H_{e'} = (\rho\gamma)_\#(H_e) \triangleleft \pi_1(B, \rho(e'))$$

当  $\rho: E \rightarrow B$  是正规覆叠的时候, 我们知道如果  $e, e' \in \rho^{-1}(b)$ , 由于正规子群只和自己共轭, 所以有

$$H_e = H_{e'}$$

也就是说任意的  $e \in \rho^{-1}(b)$  对应的  $H_e$  仅由  $b$  决定, 我们把这个正规子群记为  $H_b$ .

**推论 1.9.6**  $\rho: E \rightarrow B$  是正规覆叠映射当且仅当对任意的  $e, e' \in E$ , 若  $\rho(e) = \rho(e')$ , 则存在覆叠变换  $h \in \mathcal{D}(E, \rho)$  使得  $h(e) = e'$ .

**定理 1.9.7** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为正规覆叠映射,  $b \in B$ , 则

$$\mathcal{D}(E, \rho) \cong \pi_1(B, b)/H_b$$

**定义 1.9.8** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为覆叠映射, 若  $E$  是单连通的, 则称  $\rho$  为**万有覆叠映射**或者**泛覆叠映射**,  $(E, \rho)$  为  $B$  上的**万有覆叠空间**或者**泛覆叠空间**.

**注记 1.9.9** 对于万有覆叠空间而言, 任意的  $e \in E$  都有  $H_e$  是平凡群, 所以是正规覆叠空间.

**例 1.9.10** 当  $(E, \rho)$  是万有覆叠空间时, 我们有

$$\pi_1(B) \cong \mathcal{D}(E, \rho)$$

这可以帮我计算基本群, 比如指数映射

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

就是万有覆叠, 容易看出覆叠变换是移动距离为整数的平移, 容易看出

$$\mathcal{D}(E, \rho) \cong \mathbb{Z}$$

从而

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

下面的定理说明万有覆叠空间是一切覆叠空间的覆叠空间, 这也是其名称的来源.

**定理 1.9.11** 设  $\rho_0: E_0 \rightarrow B$  为万有覆叠映射,  $\rho: E \rightarrow B$  为覆叠映射, 则有覆叠映射

$$\tilde{\rho}: E_0 \rightarrow E$$

满足下图交换

$$\begin{array}{ccc} (E_0, e_0) & \xrightarrow{\quad \tilde{\rho} \quad} & (E, e) \\ & \searrow \rho_0 \quad \swarrow \rho & \\ & (B, b) & \end{array}$$

换句话说,  $(E_0, \rho_0)$  是覆叠空间范畴的始对象.

**证明** 因  $E_0$  单连通, 对于覆盖映射  $\rho: E \rightarrow B$ , 由提升准则, 存在  $\rho_0$  的提升  $\tilde{\rho}: E_0 \rightarrow E$ , 即上述图表可以交换. 下面验证  $\tilde{\rho}$  为覆盖映射.

$$\begin{array}{ccc} W_\alpha \subset (E_0, e_0) & \xrightarrow{\quad \tilde{\rho} \quad} & (E, e) \supset V \\ & \searrow \rho_0 \quad \swarrow \rho & \\ & (B, b) \supset U & \end{array}$$

$\forall e \in E, b = \rho(e)$ . 取  $U$  是  $b$  的一个道路连通的开邻域,  $U$  关于  $\rho$  和  $\rho_0$  都是基本邻域. 设  $V$  是  $\rho^{-1}(U)$  中  $e$  所在的道路分支, 则  $\rho|_V: V \rightarrow U$  是同胚.

$\rho_0^{-1}(U)$  的连通分支集合记为  $\{W_\alpha\}$ . 因

$$\rho_0^{-1}(U) = (\rho \circ \tilde{\rho})^{-1}(U) = \tilde{\rho}^{-1}(\rho^{-1}(U)),$$

故  $\tilde{\rho}^{-1}(V) \subset \rho_0^{-1}(U) = \bigcup_\alpha W_\alpha$ .

$\forall \alpha, \tilde{\rho}(W_\alpha) \subset \rho^{-1}(U)$ , 并且是道路连通的, 于是它在  $\rho^{-1}(U)$  的某个分支上. 这样,

$$\tilde{\rho}^{-1}(V) = \bigcup_{\tilde{\rho}(W_\alpha) \subset V} W_\alpha.$$

如果  $\tilde{\rho}(W_\alpha) \subset V$ , 则  $\rho_0|_{W_\alpha} = \rho|_V \circ \tilde{\rho}|_{W_\alpha}$ , 其中  $\rho|_V$  和  $\rho_0|_{W_\alpha}$  都是同胚, 故  $\tilde{\rho}|_{W_\alpha} : W_\alpha \rightarrow V$  也是同胚. 这就证明了  $\tilde{\rho}$  为覆盖映射.  $\square$

**命题 1.9.12** 设  $\rho: E \rightarrow B$  为万有覆盖映射,  $e_0 \in E$ ,  $\rho(e_0) = b_0$ , 则  $b_0$  有一个邻域  $U$  使得包含映射  $i: (U, b_0) \rightarrow (B, b_0)$  诱导的基本群之间的同态是平凡的.

**证明** 设  $U$  是  $b_0$  的一个基本邻域,  $V$  是  $\rho^{-1}(U)$  的包含  $e_0$  的道路分支. 设  $\alpha$  为  $U$  中以  $b_0$  为基点的一个闭路, 则  $\tilde{\alpha} = \rho|_V^{-1} \circ \alpha$  是  $V$  中以  $e_0$  为基点的一个闭路, 且  $\tilde{\alpha}$  是  $\alpha$  的以  $e_0$  为起点的提升. 因  $E$  是单连通的, 存在定端同伦  $F: \tilde{\alpha} \simeq_p C_{e_0}$ , 从而  $\rho \circ F: \alpha \simeq_p C_{b_0}$ . 这样,  $i_*: \pi_1(U, b_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  为零同态.  $\square$

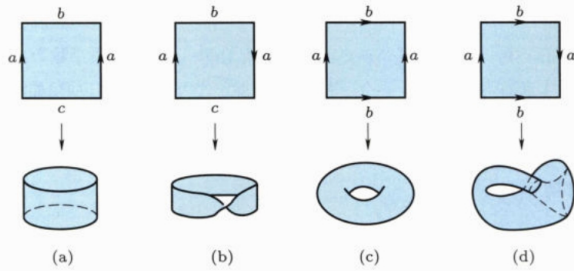
## 1.10 曲面的拓扑分类

设  $\Sigma_m$  为平面上的  $m$  边形, 取  $\Sigma_m$  的  $2n(2n < m)$  条边, 其构成的集合为  $\Lambda = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $a_i = \{a'_i, a''_i\}$ . 分别给每组  $a_i$  的两条边一个定向, 使它们构成有向边, 再将其同向粘贴在一起, 给定一个同胚  $h_i: a'_i \rightarrow a''_i$ , 使得其保持定向, 我们将商空间

$$\Sigma_m / (x \sim h_i(x), x \in a'_i, 1 \leq i \leq n)$$

记为  $S$ , 容易验证  $S$  是一个紧致连通曲面. 特别地, 如果  $2n = m$ , 则  $S$  是一个闭曲面, 把这  $2n$  条边的整体黏合方式记为  $\varphi$ , 则称  $(\Sigma, \varphi)$  为曲面  $S$  的一个**多边形表示**, 称  $a_i$  为其中的一个**黏合边对**.

需要注意的是  $S$  的同胚型与  $h_i$  的选取无关, 只需要把对应边的起点和终点粘起来即可, 中间如何黏合其实不会改变同胚型. 一些例子如下:



设  $(\Sigma, \varphi)$  为曲面  $S$  的一个如上的多边形表示,  $(\Sigma, \varphi)$  也可以按如下方式来记: 先确定  $\Sigma$  边界的一个**定向**  $\Omega$ , 如逆时针方向. 对于  $\Sigma$  的  $a_i$  中的一条边, 如果其方向与  $\Omega$  一致, 就用  $a_i$  来标记, 反之用  $a_i^{-1}$  来标记. 对于  $\Sigma$  没有参与粘合的边, 就用其他字母来表示, 不同的边用不同的字母表示, 然后选定  $\Sigma$  的一个定点作为出发点, 按  $\Omega$  方向绕  $\Sigma$  的边界走一圈, 从左到右依次写出标在各边上的字母, 所读出来的**字**  $w$  就与多边形表示  $(\Sigma, \varphi)$  一一对应 (实际上要商掉一些等价类, 即不同的对于  $h_i$  的选择), 称之为曲面  $S$  的一个**字表示**.

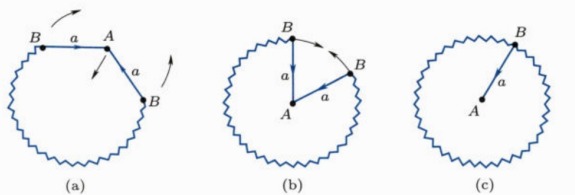
如上图中的 (a), 其字表示为:  $aba^{-1}c$ ; (b) 的字表示为:  $a^{-1}ba^{-1}c$ ; (c) 的字表示为  $ab^{-1}a^{-1}c$ ; (d) 的字表示为  $a^{-1}b^{-1}a^{-1}b$ .

设  $(\Sigma, \varphi)$  为紧致连通曲面  $S$  的一个多边形表示, 若  $\Sigma$  的两个顶点在  $\varphi$  下粘合成一点, 则称它们是**等价的**. 等价的点在  $S$  中被捏成一点. 若  $D_1, \dots, D_k$  是曲面  $S$  上  $k$  个互不相交的闭圆盘, 则称从  $S$  上挖除  $D_1, \dots, D_k$  的内部所得的曲面为  **$k$  次穿孔的  $S$** .

**定理 1.10.1 (Rado)** 任意一个紧致连通曲面都有多边形表示.

下面我们讨论一下紧致连通曲面的多边形表示的手术与性质, 这是为了对过多的多边形表示进行简化, 下面所涉及的曲面都是紧致连通的.

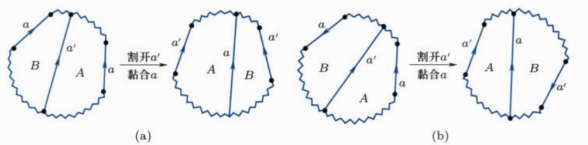
**定义 1.10.2 (I 型手术)** 设曲面  $S$  的多边形表示  $(\Sigma_m, \varphi)$  中有一个边对  $a$  是相邻的反向对边, 其公共顶点为  $A$ , 先黏合多边形  $\Sigma$  这个反向对边  $a$ , 其他边对暂不黏合, 则得到一个  $m-2$  边型  $\Sigma'$ .  $\varphi$  在  $\Sigma'$  上诱导的黏合关系为  $\varphi'$ . 这样就得到  $S$  的一个新的多边形表示  $(\Sigma', \varphi')$ . 称这样的操作为沿相邻反向边  $a$  对  $(\Sigma_m, \varphi)$  作 **I 型手术**.



在经过 I 型手术后,  $A$  变成一个内点, 不再是顶点, 故  $(\Sigma', \varphi')$  的顶点比  $(\Sigma, \varphi)$  少一个.

设  $\alpha$  是曲面  $\Sigma$  上的一个简单弧, 若  $\partial\alpha \subset \partial\Sigma$ ,  $\alpha^\circ \subset \Sigma^\circ$ , 则称  $\alpha$  是**真嵌入的**.

**定义 1.10.3 (II 型手术)** 设  $a$  是曲面  $S$  的多边形表示  $(\Sigma, \varphi)$  中的一个黏合边对. 在  $\Sigma$  中取一条真嵌入的定向简单弧  $a'$ , 使得  $a$  的两条边分别位于  $a'$  的两侧, 且  $a'$  的每个端点或者是  $\Sigma$  的一个顶点, 或者是  $\Sigma$  的一条未参与黏合的边的内部, 沿  $a'$  剪开  $\Sigma$  得到两片  $A$  和  $B$ , 然后将  $A$  和  $B$  沿  $a$  黏合得到多边形  $\Sigma'$ ,  $\Sigma'$  上黏合关系  $\varphi'$  保留了  $a$  以外的黏合关系, 并且增添了  $a'$  的黏合关系, 这样的操作称为用  $(a', a)$  对  $(\Sigma, \varphi)$  作 **II 型手术**, 称  $a'$  为  $(\Sigma, \varphi)$  的一个**分割线**.



很显然, 对曲面  $S$  的多边形表示  $(\Sigma, \varphi)$  作有限次的 I, II 型手术后所得到的  $(\Sigma', \varphi')$  仍然是  $S$  的一个多边形表示. 并且很显然我们有如下性质:

**命题 1.10.4** 设闭曲面  $S$  的有多边形表示  $(\Sigma, \varphi)$ , 则

- (1) II 型手术不改变多边形的边数和顶点类数.
- (2) 若  $(\Sigma, \varphi)$  中有同向边对, 经过一次 I 型手术或 II 型手术后得到的多边形表示记为  $(\Sigma', \varphi')$ , 则  $(\Sigma', \varphi')$  中仍然有同向边对.

我们现在可以再谈论一下曲面的定向:

**定义 1.10.5 (曲面的定向)** 若一个曲面  $S$  上有一个同胚于莫比乌斯带的子曲面, 则称  $S$  是**不可定向的**, 反正称之为**可定向的**.

现在我们来进行多边形的拓扑分类.

**定义 1.10.6 (闭曲面的标准多边形表示)** (1) 设  $n \geq 1$ , 称闭曲面的多边形表示:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

为闭曲面的 **I<sub>n</sub> 型标准多边形表示**, 简记为  $\prod_{i=1}^n a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ .

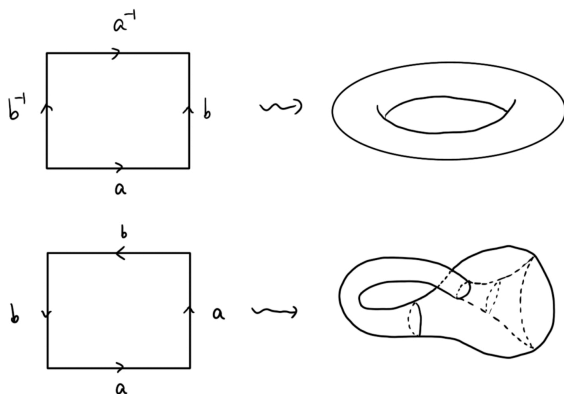
- (2) 设  $m \geq 1$ , 称闭曲面的多边形表示

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_m a_m$$

为闭曲面的 **II<sub>n</sub> 型标准多边形表示**, 简记为  $\prod_{i=1}^n a_i^2$ .

- (3) 特别约定, 球面  $S^2$  的多边形标准表示是  $(\Sigma_m, \partial \Sigma_m)$ , 是将  $\Sigma_m$  的边界黏合成一点得到的商空间.

下面是标准表示的一个例子:

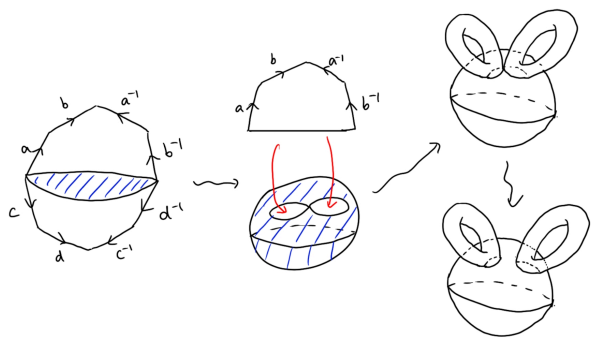


**定理 1.10.7** 任意闭曲面都有标准的多边形表示.

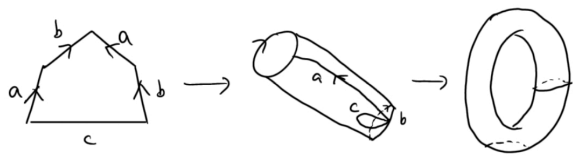
有这个定理之后我们就可以给出标准表示代表的曲面了：

- 定理 1.10.8** (1) 闭曲面有标准多边形表示  $I_n$ ，则  $S$  是  $n$  次穿孔球面粘上一个环柄所得到的曲面。
- (2) 设闭曲面  $S$  有标准的多边形表示  $II_m$ ，则  $S$  是沿  $m$  次穿孔球面的每个边界分支各黏合一个莫比乌斯带得到的曲面。

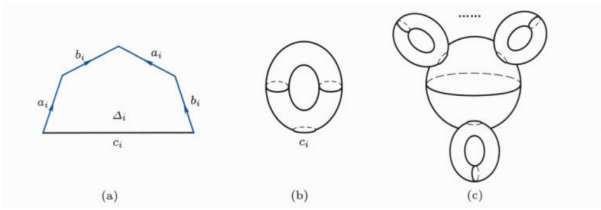
其中 (1) 是因为可以把多边形 ( $m = 2$ ) 剖分成下图最左边那样：



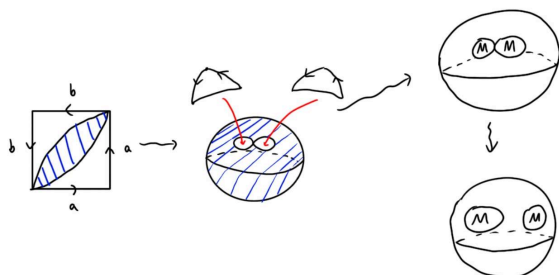
然后由于我们可以从每一个外面的五边形按照如下步骤得到一个环柄：



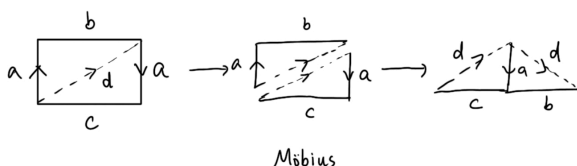
然后粘起来就得到了前面一张图后面的部分， $m = 3$  的情况如下所示：



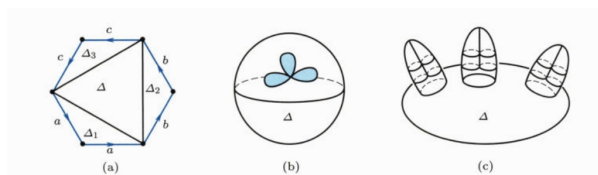
其中 (2) 是因为可以把多边形 ( $n = 2$ ) 剖分成下图最左边那样：



然后由于我们可以从每一个外面的三角形按照如下步骤得到一个莫比乌斯带：

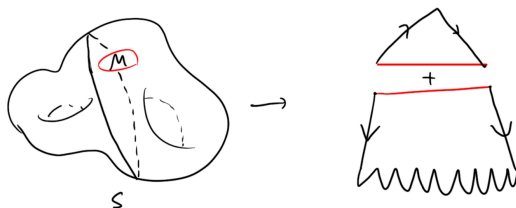


然后粘起来就得到了前面一张图后面的部分， $n = 3$  的情况如下所示：



**推论 1.10.9** 闭曲面  $S$  有 II 型多边形表示当且仅当  $S$  上有一个子曲面是一个莫比乌斯带。

**证明** 必要性显然，反之，如果  $S$  的一个子曲面  $M$  是一个莫比乌斯带，则总可以取到  $\overline{S - M}$  的一个顶点类数为 1 的多边形表示，从而  $S$  有一个顶点类数为 1 的多边形表示，并且包含一个同向黏合边对，从而得证。



□

**定义 1.10.10 (亏格)** 对于  $n \geq 1$ ，将  $I_n$  型多边形表示确定的闭曲面记为  $n\mathbb{T}^2$ ，称  $n$  为它的**亏格 (genus)**；对于  $m \geq 1$ ，将  $II_m$  型多边形表示确定的闭曲面记为  $m\mathbb{RP}^2$ ，称  $m$  为它的**亏格 (genus)**。

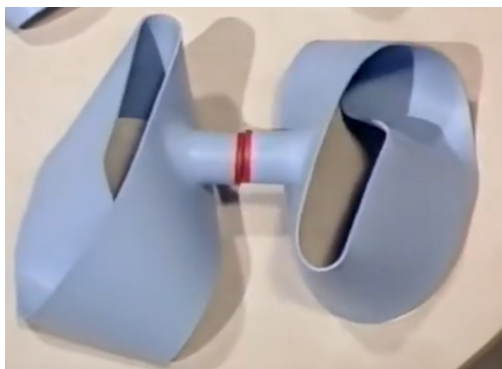
为什么这样子记呢？这实际上是一些连通和，下面我们从一种直观的角度去理解. 首先我们要定义连通和，这里就不严谨写了，直观的角度来说就是给定两个曲面如下，各挖去一个圆盘：



然后把这圆盘周围的延长出去：



然后再粘在一起：

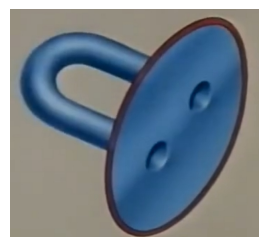
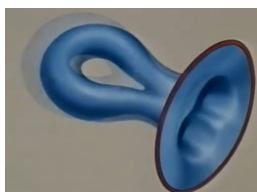
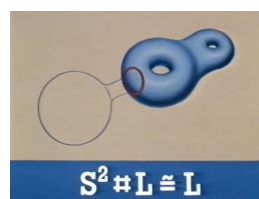
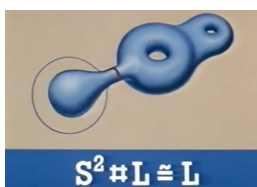
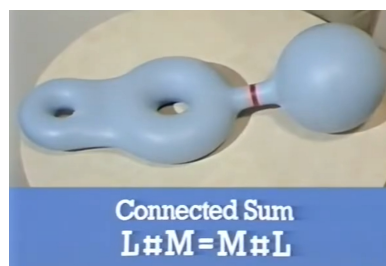
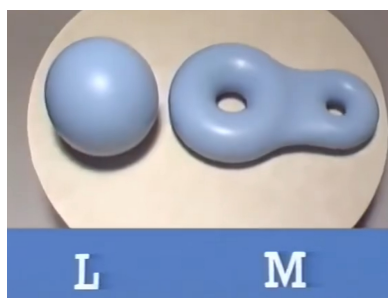


我们可以对任意两个曲面这样子干（曲面是局部欧的，所以从可以删去圆盘），所得到的新曲面就称为两个旧曲面  $L, M$  的**连通和 (connected sum)**，记为  $L \# M$ 。

直观上容易看出来，连通和是交换的。

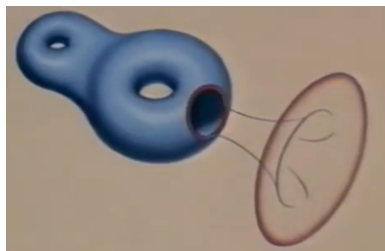
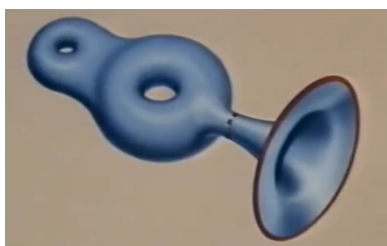
下面我们来看一些连通和的例子：比如  $S^2$  就扮演了幺元的角色：

一个圆环去掉一个圆盘就得到了一个可以黏到其他表面上的环柄：所以我们如果把一个圆环与一个莫比乌斯带做连通和，就得到一个带环柄的莫比乌斯带：

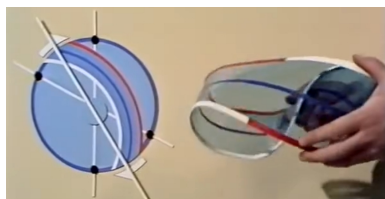
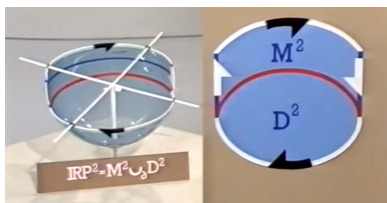


当你把一个曲面和一个圆盘做连通和的时候，会发现看似加上了东西，实际上删除了东西，即曲面与圆盘作连通和，得到的东西实际上是曲面删去了圆盘：

最后要说的东西就是我们的射影平面：



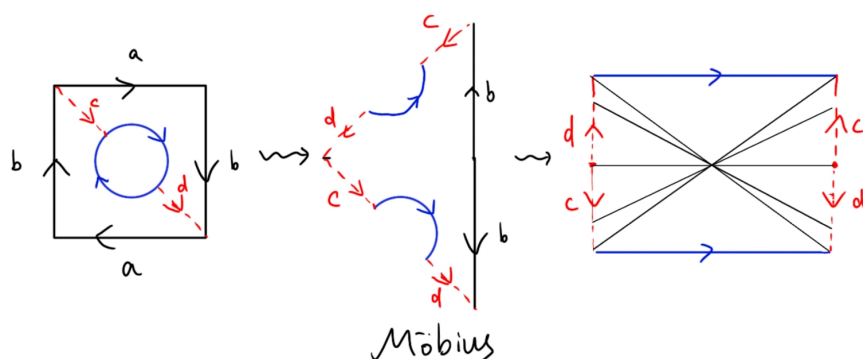
射影平面去掉一个圆盘是什么？答案是实射影平面去掉圆盘是莫比乌斯带。过程如下：



最后 be like:



我们还可以稍微 formal 一点地看出来

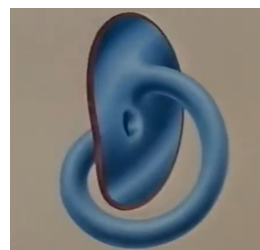
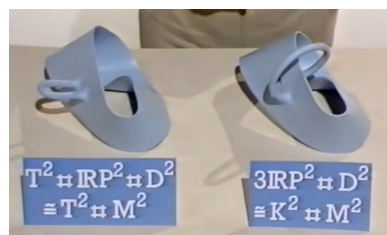


于是断言，所有的曲面都可以由球面不断地添加一些环柄或者莫比乌斯带得到. 添加环柄就相当于圆环做连通和，添加莫比乌斯环就相当于  $\mathbb{RP}^2$  作连通和，于是现在可以理解前面的两个记号.

聪明的你一定会思考下面这个问题：我们已经知道一个闭曲面要么是球面粘上  $n$  个环柄，要么是球面粘上  $n$  个莫比乌斯带，那么一个球面粘上一个环柄和一个莫比乌斯带是什么呢？

我们要说明这实际上就是三个射影平面的连通和，也就是一个球面粘上三个莫比乌斯带，然而我们无法将这个图形嵌入到  $\mathbb{R}^3$  中，所以我们对这两个东西各去掉一个圆盘使得可以嵌入  $\mathbb{R}^3$ ，注意  $(\mathbb{RP}^2)^3 - \mathbb{D} = (\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2) \# (\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{D}) = \mathbb{K} \# \mathbb{M}$ . 而 Klein 瓶去掉一个圆盘可以变成下图最右边的样子，过程在下面： 上图右边的两个实际上是

|                                        |                                  |
|----------------------------------------|----------------------------------|
| $xy\bar{x}\bar{y}aa=1$                 | $aabbcc=1$                       |
| $T^2 \# \mathbb{RP}^2$                 | $3\mathbb{RP}^2$                 |
| $T^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{D}^2$ | $3\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{D}^2$ |



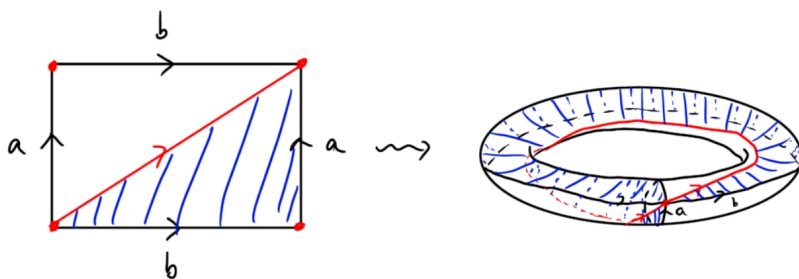
同胚的：



所以一旦存在任意一个子曲面是莫比乌斯环，我们可以把其他任意的环柄都变成  $\mathbb{RP}^2 - \mathbb{D}$ ，也就是莫比乌斯环，这与我们前面所得到的标准表示结果是一致的。

所以我们最后只剩下一步，就是说明这些可定向的不可定向的不同亏格的闭曲面，确确实实不是同胚的，而说明一些东西不是同胚的，一般的方法是找到一些同胚不变量，去说明他们的这个不变量不同。实际上我们有两种选择，一种是欧拉示性数，一种是基本群。我们先看三角剖分。

所谓三角剖分，就是用一堆三角形把曲面给肢解，如下图就是对环面的一个三角剖分：



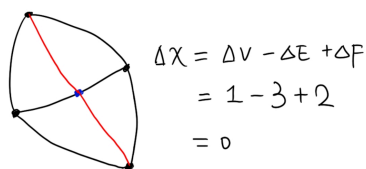
由于多边形肯定是可以三角形剖分的，所以由于任何闭曲面都有多边形表示，我们可以对任何闭曲面作三角剖分。这实际上有一点倒反天罡，因为闭曲面的多边形表示存在性实际上是由三角剖分得到的，也就是说我们先证明了任何闭曲面都有三角剖分，然后才证明了曲面有多边形表示。不过我们会默认三角剖分的存在性。

有了三角剖分的存在性，我们可以对任意一个闭曲面  $S$  去定义**欧拉示性数**  $\chi(S)$ ，定义为

$$\chi(S) = \#V - \#E + \#F$$

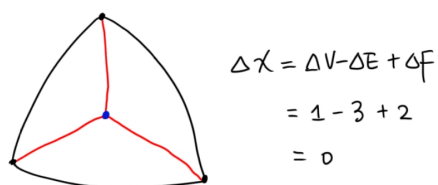
其中  $V, E, F$  分别为曲面  $S$  在任意一个三角剖分下的顶点类集，边类集，面集。我们下一步的工作自然就是说明这是良定义的：我们的思路是任意两个曲面  $S$  的三角剖分都可以通过一些精细化的操作变成相同的三角剖分，并且精细化的操作不改变欧拉示性数。

(1) 在边上加点：如图



其中新增的顶点就是图中蓝色的点，新增的边是两条红色的边加上一条原本中间的边被分成两条之后多出的一条，新增的面显然是两个，所以知道  $\Delta\chi = 1 - 3 + 2 = 0$ .

(2) 在面上加点：如图

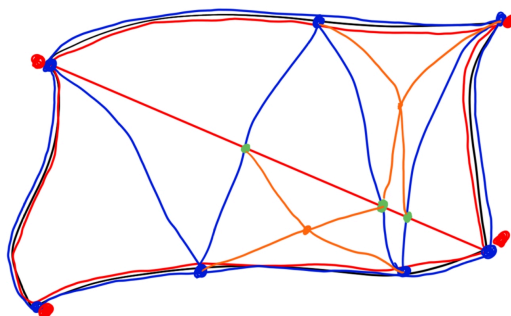


同理有不改变欧拉示性数.

下面我们要说明任何两个不同的三角剖分都可以精细化成同一个三角剖分，从而说明欧拉示性数是良定义的：

**引理 1.10.11 (共同精细化)** 对于同一个曲面上的任意两个三角剖分  $T_1$  和  $T_2$ ，总存在第三个三角剖分  $T$ ，它既是  $T_1$  的精细化，又是  $T_2$  的精细化.

想象一个透明的曲面上用红色的笔画出了三角剖分  $T_1$  的所有边，然后用蓝色的笔画出了三角剖分  $T_2$  的所有边，现在球面上布满了红色和蓝色的线条，这些线条会相互交叉，形成一个新的、更复杂的网络，这个网络分割出的最小区域不再是三角形，而是一些多边形.



- (1) 构造新的顶点:  $T$  的顶点集 =  $(T_1$  的所有顶点)  $\cup$   $(T_2$  的所有顶点)  $\cup$  (所有红色边与蓝色边的交点).
- (2) 构造新的边:  $T$  的一部分边是原  $T_1$  和  $T_2$  的边被新顶点分割后产生的线段.
- (3) 构造新的面: 此时曲面被这个复杂的网络分割成了很多小多边形, 我们可以在每个多边形内部添加一个额外的顶点, 然后添加一些边, 将它与该多边形的所有顶点连接起来, 从而将这个多边形三角化, 完成这一步后, 整个曲面就被一个新的三角剖分  $T$  所覆盖.

设  $\chi(T)$  代表三角剖分  $T$  的欧拉示性数, 根据我们上面的讨论, 我们已经证明了如果  $T$  是  $T_1$  的精细化, 那么  $\chi(T) = \chi(T_1)$ , 因为  $T$  可以通过在  $T_1$  的基础上反复应用两种基本操作得到, 每一步操作都不改变欧拉示性数. 同理,  $\chi(T) = \chi(T_2)$ , 因此:

$$\chi(T_1) = \chi(T) = \chi(T_2)$$

这就严格证明了, 对于同一个曲面, 任意两个三角剖分计算出的欧拉示性数都是相等的, 即这个值确实是曲面本身的属性, 与剖分方式无关.

下面我们说明欧拉示性数是一个拓扑不变量, 也就是说在同胚下不改变, 这是因为: 假设  $S_1$  和  $S_2$  是同胚的, 同胚映射为  $f: S_1 \rightarrow S_2$ , 我们在曲面  $S_1$  上任意取一个三角剖分  $T_1 = \{V_1, E_1, F_1\}$ .

我们可以利用同胚映射  $f$  在  $S_2$  上得到三角剖分  $T_2$ :

- (1)  $V_2 = f(V_1) = \{f(p) | p \in V_1\}$ , 由于  $f$  是双射, 所以  $V_1$  和  $V_2$  的顶点个数完全相同:  $|V_2| = |V_1|$ .
- (2) 定义为  $S_1$  上所有边在  $f$  下的像. 一条边是连接两个顶点的一条曲线, 它在  $f$  下的像也是连接对应两个像点的一条曲线, 由于  $f$  的连续性和双射性, 边的连接关系被完美地保持. 因此边的数量也完全相同:  $|E_2| = |E_1|$ .
- (3) 同理面的数量也完全相同:  $|F_2| = |F_1|$ .

于是我们有

$$\chi(S_1) = |V_1| - |E_1| + |F_1| = |V_2| - |E_2| + |F_2| = \chi(S_2)$$

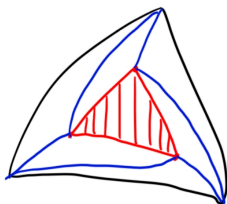
于是欧拉示性数在同胚意义下保持不变.

最后一块拼图是如下的恒等式:

$$\chi(L \# M) = \chi(L) + \chi(M) - 2$$

也即两个曲面之间的连通和的欧拉示性数可以如上计算, 这是因为当两个曲面同时扣掉一个圆盘, 实际上我们知道圆盘和三角形是同胚的, 所以相当于我们同时扣掉两个

曲面的三角剖分中的一个面，然后沿面的边界粘起来。得到一个新的曲面及其三角剖分。为了避免一些不必要的关于顶点类和边类的讨论，我们按照如下方式对每个曲面构造一个新的三角剖分，并扣去中间的红色三角形：



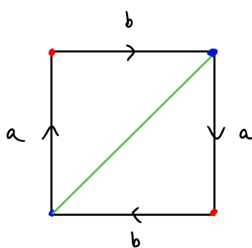
于是我们把两个曲面按照上面的方式粘起来，发现由于三对顶点和三对边粘在一起，所以顶点数量和边的数量各减少三个，而加一起的面减少了两个被挖去的红色三角形，所以

$$\begin{aligned}
 \chi(L \# M) &= V(L \# M) - E(L \# M) + F(L \# M) \\
 &= (V(L) + V(M) - 3) - (E(L) + E(M) - 3) + (F(L) + F(M) - 2) \\
 &= \chi(L) + \chi(M) - 2
 \end{aligned}$$

现在我们计算环面和射影平面的欧拉示性数，由上面的环面的三角剖分我们计算得出

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 1 - 3 + 2 = 0$$

实射影平面的三角剖分如下：



计算得出

$$\chi(\mathbb{RP}^2) = 2 - 3 + 2 = 1$$

于是我们可以归纳得到

$$\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n, \quad \chi(m\mathbb{RP}^2) = 2 - m$$

所以得到：对于不同的  $n$ ， $n\mathbb{T}^2$  之间是不同胚的，对于不同的  $m$ ， $m\mathbb{RP}^2$  之间是不同胚的。再结合曲面是否可以定向是同胚不变的（考虑莫比乌斯环的同胚还是莫比乌斯环），所以  $n\mathbb{T}^2$  和  $m\mathbb{RP}^2$  之间是不同胚的，于是我们给出了闭曲面的完全分类。

最后我们给出其基本群的刻画：

**定理 1.10.12** (1)  $\pi_1(n\mathbb{T}^2) = \langle a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq n; \prod_{i=1}^n a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1 \rangle$ , 对  $n \geq 1$ .

(2)  $\pi_1(m\mathbb{RP}^2) = \langle a_i \mid 1 \leq i \leq m; \prod_{i=1}^m a_i^2 = 1 \rangle$ , 对  $m \geq 1$ .

如果我们令  $\tilde{G}$  为  $G$  的交换化，则有

(1)  $\widetilde{\pi_1(n\mathbb{T}^2)} \cong \mathbb{Z}^{2n}$ ,  $n \geq 1$ .

(2)  $\widetilde{\pi_1(m\mathbb{RP}^2)} \cong \mathbb{Z}^{m-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $m \geq 1$ .

## 第二章

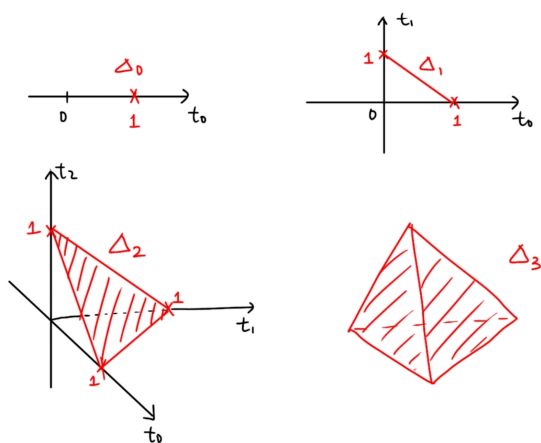
## 同调论

### 2.1 奇异同调群

这部分比较基础，我们先堆砌一些概念.

**定义 2.1.1 (标准单形) Standard simplex** 定义为对于  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , 有

$$\Delta_k := \left\{ (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{r=0}^k t_r = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

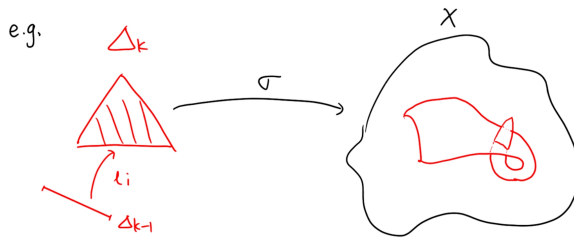


**定义 2.1.2 (*i*-th face inclusion)** 对于  $i \leq k+1$ , 我们可以定义 *i*-th face inclusion:

$$\iota_i: \Delta_k \rightarrow \Delta_{k+1}, \quad (t_0, \dots, t_k) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_k)$$

**定义 2.1.3 (singular simplex)**  $X$  是拓扑空间, 一个  $X$  上的 **singular  $k$ -simplex** 是一个连续映射

$$\sigma: \Delta_k \rightarrow X$$



**定义 2.1.4 (faces of a singular simplex)** 给定一个奇异单形  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ , 则它的 **faces** 定义为

$$\sigma_i := \sigma \circ \iota_i, \quad i = 0, \dots, k$$

现在我们可以定义奇异链复形函子:

**定义 2.1.5 (singular chain functors)** 给定拓扑空间  $X$ , 对于  $k \in \mathbb{Z}$ , 我们定义

$$S_k(X) := \begin{cases} \bigoplus_{\sigma: \Delta \rightarrow X} \mathbb{Z}\sigma, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

其函子性体现在给定拓扑空间范畴中的态射  $f: X \rightarrow Y$ , 我们可以得到

$$f_{\#} := S_k(f): S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$$

其构造过程由如下交换图保证:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_k & \xrightarrow{\sigma} & X \\ & \searrow f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

因为  $S_k(X)$  是自由的, 所以只需要考虑生成元  $\sigma$  就可以决定整个态射, 容易验证这样定义的确是一个从拓扑空间范畴到 Abel 群范畴的函子.

**定义 2.1.6 (边缘算子)** 我们可以定义 **boundary operation**  $\partial_k: S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  如下:

$$\partial_k: \sigma \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_i$$

容易发现  $\partial_k$  是从  $S_k \rightarrow S_{k-1}$  的一个自然变换, 即给定  $f: X \rightarrow Y$  为拓扑空间的态射, 则有以下交换

$$\begin{array}{ccc} S_k(X) & \xrightarrow{f\#} & S_k(Y) \\ \partial_k(X) \downarrow & & \downarrow \partial_k(Y) \\ S_{k-1}(X) & \xrightarrow{f\#} & S_{k-1}(Y) \end{array}$$

由于态射都是典范的, 很容易验证交换.

下面我们简单介绍一个引理:

**引理 2.1.7** 对于  $1 \leq j+1 \leq i \leq k \geq 2$ , 我们有下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k-2} & \xrightarrow{\iota_j} & \Delta_{k-1} \\ \iota_{i-1} \downarrow & & \downarrow \iota_i \\ \Delta_{k-1} & \xrightarrow{\iota_j} & \Delta_k \end{array}$$

**证明** 交换图道尽一切:

$$\begin{array}{ccc} (t_0, \dots, t_{k-2}) & \xrightarrow{\quad} & (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (t_0, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{k-2}) & \xrightarrow{\quad} & (\dots, 0, \dots, 0, \dots) \end{array} \quad \square$$

现在我们可以说明  $S_\bullet(X)$  构成一个链复形, 这只需要说明下面的定理:

**定理 2.1.8** 对  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ , 我们有

$$\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) = 0$$

**证明** 直接计算得到

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^k (-1)^{i+j} (\sigma_i)_j \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \iota_i \circ \iota_j + \sum_{1 \leq j+1 \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \iota_i \circ \iota_j \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \iota_i \circ \iota_j + \sum_{1 \leq j+1 \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \iota_j \circ \iota_{i-1} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \iota_i \circ \iota_j - \sum_{1 \leq j+1 \leq i \leq k} (-1)^{(i-1)+j} \sigma \circ \iota_j \circ \iota_{i-1} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \iota_i \circ \iota_j - \sum_{0 \leq s \leq t \leq k-1} (-1)^{s+t} \sigma \circ \iota_s \circ \iota_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

于是由于所有  $\sigma$  是生成元, 自然得到

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

于是我们可以得到  $X$  的  $k$ -singular homology group:

$$H_k(X) := Z_k(X) / B_k(X)$$

## 2.2 链复形

**定义 2.2.1 (chain complex)** 一个 Abel 群的 **chain complex** 是一个序列

$$C_\bullet: \cdots \rightarrow C_{k+1} \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots$$

其态射为

$$\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$$

满足

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

两个链复形之间的 **chain map**  $f_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  定义为一族态射

$$f_k: C_k \rightarrow C'_k$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_{k-1} \\ C'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & C'_{k-1} \end{array}$$

换言之可以说一个链复形是一个从整数序范畴到 Abel 群范畴的协变函子，满足相邻态射复合为 0，而 chain map 就是函子间的自然变换.

**记 2.2.2** 所有的链复形和 chain maps 构成了一个范畴，

**定义 2.2.3**  $C_\bullet$  是一个链复形，我们定义  $k$ -cycle 和  $k$ -boundary 为：

$$Z_k(C_\bullet) := \text{Ker } \partial_k, \quad B_k(C_\bullet) := \text{Im } \partial_{k+1}$$

由于两次边缘算子复合为零，自然有  $B_k(C_\bullet) \subseteq Z_k(C_\bullet)$ ，于是可以定义  $k$ -homology group 为：

$$H_k(C_\bullet) := Z_k(C_\bullet) / B_k(C_\bullet)$$

如果给定一个 chain map  $f_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ ，通过追图我们很容易知道

$$f_k(Z_k(C_\bullet)) \subseteq Z_k(C'_\bullet), \quad f_k(B_k(C_\bullet)) \subseteq B_k(C'_\bullet)$$

于是自动可以得到一个  $f$  所诱导的在同调群上的态射

$$H_k(f): H_k(C_\bullet) \rightarrow H_k(C'_\bullet)$$

实际上我们可以很容易验证  $H_k$  是一个从链复形范畴到 Abel 群范畴的协变函子.

**定义 2.2.4**  $X$  是拓扑空间，我们令

$$\pi_0(X) := \text{the set of path-connected components of } X$$

容易验证  $\pi_0$  是从拓扑空间范畴到集合范畴的一个协变函子.

**定理 2.2.5** 存在函子间的自然同构

$$T: \mathbb{Z}^{\oplus \pi_0(-)} \rightarrow H_0(-)$$

**证明** 考虑

$$S_1(X) \rightarrow S_0(X) \rightarrow 0$$

未定稿: 2026-08-26

注意到

$$H_0(X) = S_0(X) / \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}^{\oplus \text{Hom}(\Delta_0, X)} / \partial_1(\mathbb{Z}^{\oplus \text{Hom}(\Delta_1, X)})$$

因为  $\Delta_0 \rightarrow X$  相当于  $X$  中的点,  $\Delta_1 \rightarrow X$  相当于  $X$  中的路, 而对于任意的  $\gamma \in \text{Hom}(\Delta_1, X)$ , 都有

$$\partial\gamma = \gamma \circ \iota_0 - \gamma \circ \iota_1 = \gamma(1) - \gamma(0)$$

于是

$$\partial_1(\mathbb{Z}^{\oplus \text{Hom}(\Delta_1, X)}) = \mathbb{Z}^{\oplus \{\gamma(1) - \gamma(0) | \gamma \in X^{\Delta_1}\}}$$

所以在  $H_0(X)$  中  $[\alpha] = [\beta]$  当且仅当有

$$\alpha - \beta = \sum (\gamma(1) - \gamma(0)) = (\sum \gamma)(1) - (\sum \gamma)(0)$$

即  $\alpha$  与  $\beta$  在同一个道路连通分支里面, 所以容易构造出自然变换并说明是自然同构.  $\square$

## 2.3 Singular homology of a star-shaped set in $\mathbb{R}^n$

**定义 2.3.1 (star-shaped)** 我们称  $\mathbb{R}^n$  的一个子集  $X$  是 **star-shaped**, 如果  $0 \in X$ , 并且如果  $p \in X$ , 则对任意  $t \in [0, 1]$ , 有  $tp \in X$ .

下面的篇幅我们来计算 Star-shaped set 的同调群. 方便起见, 我们令

$$H_k(X) := H_k(S_\bullet(X))$$

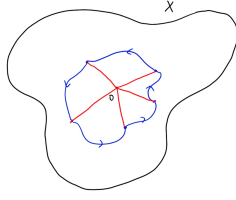
$Z_k(X), B_k(X)$  同理, 考虑

$$S_2(X) \rightarrow S_1(X) \rightarrow S_0(X)$$

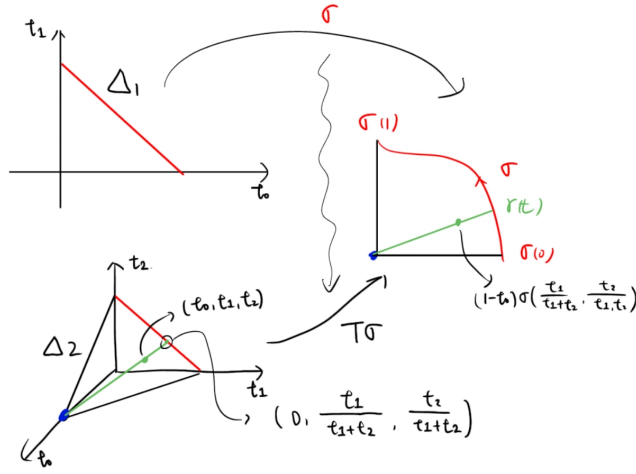
我们知道

$$Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1 = \left\{ \sum \gamma \mid \sum (\gamma(1) - \gamma(0)) = 0 \right\} = \text{set of closed paths}$$

而  $B_1(X) = \text{Im } \partial_2$  为  $X$  中的奇异 2-单形, 即曲边三角形生成的自由群. 观察下图我们容易发现闭路可以被拆分成三角形, 所以促使我们思考同调群  $H_1(X) = 0$ .



那现在就是想构造一个这样子的映射，即从  $\Delta_2$  到一个如图中分割的“三角形”，我们可以通过如下的方式来构造：



假设被切割的那一部分 path 为  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$ ，我们可以构造一个  $T\sigma: \Delta_2 \rightarrow X$  为：

$$T\sigma(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} (1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}, \frac{t_2}{t_1+t_2}\right), & t_0 \neq 1 \\ 0, & (t_0, t_1, t_2) = (1, 0, 0) \end{cases}$$

我们可以进一步推广到一般情况，即给定  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ ，我们构造  $T\sigma: \Delta_{k+1} \rightarrow X$  为

$$T\sigma(t_0, \dots, t_k) = \begin{cases} (1-t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_k}{1-t_0}\right), & t_0 \neq 1 \\ 0, & (t_0, t_1, t_2) = (1, 0, 0) \end{cases}$$

可以观察到

$$(T\sigma)_0 = (T\sigma) \circ \iota_0 = \sigma, \quad (T\sigma)_i = T(\sigma_{i-1}), i = 1, \dots, k+1$$

于是有

$$\begin{aligned}
 \partial_{k+1}(T\sigma) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i (T\sigma)_i \\
 &= \sigma + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i T\sigma_{i-1} \\
 &= \sigma - \sum_{i=0}^k (-1)^i T\sigma_i \\
 &= \sigma - T(\partial_k \sigma)
 \end{aligned}$$

于是有

$$\sigma = (\partial_{k+1}T + T\partial_k)\sigma$$

若  $\sigma \in Z_k(X)$ , 有  $\partial_k(\sigma) = 0$ , 则有

$$\sigma = (\partial_{k+1}T + T\partial_k)\sigma = \partial_{k+1}(T\sigma) \in B_k(X)$$

所以我们得到当  $k \geq 1$  时, 有

$$H_k(X) = 0$$

**注记 2.3.2** 这里实际上说明了  $id$  与 0 同伦, 从而同调群与 0 态射诱导的同调群一样, 所以是 0.

## 2.4 链同伦

在上一节中, 我们定义了一个  $T: S_k \rightarrow S_{k+1}$ , 画成交换图就是下图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S_k(X) & \xrightarrow{\partial_k} & S_{k-1}(X) \\
 & \swarrow T_k & \downarrow id & \searrow T_{k-1} & \\
 S_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & S_k(X) & & 
 \end{array}$$

在其中我们有

$$id - 0 = id = T_{k-1}\partial_k + \partial_{k+1}T_k$$

这给出了链同伦的想法:

**定义 2.4.1 (chain homotopy)**  $C_\bullet$  与  $C'_\bullet$  是两个链复形, 给定两个 chain map

$$(f_0)_\bullet, (f_1)_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$$

一个从  $(f_0)_\bullet$  到  $(f_1)_\bullet$  的 **chain homotopy**  $h_\bullet$  由一族群态射  $h_k: C_k \rightarrow C'_{k+1}$  构成,

满足

$$(f_1)_k - (f_0)_k = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} \\ & \swarrow h_k & \downarrow (f_0)_k & \downarrow (f_1)_k & \swarrow h_{k-1} \\ C'_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C'_k & & \end{array}$$

记为  $h_\bullet: (f_0)_\bullet \simeq (f_1)_\bullet$ .

**定理 2.4.2** 如果给定

$$C_\bullet \xrightleftharpoons[g]{f} C'_\bullet \xrightleftharpoons[k]{h} C''_\bullet$$

满足  $F: f \simeq g, G: h \simeq k$ , 则有  $hf \simeq kg$ .

**证明** 我们需要尝试构造一个同伦, 首先观察下面的交换图来寻找可以构造什么:

$$\begin{array}{ccccc} & & C_n & \xrightarrow{\quad} & C_{n-1} \\ & \swarrow F_n & \downarrow f_n, g_n & \swarrow F_{n-1} & \downarrow f_{n-1}, g_{n-1} \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & C'_n & \xrightarrow{\quad} & C'_{n-1} \\ \downarrow h_{n+1}, k_{n+1} & \swarrow G_n & \downarrow h_n, k_n & \swarrow G_{n-1} & \\ C''_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & C''_n & & \end{array}$$

我们的目的是说明  $h_n f_n - k_n g_n$  可以某个同伦表示, 注意到

$$\begin{aligned} h_n f_n - k_n g_n &= h_n(f_n - g_n) + (h_n - k_n)g_n \\ &= h_n(\partial'_{n+1} F_n + F_{n-1} \partial_n) + (\partial''_{n+1} G_n + G_{n-1} \partial'_n)g_n \\ &= h_n \partial'_{n+1} F_n + h_n F_{n-1} \alpha_n + \partial''_{n+1} G_n g_n + G_{n-1} \partial'_n g_n \end{aligned}$$

上面式子中可以看到从  $C_n \rightarrow C''_{n+1}$  的态射有

$$h_{n+1} F_n, \quad G_n g_n$$

本着多收集信息肯定没错的原则，我们构造

$$H_n = h_{n+1}F_n + G_ng_n$$

现在来计算一下

$$\begin{aligned}\partial''_{n+1}H_n + H_{n-1}\partial_n &= \partial''_{n+1}(h_{n+1}F_n + G_ng_n) + (h_nF_{n-1} + G_{n-1}g_{n-1})\partial_n \\ &= \partial''_{n+1}h_{n+1}F_n + \partial''_{n+1}G_ng_n + h_nF_{n-1}\partial_n + G_{n-1}g_{n-1}\partial_n\end{aligned}$$

则想要  $h_nf_n - k_ng_n = \partial''_{n+1}H_n + H_{n-1}\partial_n$ ，去掉两边一样的项，等价于证明

$$h_n\partial'_{n+1}F_n + G_{n-1}\partial'_ng_n = \partial''_{n+1}h_{n+1}F_n + G_{n-1}g_{n-1}\partial_n$$

这等价于证明

$$G_{n-1}(\partial'_ng_n - g_{n-1}\partial_n) = (\partial''_{n+1}h_{n+1} - h_n\partial'_{n+1})F_n$$

注意到  $f, g$  都是 chain map，所以有

$$\partial'_ng_n = g_{n-1}\partial_n, \quad \partial''_{n+1}h_{n+1} = h_n\partial'_{n+1}$$

故上式左右两边都是 0，从而显然成立，于是我们证明了同伦。  $\square$

**定理 2.4.3 (链同伦诱导同调群上的相同作用)** 如果  $(f_0)_\bullet \simeq (f_1)_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ ，则有

$$(f_0)_* = (f_1)_*: H_k(C_\bullet) \rightarrow H_k(C'_\bullet)$$

**证明** 简单运算即可。  $\square$

## 2.5 拓扑同伦诱导链同伦

本节的想法是给定在拓扑空间范畴上的一个同伦

$$H: f_0 \simeq f_1: X \rightarrow Y$$

能否诱导链复形的同伦：

$$(f_0)_\# \simeq (f_1)_\#: S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(Y)$$

要解决这个问题, 我们只需要处理  $Y = X \times [0, 1]$  的情况就可以了, 我们考虑交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_1 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & Y \\
 & \xleftarrow{i_0} & & \nwarrow & \\
 & & f_0 & & 
 \end{array}$$

其中

$$i_1(x) = (x, 1), \quad i_0(x) = (x, 0)$$

如果我们有  $h_\bullet: (i_0)_\# \simeq (i_1)_\#$ , 则我们有

$$(i_1)_\# - (i_0)_\# = \partial h + h\partial$$

于是我们注意到

$$\begin{aligned}
 (f_1)_\# - (f_0)_\# &= (Hi_1)_\# - (Hi_0)_\# \\
 &= H_\#((i_1)_\# - (i_0)_\#) \\
 &= H_\#(\partial h + h\partial) \\
 &= \partial(H_\#h) + (H_\#h)\partial
 \end{aligned}$$

最后一个等式注意到  $H_\#$  是 chain map, 所以和  $\partial$  交换, 于是得到  $H_\#h: (f_1)_\# \simeq (f_0)_\#$ . 所以我们下面仅研究  $Y = X \times [0, 1]$  的情况就充足.

**定理 2.5.1** 存在一族自然变换  $h_k: S_k \rightarrow S_{k+1}(- \times I)$  使得

$$(i_1)_\# - (i_0)_\# = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

**证明** 我们分五步来证明这个定理.

- (1) 我们先说明如果这样的  $\{h_k\}$  存在, 那么这些  $h_k$  完全由  $\{h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}\}$  所决定. 这里面是 Yoneda Lemma 的思想, 下面交换图说明了这个道理 (注意  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$  是  $S_k(X)$  的生成元, 并且相互自由, 所以只需要决定生成元上的作用就可以, 后

面会不断使用这个思想，下不再赘述)：

$$\begin{array}{ccc}
 S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\sigma\#} & S_k(X) \\
 \downarrow h_k(\Delta_k) & \begin{array}{c} id_{\Delta_k} \mapsto \sigma: \Delta_k \rightarrow X \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} \mapsto (\sigma \times id_I)\#h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} \end{array} & \downarrow h_k(X) \\
 S_{k+1}(\Delta_k \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times id_I)\#} & S_{k+1}(X \times I)
 \end{array}$$

(2) 如果我们取  $\xi_k \in S_{k+1}(\Delta_k \times I)$  来表示  $h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$ ，并且定义

$$h_k(X): S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X \times I), \quad \sigma \mapsto (\sigma \times id_I)\#\xi_k$$

则可以说明

$$h_k: S_k \rightarrow S_{k+1}(- \times I)$$

是一个自然变换. 下面交换图告诉你一切 (给定  $f: X \rightarrow Y$ ):

$$\begin{array}{ccccc}
 S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\quad} & h_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\quad} & S_{k+1}(\Delta_k \times I) \\
 \searrow \sigma\# & \Downarrow \ni & id_{\Delta_k} & \xrightarrow{(\sigma \times id_I)\#} & \xi_k \\
 S_k(X) & \xrightarrow{h_k(X)} & S_{k+1}(X \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times id_I)\#} & \xi_k \\
 \downarrow f\# & \searrow \ni & \sigma & \xrightarrow{(f \times id_I)\#} & (\sigma \times id_I)\#\xi_k \\
 S_k(Y) & \xrightarrow{h_k(Y)} & S_{k+1}(Y \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times id_I)\#} & \xi_k \\
 \downarrow f\# & \searrow \ni & f \circ \sigma & \xrightarrow{((f \circ \sigma) \times id_I)\#} & \xi_k
 \end{array}$$

(3) 我们断言如果对任意的  $k$ ， $h_{k-1}$  和  $h_k$  都已经按上面方式定义好了

$$\begin{array}{ccc}
 S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) \\
 \swarrow h_k(\Delta_k) & \downarrow i_1(\Delta_k)\# - i_0(\Delta_k)\# & \swarrow h_{k-1}(\Delta_k) \\
 S_{k+1}(\Delta_k \times I) & \xrightarrow{\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)} & S_k(\Delta_k \times I)
 \end{array}$$

并且  $\xi_k = h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$  满足

$$\begin{aligned}
 (\star) \quad & \partial_{k+1}(\Delta_k \times I)h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} \\
 = & i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}
 \end{aligned}$$

则有

$$\partial_{k+1}h_k = (i_1)_\# - (i_0)_\# - h_{k-1}\partial_k$$

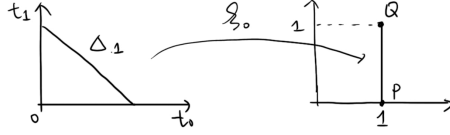
下面的交换图告诉你一切:

$$\begin{array}{ccccc}
 & S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) & \\
 & \swarrow h_k(\Delta_k) & \searrow (i_1(\Delta_k))_\# - (i_2(\Delta_k))_\# & \swarrow h_{k-1}(\Delta_k) & \\
 S_{k+1}(\Delta_k \times I) & \xrightarrow{\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)} & S_k(\Delta_k \times I) & & \\
 \downarrow (\sigma \times 1_I)_\# & \downarrow \sigma_\# & \downarrow (\sigma \times 1_I)_\# & \downarrow \sigma_\# & \\
 & S_k(X) & \xrightarrow{\partial_k(X)} & S_{k-1}(X) & \\
 \swarrow h_k(X) & \searrow (i_1(X))_\# - (i_2(X))_\# & \swarrow h_{k-1}(X) & & \\
 S_{k+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial_{k+1}(X \times I)} & S_k(X \times I) & &
 \end{array}$$

(4) 当  $k = 0$  时, 我们把具体的态射给构造出来以说明存在性:

$$\begin{array}{ccccc}
 & S_0(\Delta_0) & \longrightarrow & 0 & \\
 & \swarrow h_0(\Delta_0) & \downarrow i_1(\Delta_0)_\# - i_0(\Delta_0)_\# & \swarrow 0 & \\
 S_1(\Delta_0 \times I) & \xrightarrow{\partial_1(\Delta_0 \times I)} & S_0(\Delta_0 \times I) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

还是考虑  $id_{\Delta_0}$  送到  $S_0(\Delta_0 \times I)$  中是什么, 由于  $\Delta_0 \rightarrow X$  就是一个点, 所以通过  $i_1(\Delta_0)_\# - i_0(\Delta_0)_\#$  送下去之后就是两个点相减, 我们记为  $Q - P$ , 则我们需要找到一个  $\xi_0 \in S_1(\Delta_0 \times I)$  通过边缘算子送过去就是  $Q - P$ .



所以我们直接构造

$$\xi_0: (t_0, t_1) \mapsto (1, t_1)$$

从而满足

$$\partial_1 h_0 = (i_1)_\# - (i_0)_\# - h_{-1} \partial_0$$

- (5) 最后我们假设已经定义了所有的满足条件的  $h_l (l < k)$ , 现在我们来构造  $h_k$ , 我们的目的就是构造出  $\xi_k$  来满足 (★), 现在考虑下图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) & \\
 & \downarrow i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\# & & \downarrow h_{k-1}(\Delta_k) & \\
 h_k(\Delta_k) \swarrow & & & & \searrow \\
 S_{k+1}(\Delta_k \times I) & \xrightarrow{\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)} & S_k(\Delta_k \times I) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k \times I)} & S_{k-1}(\Delta_k \times I)
 \end{array}$$

我们只需要说明存在  $\xi_k$  使得

$$\begin{aligned}
 \partial_{k+1}(\Delta_k \times I) \xi_k &= \partial_{k+1}(\Delta_k \times I) h_k(\Delta_k) id_{\Delta_k} \\
 &= i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k) \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k}
 \end{aligned}$$

也就是

$$i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k) \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k} \in \text{Im } \partial_{k+1}(\Delta_k \times I)$$

注意到  $\Delta_k \times I$  显然是 Star-shaped, 于是其同调群为 0 ( $k \geq 1$ ), 于是在此处正合, 从而

$$\text{Im } \partial_{k+1}(\Delta_k \times I) = \text{Ker } \partial_k(\Delta_k \times I)$$

所以我们只需要说明

$$\partial_k(\Delta_k \times I) (i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k) \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k}) = 0$$

观察下图

$$\begin{array}{ccccc}
 S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_{k-1}(\Delta_k)} & S_{k-2}(\Delta_k) \\
 \downarrow i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\# & & \downarrow i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\# & & \downarrow i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\# \\
 S_k(\Delta_k \times I) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k \times I)} & S_{k-1}(\Delta_k \times I) & & \\
 & \nwarrow h_{k-1} & \nwarrow h_{k-2} & & \\
 & S_{k-1}(\Delta_k) & S_{k-2}(\Delta_k) & & 
 \end{array}$$

归纳假设告诉我们

$$\partial_k h_{k-1} = (i_1)_\# - (i_0)_\# - h_{k-2} \partial_{k-1}$$

所以

$$\begin{aligned}
 & \partial_k(\Delta_k \times I) h_{k-1}(\Delta_k) \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k} \\
 = & (i_1(\Delta_k)_\# \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k} \\
 & - h_{k-2}(\Delta_k) \partial_{k-1}(\Delta_k) \partial_k(\Delta_k) id_{\Delta_k}
 \end{aligned}$$

所以只需要证明

$$\partial_k(\Delta_k \times I) (i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#) (id_{\Delta_k}) = (i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#) \partial_k(\Delta_k) (id_{\Delta_k})$$

而这时  $(i_1)_\#, (i_0)_\#$  作为 chain map 所自动得到的, 得证.  $\square$

## 2.6 Acyclic Model Theorems

所谓 Acyclic Model Theorem 实际上源于下面的问题: 如果我们有一族从  $\mathcal{C}$  到 Abel 群范畴的协变函子, 和它们之间的自然变换, 使得下图有  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  并且  $\partial'_{k-1} \circ \partial'_k = 0$

$$\begin{array}{ccccc}
 K_k & \xrightarrow{\partial_k} & K_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & K_{k-2} \\
 \downarrow \text{?? } f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \downarrow f_{k-2} \\
 K'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & K'_{k-1} & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} & K'_{k-2}
 \end{array}$$

未定稿: 2026-08-26

则是否存在  $f_k$  使得下图交换? 类似的问题是如果  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  并且  $\partial'_{k-1} \circ \partial'_k = 0$  并且  $f_{k-1} = \partial'_k h_{k-1} + h_{k-2} \partial_{k-1}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K_k & \xrightarrow{\partial_k} & K_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & K_{k-2} \\
 & \swarrow \text{red dashed } \exists? h_k & \downarrow f_k & \swarrow h_{k-1} & \downarrow f_{k-1} & \swarrow h_{k-2} & \\
 K'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & K'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & K'_{k-1} & & 
 \end{array}$$

则是否存在  $h_k$  使得

$$f_k = \partial'_{k+1} h_k + h_{k-1} \partial_k$$

为了处理这两个问题, 我们先给出一些定义.

**定义 2.6.1** 给定一个范畴  $\mathcal{C}$ , 一个函子  $F: \mathcal{C} \rightarrow (\text{Ab})$ , 我们选出一个子集  $\mathcal{M} \subseteq \text{ob}(\mathcal{C})$ , 取

$$\mathcal{U} = \{U_M \subseteq F(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$$

定义一个函子

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}^{\mathcal{U}}: \mathcal{C} &\rightarrow (\text{Ab}) \\
 x &\mapsto \mathbb{Z} \oplus \{(\varphi, m) \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X), m \in U_M, M \in \mathcal{M}\}
 \end{aligned}$$

在态射上的作用为:

$$\tilde{F}^{\mathcal{U}}(f): \tilde{F}^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow \tilde{F}^{\mathcal{U}}(Y), \quad (\varphi, m) \mapsto (f \circ \varphi, m)$$

我们还有一个自然变换

$$\begin{aligned}
 \pi: \tilde{F}^{\mathcal{U}} &\rightarrow F \\
 \tilde{F}^{\mathcal{U}}(X) &\rightarrow F(X) \\
 (\varphi, m) &\mapsto F(\varphi)(m)
 \end{aligned}$$

我们称  $F$  是 **U-expressible**, 如果  $\pi$  是一个自然同构, 我们称  $F$  是 **weakly U-expressible**, 如果存在一个自然变换  $\tau: F \rightarrow \tilde{F}^{\mathcal{U}}$ , 使得  $\pi \circ \tau = 1$ .

下面我们来陈述 Acyclic Model Theorem:

**定理 2.6.2 (Acyclic Model Theorem - A)** 如果  $K_k$  是  $\mathcal{U}$ -expressible 的, 并且对任意

的  $M \in \mathcal{M}$  都有

$$K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k-1}(M)} K'_{k-2}(M)$$

正合, 则存在  $f_k$ .

**定理 2.6.3 (Acyclic Model Theorem - B)** 如果  $K_k$  是  $\mathcal{U}$ -expressible 的, 并且对任意的  $M \in \mathcal{M}$  都有

$$K'_{k+1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k+1}(M)} K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M)$$

正合, 则存在  $h_k$ .

实际上还能加强:

**定理 2.6.4 (Acyclic Model Theorem - A plus)** 如果  $K_k$  是 weakly  $\mathcal{U}$ -expressible 的, 并且对任意的  $M \in \mathcal{M}$  都有

$$K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k-1}(M)} K'_{k-2}(M)$$

正合, 则存在  $f_k$ .

**定理 2.6.5 (Acyclic Model Theorem - B plus)** 如果  $K_k$  是 weakly  $\mathcal{U}$ -expressible 的, 并且对任意的  $M \in \mathcal{M}$  都有

$$K'_{k+1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k+1}(M)} K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M)$$

正合, 则存在  $h_k$ .

我们证明 A 版本和 B-plus 版本以学习两种证明方法, 均可迁移到 A-plus 和 B.

下面我们先证明 A:

**证明 (零调模型定理 A)** 当  $\pi$  是自然同构的时候, 我们注意到

$$K_k(X) = \bigoplus_{\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X), u \in U_M \subseteq K_k(M), M \in \mathcal{M}} \mathbb{Z}K_k(\varphi)u$$

是自由生成的, 所以我们仿照上一节的思路来证明.

(1) 对于  $M \in \mathcal{M}$ ,  $u \in U_M \subseteq K_k(M)$ , 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 K_k(M) & \xrightarrow{\partial_k(M)} & K_{k-1}(M) & \xrightarrow{\partial_{k-1}(M)} & K_{k-2}(M) \\
 \downarrow & & \downarrow f_{k-1}(M) & & \downarrow f_{k-2}(M) \\
 K'_k(M) & \xrightarrow{\partial'_k(M)} & K'_{k-1}(M) & \xrightarrow{\partial'_{k-1}(M)} & K'_{k-2}(M)
 \end{array}$$

想构造出  $f_k$ , 首先我们至少要对  $u$  满足交换律:

$$\begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{\partial_k(M)} & \partial_k(M)u \\
 \downarrow & & \downarrow f_{k-1}(M) \\
 \xi_u & \xrightarrow{\partial'_k(M)} & f_{k-1}(M)\partial_k(M)u
 \end{array}$$

也就是说要存在一个  $\xi_u \in K'_k(M)$  满足

$$\partial'_k(M)\xi_u = f_{k-1}(M)\partial_k(M)u$$

等价于说

$$f_{k-1}(M)\partial_k(M)u \in \text{Im } \partial'_k(M) = \text{Ker } \partial'_{k-1}(M)$$

注意到

$$\partial'_{k-1}(M)f_{k-1}(M)\partial_k(M)u = f_{k-2}(M)\partial_{k-1}(M)\partial_k(M)u = 0$$

所以  $\xi_u$  是存在的.

(2) 现在选定我们的  $\xi_u$ . 假设  $f_k$  确实是自然变换, 考虑  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$ ,  $u \in U_M$ , 我们来说明  $f_k$  完全由  $\xi_u = f_k(M)u$  来决定.

$$\begin{array}{ccccc}
 K_k(M) & \xrightarrow{K_k(\varphi)} & K_k(X) & & \\
 \downarrow f_k(M) & & \downarrow f_k(X) & & \\
 K'_k(M) & \xrightarrow{K'_k(\varphi)} & K'_k(X) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \xi_u & \xrightarrow{\quad} & K'_k(\varphi)\xi_u & & 
 \end{array}$$

交换图告诉我们

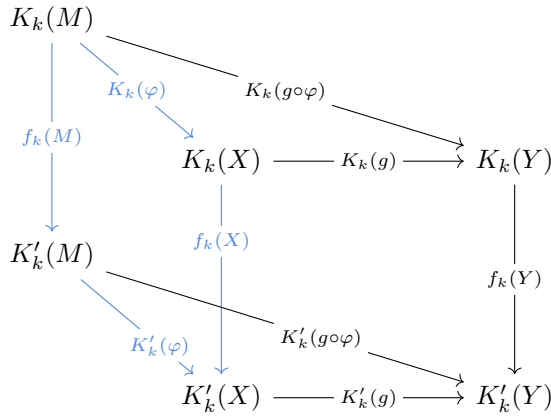
$$f_k(X)K_k(\varphi)(u) = K'_k(\varphi)\xi_u$$

因为  $K_k(\varphi)(u)$  是  $K_k(X)$  的生成元, 所以在生成元上的作用完全决定了整个的作用, 故  $f_k$  被决定.

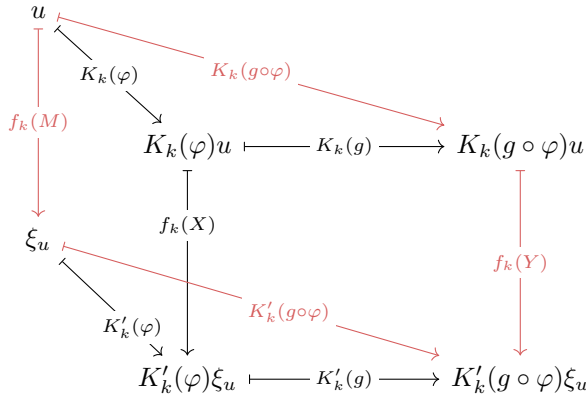
(3) 我们现在来说明按照

$$f_k(X): K_k(\varphi)(u) \mapsto K'_k(\varphi)\xi_u$$

定义的  $f_k$  确实是一个自然变换, 从而结论得证. 所以给定  $g: X \rightarrow Y$ , 我们要说明下图最前面的正方形面交换



要说明交换只需要说明在生成元上交换即可, 注意蓝色面在生成元  $u$  上是交换的, 从而我们考虑元素的图表:



由于红面关于  $u$  也是交换的, 所以确实是交换的.

(4) 我们最后来说明定义的  $f_k$  确实满足函子上的交换图表, 只需要在生成元上验证,

即对于任意的  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$  都有下图在生成元  $K_k(\varphi)u$  上交换

$$\begin{array}{ccccc}
 K_k(M) & \xrightarrow{\quad \partial_k(M) \quad} & K_{k-1}(M) & & \\
 \downarrow f_k(M) & \searrow K_k(\varphi) & \downarrow & \searrow K_{k-1}(\varphi) & \\
 & K_k(X) & \xrightarrow{\quad \partial_k(X) \quad} & K_{k-1}(X) & \\
 & \downarrow f_{k-1}(M) & & \downarrow f_{k-1}(X) & \\
 K'_k(M) & \xrightarrow{\quad \partial'_k(M) \quad} & K'_{k-1}(M) & & \\
 \downarrow f_k(X) & \searrow K'_k(\varphi) & \downarrow & \searrow K'_{k-1}(\varphi) & \\
 & K'_k(X) & \xrightarrow{\quad \partial'_k(X) \quad} & K'_{k-1}(X) &
 \end{array}$$

我们只需要把元素的交换图画出来就立刻得到结论:

$$\begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{\quad \partial_k(M) \quad} & \partial_k(M)u & & \\
 \downarrow f_k(M) & \searrow K_k(\varphi) & \downarrow & \searrow K_{k-1}(\varphi) & \\
 & K_k(\varphi)u & \xrightarrow{\quad \partial_k(X) \quad} & \partial_k(X)K_k(\varphi)u & \\
 & \downarrow f_{k-1}(M) & & \downarrow f_{k-1}(X) & \\
 \xi_u & \xrightarrow{\quad \partial'_k(M) \quad} & f_{k-1}(M)\partial_k(M)u & & \\
 \downarrow f_k(X) & \searrow K'_k(\varphi) & \downarrow & \searrow K'_{k-1}(\varphi) & \\
 & K'_k(\varphi)\xi_u & \xrightarrow{\quad \partial'_k(X) \quad} & ? &
 \end{array}$$

问号处是说前面的图交换当且仅当

$$\partial'_k(X)K'_k(\varphi)\xi_u = f_{k-1}(X)\partial_k(X)K_k(\varphi)u$$

注意到除了前表面其他五个面都是关于  $u$  交换的, 于是交换性立刻得到.  $\square$

我们发现在 A 的证明中, 完全没有用到  $\widetilde{K}_k^{\mathcal{U}}$  这样子的东西, 实际上只在第一步中利用  $\pi$  是自然同构来说明  $K_k(X)$  是一个由若干元素生成的自由群, 如果我们有自由的条件 (满足一定自然性), 那确实就不需要这个  $\pi$  和其他构造, 所以可以对  $\mathcal{U}$ -expressible 的条件进行一定的减弱, 我们来通过对定理 B-plus 的证明来说明这一点.

**证明 (零调模型定理 B-plus)** 我们还是分步骤来证明:

- (1) 首先我们来说明可以对于  $u \in U_M$  来定义  $\xi_u$  (希望这个东西就是  $h_k(M)u$ ) 使得满足

$$\partial'_{k+1}(M)\xi_u = f_k(M)u - h_{k-1}(M)\partial_k(M)u$$

我们考虑交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K_k(M) & \xrightarrow{\partial_k(M)} & K_{k-1}(M) & \xrightarrow{\partial_{k-1}(M)} & K_{k-2}(M) \\
 & \swarrow h_k(M) & \downarrow f_k(M) & & \downarrow f_{k-1}(M) & & \downarrow f_{k-2}(M) \\
 K'_{k+1}(M) & \xrightarrow{\partial'_{k+1}(M)} & K'_k(M) & \xrightarrow{\partial'_k(M)} & K'_{k-1}(M) & & 
 \end{array}$$

由于下面的行是正合的，所以要说明

$$f_k(M)u - h_{k-1}(M)\partial_k(M)u = \partial'_{k+1}(M)\xi_u \in \text{Im} = \text{Ker}$$

只需要说明

$$\partial'_k(M)(f_k(M)u - h_{k-1}(M)\partial_k(M)u) = 0$$

这等价于说明

$$\begin{aligned}
 f_{k-1}(M)\partial_k(M)u &= \partial'_k(M)h_{k-1}(M)\partial_k(M)u + 0 \\
 &= \partial'_k(M)h_{k-1}(M)\partial_k(M)u + h_{k-2}(M)\partial_{k-1}(M)\partial_k(M)u
 \end{aligned}$$

这利用  $f_{k-1} = h_{k-2}\partial_{k-1} + \partial'_k h_{k-1}$  立刻得到. 于是所需要的  $\xi_u$  是存在的.

(2) 我们定义一个从  $\tilde{K}_k^{\mathcal{U}} \rightarrow K'_{k+1}$  的自然变换  $\tilde{h}_k$ ，定义如下：

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_k(X): \tilde{K}_k^{\mathcal{U}}(X) &\rightarrow K'_{k+1}(X) \\
 (\varphi, u) &\mapsto K'_{k+1}(\varphi)\xi_u
 \end{aligned}$$

定义的合理性利用如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}_k^{\mathcal{U}}(X) & \xrightarrow{\pi(X)} & K_k(X) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 K'_{k+1}(X) & & K_k(\varphi)u \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & K'_{k+1}(\varphi)\xi_u
 \end{array}$$

现在我们来说明这确实是一个自然变换，只需要对于  $g: X \rightarrow Y$  验证下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{K}_k^{\mathcal{U}}(X) & \xrightarrow{\quad} & K'_{k+1}(X) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \widetilde{K}_k^{\mathcal{U}}(Y) & \xrightarrow{\quad} & K'_{k+1}(Y) & & \\
 & \searrow (\varphi, u) & \searrow (g \circ \varphi, u) & & \\
 & & & & K'_{k+1}(\varphi)\xi_u \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & K'_{k+1}(g \circ \varphi)\xi_u
 \end{array}$$

交换性几乎是显然的.

(3) 我们来说明

$$f_k \circ \pi = \partial'_{k+1} \circ \widetilde{h}_k + h_{k-1} \circ \partial_k \circ \pi$$

给定  $\varphi: M \rightarrow X$ ，我们考虑交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & K_{k-1}(M) & & \\
 & & & & \swarrow \partial_k(M) & \searrow K_{k-1}(\varphi) & \\
 & & K_k(M) & & & & K_{k-1}(X) \\
 & & \downarrow f_k(M) & \swarrow K_k(\varphi) & \searrow \partial_k(X) & & \downarrow h_{k-1}(X) \\
 & & K'_k(M) & & K_k(X) & & \\
 & & \downarrow f_k(M) & \swarrow K'_k(\varphi) & \downarrow f_k(X) & \swarrow \pi(X) & \\
 & & K'_{k+1}(M) & & K'_k(X) & & \\
 & & \downarrow K'_{k+1}(\varphi) & \swarrow \partial'_{k+1}(M) & \swarrow \partial'_{k+1}(X) & \swarrow \widetilde{h}_k(X) & \\
 & & K'_{k+1}(X) & & & & \widetilde{K}_k^{\mathcal{U}}(X) \\
 & & & & & & \downarrow f_k \circ \pi \\
 & & & & & & K'_{k+1}(X)
 \end{array}$$

我们直接计算

$$\begin{aligned}
f_k(X)\pi(X)(\varphi, u) &= f_k(X)K_k(\varphi)u \\
&= K'_k(\varphi)f_k(M)u \\
&= K'_k(\varphi)(\partial'_{k+1}(M)\xi_u + h_{k-1}(M)\partial_k(M)u) \\
&= K'_k(\varphi)\partial'_{k+1}(M)\xi_u + K'_k(\varphi)h_{k-1}(M)\partial_k(M)u \\
&= \partial'_{k+1}(X)K'_{k+1}(\varphi)\xi_u + h_{k-1}(X)K_{k-1}(\varphi)\partial_k(M)u \\
&= \partial'_{k+1}(X)\widetilde{h_k}(X)(\varphi, u) + h_{k-1}(X)\partial_k(X)K_k(\varphi)u \\
&= \partial'_{k+1}(X)\widetilde{h_k}(X)(\varphi, u) + h_{k-1}(X)\partial_k(X)\pi(X)(\varphi, u)
\end{aligned}$$

所以在生成元上成立，于是恒有

$$f_k(X)\pi(X) = \partial'_{k+1}(X)\widetilde{h_k}(X) + h_{k-1}(X)\partial_k(X)\pi(X)$$

即

$$f_k \circ \pi = \partial'_{k+1} \circ \widetilde{h_k} + h_{k-1} \circ \partial_k \circ \pi$$

我们现在令

$$h_k = \widetilde{h_k} \circ \tau$$

在上式两边复合  $\tau$  就得到

$$f_k = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k$$

定理得证. □

我们完成了定理证明，无圈模型定理实际上相当于为我们提供了一个自动证明机，使得我们不需要再去通过归纳方式手动构造需要的映射，比如我们如果取  $\mathcal{C}$  为拓扑空间范畴， $K_k = S_k$ ， $K'_k = S_k(- \times I)$ ， $\mathcal{M} = \{\Delta_k\}$ ， $U_{\Delta_k} = \{id_{\Delta_k}\}$ ，我们会发现

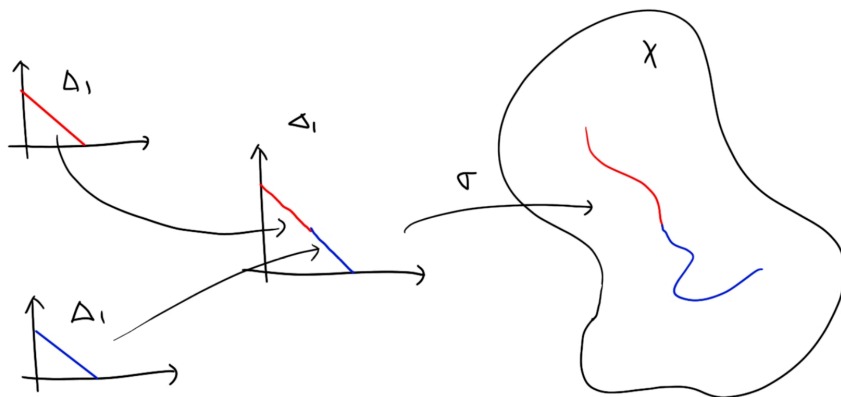
$$\widetilde{K_k}^{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}^{\oplus \{(\varphi, id_{\Delta_k}) \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta_k \rightarrow X)\}} = S_k(X) = K_k(X)$$

于是自然是  $\mathcal{U}$ -expressible 的，并且我们注意到  $K'_k$  在模型  $\Delta_k$  上是 acyclic 的，所以我们直接套用定理 B 就立刻得到了我们上一节的结论。

于是我们看到无圈模型定理的威力在于只要你在最简单的几何对象（即所谓模型，如单纯形）上定义好了某种运算或映射，并且证明了它在这些模型上是同伦正确的，那么这个运算就能自动推广到所有空间，且在同伦意义下是唯一的。

## 2.7 重心剖分

我们可以看到，一个大的 complex 可以被分解为一些小的 complex 的和，比如



我们有时会遇到一些特殊的开覆盖，需要对 simplex 作分割，使得每一个小的 simplex 都落在某一个 cover 中. 于是我们期望会得到一个分割映射 (subdivision)

$$\text{Sd}_k: S_k \rightarrow S_k$$

为函子之间的自然变换，成为拓扑空间  $X$  上奇异链复形之间的 chain map:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_2(X) & \xrightarrow{\partial} & S_1(X) & \xrightarrow{\partial} & S_0(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Sd}_2(X) & & \downarrow \text{Sd}_1(X) & & \downarrow = \\ \cdots & \longrightarrow & S_2(X) & \xrightarrow{\partial} & S_1(X) & \xrightarrow{\partial} & S_0(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

由无圈模型定理，我们只需要在 model 上去考虑这件事情，我们考虑

$$\mathcal{M} = \{M\}, \quad M = \Delta_1, \quad U_M = \{\text{id}_{\Delta_1}\}$$

现在来考虑在  $\Delta_1$  上的情况:

$$\begin{array}{ccccc} S_1(\Delta_1) & \xrightarrow{\partial} & S_0(\Delta_1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \text{Sd}(\Delta_1) & & \downarrow \text{=} & & \\ S_1(\Delta_1) & \xrightarrow{\partial} & S_0(\Delta_1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

要手工造出来  $\text{Sd}(\Delta_1)$ , 我们只需要造出来它在  $\text{id}_{\Delta_1}$  上的作用即可, 为表述方便, 我们给出如下定义.

**定义 2.7.1**  $P_i$  为  $Z$  中的点, 则我们记

$$[P_0, \dots, P_k]: \Delta_k \rightarrow Z, \quad (t_0, \dots, t_k) \mapsto \sum_{i=0}^k t_i P_i$$

称为 **仿射  $k$ -复形**, 取 face 即

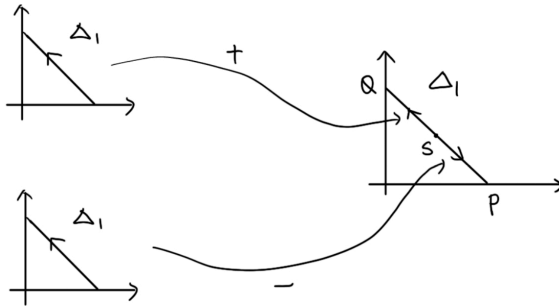
$$[P_0, \dots, P_k]_i = [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_k]$$

我们定义

$$A_k(Z) := \mathbb{Z}^{\oplus \{[P_0, \dots, P_k] | P_i \in Z\}} \subseteq S_k(Z)$$

如图, 我们按图中标点可以看出  $\text{id}_{\Delta_1} = [P, Q]$ , 我们定义  $\text{Sd}$  为

$$\text{Sd}([P, Q]) = [S, Q] - [S, P], \quad S = \frac{P+Q}{2}$$



现在, 对于拓扑空间  $X$ , 设  $\varphi \in S_1(X)$ , 则考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} S_1(X) & \xleftarrow{\varphi^\#} & S_1(\Delta_1) \\ \text{Sd}(X) \downarrow & & \downarrow \text{Sd}(\Delta_1) \\ S_1(X) & \xleftarrow{\varphi^\#} & S_1(\Delta_1) \end{array}$$

我们定义

$$\text{Sd}(X)\varphi = \varphi^\#(\text{Sd}(\Delta_1) \text{id}_{\Delta_1})$$

**注记 2.7.2** 可以看出  $\text{Sd}$  操作并没有动  $X$  本身, 只是在  $\Delta_1$  中分割然后再送到  $X$  中.

我们可以发现, 如果  $X \subset \mathbb{R}^n$  是凸的, 则有

$$\text{Sd}_1(X)(A_1(X)) \subseteq A_1(X)$$

即剖分这个操作是保持仿射复形的, 因为如果  $\varphi$  是仿射的, 则很显然仿射复合仿射还是仿射.

现在我们假设已经定义好了

$$\text{Sd}_{k-1}: S_{k-1} \rightarrow S_{k-1}, \quad \text{Sd}_{k-2}: S_{k-2} \rightarrow S_{k-2}$$

并且满足下图交换

$$\begin{array}{ccc} S_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & S_{k-2} \\ \text{Sd}_{k-1} \downarrow & & \downarrow \text{Sd}_{k-2} \\ S_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & S_{k-2} \end{array}$$

且满足对  $X \subset \mathbb{R}^n$  为凸集, 都有

$$\text{Sd}_{k-1}(X)(A_{k-1}(X)) \subset A_{k-1}(X)$$

现在我们尝试去验证零调模型定理 2.6.2，还是只需要考虑在  $\Delta_K$  上的作用，即下图

$$\begin{array}{ccccc}
 S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_{k-1}(\Delta_k)} & S_{k-2}(\Delta_k) \\
 \text{Sd}_k(\Delta_k) \downarrow & & \text{Sd}_{k-1}(\Delta_k) \downarrow & & \text{Sd}_{k-2}(\Delta_k) \downarrow \\
 S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_{k-1}(\Delta_k)} & S_{k-2}(\Delta_k)
 \end{array}$$

追踪元素

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{id}_{\Delta_k} = [e_0, \dots, e_k] & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & \sum_{i=0}^k (-1)^i [e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k] & \xrightarrow{\partial_{k-1}(\Delta_k)} & 0 \\
 \text{Sd}_k(\Delta_k) \downarrow & & \text{Sd}_{k-1}(\Delta_k) \downarrow & & \text{Sd}_{k-2}(\Delta_k) \downarrow \\
 \xi_k & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & \sum_{i=0}^k (-1)^i \text{Sd}_{k-1}(\Delta_k) [e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k] & \xrightarrow{\partial_{k-1}(\Delta_k)} & 0
 \end{array}$$

于是由于  $\Delta_k$  上奇异同调是 0，故下面正合，从而可以知道  $\xi_k$  是存在的，我们任选一个满足条件的  $\xi_k$  即可，如果需要一个具体的写法，我们可以写成

$$\xi_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i T_{b_k}(\text{Sd}_{k-1}(\Delta_k)[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k]) = T_{b_k}(\text{Sd}_{k-1}(\Delta_k)\partial[e_0, \dots, e_k])$$

其中  $b_k = (e_0 + \dots + e_k)/(k+1)$ ，对任意的  $b \in X, \sigma: \Delta_{k-1} \rightarrow X$ ，我们定义**锥算子**

$$(T_b \sigma)(t_0, \dots, t_k) = \begin{cases} b, & (t_0, \dots, t_k) = (1, 0, \dots, 0) \\ t_0 b + (1 - t_0) \sigma\left(\frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_k}{1 - t_0}\right), & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们在第 2.3 节中就已经知道这样子的  $T_b$  满足

$$\sigma = \partial T_b \sigma + T_b \partial \sigma$$

可以看出对  $\sigma = [P_1, \dots, P_k]$ ，我们有

$$T_{P_0} \sigma = [P_0, \dots, P_k]$$

一般地，我们有

$$\text{Sd}_k(X): S_k(X) \rightarrow S_k(X), \quad \sigma \mapsto \sigma^\# \xi_k$$

这样可以验证  $Sd_k$  是一个自然变换, 并且有

$$\begin{array}{ccc} S_k & \xrightarrow{\partial_k} & S_{k-1} \\ \text{Sd}_k \downarrow & & \downarrow \text{Sd}_{k-1} \\ S_k & \xrightarrow{\partial_k} & S_{k-1} \end{array}$$

并且把 affine 复形送到 affine 复形, 即对  $X \subset \mathbb{R}^n$  为凸集, 都有

$$\text{Sd}_k(X)(A_k(X)) \subset A_k(X)$$

道理在于  $\text{Sd}_{k-1}$  就把 affine 送到 affine, 而可见  $\sum_{i=0}^k (-1)^i \text{Sd}_{k-1}(\Delta_k)[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_k]$  是 affine 的, 于是可见

$$\xi_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i T_{b_k}(\text{Sd}_{k-1}(\Delta_k)[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_k])$$

是 affine 的, 因为  $T_b$  很显然也是把 affine 送到 affine, 最后我们知道 affine 复合 affine 还是 affine, 故若  $\sigma$  affine, 则  $\sigma^\# \xi_k$  也是 affine, 得证.

于是我们成功地构造出了  $\text{Sd}_\bullet$ , 下面我们要说明存在一个自然的链同伦  $h_\bullet: \text{id}_{S_\bullet} \simeq \text{Sd}_\bullet$ . 在  $k=0$  的时候, 我们有  $\text{Sd}_0 = 1$ , 所以可以取  $h_0 = 0$ , 于是由定理 2.6.3 可知存在  $h_\bullet$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \swarrow h_k & \parallel \text{Sd}_k & \searrow h_{k-1} & & \swarrow h_1 & \parallel \text{Sd}_1 & \searrow 0 & \parallel \text{Sd}_0 & \parallel \text{id}_{S_0} \\ \cdots & \longrightarrow & S_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并且我们可以额外要求  $h_\bullet$  把 affine 复形送到 affine 复形, 即对  $X \subset \mathbb{R}^n$  凸, 有

$$h_k(X)(A_k(X)) \subset A_{k+1}(X)$$

道理在于我们可以去考虑

$$\begin{array}{ccc} S_k(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_k(\Delta_k)} & S_{k-1}(\Delta_k) \\ \swarrow h_k(\Delta_k) & \parallel \text{Sd}_k & \searrow h_{k-1}(\Delta_k) \\ S_{k+1}(\Delta_k) & \xrightarrow{\partial_{k+1}(\Delta_k)} & S_k(\Delta_k) \end{array}$$

我们知道有

$$\partial_{k+1}(\Delta_k)h_k(\Delta_k)\text{id}_{\Delta_k} = z_k = (\text{Sd}_k(\Delta_k) - \text{id}_{S_k}(\Delta_k))\text{id}_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)\text{id}_{\Delta_k}$$

由归纳假设和  $\text{Sd}_k$  的构造可知等式右边是 affine 的, 最后我们知道

$$\sigma = \partial T_b \sigma + T_b \partial \sigma$$

取  $\sigma = \text{id}_{\Delta_k}$ , 有

$$\text{id}_{\Delta_k} = T\partial + \partial T$$

即零伦, 于是可以立刻证明仿射链复形  $A_\bullet(\Delta_k)$  是零调的, 此时注意到  $z_k$  是仿射复形, 并且是闭链, 从而存在仿射复形  $\eta_{k+1}$  使得

$$\partial_{k+1}(\Delta_k)\eta_k = z_k$$

故我们取  $h_k(\Delta_k)\text{id}_{\Delta_k} = \eta_k$  即可, 然后就足以说明  $h_k$  将 affine 送到 affine.

我们将以上内容总结成以下定理:

**定理 2.7.3 (凸集的仿射链复形)** 对任意凸集  $X \subset \mathbb{R}^n$  及其仿射链复形  $A_\bullet(X)$ , 存在同伦锥算子  $T_b$  使得该复形是零伦的, 从而在正维度上的同调群为 0. 而  $H_0(A_\bullet(X)) = \mathbb{Z}$ .

**定理 2.7.4 (重心剖分的性质)** 存在函子链复形  $S_\bullet$  之间的自然变换链映射  $\text{Sd}_\bullet$  满足把线性空间中凸集的仿射复形送到仿射复形.

**定理 2.7.5 (重心剖分的同伦)** 存在一个自然变换链同伦  $h_\bullet: S_\bullet \rightarrow S_{\bullet+1}$  使得对所有的  $k$  都有

$$\text{Sd}_k - \text{id}_{S_k} = \partial_{k+1}h_k + h_{k-1}\partial_k$$

并且  $h_k$  把线性空间中凸集的仿射复形送到仿射复形.

**推论 2.7.6** 由于链同伦  $\text{Sd}_\bullet \simeq \text{id}_{S_\bullet}$ , 于是对任意正整数  $m$ , 都有  $\text{Sd}_\bullet^m \simeq \text{id}_{S_\bullet}$ .

最后, 我们讨论一个非常重要的定理.  $X$  是一个拓扑空间, 令

$$U = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

为  $X$  的子集族, 我们很显然有自然的含入映射

$$S_k(X_\alpha) \hookrightarrow S_k(X), \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$$

并且满足下图交换

$$\begin{array}{ccc} S_k(X_\alpha) & \hookrightarrow & S_k(X) \\ \partial_k(X_\alpha) \downarrow & & \downarrow \partial_k(X) \\ S_{k-1}(X_\alpha) & \hookrightarrow & S_{k-1}(X) \end{array}$$

我们定义

$$S_k^{\mathcal{U}}(X) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} S_k(X_\alpha) \cong \mathbb{Z}^{\oplus \{\sigma: \Delta_k \rightarrow X: \exists \alpha \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \sigma(\Delta_k) \subset X_\alpha\}}$$

于是我们有

$$\begin{array}{ccc} S_k^{\mathcal{U}}(X) & \hookrightarrow & S_k(X) \\ \partial_k^{\mathcal{U}}(X) \downarrow & & \downarrow \partial_k(X) \\ S_{k-1}^{\mathcal{U}}(X) & \hookrightarrow & S_{k-1}(X) \end{array}$$

我们的目的是证明:

**定理 2.7.7 (小链定理)** 若  $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha^\circ$ , 则存在典范含入  $i: S_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_\bullet(X)$  是同伦等价, 即存在  $\tau: S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$  使得  $(\tau \circ i)_\bullet \simeq \text{id}_{S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)}$  且  $(\tau \circ i)_\bullet \simeq \text{id}_{S_\bullet(X)}$ .

在证明之前, 我们先介绍一个引理. 令  $(V, \|\cdot\|)$  为赋范线性空间, 对  $c = \sum_{\sigma: \Delta_k \rightarrow V} n_\sigma \sigma \in S_k(V)$ , 我们定义

$$\text{mesh}(c) := \max \{ \text{diam } \sigma(\Delta_k): n_\sigma \neq 0 \}$$

其中

$$\text{diam } X = \sup_{p, q \in X} \|x - y\|$$

容易看到

$$\text{mesh}([P_0, \dots, P_k]) = \sup_{i, j} \|P_i - P_j\|$$

**引理 2.7.8** 对于  $c \in A_k(V)$ , 我们有  $\text{mesh}(\text{Sd}_k(V)c) \leq \frac{k}{k+1} \text{mesh}(c)$ .

**证明** 由  $\text{mesh}(c)$  的定义可知, 我们只需要对单个仿射  $k$ -单纯形  $\sigma = [P_0, \dots, P_k]$  证明该不等式即可. 换言之, 我们需要证明对于重心剖分  $\text{Sd}_k(\sigma)$  中的任意一个子单纯形  $\tau$ , 都有

$$\text{diam}(\tau) \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$$

我们对维度  $k$  使用数学归纳法. 当  $k = 1$  时,  $\sigma = [P_0, P_1]$  是线段, 其重心为中

点  $b = \frac{P_0 + P_1}{2}$ .  $\text{Sd}_1(\sigma)$  包含两个 1-单纯形:  $[b, P_0]$  和  $[b, P_1]$ . 它们的直径显然为  $\frac{1}{2}\|P_0 - P_1\| = \frac{1}{2}\text{diam}(\sigma)$ . 而公式右侧在  $k = 1$  时给出的系数正是  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ . 因此, 不等式成立.

假设该不等式对维度  $k-1$  成立. 考虑  $k$ -单纯形  $\sigma = [P_0, \dots, P_k]$ , 其重心为  $b = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k P_i$ . 根据重心剖分利用锥算子的递归定义:

$$\text{Sd}_k(\sigma) = T_b(\text{Sd}_{k-1}(\partial\sigma))$$

这意味着  $\text{Sd}_k(\sigma)$  中的任何一个子单纯形  $\tau$ , 都可以写成  $[b, v_0, \dots, v_{k-1}]$  的形式, 其中  $\tau' = [v_0, \dots, v_{k-1}]$  是  $\sigma$  的某个  $(k-1)$ -面  $\sigma_j$  经过剖分后  $\text{Sd}_{k-1}(\sigma_j)$  中的一个子单纯形.

单纯形的直径由其顶点的最大距离决定, 因此我们有:

$$\text{diam}(\tau) = \max \left\{ \text{diam}(\tau'), \max_{v \in \text{Vert}(\tau')} \|v - b\| \right\}$$

由归纳假设, 对于  $(k-1)$ -单纯形  $\tau'$ , 我们有:

$$\text{diam}(\tau') \leq \frac{k-1}{k} \text{diam}(\sigma_j) \leq \frac{k-1}{k} \text{diam}(\sigma) \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$$

接下来, 我们只需估计重心  $b$  到  $\tau'$  的任意顶点  $v$  的距离. 因为  $v$  属于  $\sigma$  的某个真面, 所以  $v$  必定包含在凸集  $\sigma$  中. 由于范数诱导的距离函数  $x \mapsto \|x - b\|$  是凸函数, 它在凸包 (即  $\sigma$ ) 上的最大值必然在多面体  $\sigma$  的某个顶点  $P_i$  处取得. 即:

$$\|v - b\| \leq \max_{0 \leq i \leq k} \|P_i - b\|$$

对于  $\sigma$  的任意顶点  $P_i$ , 我们计算它到重心  $b$  的距离:

$$\begin{aligned} \|P_i - b\| &= \left\| P_i - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k P_j \right\| \\ &= \left\| \frac{k}{k+1} P_i - \frac{1}{k+1} \sum_{j \neq i} P_j \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{j \neq i} (P_i - P_j) \right\| \end{aligned}$$

利用绝对齐次性和三角不等式, 可得:

$$\begin{aligned} \|P_i - b\| &\leq \frac{1}{k+1} \sum_{j \neq i} \|P_i - P_j\| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j \neq i} \text{diam}(\sigma) \\ &= \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma) \end{aligned}$$

因此,  $\max_v \|v - b\| \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$ . 综上所述

$$\text{diam}(\tau) \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$$

这就完成了归纳证明. 由此得出对任意  $c \in A_k(V)$  均有  $\text{mesh}(\text{Sd}_k(V)c) \leq \frac{k}{k+1} \text{mesh}(c)$ .  $\square$

**证明 (小链定理)** 我们需要构造一个链映射  $\tau: S_\bullet(X) \rightarrow S^\mathcal{U}_\bullet(X)$ , 现在对  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ , 由 Lebesgue 数引理和上面的引理, 我们可以定义

$$m(\sigma) := \min\{m \in \mathbb{N}: \text{Sd}_k(X)^m \sigma \in S^\mathcal{U}_k(X)\}$$

我们先尝试定义为

$$\tau'_k(\sigma) = \text{Sd}_k(X)^{m(\sigma)} \sigma$$

这确实是一个合法的映射, 但是问题在于它并不能满足下图交换:

$$\begin{array}{ccc} S_k(X) & \xrightarrow{\tau'_k} & S^\mathcal{U}_k(X) \\ \partial_k(X) \downarrow & & \downarrow \partial^\mathcal{U}_k(X) \\ S_{k-1}(X) & \xrightarrow{\tau'_{k-1}} & S^\mathcal{U}_{k-1}(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \text{Sd}_k(X)^{m(\sigma)} \sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_i & \xrightarrow{\quad} & \sum_{i=0}^k (-1)^i \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma)} \sigma_i \end{array}$$

虽然有  $m(\sigma) \geq m(\sigma_i)$ , 但并不能保证他们作用是相同的, 所以我们要进行修正, 即考虑一个神秘的  $F_k$  算子, 想要下图交换

$$\tau_k(\sigma) = \text{Sd}_k(X)^{m(\sigma)} \sigma - F_k(\sigma)$$

要看出  $F_k$  是什么, 就需要解方程

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\tau_k} & \text{Sd}_k(X)^{m(\sigma)} \sigma - F_k(\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_i & \xrightarrow{\tau_{k-1}} & \sum_{i=0}^k (-1)^i (\text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma_i)} \sigma_i - F_{k-1}(\sigma_i)) \end{array}$$

所以就是要解方程

$$\partial F_k(\sigma) - \sum_{i=0}^k (-1)^i F_{k-1}(\sigma_i) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \left( \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma)} - \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma_i)} \right) \sigma_i$$

回忆  $\text{Sd} - \text{id} = h\partial + \partial h$ , 并且注意到

$$\text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma)} - \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma_i)} = (\text{Sd}_{k-1}(X) - 1) \left( \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma)-1} + \cdots + \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma_i)} \right)$$

于是可见

$$\partial F_k(\sigma) - \sum_{i=0}^k (-1)^i F_{k-1}(\sigma_i) = \partial_k(X) h_k(X) \sum_{i=0}^k (-1)^i M_i \sigma_i + h_{k-2}(X) \partial_{k-1}(X) \sum_{i=0}^k (-1)^i M_i \sigma_i$$

其中  $M_i = \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma)-1} + \cdots + \text{Sd}_{k-1}(X)^{m(\sigma_i)}$ . 对比一下左右两边, 我们大胆猜测

$$F_k(\sigma) = h_k(X) \sum_{i=0}^k (-1)^i M_i \sigma_i$$

然后经过一段繁琐的验证就可以发现这就是我们想要的  $\tau_\bullet$ .

容易发现  $(\tau \circ i)_\bullet = 1_{S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)}$ , 下面我们断言  $(i \circ \tau)_\bullet \simeq 1_{S_\bullet(X)}$ . 我们需要造出来  $H_k$  使得

$$(i \circ \tau)_k \sigma - \sigma = \partial_{k+1}(X) H_k \sigma + H_{k-1} \partial_k(X) \sigma$$

我们直接计算左边为

$$\begin{aligned} & LHS \\ &= (\text{Sd}_k(X)^{m(\sigma)} \sigma - \sigma) - \sum_{i=0}^k (-1)^i h_{k-1}(X) M_i \sigma_i \\ &= (\partial_{k+1}(X) h_k(X) + h_{k-1}(X) \partial_k(X)) \left( \sum_{j=0}^{m(\sigma)-1} \text{Sd}_k(X)^j \right) \sigma - \sum_{i=0}^k (-1)^i h_{k-1}(X) M_i \sigma_i \end{aligned}$$

简单观察一下, 右边张成  $\partial_{k+1}(X) H_k \sigma$  形式的就只有拆开之后的第一项, 所以我们不妨猜测

$$H_k \sigma = h_k(X) \left( \sum_{j=0}^{m(\sigma)-1} \text{Sd}_k(X)^j \right) \sigma$$

而注意到

$$h_{k-1}(X) \partial_k(X) \left( \sum_{j=0}^{m(\sigma)-1} \text{Sd}_k(X)^j \right) \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i h_{k-1}(X) \left( \sum_{j=0}^{m(\sigma)-1} \text{Sd}_{k-1}(X)^j \sigma_i \right)$$

减掉剩下的那些项就是

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i h_{k-1}(X) \sum_{j=0}^{m(\sigma_i)-1} \text{Sd}_{k-1}(X)^j \sigma_i = H_{k-1} \partial_k(X) \sigma$$

可见

$$LHS = \partial_{k+1}(X) H_k \sigma + H_{k-1} \partial_k(X) \sigma$$

□

**推论 2.7.9** 记号同上, 我们有  $H_n(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X)) \cong H_n(X)$ , 我们将等式左边记为  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ .

## 2.8 Mayer-Vietoris 序列

现在令  $X$  是一个拓扑空间,  $X_1, X_2 \subset X$ , 令  $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$  为两个子集, 我们有显然的链复形的短正合列成立:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow S_\bullet(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{k_\bullet} S_\bullet(X_1) \oplus S_\bullet(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} S_\bullet^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow S_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{k_k} S_k(X_1) \oplus S_k(X_2) \xrightarrow{j_k} S_k(X_1) + S_k(X_2) \longrightarrow 0 \\ c &\longmapsto (c, -c) \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

于是我们得到了同调的长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_{k+1}^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \\ & & & \nearrow \partial_* & \\ H_k(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{k_k} & H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) & \longrightarrow & H_k^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \\ & & & \nearrow \partial_* & \\ \cdots & \longleftarrow & \cdots & \longrightarrow & H_1^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \\ & & & \nearrow \partial_* & \\ H_0(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{k_0} & H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) & \longrightarrow & H_0^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \end{array}$$

**定义 2.8.1** 我们称  $X_1$  与  $X_2$  构成**切除对 (excisive couple)**, 如果含入映射  $S_\bullet^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \rightarrow S_\bullet(X_1 \cup X_2)$  是链同伦等价.

特别地, 当

$$\text{int}_{X_1 \cup X_2} X_1 \cup \text{int}_{X_1 \cup X_2} X_2 = X_1 \cup X_2$$

时, 小链定理告诉我们这就是切除对. 当是切除对的时候, 我们有

$$H_k^{\mathcal{U}}(X_1 \cup X_2) \cong H_k(X_1 \cup X_2)$$

将此同构替换进上面的长正合列中即得到 **Mayer-Vietoris 序列**.

## 2.9 球面同调群与 Brouwer 不动点定理

下面我们来利用 M-V 序列计算球面的同调群. 考虑

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$$

设  $\varepsilon > 0$  为充分小的数, 考虑一组开覆盖

$$U_+ := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_n > -\varepsilon\}, \quad U_- := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_n < \varepsilon\}$$

可见

$$U_+ \cong U_- \cong \mathbb{R}^n$$

可见对  $k > 0$  有

$$H_k(U_+) = H_k(U_-) = 0$$

而注意到

$$U_+ \cap U_- \simeq S^{n-1}$$

这个过程需要你想象他们交出来的条带形变收缩到赤道上, 从而同伦. 并且很显然他们是一个切除对, 现在考虑 M-V 序列, 先考虑  $k < n$  的情况, 当  $k \geq 2$  的时候, 有

$$\begin{array}{ccc} H_k(U_+) \oplus H_k(U_-) = 0 & \longrightarrow & H_k(S^n) \\ & \nearrow & \\ H_{k-1}(S^{n-1}) & \longleftarrow & H_{k-1}(U_+) \oplus H_{k-1}(U_-) = 0 \end{array}$$

可见

$$H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_1(S^{n-k+1})$$

考虑低阶的正合列：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & H_1(S^{n-k+1}) & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
 H_0(S^{n-k}) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_0(S^{n-k+1}) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & c \longmapsto & (c, -c) & & & \\
 & & & & (a, b) \longmapsto & a + b & 
 \end{array}$$

可以看出

$$H_1(S^{n-k+1}) = 0$$

现在考虑  $k = n$  的情况，此时我们有

$$H_n(S^n) \cong H_1(S^1)$$

注意  $S^0$  是两个离散的点，因此不再连通，即

$$H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

现在，针对  $S^1$  的正合列变成了

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & H_0(S^0) & \longrightarrow & H_0(U_+) \oplus H_0(U_-) \longrightarrow H_0(S^1) \longrightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & (x, y) \longmapsto & (x + y, -x - y) & & & 
 \end{array}$$

可见

$$H_n(S^n) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

最后，考虑  $k > n$ ，此时根据同构关系不断降维，会在  $l = k - n + 1 \geq 2$  处停止，即

$$H_k(S^n) \cong H_l(S^1)$$

考虑  $S^1$  在此处的 M-V 序列，为

$$0 = H_l(U_+) \oplus H_l(U_-) \rightarrow H_l(S^1) \rightarrow H_{l-1}(S^0) = 0$$

可见

$$H_k(S^n) = H_l(S^1) = 0$$

于是我们得到了：

**定理 2.9.1 (球面的同调群)** 球面  $S^n$  的同调群计算为：

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \geq 1, k = 0, n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

借助球面的同调群，我们可以证明大名鼎鼎的 Brouwer 不动点定理.

**定理 2.9.2 (Brouwer)** 我们定义单位闭球为

$$B^{n+1} := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$$

对任意单位闭球  $B^{n+1}$  到自身的连续映射  $f$ ，都存在  $x \in B^{n+1}$  使得  $f(x) = x$ .

**证明** 反证，假设不存在，则对任意的  $x$  都有  $f(x) \neq x$ ，于是我们可以从  $f(x)$  向  $x$  做一条射线，设这条射线交  $S^n$  与  $r(x)$ ，显然  $r(x)$  是连续映射，并且容易验证  $r \circ i = \text{id}_{S^n}$ ，故我们知道

$$r_* \circ i_* = \text{id}_{H_\bullet(S^n)} \implies i_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(B^{n+1}) \text{ 是单射}$$

而当  $n > 0$  时  $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ ， $H_n(B^{n+1}) = 0$ ，矛盾. 当  $n = 0$  的时候有

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

由于整个复合是同构，但是前后秩会发生变化， $\mathbb{Z}$  无法满射到  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ，所以矛盾.  $\square$

此外，我们还可以解决一个大名鼎鼎的问题.

**定理 2.9.3**  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ，若  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ ，则  $m = n$ .

**证明** 若存在  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是同胚，则去掉一点  $x \in \mathbb{R}^n$ ，则有  $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ ，我们很显然有

$$f|_{\mathbb{R}^n - \{x\}}: \mathbb{R}^n - \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{y\}$$

仍然是同胚，而很显然  $\mathbb{R}^n - \{x\}$  可以形变收缩到  $S^{n-1}$ ，同理有  $\mathbb{R}^m - \{y\}$  可以形变

收缩到  $S^{m-1}$ . 所以有

$$H_k(S^{m-1}) \cong H_k(\mathbb{R}^n - \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m - \{y\}) \cong H_k(S^{m-1})$$

而我们已经计算过球面的同调群, 利用球面的同调群可以说明  $m = n$ .  $\square$

**注记 2.9.4** 此外我们可以利用一点紧化的方法来说明如果  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ , 则  $S^n \cong S^m$ .

## 2.10 Jordan-Brouwer 分离定理

Jordan-Brouwer 分离定理的大概意思是  $\mathbb{R}^{n+1}$  可以被  $n$  维简单闭曲面分成两个部分. 简单来说, 就是平面上画一个圆, 则平面被分成了两个部分. 现在我们要来说明这件事情.

**命题 2.10.1**  $I = [0, 1]$ , 考虑  $\varphi: I^m \rightarrow \varphi(I^m) \subset S^n$  是一个同胚, 其中  $n \geq m \geq 0$ , 我们规定  $I^0 = \{\text{pt}\}$  为一个点, 则我们可以说明

$$H_k(S^n - \varphi(I^m)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

**证明** 当  $m = 0$  的时候, 通过球极投影我们可以看出来

$$S^n - \{\text{pt}\} \cong \mathbb{R}^n$$

于是通过  $\mathbb{R}^n$  为 star-shaped 的同调群得到成立. 下面我们对  $m$  归纳. 设  $k > 0$ , 现在令

$$\ell_1, \dots, \ell_t \in \{0, 1\}, \quad P_{\ell_1, \dots, \ell_t} := \sum_{i=1}^t \frac{\ell_i}{2^i}$$

并且令

$$I_{\ell_1, \dots, \ell_t} := \left[ P_{\ell_1, \dots, \ell_t}, P_{\ell_1, \dots, \ell_t} + \frac{1}{2^t} \right] \times I^{m-1}$$

实际上就是某种二进制表达, 把大区间拆成小块罢了, 我们还能看见

$$I_{\ell_1, \dots, \ell_t} = I_{\ell_1, \dots, \ell_t, 0} \cup I_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}$$

并且有

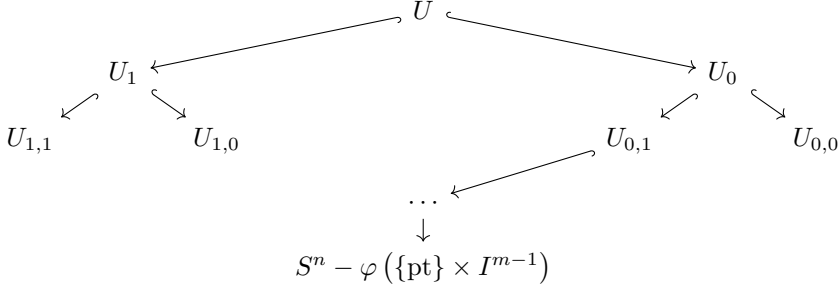
$$I_{\ell_1, \dots, \ell_t, 0} \cap I_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1} = \{P_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}\} \times I^{m-1} \cong I^{m-1}$$

现在令

$$U_{\ell_1, \dots, \ell_t} := S^n - \varphi(I_{\ell_1, \dots, \ell_t}), \quad U = S^n - \varphi(I^m)$$

我们有

$$U = U_0 \cup U_1, \quad U_{\ell_1, \dots, \ell_t} = U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 0} \cup U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}$$



由于

$$S^n - \varphi(\{P_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1} \times I^{m-1}\}) = U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 0} \cup U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}$$

于是考虑其 M-V 序列得到

$$\begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(S^n - \varphi(\{P_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1} \times I^{m-1}\})) \\ & \nearrow & \\ H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t}) & \hookrightarrow H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 0}) \oplus H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

由于  $\{P_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}\} \times I^{m-1} \cong I^{m-1}$ , 而  $k+1 > 0$ , 从而由归纳假设我们知道

$$H_{k+1}(S^n - \varphi(\{P_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1} \times I^{m-1}\})) = 0$$

于是可见

$$0 \rightarrow H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t}) \hookrightarrow H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 0}) \oplus H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t, 1}), \quad [z] \mapsto ([z], [-z])$$

是单射, 从而存在  $\ell_{t+1} \in \{0, 1\}$  使得

$$0 \neq [z] \in H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t, \ell_{t+1}})$$

以此类推可以知道存在  $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , 使得任意  $t > 0$ , 都有

$$H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t}) \ni [z] \neq 0$$

现在令

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ell_j}{s^j}$$

有映射关系：

$$\begin{array}{ccccccc} [z] & \longmapsto & [z] & \longmapsto & [z] & & \\ & & & & & & \\ H_k(U) & \longrightarrow & H_k(U_{\ell_1}) & \longrightarrow & H_k(U_{\ell_1, \ell_2}) & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow & \searrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & & & H_k(S^n - \varphi(\{P\} \times I^{m-1})) & & \end{array}$$

使得在每个  $H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t})$  里面  $[z]$  都不等于 0，由归纳假设我们知道

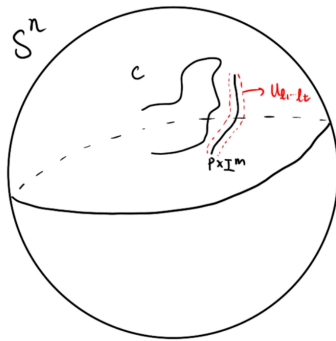
$$H_k(S^n - \varphi(\{P\} \times I^{m-1})) = 0$$

于是，存在  $c \in S_{k+1}(S^n - \varphi(\{P\} \times I^{m-1}))$  使得

$$\partial_{k+1}(S^n - \varphi(\{P\} \times I^{m-1}))c = z$$

但是注意到既然  $c$  对应的曲线与  $\varphi(S^n - \varphi(\{P\} \times I^{m-1}))$  无交，他们之间就存在正距离，从而存在充分大的  $t$  使得

$$c \in S_{k+1}(U_{\ell_1, \dots, \ell_t})$$



于是我们可见

$$\partial_{k+1}(U_{\ell_1, \dots, \ell_t})(c) = z \implies H_k(U_{\ell_1, \dots, \ell_t}) \ni [z] = 0$$

与假设矛盾, 所以  $H_k(U)$  不可能有非零元素  $[z]$ , 故  $H_k(U) = 0$ . 当  $k = 0$  的, 我们同样做一遍这些操作就可以得到结果, 不再赘述<sup>1</sup>.  $\square$

下面我们来证明 Jordan-Brouwer 分离定理, 实际上我们直接证明它的广义形式.

**定理 2.10.2 (Generalized Jordan-Brouwer Separation Theorem)** 对于  $0 \leq m < n$ , 有  $S^m$  到  $\varphi(S^m) \subseteq S^n$  的同胚映射  $\varphi$ , 则

$$H_k(S^n - \varphi(S^m)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, m < n - 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = 0, m = n - 1 \\ 0, & k \neq 0, k \neq n - m - 1 \\ \mathbb{Z}, & k = 0, k = n - m - 1 \end{cases}$$

**证明** 首先考虑  $0 = m < n = 1$  的情况, 注意到  $S^0$  是两个离散的点, 从而可见

$$S^1 - \varphi(S^0) \simeq S^0$$

因为两段线可以形变收缩到两个离散的点, 故

$$H_k(S^1 - \varphi(S^0)) \cong H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$$

现在考虑  $m = 0, n > 1$  的情况, 此时我们还是知道

$$S^n - \varphi(S^0) = \mathbb{R}^n - \{\text{pt}\} \simeq S^{n-1}$$

最后一个同伦我们只需要观察到空间去掉原点之后可以看成从原点出发的射线的等价类, 全部形变收缩到  $S^{n-1}$  即可, 于是

$$H_k(S^n - \varphi(S^0)) \cong H_k(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n - 1 \\ 0, & k \neq 0, n - 1 \end{cases}$$

现在我们考虑一般情况, 我们令

$$S_+^m = \{(x_0, \dots, x_m) \in S^m : x_m \geq 0\}, \quad S_-^m = \{(x_0, \dots, x_m) \in S^m : x_m \leq 0\}$$

<sup>1</sup>实际上到后面我们会有更简单的方法, 即约化同调群来规避掉对于 0 的额外讨论

有

$$S_+^m \cap S_-^m = S^m, \quad S_+^m \cap S_-^m \cong S^{m-1}$$

于是可见

$$S^n - \varphi(S^m) = (S^n - \varphi(S_+^m)) \cap (S^n - \varphi(S_-^m))$$

而

$$S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\}) = (S^n - \varphi(S_+^m)) \cup (S^n - \varphi(S_-^m))$$

拉出 M-V 序列

$$\begin{array}{ccc}
 H_{k+1}(S^n - \varphi(S_+^m)) & & \\
 \oplus & \longrightarrow & H_{k+1}(S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\})) \\
 H_{k+1}(S^n - \varphi(S_-^m)) & & \downarrow \\
 & & H_k(S^n - \varphi(S^m)) \longrightarrow \begin{array}{c} H_k(S^n - \varphi(S_+^m)) \\ \oplus \\ H_k(S^n - \varphi(S_-^m)) \end{array}
 \end{array}$$

由于  $S_+^m \cong S_-^m \cong I$ , 由命题 2.10.1 可见当  $k > 0$  时, 都有

$$H_k(S^n - \varphi(S_+^m)) = H_k(S^n - \varphi(S_-^m)) = 0$$

于是我们看到

$$H_k(S^n - \varphi(S^m)) \cong H_{k+1}(S^n - \varphi(S^{m-1})) \cong \dots \cong H_{k+m}(S^n - \varphi(S^0))$$

然后利用  $m = 0$  的情况即可. 现在假设  $k = 0$ , 拉出低阶 M-V 序列, 把已知的都代入, 得到

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & H_1(S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\})) & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
 H_0(S^n - \varphi(S^m)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_0(S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\})) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

由归纳假设不难得到  $H_0(S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\})) = \mathbb{Z}$ , 如此能读出

$$\text{Ker}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\}))) = \mathbb{Z}$$

所以我们知道可以截出一段正合列

$$0 \rightarrow H_1(S^n - \varphi(S^{m-1} \times \{0\})) \rightarrow H_0(S^n - \varphi(S^m)) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

由于  $\mathbb{Z}$  是投射  $\mathbb{Z}$ -模, 所以可见

$$H_0(S^n - \varphi(S^m)) \cong H_1(S^n - \varphi(S^{m-1})) \oplus \mathbb{Z}$$

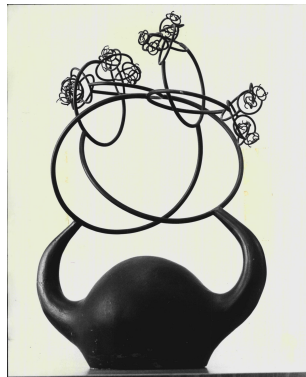
而  $H_1$  的情况我们已知, 所以得证.  $\square$

**推论 2.10.3** 令  $n > 1$ ,  $C$  为  $\mathbb{R}^n$  中同胚于  $S^{n-1}$  的子集, 则  $\mathbb{R}^n - C$  恰有两个分支,  $C$  是它们的公共边界.

**证明** 我们断言如果  $U$  为  $S^n$  的连通开集, 那么  $U$  的任何点都不能分离  $U$ . 设  $p \in U$  且  $U - p$  不连通, 取一个中心在  $p$ , 半径为  $R$  的开球  $B_R$ , 那么  $B_R - p$  连通且同胚于  $\mathbb{R}^n - 0$ , 所以  $B_R - p$  在  $U - p$  的一个分支  $C$  中. 设  $D$  为  $U - p$  其余分支的并, 因为  $B_R$  是  $p$  一个不与  $D$  相交的邻域, 所以  $p$  不是  $D$  的极限点. 因此  $C \cup \{p\}$  和  $D$  分离  $U$ , 与  $U$  是连通开集矛盾, 这就证明了断言.

显见  $\mathbb{R}^n \approx S^n - p$ , 取  $p$  为  $S^n$  的北极, 由于  $S^n - C$  有两个分支  $W_1, W_2$ , 不妨设  $p \in W_1$ , 由上面的结果,  $W_1 - p$  连通, 于是  $W_1 - p$  和  $W_2$  都是  $S^n - p - C$  的分支, 而  $C$  就是  $W_2$  和  $W_1 - p$  的拓扑边界.  $\square$

最后, 我们简单介绍一下 **Alexander horned sphere**.

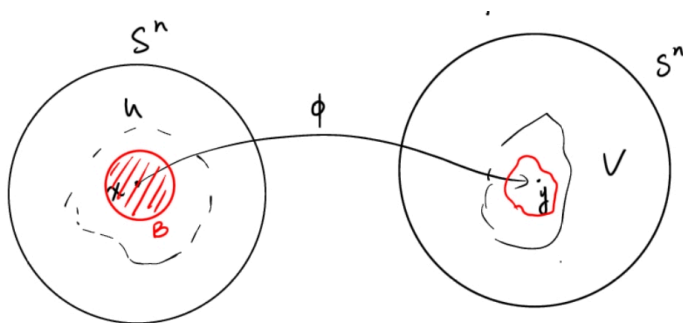


他虽然满足 Jordan 分离定理, 但是这个例子说明了这样一个同胚于  $S^2$  的曲面嵌入到  $\mathbb{R}^3$  后, 外部虽然一定连通, 但可以不是单连通的. 具体的内容可以详见 [The Alexander Horned Sphere: A Wild Counterexample in Topology](#).

此外, 我们还可以证明下面的定理.

**定理 2.10.4 (Brouwer Invariance of Domain)** 设  $U, V \subset S^n$ ,  $\varphi: U \rightarrow V$  是同胚映射, 若  $U \subset S^n$  是开集, 则  $V \subset S^n$  是开集.

**证明** 选定一个以  $x$  为中心的闭球  $B \subset U$ , 则我们可以考虑



$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\varphi|_B} & \varphi(B) \\
 \downarrow \subset & & \downarrow \subset \\
 \partial B \cong S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi|_{\partial B}} & A \cong \varphi(S^{n-1})
 \end{array}$$

上下都是同胚. 则 Jordan-Brouwer 分离定理告诉我们  $S^n - A$  有两个分支

$$S^n - A = (S^n - \varphi(B)) \cup (\varphi(B) - A)$$

考虑  $y = f(x)$ , 考虑  $y$  所在的道路连通分支, 即包含  $y$  且含于  $V$  的开集, 从而  $V$  是开集.  $\square$

## 2.11 约化同调

设  $X$  是拓扑空间, 我们可以考虑链复形

$$\cdots \longrightarrow S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1(X) \longrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon(X)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$P \longmapsto 1$$

则若  $X \neq \emptyset$ , 则  $\varepsilon(X)$  是满射, 可以验证  $\varepsilon(X) \circ \partial_1(X) = 0$ , 于是我们可以定义

$$\tilde{S}_k(X) = \begin{cases} \text{Ker } \varepsilon(X), & k = 0 \\ S_k(X), & k > 0 \end{cases}$$

为  $k$ -th **reduced singular chain group**. 考虑复形的短正合列

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{S}_k(X) & \longrightarrow & \tilde{S}_{k-1}(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{S}_1(X) & \longrightarrow & \tilde{S}_0(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow = & & & & \downarrow = & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & S_{k-1}(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_1(X) & \longrightarrow & S_0(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon(X) & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

我们记为

$$0 \rightarrow \tilde{S}_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

令

$$\tilde{H}_k(X) := H_k(\tilde{S}_\bullet(X))$$

拉出其长正合列得到:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & \swarrow & & & \\ \tilde{H}_k(X) & \xrightarrow{\quad} & H_k(X) & \rightarrow & 0 & & \\ & & \swarrow & & & & \\ \tilde{H}_{k-1}(X) & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \rightarrow & 0 & & \\ & & \swarrow & & & & \\ \tilde{H}_1(X) & \xrightarrow{\quad} & H_1(X) & \rightarrow & 0 & & \\ & & \swarrow & & & & \\ \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{\quad} & H_0(X) & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

可以看出, 当  $k > 0$  的时候, 有

$$\tilde{H}_k(X) \cong H_k$$

而当  $k = 0$  时, 有

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

由于  $\mathbb{Z}$  投射, 于是分裂, 所以

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

特别地, 我们能看出

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \iff \tilde{H}_0(X) = 0$$

**注记 2.11.1** 其中  $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  可以视为  $f_*: H_0(X) \rightarrow H_0(\{\text{pt}\})$ , 其中  $f: X \rightarrow \{\text{pt}\}$  为到单点空间的常值映射.

现在来说明 Mayer-Vietoris 序列可以用约化同调来计算.

**定理 2.11.2** 设  $(X_1, X_2)$  为切除对, 则可以用约化同调来计算 M-V 序列.

这个好处是只要你  $X_1, X_2$  取的好, 那  $k = 0$  处就不需要再额外单独讨论, 省去了很多的麻烦, 比如之前对于 Jordan-Brouwer 分离定理的证明中的许多讨论就可以利用约化同调来简便计算.

**证明** 我们考虑正合列:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & S_1(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & S_1(X_1) \oplus S_1(X_2) & \rightarrow & S_1(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \tilde{S}_0(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & \tilde{S}_0(X_1) \oplus \tilde{S}_0(X_2) & \rightarrow & \tilde{S}_0(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & S_0(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & S_0(X_1) \oplus S_0(X_2) & \rightarrow & S_0(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \oplus \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

其中第二行是由第三行第四行应用蛇引理而来, 从而正合, 于是得到

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & S_1(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & S_1(X_1) \oplus S_1(X_2) & \rightarrow & S_1(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \tilde{S}_0(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & \tilde{S}_0(X_1) \oplus \tilde{S}_0(X_2) & \rightarrow & \tilde{S}_0(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

对这个链复形的短正合列拉出长正合列就得到我们所需的 M-V 序列:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{H}_k(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(X_1) \oplus \tilde{H}_k(X_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_k(X_1 \cup X_2) & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 \tilde{H}_{k-1}(X_1 \cap X_2) & \longleftarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{H}_1(X_1 \cup X_2) & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(X_1) \oplus \tilde{H}_0(X_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad \square$$

## 2.12 相对同调

$X$  是拓扑空间,  $A \subset X$  为子集, 则我们可以考虑链复形的正合列

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & S_{k+1}(A) & \hookrightarrow & S_{k+1}(X) & \twoheadrightarrow & S_{k+1}(X)/S_{k+1}(A) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & S_k(A) & \hookrightarrow & S_k(X) & \twoheadrightarrow & S_k(X)/S_k(A) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & S_{k-1}(A) & \hookrightarrow & S_{k-1}(X) & \twoheadrightarrow & S_{k-1}(X)/S_{k-1}(A) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & 
 \end{array}$$

我们定义

$$S_k(X, A) := S_k(X)/S_k(A)$$

为  $(X, A)$  的**相对奇异复形**, 定义

$$H_k(X, A) := H_k(S_\bullet(X, A))$$

对上面链复形的正合列拉长正合列得到:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \bullet & \longrightarrow & H_{k+1}(X, A) & & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
 H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, A) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
 H_{k-1}(A) & \longrightarrow & \bullet & & & & 
 \end{array}$$

如果我们有  $A \subset B \subset X$ ，则我们可以考虑正合列

$$0 \rightarrow S_k(B)/S_k(A) \rightarrow S_k(X)/S_k(A) \rightarrow S_k(X)/S_k(B) \rightarrow 0$$

取长正合列得到

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \bullet & \longrightarrow & H_{k+1}(X, B) & \\ & & & \swarrow & & \nearrow & \\ H_k(B, A) & \xleftarrow{\quad} & H_k(X, A) & \longrightarrow & H_k(X, B) & & \\ & & \nwarrow & & \searrow & & \\ H_{k-1}(B, A) & \xleftarrow{\quad} & \bullet & & & & \end{array}$$

同理，我们可以考虑对于相对同调的 Mayer-Vietoris 序列，在此之前我们先给出切除对的另外一个定义.

**定义 2.12.1**  $X$  是拓扑空间,  $X_1, X_2 \subset X$ , 若  $S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2) \rightarrow S_\bullet(X_1 \cup X_2)$  是一个链同伦等价, 则称它为切除对. 等价地, 如果对任意的  $k \in \mathbb{Z}$ , 都有

$$i_*: H_k(S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)) \rightarrow H_k(X_1 \cup X_2)$$

是同构, 则也是切除对.

**注记 2.12.2** 这里的等价可以用 mapping cones 来说明.

**定理 2.12.3 (相对同调的 M-V 序列)**  $A_1 \subset X_1 \subset X$ ,  $A_2 \subset X_2 \subset X$ , 并且  $(X_1, X_2)$  与  $(A_1, A_2)$  都是切除对, 则有长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \bullet & \longrightarrow & H_{k+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) & \\ & & & \swarrow & & \nearrow & \\ H_k(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) & \xleftarrow{\quad} & H_k(X_1, A_1) \oplus H_k(X_2, A_2) & \longrightarrow & H_k(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) & & \\ & & \nwarrow & & \searrow & & \\ H_{k-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) & \xleftarrow{\quad} & \bullet & & & & \end{array}$$

**证明** 我们定义

$$\hat{S}_\bullet((X_1, X_2), (A_1, A_2)) := \frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}$$

于是我们有链复形的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & S_{\bullet}(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & S_{\bullet}(A_1) \oplus S_{\bullet}(A_2) & \longrightarrow & S_{\bullet}(A_1) + S_{\bullet}(A_2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_{\bullet}(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & S_{\bullet}(X_1) \oplus S_{\bullet}(X_2) & \longrightarrow & S_{\bullet}(X_1) + S_{\bullet}(X_2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_{\bullet}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & S_{\bullet}(X_1, A_1) \oplus S_{\bullet}(X_2, A_2) & \longrightarrow & \hat{S}_{\bullet}((X_1, X_2), (A_1, A_2)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中前两行是正合的，而每一列都是正合的，所以由 9-引理立刻知道第三行是正合的，于是

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S_{\bullet}(A_1) + S_{\bullet}(A_2) & \xrightarrow{\cong} & S_{\bullet}(A_1 \cup A_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S_{\bullet}(X_1) + S_{\bullet}(X_2) & \xrightarrow{\cong} & S_{\bullet}(X_1 \cup X_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{S}_{\bullet}((X_1, X_2), (A_1, A_2)) & \xrightarrow{\exists!} & S_{\bullet}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

我们知道存在链映射

$$\hat{S}_{\bullet}((X_1, X_2), (A_1, A_2)) \rightarrow S_{\bullet}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

所以拉出两个正合列的长正合列，我们知道有

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots & & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(S_{\bullet}(A_1) + S_{\bullet}(A_2)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(A_1 \cup A_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(S_{\bullet}(X_1) + S_{\bullet}(X_2)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X_1 \cup X_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(\hat{S}_{\bullet}((X_1, X_2), (A_1, A_2))) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{k-1}(S_{\bullet}(A_1) + S_{\bullet}(A_2)) & \xrightarrow{\cong} & H_{k-1}(A_1 \cup A_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & & \cdots
 \end{array}$$

5-引理告诉我

$$H_k(\hat{S}_{\bullet}((X_1, X_2), (A_1, A_2))) \cong H_k(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

于是对正合列

$$0 \rightarrow S_{\bullet}(A_1) + S_{\bullet}(A_2) \rightarrow S_{\bullet}(X_1) + S_{\bullet}(X_2) \rightarrow \hat{S}_{\bullet}((X_1, X_2), (A_1, A_2)) \rightarrow 0$$

拉出长正合列，替换掉同调群就立刻得到。 □

如果我们考虑相对同调的约化同调会发生什么？考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 S_k(A) & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & S_k(X, A) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S_{k-1}(A) & \longrightarrow & S_{k-1}(X) & \longrightarrow & S_{k-1}(X, A) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S_0(A) & \longrightarrow & S_0(X) & \longrightarrow & S_0(X, A) \\
 \downarrow \varepsilon(A) & & \downarrow \varepsilon(X) & & \downarrow \varepsilon(X, A) \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

只需要定义<sup>2</sup>

$$\tilde{S}_{\bullet}(X, A) = \frac{\tilde{S}_{\bullet}(X)}{\tilde{S}_{\bullet}(A)}$$

然后我们可以定义

$$\tilde{H}_k(X, A) := H_k(\tilde{S}_{\bullet}(X, A))$$

但是我们能看出来  $S_{\bullet}(X, A) = \tilde{S}_{\bullet}(X, A)$ ，于是可见：

**命题 2.12.4 (约化相对同调与相对同调同构)**  $\tilde{H}_k(X, A) \cong H_k(X, A)$ .

<sup>2</sup>这里  $\tilde{S}_{\bullet}(X)$  定义为正常的  $S_{\bullet}(X)$  添加了  $\tilde{S}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ .

## 2.13 切除定理与相对同调的拓扑意义

**定理 2.13.1 (切除定理)**  $X$  为拓扑空间,  $X_1, X_2 \subset X$  为切除对, 则包含映射

$$i: (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$

诱导了同构

$$i_*: H_k(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_k(X_1 \cup X_2, X_2), \quad k \in \mathbb{Z}$$

**证明** 注意

$$S_\bullet(X_1, X_1 \cap X_2) = \frac{S_\bullet(X_1)}{S_\bullet(X_1 \cap X_2)} = \frac{S_\bullet(X_1)}{S_\bullet(X_1) \cap S_\bullet(X_2)} \cong \frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(X_2)}$$

于是考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_\bullet(X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2) & \longrightarrow & \frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(X_2)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow \exists! \\ 0 & \longrightarrow & S_\bullet(X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1 \cup X_2, X_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

将右上角的同构替换过去得到

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_\bullet(X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow \exists! \\ 0 & \longrightarrow & S_\bullet(X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & S_\bullet(X_1 \cup X_2, X_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

拉出长正合列

$$\begin{array}{ccc} \cdots & & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(X_2) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X_1 \cup X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(X_1, X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{\alpha} & H_k(X_1 \cup X_2, X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{k-1}(X_2) & \xrightarrow{\cong} & H_{k-1}(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & & \cdots \end{array}$$

由 5-引理立刻得到结论. □

**推论 2.13.2**  $X$  为拓扑空间,  $A, B \subset X$ , 满足  $\overline{B} \subset \text{int } A$ , 则

$$H_k(X - B, A - B) \cong H_k(X, A)$$

**证明** 由于  $\overline{B} \subset \text{int } A$ , 可知

$$\text{int}(X - B) \cup \text{int } A = X$$

于是  $\{X - B, A\}$  是切除对, 再使用切除定理立刻得到结论.  $\square$

现在我们来讨论相对同调的拓扑含义.

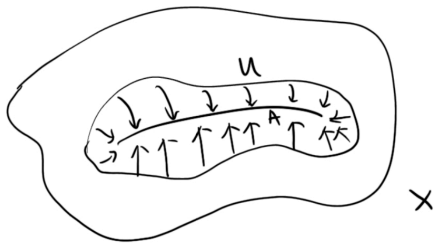
**命题 2.13.3** 若  $A$  是  $U$  的强形变收缩核, 令  $\pi: U \rightarrow U/A$  是商映射, 则  $\pi(A)$  是  $U/A$  的强形变收缩核.

**引理 2.13.4**  $I$  是局部紧 Hausdorff 的, 则若  $\pi: X \rightarrow Y$  是商映射, 则  $\pi \times \text{id}_I: X \times I \rightarrow Y \times I$  也是商映射.

**定理 2.13.5**  $X$  是拓扑空间,  $A \subset X$  是闭集,  $U \subset X$  为子空间,  $A \subset \text{int } U$ ,  $A$  是  $U$  的强形变收缩核, 则有

$$\pi_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(X/A, \pi(A)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

是同构, 其中  $\pi: X \rightarrow X/A$  是商映射.



**证明** 首先由于  $A \subset U \subset X$ , 作用  $\pi$  之后得到

$$\pi(A) \subset \pi(U) \subset \pi(X) = X/A$$

我们对这三个东西使用相对同调的长正合列，得到

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(U, A) & \xrightarrow{\pi^*} & H_k(\pi(U), \pi(A)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(X, A) & \xrightarrow{\pi^*} & H_k(X/A, \pi(A)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(X, U) & \xrightarrow{\pi^*} & H_k(X/A, \pi(U)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{k-1}(U, A) & \xrightarrow{\pi^*} & H_{k-1}(\pi(U), \pi(A)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

注意  $A$  是  $U$  的强形变收缩核，于是  $H_k(A) \cong H_k(U)$  恒成立，由长正合列

$$H_k(A) \xrightarrow{\cong} H_k(U) \longrightarrow H_k(U, A) \longrightarrow H_{k-1}(A) \xrightarrow{\cong} H_{k-1}(U)$$

可以观察到  $H_k(U, A) = 0$ ，由命题 2.13.3 可知同理有  $H_k(\pi(U), \pi(A)) = 0$ 。于是可见证明的长正合列变成

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\pi^*} & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(X, A) & \xrightarrow{\pi^*} & H_k(X/A, \pi(A)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k(X, U) & \xrightarrow{\pi^*} & H_k(X/A, \pi(U)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\pi^*} & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

而切除定理告诉我们

$$H_k(X - A, U - A) \cong H_k(X, U), \quad H_k(X/A - \pi(A), \pi(U) - \pi(A)) \cong H_k(X/A, \pi(U))$$

再结合

$$\pi|_{X-A}: X - A \rightarrow \pi(X - A)$$

是同胚, 我们得到

$$\begin{array}{ccccc}
 H_k(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X, U) & \xleftarrow{\text{exc. } \cong} & H_k(X - A, U - A) \\
 \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_*, \cong \\
 H_k(X/A, \pi(A)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X/A, \pi(U)) & \xleftarrow{\text{exc. } \cong} & H_k(X/A - \pi(A), \pi(U) - \pi(A))
 \end{array}$$

按照  $\rightarrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow, \leftarrow$  顺序走一圈发现全是同构, 于是得到所求同构.  $\square$

**命题 2.13.6**  $X$  是拓扑空间,  $P \in X$  是任意一点, 则有

$$H_k(X, \{P\}) \cong \tilde{H}_k(X), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

**证明** 拉出  $H_k(\{P\}) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, \{P\})$  的长正合列立刻得到  $k > 1$  的情况, 当  $k = 1$  时, 注意

$$0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, \{P\}) \rightarrow H_0(\{P\}) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, \{P\}) \rightarrow 0$$

由于嵌入  $\{P\} \hookrightarrow X$  给出了单射  $H_0(\{P\}) \rightarrow H_0(X)$ , 于是可见

$$\text{Im}(H_1(X, \{P\}) \rightarrow H_0(\{P\})) = \text{Ker}(H_0(\{P\}) \rightarrow H_0(X)) = 0$$

所以正合列在此处截断, 得到

$$0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, \{P\}) \rightarrow 0$$

从而  $H_1(X, \{P\}) \cong H_1(X)$ , 所以  $k = 1$  成立. 最后,  $k = 0$  时, 注意到

$$\text{Im}(H_0(\{P\}) \rightarrow H_0(X)) = \mathbb{Z}C_0$$

其中  $C_0$  为  $P$  所在连通分支, 于是可见

$$H_0(X, \{P\}) \cong H_0(X)/\mathbb{Z}C_0 \cong \bigoplus_{C \neq C_0} \mathbb{Z}C \cong \tilde{H}_0(X)$$

综上得证.  $\square$

**注记 2.13.7** 利用约化同调可以十分容易计算, 注意到约化相对同调和相对同调同构, 于是拉出约化同调的长正合列即可.

## 2.14 单纯复形

**定义 2.14.1 (单纯复形)** 一个单纯复形  $K$  由以下元素组成:

- (1) 顶点集  $V_K$ .
- (2)  $V_K$  的某些非空有限子集构成的集合  $K$ .

使得满足

- (a) 对任意的  $v \in V_K$ ,  $\{v\} \in K$ .
- (b) 若  $\emptyset \neq s' \subset s \in K$ , 则  $s' \in K$ . 即  $K$  中元素向下封闭.

我们称  $s \in K$  为  $q$ -simplex 如果  $\#s = q + 1$ , 此时记

$$\dim s := q$$

可见对  $\emptyset \neq s' \subset s \in K$ , 有

$$s = s' \iff \dim s = \dim s'$$

定义  $K$  的维数为

$$\dim K := \begin{cases} -1, & K = \emptyset \\ \sup\{\dim s : s \in K\}, & K \neq \emptyset \end{cases}$$

我们给出一些记号, 令  $K$  是一个单纯复形,  $s \in K$ , 则定义闭包为

$$\bar{s} := \{s' : \emptyset \neq s' \subset s\}$$

定义边界为

$$\dot{s} := \{s' : \emptyset \neq s' \subsetneq s\}$$

以及对任意的  $q \in \mathbb{N}$ , 定义

$$K^q := \{s \in K : \dim s \leq q\}$$

为  $K$  的  $q$ -dimensional skeleton.

给定一个集合  $X$ ,  $\mathcal{W}$  是  $X$  的某些子集构成的集合, 则我们可以定义  $\mathcal{W}$  的 nerve 为

$$K(\mathcal{W}) := \left\{ s \subset \mathcal{W} : 0 < \#s < \infty, \bigcap_{W \in s} W \neq \emptyset \right\}$$

$$V(\mathcal{W}) = \{w \in \mathcal{W} : w \neq \emptyset\}$$

给定单纯复形  $K_1$  与  $K_2$ , 则我们可以定义其 **join** 为

$$K_1 * K_2 := (K_1 \coprod K_2) \cup \left\{ s_1 \coprod s_2 : s_1 \in K_1, s_2 \in K_2 \right\}$$

我们称  $K$  是 **finite**, 如果  $K < \infty$ .

**定义 2.14.2** 所有单纯复形可以构成单纯复形范畴 **SC**, 其对象为所有单纯复形, 给定单纯复形  $K_1, K_2$ , 我们定义  $\text{Hom}(K_1, K_2)$  为所有从  $K_1$  到  $K_2$  的 **单纯映射**, 即映射

$$\varphi: V_{K_1} \rightarrow V_{K_2}$$

满足对任意的  $s \in K_1$ , 有

$$\varphi(s_1) \in K_2$$

给定  $L \subset K \in \mathbf{SC}$ , 我们称  $L$  是  $K$  的 **subcomplex**, 对对  $\emptyset \neq s' \subset s \in L$ , 有  $s' \in L$ .

于是我们可见之前所定义的  $\bar{s}, \dot{s}, K^a$  都是  $K$  的子复形. 并且可见如果  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  是  $K$  的一族子复形, 有  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha$  与  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha$  都是  $K$  的子复形.

**Standard realization of simplicial complexes** 现在令  $K$  是一个单纯复形, 定义

$$|K| := \begin{cases} \left\{ \alpha: V_K \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1, \{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} \in K \right\}, & K \neq \emptyset \\ \emptyset, & K = \emptyset \end{cases}$$

其中, 我们称  $\{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\}$  为  $\alpha$  的 **carrier**. 对于  $v \in V_K$ , 我们可以定义其特征函数为

$$\chi_{\{v\}}(v') = \begin{cases} 1, & v' = v \\ 0, & v' \neq v \end{cases}$$

容易看出来  $\chi_{\{v\}} \in |K|$ . 此时可以注意到对任意的  $\alpha \in |K|$ , 都有

$$\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha(v) \chi_{\{v\}}$$

现在我们要给  $|K|$  赋予拓扑. 首先考虑给其上赋予一个度量之后得到  $|K|_d$ , 对  $\forall \alpha, \beta \in |K|$ , 我们定义

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{v \in V_K} |\alpha(v) - \beta(v)|$$

容易验证这是一个度量, 于是其在  $|K|$  上可以诱导一个度量拓扑, 得到拓扑空间  $|K|_d$ .

现在对于  $s \in K$ ，我们定义

$$|s| := \{\alpha \in |K| : \{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} \subset s\}$$

为 **closed simplex**，定义

$$\langle s \rangle := \{\alpha \in |K| : \{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} = s\}$$

为 **open simplex**. 现在令  $|s|_d$  为  $|s|$  从  $|K|_d$  中继承下来的度量拓扑，可见同胚

$$|s|_d \cong \Delta_{\dim S}$$

若  $L \subset K$  是子复形，则存在典范的含入

$$i_{KL}: |L| \rightarrow |K|, \quad \alpha \mapsto \left( V_k \ni v \mapsto \begin{cases} \alpha(v), & v \in V_L \\ 0, & v \notin V_L \end{cases} \right)$$

如果复形  $K$  只有有限个顶点，那么度量拓扑  $|K|_d$  就足够完美了. 但是，如果  $K$  包含无限个单纯形，度量拓扑  $|K|_d$  会产生一些不符合我们几何直觉的“病态”现象 (例如某些点列在度量下收敛，但它们穿过了无数个单纯形). 现在我们给  $|K|$  赋予由  $\{|s|_d : s \in K\}$  装配含入映射诱导的弱拓扑<sup>3</sup>，赋予弱拓扑之后的拓扑空间仍然记为  $|K|$ ，不难注意到

$$I(K): |K| \rightarrow |K|_d, \quad \alpha \mapsto \alpha$$

是连续的，因为对任意的  $s \in K$ ，含入映射

$$I(K) \circ \iota_s: |s|_d \rightarrow |K|_d$$

都是连续的，则由弱拓扑的泛性质立刻得到结论. 这说明  $|K|$  的弱拓扑比度量拓扑更加细致. 从而可见由于  $|s|_d$  在  $|K|_d$  中是闭集，从而  $|s|$  在  $|K|$  中是闭集. 并且由于  $|K|_d$  是度量空间，从而 Hausdorff，于是可见  $|K|$  Hausdorff.

对于  $L \subset K$  为子复形，我们可以说明  $|L|_d$  在  $|K|_d$  中是闭集. 任取  $\alpha \in |K| - |L|$ ，而由于  $\{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} \in K$ ，所以是有限集，于是

$$\{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\} \notin L$$

所以可以取

$$m := \min_{\{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\}} \alpha(v) > 0$$

<sup>3</sup>即终拓扑，这里的弱其实指的是最细的拓扑，但是由于一些历史渊源还是称为这个名字.

于是对任意的  $\beta \in |K|$ , 若  $d(\alpha, \beta) < \frac{m}{2}$ , 则有

$$\{v \in V_K: \alpha(v) \neq 0\} \subset \{v \in V_K: \beta(v) \neq 0\} \implies \beta \notin |L|$$

所以  $|K|_d - |L|_d$  是开集, 于是  $|L|_d$  是闭集. 于是结合  $I(K)$  是连续函数, 知道

$$|L| = I(K)^{-1}(|L|_d)$$

是  $|K|$  中弱拓扑下的闭集.

**命题 2.14.3**  $Y$  是拓扑空间,  $f: |K| \rightarrow Y$  为映射, 则 TFAE:

- (1)  $f$  连续.
- (2)  $f|_{|s|}: |s|_d \rightarrow Y$  连续, 对任意的  $s \in K$  成立.
- (3)  $f|_{|K^q|}: |K^q| \rightarrow Y$  连续, 对任意的  $q \in \mathbb{N}$  成立.

**证明** (1) 等价于 (2) 是弱拓扑的泛性质, 而 (2) 等价于 (3) 只需要注意到  $|K^q|$  走遍所有  $q \in \mathbb{N}$  可以覆盖任意的  $|s|$  即可.  $\square$

**命题 2.14.4** 对任意  $A \subset |K|$ , 存在  $B \subset A$  使得

$$\#(B \cap \langle s \rangle) = \begin{cases} 1, & A \cap \langle s \rangle \neq \emptyset \\ 0, & A \cap \langle s \rangle = \emptyset \end{cases}$$

特别地,  $B \subset |K|$  是一个离散闭集.

**证明** 首先注意到

$$|K| = \coprod_{s \in K} \langle s \rangle$$

于是可见

$$A = \coprod_{s \in K} A \cap \langle s \rangle$$

由选择公理, 在每个有交处挑选出一个点就得到  $B$ . 于是  $B$  的存在性得证, 下面我们要说明  $B$  是离散闭集, 这是因为对任意的  $B' \subset B$ ,  $B' \cap |s|$  是一个至多有限集, 而  $|s| \cong \Delta_{\dim s}$  是一个 Hausdorff 空间, 从而  $B'$  在  $|s|$  中是闭集, 从而  $B' \subset |K|$  是闭集, 故  $B$  的任意子集都是闭的, 从而  $B$  离散.  $\square$

**推论 2.14.5**  $A \subset |K|$  是紧集, 则存在一个有限子复形  $L \subset K$  使得  $A \subset |L|$ .

**证明** 反证, 假设

$$S_A := \{s \in K: A \cap \langle s \rangle \neq \emptyset\}$$

是一个无限集, 则可以取出可数无穷个  $\{s_i\}$ , 令其为  $B$ , 则由上面命题可见  $B$  是  $|K|$  的离散闭集, 从而也是  $A$  的离散闭集, 但是注意到  $A$  是紧集, 从而  $B$  也是紧的, 但是  $B$  是有可数个点的离散闭集, 所以不可能是紧的, 矛盾. 于是  $S_A$  只能是有限集, 此时取

$$L = \bigcup_{s \in S_A} \bar{s}$$

即可. □

最后, 注意  $|\cdot|$  与  $|\cdot|_d$  给出了从 **SC** 到拓扑空间范畴的两个协变函子, 对态射的作用为给定  $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ , 定义为

$$|\varphi| = |\varphi|_d: \alpha \mapsto \left( v' \mapsto \sum_{\varphi(v)=v', v \in V_{K_1}} \alpha(v) \right)$$

## 2.15 细分

**定义 2.15.1** 拓扑空间  $X$  的一个**三角剖分**  $(K, f)$  由一个单纯复形  $K$  和一个同胚  $f: |K| \rightarrow X$  构成. 在这种情况下, 称  $X$  为 **triangulable space** 或者 **polyhedron**. 拓扑对  $(X, A)$  的**三角剖分**  $((K, L), f)$  由单纯复形对  $(K, L)$  与同胚  $f: (|K|, |L|) \rightarrow (X, A)$  构成. 若  $(X, A)$  有一个三角剖分, 则称其为 **polyhedral pair**.

令  $K$  与  $K'$  为单纯复形, 则任意映射

$$\psi: V_{K'} \rightarrow |K|$$

诱导了映射

$$\Psi_\psi: |K'| \rightarrow \mathbb{R}^{\oplus V_K}, \quad \alpha = \sum_{v' \in V_{K'}} \alpha(v') \chi_{\{v'\}} \mapsto \sum_{v' \in V_{K'}} \alpha(v') \psi(v')$$

$$\begin{array}{ccc} v' & & \\ \downarrow & & \\ \chi_{\{v'\}} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V_{K'} & \xrightarrow{\psi} & |K| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |K'| & \xrightarrow{\Psi_\psi} & \mathbb{R}^{\oplus V_K} \end{array}$$

立刻可以看到下面的命题成立:

**命题 2.15.2** 符号同上,  $\text{Im } \Psi_\psi \subset |K| \iff \forall s' \in K', \text{ 都存在 } s \in K \text{ 使得 } \psi(s') \subset |s|.$

并且我们可以额外唯一地选择  $s$  使得  $\Psi_\psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s \rangle$ .

**证明** 前面的等价在几何意义下是显然的, 现在考虑有

$$\psi(s') \subset |s_0|$$

现在任给  $x \in \langle s' \rangle$ , 记为

$$x = \sum_{v' \in s'} \alpha(v') \chi_{\{v'\}}$$

由于在内部, 所以每一个  $\alpha(v')$  都非零, 此时有

$$\Psi_\psi(x) = \sum_{v \in s'} \alpha(v') \psi(v')$$

此时我们记

$$|s_0| \ni \psi(v') = \sum_{w \in s_0} \beta_{v'}(w) w$$

于是有

$$\Psi_\psi(x) = \sum_{w \in s_0} \left( \sum_{v' \in s'} \alpha(v') \beta_{v'}(w) \right) w$$

想要  $C_w = \sum_{v' \in s'} \alpha(v') \beta_{v'}(w) > 0$ , 只需要存在某一个  $\beta_{v'}(w) > 0$  即可, 而注意到  $C_w$  是否大于 0 与  $x$  的具体选择无关, 所以对任意的  $x \in \langle s' \rangle$ , 满足  $C_w > 0$  的顶点集都是固定的, 我们记为  $V_0$ , 则显然有  $V_0 \subset s_0$ , 考虑  $V_0$  为顶点张成的单纯形  $s$ , 则有  $\Psi_\psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s \rangle$ .  $\square$

于是我们会有一一对应:

$$\begin{array}{c} \{\psi: V_{K'} \rightarrow |K|: \forall s' \in K', \exists s \in K \text{ s.t. } \psi(s') \subset |s|\} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \psi \mapsto \Psi_\psi \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \Psi \mapsto \Psi|_{V_{K'}} \\ \downarrow \end{array} \\ \left\{ \Psi: |K'| \rightarrow |K|: \Psi\left(\sum_{v' \in V_{K'}} \alpha(v') \chi_{\{v'\}}\right) = \sum_{v' \in V_{K'}} \alpha(v') \Psi(v') \right\} \end{array}$$

**定义 2.15.3** 满足如上条件的映射  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  被称为 **piecewise affine**. 一个 piecewise affine 映射  $\Psi$  被称为是  $K$  的**细分 (subdivision)**, 如果  $\Psi$  是同胚.

**定理 2.15.4** 一个 piecewise affine map  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  是 subdivision 当且仅当  $\forall s \in K$ , 都有

$$\langle s \rangle = \bigcup_{s' \in K', \Psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s \rangle} \Psi(\langle s' \rangle)$$

并且右边的并是有限并且两两无交.

**证明**  $\implies$  : 对任意的  $s' \in K'$ , 知道存在唯一的  $s \in K$  使得  $\Phi(\langle s' \rangle) \subset \langle s \rangle$ . 另一方面由于  $|s|$  是紧的, 从而结合  $\Psi$  是同胚, 于是  $\Psi^{-1}(|s|)$  是紧集, 因此由推论 2.14.5 存在至多有限个  $s' \in K'$  使得  $\Psi(\langle s' \rangle) \subset |s|$ .

$\Leftarrow$  : 首先满射是显然的, 然后利用两两无交可以最终证明出单射, 所以是双射. 对  $\forall s \in K$ , 定义

$$K'(s) := \{s' \in K' : \exists s_1 \subset s, \text{ s. t. } \Psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s_1 \rangle\} = \{s' \in K' : \Psi(\langle s' \rangle) \subset |s|\}$$

则  $K'(s)$  是  $K'$  的子复形, 因为若  $\emptyset \neq s'' \subset s' \in K'(s)$ , 则仍然有

$$\Psi(\langle s'' \rangle) \subset \Psi(|s''|) \subset \Psi(|s'|) = \Psi(\overline{\langle s' \rangle}) \subset \overline{|s|} = |s|$$

于是可见  $s'' \in K'(s)$ , 所以有

$$\begin{array}{ccc} |K'| & \xrightarrow{\Psi} & |K| \\ \cap & & \cap \\ |K'(s)| & \xrightarrow{\text{bijection}} & |s| \end{array}$$

并且注意到

$$|s| = \coprod_{s_1 \subset s} \langle s_1 \rangle$$

所以能看出来

$$K'(s) = \bigcup_{s_1 \subset s} \{s' \in K' : \Psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s_1 \rangle\}$$

由条件, 后者每一个都是有限个, 而  $s$  是有限的, 所以  $s_1$  也是有限个, 所以  $K'(s)$  是有限子复形, 从而其几何实现是紧空间. 考虑

$$|K'(s)| \rightarrow |s|$$

是一个从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射, 从而是同胚, 于是有

$$\iota \circ \Psi^{-1} : |s| \rightarrow |K'(s)| \rightarrow |K'|$$

是连续的, 由弱拓扑知道  $\Psi^{-1}$  是连续的, 同胚得证.  $\square$

**推论 2.15.5** 令  $K$  是一个单纯复形,  $L \subset K$  是一个子复形, 并且有一个细分  $\Psi : |K'| \rightarrow |K|$ . 则存在唯一的子复形  $L' \subset K'$  使得  $\Psi|_{L'}$  是从  $|L'|$  到  $|L|$  的细分.

**证明** 令

$$L' := \{s' \in K' : \Psi(\langle s' \rangle) \subset |L|\}$$

很显然这是  $K'$  的子复形, 并且有

$$\Psi(|L'|) \subset |L|$$

因此可见

$$\Psi|_{|L'|} : |L'| \rightarrow |L|$$

是一个逐片仿射映射, 并且对任意的  $s \in L \subset K$ , 都有

$$\langle s \rangle = \bigcup_{s' \in K', \Psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s \rangle} \Psi(\langle s' \rangle) = \bigcup_{s' \in L', \Psi(\langle s' \rangle) \subset \langle s \rangle} \Psi(\langle s' \rangle)$$

因此由上面定理立刻得证. □

我们称刚才得到的唯一的  $L'$  被称为  $L$  的 **induced subdivision**, 将其记为  $K'|_L$ . 现在  $(X, A)$  是拓扑对,  $((K, L), f)$  是  $(X, A)$  的三角剖分, 若  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  是细分, 则

$$((K', K'|_L), f \circ \Psi)$$

也是  $(X, A)$  的三角剖分.

**推论 2.15.6**  $K$  是单纯复形,  $s \in K$ , 若给定一个细分

$$\psi: V_{K'} \rightarrow |\dot{s}|$$

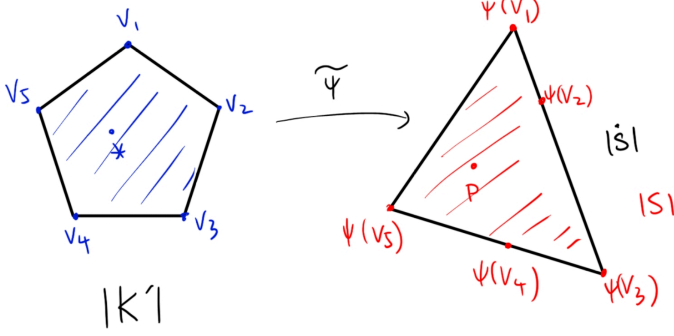
(注意这个小  $\psi$  等价于  $\Psi: |K'| \rightarrow |\dot{s}|$ .) 则取  $P \in \langle s \rangle$ , 有

$$\tilde{\psi}: V_{K'} \coprod \{*\} \rightarrow |\bar{s}| = |s|, \quad v' \mapsto \psi(v), * \mapsto P$$

仍然是一个细分.

大致可以理解为把空心的几何体在内部加上一个点然后把空心填满, 也可以考虑是

$$|K' * \{*\}| \rightarrow |s|$$



**证明** 首先, 明确  $\tilde{\psi}$  的定义域所在的单纯复形是  $K'$  与新顶点  $\{*\}$  的锥复形, 我们将其记为  $\widetilde{K'} := K' * \{*\}$ . 显然  $\tilde{\psi}$  诱导了映射

$$\tilde{\Psi}: |\widetilde{K'}| \rightarrow |s|$$

这是一个逐片仿射映射. 我们对目标复形中的任意单纯形  $t \in \bar{s}$  分两种情况进行验证:  
(1) 当  $t \subset \dot{s}$  时: 因为  $P \in \langle s \rangle$  位于内部, 任何包含  $*$  的开单纯形 (即  $\langle * \rangle$  或  $\langle s' * \{*\} \rangle$ ) 在  $\tilde{\Psi}$  下的像都会落在  $\langle s \rangle$  内部. 因此, 像能被包含在  $\langle t \rangle$  中的单纯形  $\tilde{s} \in \widetilde{K'}$  只能来自  $K'$ . 于是有:

$$\bigcup_{\tilde{s} \in \widetilde{K'}, \tilde{\Psi}(\langle \tilde{s} \rangle) \subset \langle t \rangle} \tilde{\Psi}(\langle \tilde{s} \rangle) = \bigcup_{s' \in K', \Psi(\langle s' \rangle) \subset \langle t \rangle} \Psi(\langle s' \rangle) = \langle t \rangle$$

最后一个等号是因为已知  $\Psi: |K'| \rightarrow |s|$  是一个细分, 根据定理直接得到, 且该并集是有限并且两两无交的.

(2) 当  $t = s$  时: 此时, 映射到  $\langle s \rangle$  内部的单纯形有且仅有  $*$  和所有的开锥  $\langle s' * \{*\} \rangle$ . 于是有:

$$\bigcup_{\tilde{s} \in \widetilde{K'}, \tilde{\Psi}(\langle \tilde{s} \rangle) \subset \langle s \rangle} \tilde{\Psi}(\langle \tilde{s} \rangle) = \{P\} \cup \bigcup_{s' \in K'} \tilde{\Psi}(\langle s' * \{*\} \rangle)$$

在几何上, 因为  $P$  是凸多面体  $|s|$  的内点, 开单纯形  $\langle s \rangle$  内部的任意一点  $x$  要么是  $P$  本身, 要么唯一地位于  $P$  与边界  $|\dot{s}|$  上某一点  $y$  的开线段  $(P, y)$  上. 又因为  $\Psi$  是  $|s|$  的完美细分, 边界点  $y$  必然唯一地属于某一个  $\Psi(\langle s' \rangle)$  之中. 这意味着开线段  $(P, y)$  必然唯一地属于像  $\tilde{\Psi}(\langle s' * \{*\} \rangle)$  之中. 因此, 上述并集无遗漏且无重叠地覆盖了整个  $\langle s \rangle$ . 又由于  $K'$  只有有限个单纯形, 该并集显然是有限的. 两种情况均完美满足定理中的等式与不交条件, 因此由上面定理立刻得证  $\tilde{\Psi}$  仍然是一个细分.  $\square$

$K$  是一个单纯复形, 我们可以考虑  $\text{sd}K$ , 其顶点集定义为

$$V_{\text{sd}K} = \left\{ b(s) : s = \{v_0, \dots, v_k\} \in K, b(s) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i \in |K| \right\}$$

满足如果  $s_0 \subset s_1 \subset \cdots \subset s_q \in K$ , 则

$$\{b(s_0), \dots, b(s_q)\} \in \text{sd}K$$

利用上面的推论可以验证

$$V_{\text{sd}K} \rightarrow |K|$$

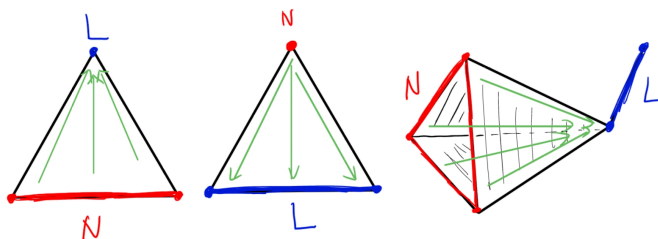
是一个细分, 称之为**重心细分**.

## 2.16 全子复形与强形变收缩核

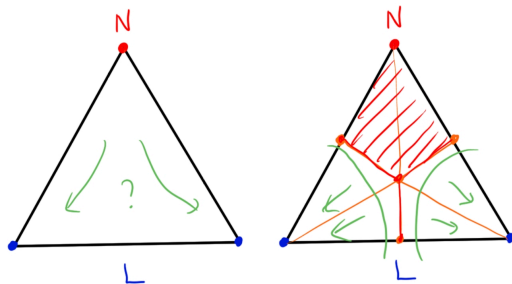
现在我们的目标是证明, 对于一个单纯复形  $K$ , 任意的子复形  $L$ , 都有  $|L|$  是其在  $|K|$  中的一个邻域的强形变收缩核. 现在令

$$N := \{s \in K : s \cap V_L = \emptyset\}$$

不难看出它是  $K$  的最大的与  $L$  无交的子复形. 我们考察一些情况,



可以发现这种几种情况只需要去掉  $N$  就可以了, 但是下面左侧这种情况就不行



但是做一次重心细分之后就可以了. 于是我们可以给出定义:

**定义 2.16.1** 称  $L$  是  $K$  的**全子复形 (full subcomplex)**, 如果对  $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in K$ , 若  $v_0, \dots, v_q \in V_L$ , 则  $s \in L$ .

我们定义  $\text{sd}L = (\text{sd}K)|_L$ .

**引理 2.16.2**  $L$  是  $K$  的子复形, 则  $\text{sd}L$  是  $\text{sd}K$  的全子复形.

**证明** 考虑  $s_i = \{v_{i,0}, \dots, v_{i,n_i}\} \in K$ , 满足  $s_0 \subset \dots \subset s_k$ , 令

$$b(s_i) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{l=0}^{n_i} v_{i,l} \in |K|$$

则有

$$\{b(s_0), \dots, b(s_k)\} = s \in \text{sd}K$$

现在如果  $b(s_i) \in V_{\text{sd}L}$ , 则断言  $s_i \in L$ , 首先注意到

$$\text{sd}L = \{s \in \text{sd}K : \langle s \rangle \subset |L|\}$$

注意到

$$L = \coprod_{t \in L} \langle t \rangle$$

所以存在某个  $t$  使得  $b(s_i) \in \langle t \rangle$ , 但同时  $b(s_i) \in \langle s_i \rangle$ , 所以可见  $t = s_i$ , 故  $s_i \in L$ , 所以由定义可见  $s \in \text{sd}L$ .  $\square$

**引理 2.16.3** 令  $L$  为  $K$  的全子复形, 令  $N := \{s \in K : s \cap V_L = \emptyset\}$ . 则对任意的  $s \in K$ , 都满足下面三种情况之一:

- (1)  $s \in L$ .
- (2)  $s \in N$ .
- (3) 可以写成  $s = s' \cup s''$ , 其中  $s' \in V_L$ ,  $s'' \in V_N$ .

**证明** 画个图想象一下即可, 注意到  $L$  和  $N$  都是  $K$  的全子复形, 讨论  $s$  的顶点分布即可.  $\square$

**定理 2.16.4**  $(X, A)$  为 polyhedral pair, 则  $A$  它在  $X$  中一个邻域的强形变收缩核.

**证明** 我们假设  $(X, A) = (|K|, |L|)$ , 其中  $L$  是  $K$  的一个全子复形 (如果不是, 做一次重心细分即可). 我们要构造一个连续映射

$$F: (|K| - |N|) \times [0, 1] \rightarrow |K| - |N|$$

给出了从  $|K| - |N|$  到强形变收缩

$$r: |K| - |N| \rightarrow |L|$$

的同伦. 对任意的  $\alpha \in |K| - |N|$ , 令

$$s = \{v \in K : \alpha(v) \neq 0\} \implies \alpha \in \langle s \rangle$$

引理 2.16.3 告诉我们

$$s = s' \cup s''$$

其中  $s' = \{v_0, \dots, v_p\} \in L, s'' = \{v_{p+1}, \dots, v_q\} \subset V_N$ , 而

$$\alpha = \sum_{i=0}^q \alpha_i v_i, \quad \alpha_i = \alpha(v_i) > 0$$

令

$$\alpha' := \frac{\sum_{i=0}^p \alpha_i v_i}{\sum_{i=0}^p \alpha_i}, \quad \alpha'' := \frac{\sum_{i=p+1}^q \alpha_i v_i}{\sum_{i=p+1}^q \alpha_i}$$

于是只需要定义

$$F(\alpha, t) := (1-t)\alpha + t\alpha', \quad t \in [0, 1]$$

可以看出来

$$F|_{(|K|-|N|) \times [0, 1]}$$

是连续的. 我们断言  $|K| \times [0, 1]$  的乘积拓扑与  $\{|s| \times [0, 1] : s \in K\}$  诱导的弱拓扑是一样的, 从而可以说明  $(|K| - |N|) \times [0, 1]$  作为  $|K| \times [0, 1]$  的子空间拓扑与  $(|s| - |N|) \times [0, 1]$  诱导的弱拓扑是一致的, 从而可以说明  $F$  确实是在  $(|K| - |N|) \times [0, 1]$  上连续, 故得证.  $\square$

下面的引理给出了断言的成立.

**引理 2.16.5**  $X$  是一个集合,  $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  是  $X$  的一个覆盖, 并且每个  $A_\alpha$  都有拓扑, 作为拓扑空间是紧 Hausdorff 的.  $I$  是局部紧 Hausdorff 空间, 则由  $\{A_\alpha\}$  诱导出  $X$  的弱拓扑再与  $I$  得到的乘积拓扑与  $A_\alpha \times I$  在乘积拓扑下诱导出  $X \times I$  的弱拓扑一致.

**证明** 记  $X \times I$  上的乘积拓扑为  $\tau_\Pi$ , 由  $\{A_\alpha \times I\}$  诱导的弱拓扑为  $\tau_w$ . 首先, 对每个  $\alpha$ , 包含映射  $i_\alpha : A_\alpha \rightarrow X$  连续, 所以  $i_\alpha \times 1_I : A_\alpha \times I \rightarrow X \times I$  关于乘积拓扑连续. 因此若  $U \in \tau_\Pi$ , 则  $U \cap (A_\alpha \times I)$  在  $A_\alpha \times I$  中开, 所以  $U \in \tau_w$ . 故  $\tau_\Pi \subset \tau_w$ , 也就是说,  $X \times I$  上的弱拓扑比乘积拓扑细.

反过来, 只需证明: 若  $Z \subset X \times I$  满足对任意  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $Z \cap (A_\alpha \times I)$  在  $A_\alpha \times I$  中闭, 则  $Z$  在乘积拓扑下闭. 取  $(x_0, t_0) \notin Z$ . 选取  $\alpha_0$  使得  $x_0 \in A_{\alpha_0}$ . 因为  $Z \cap (A_{\alpha_0} \times I)$  闭, 且  $\{x_0\}$  在 Hausdorff 空间  $A_{\alpha_0}$  中闭, 所以  $T = \{t \in I : (x_0, t) \in Z\}$  是  $I$  中的闭集. 于是  $G = I - T$  是  $t_0$  的开邻域. 由于局部紧 Hausdorff 空间是正则的, 可取  $t_0$  的开邻域  $V$  使得  $C = \overline{V}$  紧且  $C \subset G$ . 于是  $\{x_0\} \times C$  与  $Z$  不交.

定义

$$U = \{x \in X : (\{x\} \times C) \cap Z = \emptyset\}.$$

则  $x_0 \in U$ . 下面证明  $U$  在  $X$  的弱拓扑下开. 对任意  $\beta \in \mathcal{A}$ , 有

$$A_\beta - (U \cap A_\beta) = p_\beta(Z \cap (A_\beta \times C)),$$

其中  $p_\beta : A_\beta \times C \rightarrow A_\beta$  是投影映射. 由于  $Z \cap (A_\beta \times I)$  在  $A_\beta \times I$  中闭, 所以  $Z \cap (A_\beta \times C)$  在  $A_\beta \times C$  中闭. 又因为  $A_\beta$  与  $C$  都紧, 故  $A_\beta \times C$  紧, 从而  $Z \cap (A_\beta \times C)$  紧. 其在连续映射  $p_\beta$  下的像紧, 而  $A_\beta$  是 Hausdorff 空间, 所以这个像在  $A_\beta$  中闭. 因此  $U \cap A_\beta$  在  $A_\beta$  中开. 由  $\beta$  的任意性可知,  $U$  在  $X$  的弱拓扑下开.

于是  $U \times V$  是乘积拓扑下  $(x_0, t_0)$  的开邻域. 又因为  $V \subset C$ , 而对任意  $x \in U$  都有  $(\{x\} \times C) \cap Z = \emptyset$ , 所以  $(U \times V) \cap Z = \emptyset$ . 这说明  $X \times I - Z$  在乘积拓扑下开, 因此  $Z$  在乘积拓扑下闭. 故  $\tau_w \subset \tau_\Pi$ .

综上,  $\tau_\Pi = \tau_w$ . □

**引理 2.16.6**  $X$  是拓扑空间,  $X_1, X_2$  为  $X$  的闭集, 若

$$r: V \rightarrow X_1 \cap X_2$$

为强形变收缩, 其中  $V$  是  $X_1 \cap X_2$  在  $X_1$  中的一个开邻域, 则  $V \cup X_2$  为  $X_2$  在  $X_1 \cup X_2$  中的开邻域, 并且

$$\tilde{r}: V \cup X_2 \rightarrow X_2, \quad p \mapsto \begin{cases} r(p), & p \in V \\ p, & p \in X_2 \end{cases}$$

为强形变收缩.

**证明** 注意

$$X_1 \cup X_2 - V \cup X_2 = X_1 - V \underset{\text{closed}}{\subseteq} X_1 \underset{\text{closed}}{\subseteq} X$$

所以可见  $X_1 \cup X_2 - V \cup X_2$  在  $X_1 \cup X_2$  中是闭集, 所以  $V \cup X_2$  在  $X_1 \cup X_2$  中是开集. 现在令  $h: V \times [0, 1] \rightarrow V$  为一个连续映射, 使得  $h(p, 0) = p$ ,  $h(p, 1) = r(p)$ , 并且对  $p \in X_1 \cap X_2$  有  $h(p, t) = p, \forall t \in [0, 1]$ . 现在定义

$$\tilde{h}: (V \cup X_2) \times [0, 1] \rightarrow V \cup X_2, \quad (p, t) \mapsto \begin{cases} h(p, t), & p \in V \\ p, & p \in X_2 \end{cases}$$

容易说明  $\tilde{h}$  是良定义的, 并且  $\tilde{h}(p, 0) = p$ ,  $\tilde{h}(p, 1) = \tilde{r}(p)$ . 最后容易说明  $\tilde{h}$  是连续的. 故得证. □

**定理 2.16.7**  $X$  是拓扑空间,  $X_1, X_2$  是  $X$  的闭集, 并且  $X_1 \cap X_2$  为在  $X_1$  中某开邻域的强形变收缩核, 则  $(X_1, X_2)$  是切除对.

**证明** 我们需要证明包含映射

$$(X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$

对任意的  $k \in \mathbb{Z}$  都诱导了同构

$$H_k(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_k(X_1 \cup X_2, X_2)$$

首先我们注意到

$$H_k(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_k(X_1, V)$$

考虑

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & H_k(X_1) & \rightarrow & H_k(X_1, X_1 \cap X_2) & \rightarrow & H_{k-1}(X_1 \cap X_2) & \rightarrow & H_{k-1}(X_1) \\ \downarrow \cong & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow = \\ H_k(V) & \longrightarrow & H_k(X_1) & \longrightarrow & H_k(X_1, V) & \longrightarrow & H_{k-1}(V) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_1) \end{array}$$

应用 5-引理就得到同构. 同理可以说明

$$H_k(X_1 \cup X_2, X_2) \cong H_k(X_1 \cup X_2, V \cup X_2), \forall k \in \mathbb{Z}$$

另一方面, 注意到  $\{X_1 - X_2, V \cup X_2\}$  为  $X_1 \cup X_2$  的一个开覆盖, 因此可见

$$(\text{int}_{X_1 \cup X_2} X_1) \cup (\text{int}_{X_1 \cup X_2} V \cup X_2) = X_1 \cup X_2$$

所以可见  $X_1, V \cup X_2$  是切除对, 因此可见

$$H_k(X_1, V) \cong H_k(X_1 \cup X_2, V \cup X_2), \forall k \in \mathbb{Z}$$

综上得证. □

**推论 2.16.8**  $K$  是单纯复形,  $K_1, K_2$  是子复形, 则  $|K_1|$  与  $|K_2|$  是切除对.

**证明** 只需要注意到  $|K_1| \cap |K_2| = |K_1 \cap K_2|$  是  $K_1$  的子复形, 然后定理 2.16.4 知道是在  $|K_1|$  中开邻域的强形变收缩核, 所以由定理 2.16.7 得证. □

## 2.17 有序单纯同调与 Mayer-Vietoris 序列

对任意的  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , 我们定义

$$K[k] := \{s: \emptyset \neq s \subset \{0, 1, \dots, k\}\}$$

可见  $|K[k]| \cong \Delta_k$ .

令  $K$  是一个单纯复形, 可以定义有序单纯链复形

$$S_{\bullet}^{\text{ord}}(K): \dots \rightarrow S_k^{\text{ord}}(K) \rightarrow S_{k-1}^{\text{ord}}(K) \rightarrow \dots \rightarrow S_0^{\text{ord}}(K) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

其中

$$S_k^{\text{ord}}(K) := \mathbb{Z}^{\oplus \text{Hom}_{\text{sc}}(V_{K[k]}, V_K)} \cong \mathbb{Z}^{\oplus \{[v_0, \dots, v_k]: \{v_0, \dots, v_k\} \in K\}}$$

注意后一种写法的  $v_0, \dots, v_k$  可以重复取. 我们定义其边缘映射为

$$\partial_k^{\text{ord}}(K): S_k^{\text{ord}}(K) \rightarrow S_{k-1}^{\text{ord}}(K), \quad [v_0, \dots, v_k] \mapsto \begin{cases} \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, v_k]_i, & k \in \mathbb{N} \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

其中

$$[v_0, \dots, v_k]_i = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \in S_{k-1}^{\text{ord}}(K)$$

容易验证

$$\partial_{k-1}^{\text{ord}}(K) \circ \partial_k^{\text{ord}}(K) = 0$$

所以是链复形. 于是可见

$$H_k^{\text{ord}}(K) := \frac{\text{Ker } \partial_k^{\text{ord}}(K)}{\text{Im } \partial_{k+1}^{\text{ord}}(K)}$$

同理有相对版本, 给定  $(K, L)$ , 考虑其相对有序单纯复形  $S_{\bullet}^{\text{ord}}(K, L) = \frac{S_{\bullet}^{\text{ord}}(K)}{S_{\bullet}^{\text{ord}}(L)}$ .

有自然的链映射

$$\alpha_k: S_k^{\text{ord}}(K) \rightarrow S_k(|K|), \quad [v_0, \dots, v_k] \mapsto \left( \Delta_k \rightarrow |K|, (t_0, \dots, t_k) \mapsto \sum_{i=0}^k t_i v_i \right)$$

可见这是自然的单射.

**Mayer-Vietoris 序列** 考虑  $K$  是单纯复形,  $K_1, K_2 \subset K$  为子复形, 有

$$|K_1| \cap |K_2| = |K_1 \cap K_2|, \quad |K_1| \cup |K_2| = |K_1 \cup K_2|$$

可以看到

$$S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_1) + S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_2) = S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_1 \cup K_2)$$

于是会得到短正合列

$$0 \rightarrow S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_1 \cap K_2) \rightarrow S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_1) \oplus S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_2) \rightarrow S_{\bullet}^{\text{ord}}(K_1 \cup K_2) \rightarrow 0$$

于是会得到长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & H_{k+1}^{\text{ord}}(K_1 \cup K_2) \\ & & & & & \swarrow & \\ H_k^{\text{ord}}(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_k^{\text{ord}}(K_1) \oplus H_k^{\text{ord}}(K_2) & \longrightarrow & H_k^{\text{ord}}(K_1 \cup K_2) & & \\ & & & & \nwarrow & & \\ H_{k-1}^{\text{ord}}(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & \cdots & & & & \end{array}$$

**定理 2.17.1**  $K$  是单纯复形,  $L \subset K$  为子复形, 则自然映射  $\alpha_{\bullet}: S_{\bullet}^{\text{ord}}(K, L) \rightarrow S_{\bullet}(|K|, |L|)$ , 诱导的

$$\alpha_*: H_k^{\text{ord}}(K, L) \rightarrow H_k(|K|, |L|), \quad k \in \mathbb{Z}$$

是一个同构. 这允许我们使用三角剖分去计算相对同调.

**证明** 考虑正合列

$$\begin{array}{ccc} H_k^{\text{ord}}(L) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_k(|L|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k^{\text{ord}}(K) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_k(|K|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k^{\text{ord}}(K, L) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_k(|K|, |L|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{k-1}^{\text{ord}}(L) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_{k-1}(|L|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{k-2}^{\text{ord}}(L) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_{k-1}(|K|) \end{array}$$

由 5-引理可以发现只需要证明绝对的情况, 即  $H_k^{\text{ord}} K \cong H_k(|K|)$ . 当  $\#K < \infty$  时, 我们对  $\#K$  归纳,  $\#K = 1$  时显然. 现在假设对  $\#K - 1$  成立, 此时对  $s_0 \in K$  为最高维

度的单纯形，我们定义

$$L := \{s \in K : s \neq s_0\}$$

可以看出来  $L$  是  $K$  的子复形，所以可见  $\#L = \#K - 1 < \#K$ ，注意

$$K = L \cup \overline{s_0}$$

从而会有 M-V 序列

$$\begin{array}{ccc}
 H_k^{\text{ord}}(L \cap \overline{s_0}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(|L \cap \overline{s_0}|) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k^{\text{ord}}(L) \oplus H_k^{\text{ord}}(\overline{s_0}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(|L|) \oplus H_k(|\overline{s_0}|) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_k^{\text{ord}}(K) & \longrightarrow & H_k(|K|) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{k-1}^{\text{ord}}(L \cap \overline{s_0}) & \xrightarrow{\cong} & H_{k-1}(|L \cap \overline{s_0}|) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{k-1}^{\text{ord}}(L) \oplus H_{k-1}^{\text{ord}}(\overline{s_0}) & \xrightarrow{\cong} & H_{k-1}(|L|) \oplus H_{k-1}(|\overline{s_0}|)
 \end{array}$$

中间同构只需要证明

$$H_k^{\text{ord}}(\overline{s_0}) \cong H_k(|\overline{s_0}|)$$

即可，只需证明自然链映射

$$\alpha_\bullet : S_\bullet^{\text{ord}}(K[n]) \longrightarrow S_\bullet(|K[n]|)$$

诱导同构

$$\alpha_* : H_k^{\text{ord}}(K[n]) \xrightarrow{\cong} H_k(|K[n]|).$$

注意到

$$|K[n]| \cong \Delta_n.$$

因此  $|K[n]|$  是可缩空间，所以奇异同调满足

$$H_k(|K[n]|) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

于是我们只需要说明有序单纯同调也满足相同的结论，并且  $\alpha_*$  在  $H_0$  上对应恒等同

构. 记

$$C_k := S_k^{\text{ord}}(K[n]).$$

因为  $K[n]$  是完整的  $n$ -单形, 所以任意顶点列

$$[v_0, \dots, v_k], \quad v_i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

都给出  $C_k$  的一个生成元. 这里允许顶点重复. 我们证明增广链复形

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

是正合的, 其中

$$\varepsilon([v]) = 1.$$

这将推出

$$H_k^{\text{ord}}(K[n]) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

取固定顶点  $0 \in K[n]$ . 定义映射

$$h_k: C_k \longrightarrow C_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

为

$$h_k([v_0, \dots, v_k]) = [0, v_0, \dots, v_k].$$

同时定义

$$h_{-1}: \mathbb{Z} \longrightarrow C_0$$

为

$$h_{-1}(1) = [0].$$

我们验证

$$\partial_{k+1} h_k + h_{k-1} \partial_k = \text{id}_{C_k}, \quad k \geq 1.$$

对生成元  $[v_0, \dots, v_k]$ , 有

$$\begin{aligned} \partial_{k+1} h_k([v_0, \dots, v_k]) &= \partial_{k+1}[0, v_0, \dots, v_k] \\ &= [v_0, \dots, v_k] + \sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} [0, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k]. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} h_{k-1}\partial_k([v_0, \dots, v_k]) &= h_{k-1}\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k]\right) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i [0, v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k]. \end{aligned}$$

两式相加, 后面的求和项两两抵消, 得到

$$(\partial_{k+1}h_k + h_{k-1}\partial_k)([v_0, \dots, v_k]) = [v_0, \dots, v_k].$$

因此

$$\partial_{k+1}h_k + h_{k-1}\partial_k = \text{id}_{C_k}.$$

对于  $k = 0$ , 我们需要验证

$$\partial_1h_0 + h_{-1}\varepsilon = \text{id}_{C_0}.$$

对生成元  $[v]$ , 有

$$\partial_1h_0([v]) = \partial_1[0, v] = [v] - [0],$$

而

$$h_{-1}\varepsilon([v]) = h_{-1}(1) = [0].$$

因此

$$(\partial_1h_0 + h_{-1}\varepsilon)([v]) = [v] - [0] + [0] = [v].$$

所以

$$\partial_1h_0 + h_{-1}\varepsilon = \text{id}_{C_0}.$$

又因为

$$\varepsilon h_{-1}(1) = \varepsilon([0]) = 1,$$

所以

$$\varepsilon h_{-1} = \text{id}_{\mathbb{Z}}.$$

综上, 增广链复形

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

是可缩的, 从而是正合的. 因此

$$H_k^{\text{ord}}(K[n]) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

最后看自然映射

$$\alpha_0: S_0^{\text{ord}}(K[n]) \rightarrow S_0(|K[n]|).$$

它把顶点  $[v]$  送到对应的奇异 0-单形, 即点  $v \in |K[n]|$ . 在  $H_0$  上, 所有顶点都代表同一个连通分支的生成元. 因此

$$\alpha_*: H_0^{\text{ord}}(K[n]) \rightarrow H_0(|K[n]|)$$

是同构. 对于  $k > 0$ , 两边同调群都为 0, 故  $\alpha_*$  也是同构. 因此, 当  $K = K[n]$  是单个单形时,

$$\alpha_*: H_k^{\text{ord}}(K[n]) \xrightarrow{\cong} H_k(|K[n]|)$$

对所有  $k$  都是同构.

综上得到有限复形的绝对情况, 对于无穷情况, 只需要注意到无穷情况是有限情况的滤过余极限, 从而由有限情况得证.  $\square$

## 2.18 定向单纯同调

$K$  是单纯复形,  $k \in \mathbb{Z}$ , 我们定义

$$A_k := \langle [v_0, \dots, v_k] - \text{sgn}(s)[v_{s(0)}, \dots, v_{s(k)}] : \{v_0, \dots, v_k\} \in K, s \in S_{k+1} \rangle$$

$$D_k := \langle [v_0, \dots, v_k] : \exists i \neq j \text{ s.t. } v_i = v_j \rangle$$

令

$$R_k := A_k + D_k$$

为  $S_k^{\text{ord}}(K)$  的子群. 经过一些机械的验证可以断言

$$\partial_k(K)R_k \subset R_{k-1}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

于是可以考虑

$$0 \rightarrow R_\bullet \rightarrow S_\bullet^{\text{ord}}(K) \rightarrow C_\bullet(K) \rightarrow 0$$

其中  $C_k(K) = \frac{S_k^{\text{ord}}(K)}{R_k}$ , 于是可以得到链复形  $C_\bullet(K)$ , 其边缘映射记为  $\partial_\bullet(K)$ , 称  $(C_\bullet(K), \partial_\bullet(K))$  为  $K$  的**定向单纯链复形**. 我们有典范的映射

$$\mu_k: S_k^{\text{ord}}(K) \rightarrow C_k(K), \quad [v_0, \dots, v_k] \mapsto \langle v_0, \dots, v_k \rangle$$

我们可以看出对任意的  $s \in S_{k+1}$  都有

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \text{sgn}(s) \langle v_{s(0)}, \dots, v_{s(k)} \rangle$$

特别地, 如果存在  $v_i = v_j, i \neq j$ , 则

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = 0$$

现在我们给定  $V_K$  的一个全序, 则

$$\{\langle v_0, \dots, v_k \rangle : \{v_0, \dots, v_k\} \in K, v_0 < \dots < v_k\}$$

给出了  $C_k(K)$  的一组基. 现在我们称

$$H_k(K) := \frac{\text{Ker } \partial_k(K)}{\text{Im } \partial_{k+1}(K)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

为  $K$  的**定向单纯同调**.

同样可以定义相对的版本:

$$C_\bullet(K, L) := \frac{C_\bullet(K)}{C_\bullet(L)}$$

同样可以定义约化的版本:

$$\tilde{C}_k(K) := \begin{cases} C_k, & k \geq 0 \\ \mathbb{Z}, & k = -1 \\ 0, & k < -1 \end{cases}$$

也同样可以讨论定向同调的 Mayer-Vietoris 序列:

$$H_k(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\varphi_*} H_k(K_1) \oplus H_k(K_2) \xrightarrow{\psi_*} H_k(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(K_1 \cap K_2)$$

同样也有约化版本的

$$\tilde{H}_k(K_1 \cap K_2) \rightarrow \tilde{H}_k(K_1) \oplus \tilde{H}_k(K_2) \rightarrow \tilde{H}_k(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{k-1}(K_1 \cap K_2)$$

**定理 2.18.1** 对任意的  $K \in \mathbf{SC}$ , 链映射  $\mu_\bullet(K): S_\bullet^{\text{ord}}(K) \rightarrow C_\bullet(K)$  是一个链同伦等价.

固定一个单纯复形  $K$ . 令  $\mathcal{C}(K)$  为  $K$  的所有子复形构成的范畴. 它的对象为

$$\text{Ob}(\mathcal{C}(K)) = \{L \mid L \subset K, L \text{ 是子复形}\}.$$

若  $L_1, L_2 \subset K$ , 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(K)}(L_1, L_2) = \begin{cases} \{\iota: L_1 \hookrightarrow L_2\}, & L_1 \subset L_2, \\ \emptyset, & L_1 \not\subset L_2. \end{cases}$$

于是对每个  $k \in \mathbb{Z}$ , 我们可以把

$$S_k^{\mathrm{ord}}, \quad C_k$$

都看成从  $\mathcal{C}(K)$  到  $\mathbf{Ab}$  的协变函子:

$$L \longmapsto S_k^{\mathrm{ord}}(L),$$

以及

$$L \longmapsto C_k(L).$$

若  $L_1 \subset L_2$ , 则包含映射诱导

$$S_k^{\mathrm{ord}}(L_1) \rightarrow S_k^{\mathrm{ord}}(L_2),$$

以及

$$C_k(L_1) \rightarrow C_k(L_2).$$

对任意单形  $s \in K$ , 令

$$\mathcal{M} = \{\bar{s} \mid s \in K\}.$$

对每个  $\bar{s} \in \mathcal{M}$ , 定义

$$U_{\bar{s}} = \{[v_0, \dots, v_k] \in S_k^{\mathrm{ord}}(\bar{s}) \mid \{v_0, \dots, v_k\} = s\}.$$

记

$$\mathcal{U}_k = \{U_{\bar{s}} \mid \bar{s} \in \mathcal{M}\}.$$

那么  $S_k^{\mathrm{ord}}$  是  $\mathcal{U}_k$ -可表示的. 事实上, 若  $L \subset K$ , 则  $S_k^{\mathrm{ord}}(L)$  的一个生成元形如

$$[v_0, \dots, v_k],$$

其中

$$\{v_0, \dots, v_k\} \in L.$$

令

$$s = \{v_0, \dots, v_k\}.$$

则有包含映射

$$\iota: \bar{s} \hookrightarrow L,$$

并且

$$[v_0, \dots, v_k] = S_k^{\text{ord}}(\iota)([v_0, \dots, v_k]).$$

因此  $S_k^{\text{ord}}(L)$  的每个生成元都由某个模型  $\bar{s}$  上的生成元映来. 所以  $S_k^{\text{ord}}$  是由这些模型自由生成的函子.

现在给  $V_K$  选定一个全序. 于是每个  $k$ -单形

$$s = \{v_0, \dots, v_k\}$$

都可以唯一写成

$$v_0 < \dots < v_k.$$

令

$$\mathcal{M}_k = \{\bar{s} \mid s \in K, \dim s = k\}.$$

对每个  $\bar{s} \in \mathcal{M}_k$ , 其中

$$s = \{v_0, \dots, v_k\}, \quad v_0 < \dots < v_k,$$

定义

$$V_{\bar{s}} = \{\langle v_0, \dots, v_k \rangle\} \subset C_k(\bar{s}).$$

记

$$\mathcal{V}_k = \{V_{\bar{s}} \mid \bar{s} \in \mathcal{M}_k\}.$$

那么  $C_k$  是  $\mathcal{V}_k$ -可表示的. 事实上,  $C_k(L)$  的一组基由  $L$  中所有  $k$ -单形的递增定向给出:

$$\{\langle v_0, \dots, v_k \rangle \mid \{v_0, \dots, v_k\} \in L, v_0 < \dots < v_k\}.$$

每个这样的生成元都来自唯一的模型

$$\overline{\{v_0, \dots, v_k\}} \hookrightarrow L.$$

因此  $C_k$  也是由模型自由生成的函子.

我们考虑增广链复形

$$\dots \longrightarrow S_2^{\text{ord}}(L) \longrightarrow S_1^{\text{ord}}(L) \longrightarrow S_0^{\text{ord}}(L) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

其中

$$\varepsilon([v]) = 1.$$

同样, 定向单纯链复形也有增广版本:

$$\cdots \longrightarrow C_2(L) \longrightarrow C_1(L) \longrightarrow C_0(L) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

其中

$$\varepsilon(\langle v \rangle) = 1.$$

如果  $L = \bar{s}$  是一个单形及其所有面构成的子复形, 那么  $|\bar{s}|$  是一个几何单形, 因此可缩. 在链复形层面, 也可以直接用锥算子证明它们正合. 取  $s$  的一个固定顶点  $w$ , 定义

$$h_q^{\text{ord}}: S_q^{\text{ord}}(\bar{s}) \longrightarrow S_{q+1}^{\text{ord}}(\bar{s})$$

为

$$h_q^{\text{ord}}([v_0, \dots, v_q]) = [w, v_0, \dots, v_q].$$

则可以验证

$$\partial h^{\text{ord}} + h^{\text{ord}} \partial = \text{id}$$

在增广意义下成立.

类似地, 在定向链复形中定义

$$h_q(\langle v_0, \dots, v_q \rangle) = \langle w, v_0, \dots, v_q \rangle,$$

其中如果出现重复顶点, 则该项为 0. 同样可以验证增广链复形正合.

因此, 对每个模型  $\bar{s}$ , 两个增广链复形

$$S_{\bullet}^{\text{ord}}(\bar{s}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

和

$$C_{\bullet}(\bar{s}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

都是正合的.

自然映射

$$\mu_{\bullet}: S_{\bullet}^{\text{ord}} \rightarrow C_{\bullet}$$

已经给出. 我们希望构造一个反向链映射

$$\hat{\mu}_{\bullet}: C_{\bullet} \rightarrow S_{\bullet}^{\text{ord}}.$$

由前面可知：

- $C_k$  是由模型自由生成的；
- 对每个模型  $\bar{s}$ ,  $S_{\bullet}^{\text{ord}}(\bar{s})$  的增广链复形是正合的.

因此由 acyclic model theorem, 恒等映射

$$\text{id}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

可以延拓为链映射

$$\hat{\mu}_{\bullet}: C_{\bullet} \rightarrow S_{\bullet}^{\text{ord}}.$$

也就是说, 我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \hat{\mu}_2 & & \downarrow \hat{\mu}_1 & & \downarrow \hat{\mu}_0 & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_2^{\text{ord}} & \xrightarrow{\partial^{\text{ord}}} & S_1^{\text{ord}} & \xrightarrow{\partial^{\text{ord}}} & S_0^{\text{ord}} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

首先考虑复合

$$\mu_{\bullet} \hat{\mu}_{\bullet}: C_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}.$$

它和恒等映射

$$\text{id}_{C_{\bullet}}: C_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$$

都是从  $C_{\bullet}$  到  $C_{\bullet}$  的链映射, 并且在 degree  $-1$  上都等于

$$\text{id}_{\mathbb{Z}}.$$

又因为：

- $C_k$  是由模型自由生成的；
- 对每个模型  $\bar{s}$ ,  $C_{\bullet}(\bar{s})$  的增广链复形是正合的.

所以由 acyclic model theorem 的唯一性部分可知：

$$\mu_{\bullet} \hat{\mu}_{\bullet} \simeq \text{id}_{C_{\bullet}}.$$

同理, 考虑另一个复合

$$\hat{\mu}_{\bullet} \mu_{\bullet}: S_{\bullet}^{\text{ord}} \rightarrow S_{\bullet}^{\text{ord}}.$$

它和恒等映射

$$\text{id}_{S_{\bullet}^{\text{ord}}}$$

都是从  $S_{\bullet}^{\text{ord}}$  到  $S_{\bullet}^{\text{ord}}$  的链映射, 并且在 degree  $-1$  上都等于

$$\text{id}_{\mathbb{Z}}.$$

又因为:

- $S_k^{\text{ord}}$  是由模型自由生成的;
- 对每个模型  $\bar{s}$ ,  $S_{\bullet}^{\text{ord}}(\bar{s})$  的增广链复形是正合的.

所以再次由 acyclic model theorem 的唯一性部分可知:

$$\widehat{\mu}_{\bullet}\mu_{\bullet} \simeq \text{id}_{S_{\bullet}^{\text{ord}}}.$$

也就是说, 存在自然链同伦

$$G_k: S_k^{\text{ord}} \rightarrow S_{k+1}^{\text{ord}}$$

使得

$$\partial^{\text{ord}}G_k + G_{k-1}\partial^{\text{ord}} = \widehat{\mu}_k\mu_k - \text{id}_{S_k^{\text{ord}}}.$$

因此

$$\mu_{\bullet}: S_{\bullet}^{\text{ord}}(K) \rightarrow C_{\bullet}(K)$$

是链同伦等价. 综上可见定理成立.

**推论 2.18.2**  $K$  是单纯复形, 则对任意  $k \in \mathbb{Z}$ , 有

$$H_k(K) \cong H_k^{\text{ord}}(K) \cong H_k(|K|)$$

**定义 2.18.3**  $X$  是拓扑空间, 若只有有限个  $k \in \mathbb{Z}$  使得  $H_k(X) \neq 0$ , 则  $X$  的**欧拉示性数**定义为

$$\chi(X) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rank } H_k(X)$$

**推论 2.18.4**  $X$  是紧的 polyhedron, 则上面的欧拉示性数是良定义的.

**证明** 此时存在有限单纯复形  $K$  使得  $X \cong |K|$ , 所以用  $H_k(K)$  计算即可, 而当  $k$  充分大时  $C_k(K) = 0$ .  $\square$

**Euler–Poincaré 公式** 令  $C_\bullet$  是一个链复形, 现在有两个自然的短正合列. 第一个是

$$0 \longrightarrow Z_k(C_\bullet) \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} B_{k-1}(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

第二个是

$$0 \longrightarrow B_k(C_\bullet) \longrightarrow Z_k(C_\bullet) \longrightarrow H_k(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

假设所有这些阿贝尔群都是有限秩的. 由于秩在短正合列上可加, 即若

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

是短正合列, 则

$$\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} C,$$

于是由第一个短正合列得到

$$\operatorname{rk} C_k = \operatorname{rk} Z_k(C_\bullet) + \operatorname{rk} B_{k-1}(C_\bullet).$$

由第二个短正合列得到

$$\operatorname{rk} H_k(C_\bullet) = \operatorname{rk} Z_k(C_\bullet) - \operatorname{rk} B_k(C_\bullet).$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} H_k(C_\bullet) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k (\operatorname{rk} Z_k(C_\bullet) - \operatorname{rk} B_k(C_\bullet)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} Z_k(C_\bullet) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} B_k(C_\bullet). \end{aligned}$$

对第二个求和式换指标, 令  $\ell = k - 1$ , 则

$$- \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} B_k(C_\bullet) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} B_{k-1}(C_\bullet).$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} H_k(C_\bullet) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k (\operatorname{rk} Z_k(C_\bullet) + \operatorname{rk} B_{k-1}(C_\bullet)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} C_k. \end{aligned}$$

因此我们得到 **Euler–Poincaré 公式**:

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} C_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{rk} H_k(C_\bullet)}$$

这里通常要求  $C_\bullet$  是有限型并且只有有限多个非零链群，否则上述交错和需要额外解释.

对于有限单纯复形  $K$ ，若  $C_k(K)$  是定向单纯链群，则

$$\mathrm{rk} C_k(K) = \#K \text{ 中的 } k\text{-单形}$$

于是

$$\chi(K) = \# \sum_k (-1)^k \mathrm{rk} C_k(K) = \sum_k (-1)^k \mathrm{rk} H_k(K)$$

这说明 Euler characteristic 不仅可以通过数顶点边面来算，也可以通过同调群来算.

## 2.19 单纯逼近

$K$  是单纯复形，对  $v \in V_K$ ，我们定义

$$\mathrm{st}v := \{\alpha \in |K| : \alpha(v) \neq 0\}$$

为  $v$  的 star. 可以验证

$$\{\mathrm{st}v : v \in V_K\}$$

构成了  $|K|$  的开覆盖，道理在于对任意的  $\alpha \in |K|$ ，可见

$$\alpha \in \mathrm{st}v \iff \alpha(v) \neq 0 \iff \exists v \in s \in K \text{ s.t. } \alpha \in \langle s \rangle$$

所以可见

$$\mathrm{st}v = \bigcup_{v \in s \in K} \langle s \rangle$$

**引理 2.19.1**  $K$  是单纯复形， $L \subset K$  是子复形， $v_0, \dots, v_q \in V_K$ ，则

$$\{v_0, \dots, v_q\} \in L \iff \left( \bigcap_{i=0}^q \mathrm{st}v_i \right) \cap |L| \neq \emptyset$$

**证明** 意思就是  $\{v_0, \dots, v_q\}$  在  $L$  中是一个单形当且仅当存在  $|L|$  中的一个点使得在每一个  $v_i$  上的权重都是正的. 比如说  $\alpha$  在每个  $v_i$  上都是正的，则很明显可以看出

$$\{v_0, \dots, v_q\} \subset \{v \in L : \alpha(v) \neq 0\} \in L$$

所以很显然  $\{v_0, \dots, v_q\} \in L$ ，另一个方向是显然的. □

现在如果有两个单纯复形  $K_1, K_2$ , 假设存在一个连续映射

$$f: |K_1| \rightarrow |K_2|$$

这里的  $f$  只是拓扑空间的连续映射, 与  $K_1, K_2$  的单纯结构无关, 我们的问题是是否存在单纯映射可以逼近  $f$ .

**定义 2.19.2** 单纯映射  $\varphi: V_{K_1} \rightarrow V_{K_2}$  称为是  $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$  的**单纯逼近 (simplicial approximation)**, 如果对任意的  $\alpha \in |K_1|$ ,  $f(\alpha) \in \langle s \rangle, s \in K_2$ , 都有  $|\varphi|(\alpha) \in |s|$ .

**定理 2.19.3 (单纯逼近与原映射同伦)** 若  $f$  有单纯逼近  $\varphi$ , 则它们是同伦的.

**证明** 由于  $f(\alpha)$  与  $|\varphi|(\alpha)$  都在同一个单形  $|s|$  里面, 而单形是凸的, 所以可以直接使用直线同伦, 定义为

$$H(\alpha, t) = (1-t)f(\alpha) + t|\varphi|(\alpha)$$

从而可见同伦. □

**引理 2.19.4**  $K_1, K_2$  为单纯复形,  $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$  为连续映射, 则映射 (不要求单纯)

$$\varphi: V_{K_1} \rightarrow V_{K_2}$$

是  $f$  的单纯逼近当且仅当

$$f(\text{st}_{K_1} v) \subset \text{st}_{K_2} \varphi(v), \quad \forall v \in V_{K_1}$$

**证明**  $\implies$ : 对  $\forall \alpha \in |K_1|$ , 存在唯一的  $s_2 \in K_2$ , 使得  $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ , 因为  $\varphi$  是单纯逼近, 所以可见

$$|\varphi|(\alpha) \in |s_2| \iff \exists s'_2 \subset s_2 \text{ s.t. } |\varphi|(\alpha) \in \langle s'_2 \rangle$$

现在如果  $\alpha \in \text{st} v$ , 则  $\alpha(v) \neq 0$ , 因此

$$|\varphi|(\alpha)(\varphi(v)) = \sum_{u \in V_{K_1}, \varphi(u)=\varphi(v)} \alpha(u) \geq \alpha(v) > 0$$

从而可见

$$\varphi(v) \in s'_2 \subset s_2$$

所以可见

$$f(\alpha)(\varphi(v)) > 0 \implies f(\alpha) \in \text{st}_{K_2} \varphi(v)$$

$\impliedby$ : 首先我们要说明  $\varphi$  自动是单纯映射, 对任意的  $s \in \{v_0, \dots, v_q\} \in K_1$ , 我

们知道

$$\bigcap_{i=0}^q \text{st}_{K_1} v_i \neq \emptyset$$

所以由引理 2.19.1 我们知道

$$\emptyset \neq f \left( \bigcap_{i=0}^q \text{st}_{K_1} v_i \right) \subseteq \bigcap_{i=0}^q \text{st}_{K_2} \varphi(v_i)$$

所以可见  $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)\} \in K_2$ , 所以单纯.

现在我们要说明对  $\forall \alpha \in |K_1|$ , 若  $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ ,  $s_2 \in K_2$ , 则  $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ . 现在令

$$s = \{v \in V_{K_1} : \alpha(v) \neq 0\} \in K_1$$

我们知道

$$\alpha \in \bigcap_{v \in s} \text{st}_{K_1} v$$

因此

$$f(\alpha) \in \bigcap_{v \in s} f(\text{st}_{K_1} v) \subseteq \bigcap_{v \in s} \text{st}_{K_2} \varphi(v)$$

因此

$$\varphi(s) = \{\varphi(v) : v \in s\} \subset \{w \in K_2 : f(\alpha)(w) \neq 0\} = s_2$$

于是可见

$$|\varphi|(\alpha) \in |\varphi|(|s|) \subset |s_2|$$

□

**推论 2.19.5**  $K_1, K_2$  为单纯复形,  $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$  为连续映射, 则  $f$  存在单纯逼近当且仅当对任意  $v \in V_{K_1}$ , 存在  $w \in V_{K_2}$ , 使得

$$\text{st}_{K_1} v \subset f^{-1}(\text{st}_{K_2} w)$$

**证明**  $\implies$ : 取  $w = \varphi(v)$  即可.  $\impliedby$ : 对任意的  $v \in V_{K_1}$ , 定义  $\varphi(v)$  为任意满足条件的  $w \in V_{K_2}$ . □

**推论 2.19.6**  $K_1, K_2$  为单纯复形,  $K_1$  是有限复形, 则对任意的连续映射  $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$ , 存在  $n \in \mathbb{N}^*$  使得

$$\begin{array}{ccc} |\text{sd}^n K_1| & \xrightarrow{\quad} & |K_2| \\ & \searrow \Psi, \text{homeo} & \nearrow f \\ & |K_1| & \end{array}$$

存在单纯逼近  $V_{\text{sd}^n K_1} \rightarrow V_{K_2}$ .

**证明** 注意到  $|K_1|$  是紧的, 令  $\delta > 0$  为  $|K_1|$  的开覆盖  $\{f^{-1}(\text{st}w) : w \in V_{K_2}\}$  的 Lebesgue 数. 选择  $n$  充分大, 使得  $\text{sd}^n K_1$  中每一个单纯形  $s$  都满足

$$\text{diam } \Psi(|s|) < \delta/2$$

现在对任意的  $v \in \text{sd}^n K_1$ , 考虑  $x, y \in \text{st}v$ , 存在单形  $s_x \ni v, s_y \ni v$  使得

$$x \in s_x, y \in s_y$$

于是可见

$$d(x, y) \leq d(x, v) + d(y, v) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

从而可见

$$\text{diam } \text{st}v < \delta$$

于是由 Lebesgue 引理与推论 2.19.5 立刻得证.  $\square$

**定理 2.19.7 (重心细分存在单纯逼近)** 设  $\Psi: |\text{sd}K| \rightarrow |K|$  为单纯复形  $K$  的重心细分, 则给定  $V_K$  的一个全序, 我们可以构造其单纯逼近为:

$$\eta: V_{\text{sd}K} \rightarrow V_K, \quad b(\sigma) \mapsto \max \sigma, \quad \forall \sigma \in K$$

其中  $b(\sigma)$  为  $\sigma$  的重心,  $\max \sigma$  为  $\sigma$  顶点里面的全序意义下最大点.

## 2.20 Lefschetz-Hopf 不动点定理

**引理 2.20.1**  $K$  是单纯复形,  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  是一个细分, 而  $\eta: V_{K'} \rightarrow V_K$  是  $\Psi$  的单纯逼近. 则存在链映射  $\tau_\bullet: C_\bullet(K) \rightarrow C_\bullet(K')$  使得

- (1)  $\tau$  是  $\eta_\#: C_\bullet(K') \rightarrow C_\bullet(K)$  的同伦逆.
- (2) 对  $K$  的子复形  $L$ , 有  $\tau_k(C_k(L)) \subset C_k(K'|_L)$ .

**证明** 令  $\mathcal{C}(K)$  为由  $K$  的子复形及其包含映射组成的范畴, 考虑两个增广链复形函子

$$C_\bullet(-), \quad C_\bullet(K'|_-): \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

对每个  $k$ , 取模型族

$$\mathcal{M}_k = \{\bar{s} \mid s \in K, \dim s = k\},$$

其中  $\bar{s}$  表示单形  $s$  及其所有面. 单形链函子  $C_k(-)$  由各模型  $\bar{s}$  上的定向生成元自由生成, 因而是 expressible 的; 同理,  $C_k(K'|_{\bar{s}})$  由各个细分  $K'|_{\bar{s}}$  中的定向  $k$ -单形自由生成, 也是 expressible 的.

对每个模型  $\bar{s}$ , 增广链复形

$$C_{\bullet}(\bar{s}) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{和} \quad C_{\bullet}(K'|_{\bar{s}}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

都是正合的, 因为  $\bar{s}$  及其细分的几何实现都是可缩空间.

从增广次数上的恒等映射  $\tau_{-1} = 1_{\mathbb{Z}}$  出发, 反复应用 Acyclic Model Theorem-A, 可构造自然链映射

$$\tau_{\bullet}: C_{\bullet}(-) \longrightarrow C_{\bullet}(K'|_{-}).$$

取对象  $L \subseteq K$ , 自然性立即给出

$$\tau_k(C_k(L)) \subseteq C_k(K'|_L),$$

这就是性质 (2).

另一方面, 单纯逼近  $\eta$  给出自然链映射

$$\eta_{\#}: C_{\bullet}(K'|_{-}) \longrightarrow C_{\bullet}(-).$$

两个自然链映射

$$\eta_{\#}\tau, 1_{C_{\bullet}(-)}$$

在增广次数上相同. 由 Acyclic Model Theorem-B, 它们链同伦:

$$\eta_{\#}\tau \simeq 1_{C_{\bullet}(-)}.$$

同理, 对 expressible 函子  $C_{\bullet}(K'|_{-})$  再应用定理 B, 得到

$$\tau\eta_{\#} \simeq 1_{C_{\bullet}(K'|_{-})}.$$

因此  $\tau$  是  $\eta_{\#}$  的链同伦逆, 性质 (1) 得证. □

**引理 2.20.2**  $K, K'$  为单纯复形,  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  为逐片仿射映射, 则有

$$d_{|K'|}(\alpha', \beta') \geq d_{|K|}(\Psi(\alpha'), \Psi(\beta')), \quad \forall \alpha', \beta' \in |K'|$$

**注记 2.20.3** 该引理说明逐片仿射映射  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  是 1-Lipschitz 的, 因此不会放大距离. 特别地, 对任意  $A \subseteq |K'|$ , 都有  $\text{diam } \Psi(A) \leq \text{diam } A$ . 所以细分后足够小的单形或 star, 经  $\Psi$  映到原复形中仍然足够小, 这常用于结合 Lebesgue 数构造单纯逼近.

**证明** 将  $|K|$  与  $|K'|$  分别视为

$$\mathbb{R}^{\oplus V_K} \quad \text{与} \quad \mathbb{R}^{\oplus V_{K'}}$$

的子空间, 并在这些空间上取  $\ell^1$ -范数

$$\|\alpha\| := \sum_{v \in V_K} |\alpha(v)|.$$

相应地,

$$d_{|K|}(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|, \quad d_{|K'|}(\alpha', \beta') = \|\alpha' - \beta'\|.$$

由于  $\Psi$  在每个单形上都是仿射的, 对任意  $\alpha' \in |K'|$ , 都有

$$\Psi(\alpha') = \sum_{v' \in V_{K'}} \alpha'(v') \Psi(v').$$

因此

$$\Psi(\alpha') - \Psi(\beta') = \sum_{v' \in V_{K'}} (\alpha'(v') - \beta'(v')) \Psi(v').$$

由三角不等式,

$$\begin{aligned} d_{|K|}(\Psi(\alpha'), \Psi(\beta')) &= \left\| \sum_{v' \in V_{K'}} (\alpha'(v') - \beta'(v')) \Psi(v') \right\| \\ &\leq \sum_{v' \in V_{K'}} |\alpha'(v') - \beta'(v')| \cdot \|\Psi(v')\|. \end{aligned}$$

注意到  $\Psi(v') \in |K|$ , 故其重心坐标均非负且总和为 1, 从而

$$\|\Psi(v')\| = \sum_{v \in V_K} \Psi(v')(v) = 1.$$

所以

$$\begin{aligned} d_{|K|}(\Psi(\alpha'), \Psi(\beta')) &\leq \sum_{v' \in V_{K'}} |\alpha'(v') - \beta'(v')| \\ &= \|\alpha' - \beta'\| \\ &= d_{|K'|}(\alpha', \beta'). \end{aligned}$$

故

$$d_{|K'|}(\alpha', \beta') \geq d_{|K|}(\Psi(\alpha'), \Psi(\beta')).$$

□

**定理 2.20.4 (Lefschetz-Hopf 不动点定理)**  $X$  是一个紧 polyhedron,  $f: X \rightarrow X$  是一个没有不动点的连续映射, 则

$$L(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{tr} (f_{*k}: H_k(X) \rightarrow H_k(X)) = 0$$

**注记 2.20.5** 我们需要解释一下这里 trace 的意思, 注意到每一个

$$H_k(X) = \mathbb{Z}^{r_k} \oplus T_k$$

其中前者是自由部分后者是挠部分, 注意挠元  $T_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ , 因此

$$H_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{r_k}$$

所以我们实际定义的是

$$\operatorname{tr}(f_{*k}) := \operatorname{tr} (f_{*k} \otimes 1_{\mathbb{Q}}: H_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow H_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

后者就是普通的  $\mathbb{Q}$ -线性空间的迹.

**证明** 存在有限单纯复形  $K_0$  使得  $X \cong |K_0|$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\cong} & |K_0| \\ f \downarrow & & \downarrow f_{K_0} \\ X & \xrightarrow{\cong} & |K_0| \end{array}$$

使得  $f_{K_0}$  是连续映射, 从而可以找到  $a > 0$  使得对任意的  $x \in |K_0|$ , 都有

$$d_{|K_0|}(x, f_{K_0}(x)) > a$$

再选择一个细分  $\Psi_0: |K| \rightarrow |K_0|$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\cong} & |K_0| & \xleftarrow{\Psi_0} & |K| \\ f \downarrow & & \downarrow f_{K_0} & & \downarrow f_K \\ X & \xrightarrow{\cong} & |K_0| & \xleftarrow{\Psi_0} & |K| \end{array}$$

使得对  $\forall s \in K$ , 都有

$$\text{diam } \Psi_0(|s|) < \frac{a}{2}$$

我们还要再选择一个细分  $\Psi: |K'| \rightarrow |K|$  使得  $f_K \circ \Psi$  存在单纯逼近  $\varphi: V_{K'} \rightarrow V_K$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\cong} & |K_0| & \xleftarrow{\Psi_0} & |K| & \xleftarrow{\Psi} & |K'| \\
 \downarrow f & & \downarrow f_{K_0} & & \downarrow f_K & \nearrow |\varphi| \sim f_K \circ \Psi & \\
 X & \xrightarrow{\cong} & |K_0| & \xleftarrow{\Psi_0} & |K| & & 
 \end{array}$$

我们断言, 对  $s \in K$ ,  $s' \in K'$ , 有

$$\Psi(|s'|) \subset |s| \implies (|\varphi|(|s'|)) \cap |s| = \emptyset$$

反证若存在  $\alpha \in |s'| \implies \Psi(\alpha) \in |s|$ , 使得  $|\varphi|(\alpha) \in |s|$ . 我们要注意到

$$a < d_{|K_0|}(\Psi_0 \circ \Psi(\alpha), f_{K_0}(\Psi_0 \circ \Psi(\alpha)))$$

注意到

$$f_{K_0} \circ \Psi_0 = \Psi_0 \circ f_K$$

并且注意到  $\Psi(\alpha)$  与  $|\varphi|(\alpha)$  都落在  $|s|$  中, 而  $|\varphi|$  是  $f_K \circ \Psi$  的单纯逼近, 所以落在同一个单纯形之中, 于是

$$\begin{aligned}
 a &< d_{|K_0|}(\Psi_0 \circ \Psi(\alpha), f_{K_0}(\Psi_0 \circ \Psi(\alpha))) \\
 &= d_{|K_0|}(\Psi_0 \circ \Psi(\alpha), \Psi_0 \circ f_K \circ \Psi(\alpha)) \\
 &\leq d_{|K_0|}(\Psi_0 \circ \Psi(\alpha), \Psi_0(|\varphi|(\alpha))) + d_{|K_0|}(\Psi_0(|\varphi|(\alpha)), \Psi_0 \circ f_K \circ \Psi(\alpha)) \\
 &< \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a
 \end{aligned}$$

矛盾, 所以断言得证.

设  $X \rightarrow |K_0|$  的同胚为  $h$ , 则可见

$$f_{K_0} \circ h = h \circ f \implies f_* = h_*^{-1} f_{K_0*} h_* \implies \text{tr}(f_{*k}) = \text{tr}(f_{K_0*k})$$

而注意到  $\Psi_0$  也是同胚, 同理

$$\text{tr}(f_{K_0*k}) = \text{tr}(f_{K*k})$$

所以可以通过  $f_{K*}$  来计算  $f$  的 Lefschetz 数.

选择  $\Psi$  的一个单纯逼近  $\eta$  (将  $\Psi$  取为高阶重心细分  $\text{sd}^n K \rightarrow K$  即可, 此时有标准的单纯逼近),

$$\begin{array}{ccccc}
 H_k(|K|) & \xrightarrow{f_{K*}} & H_k(|K|) & & \\
 \uparrow \Psi_* = |\eta|_* & \swarrow & \uparrow (f_K \circ \Psi)_* = |\varphi|_* & & \\
 & H_k(|K'|) & & & \\
 \downarrow \eta_* & \searrow & \downarrow \varphi_* & & \\
 H_k(K) & \xrightarrow{\varphi_* \circ \eta_*^{-1}} & H_k(K) & & \\
 & \swarrow & \uparrow & & \\
 & H_k(K') & & & 
 \end{array}$$

(Note: The diagram shows a commutative structure with isomorphisms indicated by curved arrows on the left and right sides.)

所以可见

$$L(f) = L(f_K) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{tr}(\varphi_{*k} \circ \eta_{*k}^{-1}: H_k(K) \rightarrow H_k(K))$$

由引理 2.20.1 可知存在  $\tau$  使得  $\eta_*^{-1} = \tau_*$ , 故

$$L(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{tr}(\varphi_{*k} \circ \tau_{*k})$$

而 Hopf 迹公式告诉我们

$$RHS = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{tr}(\varphi_{\#k} \circ \tau_k: C_k(K) \rightarrow C_k(K))$$

而由断言可以看出此映射对应矩阵中对角元都是 0, 从而 trace 为 0, 具体而言, 对  $\forall s \in K$ , 有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 C_k(\bar{s}) & \hookrightarrow & C_k(K) & & \\
 \downarrow \tau_k & & \downarrow \tau_k & \searrow & \\
 & & C_k(K') & \xrightarrow{\varphi_{\#k}} & C_k(K) \\
 & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\
 C_k(K'|\bar{s}) & \xrightarrow{\varphi_{\#k}} & C_k(N_s) & & 
 \end{array}$$

其中

$$N_s := \{\tilde{s} \in K: \tilde{s} \cap s = \emptyset\}$$

为与  $\bar{s}$  无交的最大的  $K$  的子复形. 从而可见对任意的  $k \in \mathbb{Z}$ , 都有

$$\mathrm{tr}(\varphi_{\#k} \circ \tau_k) = 0$$

综上所述得证. □

**定理 2.20.6 (Hopf 迹公式)** 设  $C_\bullet = (C_k, \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  是域  $\mathbb{F}$  上的有界链复形, 并且每个  $C_k$  都是有限维向量空间. 若

$$f_\bullet: C_\bullet \rightarrow C_\bullet$$

是链映射, 记其在同调群上诱导的映射为

$$f_{*k}: H_k(C_\bullet) \rightarrow H_k(C_\bullet),$$

则有

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \mathrm{tr}(f_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \mathrm{tr}(f_{*k}).$$

**注记 2.20.7** Hopf 迹公式告诉我们: 链映射在链群上的交错迹, 只取决于它同调群上诱导的作用. 直观地说, 链群中来自边界的部分会在相邻维数之间成对抵消, 最后只剩下真正的同调信息.

**证明** 记

$$Z_k = \mathrm{Ker} \partial_k, \quad B_k = \mathrm{im} \partial_{k+1}, \quad H_k(C_\bullet) = Z_k / B_k.$$

由于我们在域  $\mathbb{F}$  上工作, 可以选择子空间  $\tilde{H}_k \subseteq Z_k$  和  $L_k \subseteq C_k$ , 使得

$$Z_k = B_k \oplus \tilde{H}_k, \quad C_k = Z_k \oplus L_k.$$

因此得到直和分解

$$C_k = B_k \oplus \tilde{H}_k \oplus L_k.$$

其中自然映射  $\tilde{H}_k \rightarrow Z_k / B_k$  是同构, 所以可以将  $\tilde{H}_k$  视为同调群  $H_k(C_\bullet)$  的一个代表空间.

我们先注意到, 边界算子限制为同构

$$\partial_k|_{L_k}: L_k \xrightarrow{\sim} B_{k-1}.$$

事实上, 由于  $L_k \cap Z_k = 0$ , 该限制是单射; 另一方面,  $\mathrm{im} \partial_k = B_{k-1}$ , 并且  $\partial_k$  在  $Z_k$  上为零, 所以该限制也是满射.

由于  $f_\bullet$  是链映射, 有

$$\partial_k f_k = f_{k-1} \partial_k.$$

因此  $f_k$  保持闭链与边界, 即

$$f_k(Z_k) \subseteq Z_k, \quad f_k(B_k) \subseteq B_k.$$

关于分解

$$C_k = B_k \oplus \tilde{H}_k \oplus L_k,$$

映射  $f_k$  的矩阵是分块上三角矩阵. 记其三个对角块分别为

$$f_k^B: B_k \rightarrow B_k, \quad f_k^H: \tilde{H}_k \rightarrow \tilde{H}_k, \quad f_k^L: L_k \rightarrow L_k.$$

于是

$$\mathrm{tr}(f_k) = \mathrm{tr}(f_k^B) + \mathrm{tr}(f_k^H) + \mathrm{tr}(f_k^L).$$

在同构  $\tilde{H}_k \cong H_k(C_\bullet)$  下,  $f_k^H$  正好对应于同调群上的诱导映射  $f_{*k}$ , 所以

$$\mathrm{tr}(f_k^H) = \mathrm{tr}(f_{*k}).$$

另一方面, 由链映射条件可知下图交换:

$$\begin{array}{ccc} L_k & \xrightarrow{f_k^L} & L_k \\ \partial_k \downarrow \sim & & \sim \downarrow \partial_k \\ B_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}^B} & B_{k-1}. \end{array}$$

因此  $f_k^L$  与  $f_{k-1}^B$  共轭, 从而

$$\mathrm{tr}(f_k^L) = \mathrm{tr}(f_{k-1}^B).$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}(f_k) &= \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}(f_{*k}) + \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}(f_k^B) + \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}(f_{k-1}^B) \\ &= \sum_k (-1)^k \mathrm{tr}(f_{*k}) \end{aligned}$$

因为令  $j = k - 1$ , 便有

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{tr}(f_{k-1}^B) = - \sum_j (-1)^j \mathrm{tr}(f_j^B),$$

两个来自边界部分的交错迹恰好抵消. 因此

$$\sum_k (-1)^k \operatorname{tr}(f_k) = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}(f_{*k}).$$

□

**注记 2.20.8** 如果  $C_\bullet$  是有限生成自由  $\mathbb{Z}$ -模组成的有界链复形, 则可以将整个链复形张量上  $\mathbb{Q}$ , 对

$$f_\bullet \otimes 1_{\mathbb{Q}}: C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

应用 Hopf 迹公式. 此时得到

$$\sum_k (-1)^k \operatorname{tr}(f_k) = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}(f_{*k} \otimes 1_{\mathbb{Q}}: H_k(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow H_k(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

这正是 Lefschetz 数中 Hopf 迹公式的使用方式.

**命题 2.20.9**  $X$  是拓扑空间,  $A \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$  为收缩核, 则有

$$(1) H_k(X) \cong H_k(X, A) \oplus H_k(A), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2)  $f: A \rightarrow A$  为连续映射, 若只有有限个  $k$  使得  $\operatorname{rank} H_k(X) \neq 0$ , 并且对任意的  $k$  都有  $\operatorname{rank} H_k(X) < \infty$ , 则

$$L(f) = L(i \circ f \circ r)$$

**证明** 我们有长正合列

$$H_{k+1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A)$$

考虑

$$r \circ i = 1_A \implies r_* \circ i_* = 1_{H_\bullet(A)} \implies \operatorname{Ker} i_* = \{0\} = \operatorname{Im} \partial_*$$

于是我们得到短正合列

$$0 \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X, A) \rightarrow 0$$

而注意到这个正合列是分裂的, 即存在

$$r_*: H_k(X) \rightarrow H_k(A) \text{ s.t. } r_* \circ i_* = 1_{H_\bullet(A)}$$

从而我们知道有同构

$$H_k(X) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A) \oplus H_k(A), \quad [z] \mapsto (j_*([z]), r_*([z]))$$

现在注意到

$$(i \circ f \circ r)_* = i_* \circ f_* \circ r_*$$

而由 trace 的可交换性得到

$$\mathrm{tr}(i_* \circ f_* \circ r_*) = \mathrm{tr}(r_* \circ i_* \circ f_*) = \mathrm{tr}(f_*)$$

故得证. □

**推论 2.20.10**  $X$  是紧 polyhedron,  $A \subset X$  是收缩核,  $f: A \rightarrow A$  是没有不动点的连续映射, 则可知  $L(f) = 0$ .

**证明** 注意若

$$L(i \circ f \circ r) = L(f) \neq 0$$

则存在  $x \in X$  使得

$$A \ni i(f(r(x))) = x \implies r(x) = x$$

于是  $f(x) = x$ , 矛盾. □

## 2.21 同调理论

**Eilenberg-Steenrod Axioms** Eilenberg-Steenrod 公理是一组用来公理化刻画同调理论的基本性质. 其核心思想是: 我们不必预先规定同调群必须由奇异链复形、单纯链复形或胞腔链复形构造; 只要一族函子满足这些公理, 就可以将其视为一种同调理论.

**同调理论的数据** 记  $\mathbf{Top}^2$  为拓扑空间对所组成的范畴:

- 对象是空间对  $(X, A)$ , 其中  $A \subseteq X$ ;
- 态射

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

是满足  $f(A) \subseteq B$  的连续映射.

一个同调理论首先由一族协变函子

$$H_n: \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{Ab}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

组成. 也就是说:

- 对每个空间对  $(X, A)$ , 都有一个 Abel 群  $H_n(X, A)$ ;
- 对每个映射

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

都有诱导同态

$$f_*: H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$$

通常记

$$H_n(X) := H_n(X, \emptyset)$$

此外, 对每个空间对  $(X, A)$ , 还给定一个边缘同态

$$\partial: H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) = H_{n-1}(A, \emptyset)$$

这些函子和边缘同态需要满足下面的公理.

**注记 2.21.1** 不同教材对 Eilenberg–Steenrod 公理的编号方式略有不同. 有的教材把函子性和边缘同态的自然性包含在同调理论的定义中, 有的则把它们单独列为公理; 有的教材还会单独列出加法公理.

**1. 函子性与自然性** 诱导映射满足函子性:

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X, A)}, \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

边缘同态还应当关于映射自然. 若

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B),$$

则下图交换:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ f_* \downarrow & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B). \end{array}$$

也就是说,

$$(f|_A)_* \circ \partial = \partial \circ f_*.$$

这表示先取边界再施加映射, 与先施加映射再取边界, 所得结果相同.

## 2. 同伦公理

**公理 2.21.2 (同伦公理)** 若两个空间对之间的映射

$$f, g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

彼此同伦，则它们诱导相同的同态：

$$f_* = g_*: H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B).$$

## 3. 正合性公理

**公理 2.21.3 (正合性公理)** 对任意空间对  $(X, A)$ ，包含映射

$$i: A \hookrightarrow X$$

以及空间对的典范映射

$$j: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

诱导一个长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

## 4. 切除公理

**公理 2.21.4 (切除公理)** 设

$$U \subseteq A \subseteq X,$$

并且满足

$$\overline{U} \subseteq \text{int}(A).$$

则包含映射

$$(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$$

诱导同构

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

**注记 2.21.5** 切除公理说明，如果从  $X$  和  $A$  中同时删掉一块完全位于  $A$  内部的区域，那么相对同调不会发生改变。由于在相对同调  $H_n(X, A)$  中， $A$  中的链原本就被视为零，因而删去  $A$  内部的一小块不应改变相对同调。

切除公理体现了同调理论的局部性。它也是推出 Mayer-Vietoris 长正合序列的关键工具。当一个空间可以写成

$$X = U \cup V$$

时, Mayer-Vietoris 序列将  $X$  的同调与  $U$ 、 $V$  和  $U \cap V$  的同调联系起来, 从而允许我们把复杂空间切分成较简单的部分进行计算.

## 5. 维数公理

**公理 2.21.6 (维数公理)** 设  $\text{pt}$  是单点空间,  $G$  是给定的系数群, 则

$$H_n(\text{pt}) = \begin{cases} G, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

对于整数系数同调, 取  $G = \mathbb{Z}$ , 于是

$$H_0(\text{pt}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_n(\text{pt}; \mathbb{Z}) = 0 \quad (n \neq 0).$$

## 6. 加法公理

**公理 2.21.7 (加法公理)** 若空间  $X$  是一族空间的不交并

$$X = \coprod_{\alpha \in I} X_\alpha,$$

则各个包含映射  $X_\alpha \hookrightarrow X$  诱导自然同构

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} H_n(X).$$

**注记 2.21.8** 加法公理说明, 互不相交的空间分支之间不会相互产生同调关系, 整个空间的同调就是各个分支同调的直和.

**各公理的直观意义** Eilenberg-Steenrod 公理可以概括如下:

| 公理    | 基本含义                           |
|-------|--------------------------------|
| 函子性   | 连续映射能够自然地作用在同调群上               |
| 同伦公理  | 同调群只依赖于空间的同伦型                  |
| 正合性公理 | $A$ 、 $X$ 与 $(X, A)$ 的同调信息彼此联系 |
| 切除公理  | 相对同调具有局部性, 可以删去无关区域            |
| 维数公理  | 规定同调理论在单点空间上的归一化取值             |
| 加法公理  | 不交并的同调是各部分同调的直和                |

其中, 正合性公理和切除公理尤其重要:

- 正合性公理告诉我们不同同调群之间如何相互联系；
- 切除公理允许我们将空间切分成较简单的部分进行局部计算.

**命题 2.21.9**  $B \subset A \subset X$  为拓扑空间, 则自然有

$$i: (A, B) \rightarrow (X, B), \quad j: (X, B) \rightarrow (X, A)$$

则有自然的长正合列

$$H_q(A, B) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, B)$$

其中边缘映射由

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\partial_q(X, A, B)} & H_{q-1}(A, B) & & (A, B) \\ & \searrow \partial_q(X, A) & \nearrow H_{q-1}(k) & \longleftarrow & \uparrow k \\ & & H_{q-1}(A) & & (A, \emptyset) \end{array}$$

给出.

**定义 2.21.10 (紧支撑公理)** 称同调理论  $H$  满足**紧支撑公理**, 如果对任意空间对  $(X, A)$ 、任意  $q \in \mathbb{Z}$  以及任意

$$z \in H_q(X, A),$$

都存在一个紧子空间对

$$(X', A') \subseteq (X, A)$$

和一个同调类

$$z' \in H_q(X', A'),$$

使得包含映射

$$i: (X', A') \hookrightarrow (X, A)$$

所诱导的同态满足

$$i_*(z') = z.$$

这里所谓  $(X', A')$  是一个紧子空间对, 是指

$$X' \subseteq X, \quad A' \subseteq A, \quad A' \subseteq X',$$

并且  $X'$  与  $A'$  都是紧空间.

记

$$\mathcal{K}(X, A) := \{(X', A') \subseteq (X, A) \mid (X', A') \text{ 是紧子空间对}\}.$$

在  $\mathcal{K}(X, A)$  上按照包含关系排序:

$$(X_1, A_1) \leq (X_2, A_2) \iff X_1 \subseteq X_2, \quad A_1 \subseteq A_2.$$

这个偏序集是有向的. 事实上, 给定两个紧子空间对  $(X_1, A_1)$  和  $(X_2, A_2)$ , 则

$$(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

仍然是  $(X, A)$  的紧子空间对, 并且同时包含二者. 若

$$(X_1, A_1) \subseteq (X_2, A_2),$$

则包含映射诱导同态

$$H_q(X_1, A_1) \longrightarrow H_q(X_2, A_2).$$

因此, 群族

$$\{H_q(X', A')\}_{(X', A') \in \mathcal{K}(X, A)}$$

构成一个有向系统, 可以取其直极限

$$\varinjlim_{(X', A') \in \mathcal{K}(X, A)} H_q(X', A').$$

对每个紧子空间对  $(X', A') \subseteq (X, A)$ , 包含映射给出

$$H_q(X', A') \longrightarrow H_q(X, A).$$

这些同态彼此相容, 因此由直极限的泛性质得到典范同态

$$\Phi_q(X, A): \varinjlim_{(X', A') \in \mathcal{K}(X, A)} H_q(X', A') \longrightarrow H_q(X, A).$$

### 命题 2.21.11 同调理论

$$H = ((H_q), (\partial_q))$$

满足紧支撑公理, 当且仅当对任意空间对  $(X, A)$  和任意  $q \in \mathbb{Z}$ , 典范同态

$$\Phi_q(X, A): \varinjlim_{\substack{(X', A') \subseteq (X, A) \\ (X', A') \text{ compact}}} H_q(X', A') \longrightarrow H_q(X, A)$$

是同构. 因此自然地有

$$H_q(X, A) \cong \varinjlim_{\substack{(X', A') \subseteq (X, A) \\ (X', A') \text{ compact}}} H_q(X', A').$$

**注记 2.21.12** 这个命题说明, 对于满足紧支撑公理的同调理论, 任意空间对的同调群都可以由其所有紧子空间对的同调群完全恢复:

$$H_q(X, A) \cong \varinjlim_{\substack{(X', A') \subseteq (X, A) \\ (X', A') \text{ compact}}} H_q(X', A').$$

因而研究一般的、可能非紧的空间对时, 可以先研究其中的紧子空间对, 再通过直极限将这些局部结果拼接起来.

## 2.22 胞腔同调

**定理 2.22.1**  $H = (H_q, \partial_q)$  为一个同调理论, 满足紧支撑公理, 令  $(X, A)$  为拓扑空间对,  $\{X_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$  为  $X$  的一族子空间, 满足

- (1)  $X_s = A, s < 0$ .
- (2)  $X_s \subset X_{s+1}, s \in \mathbb{Z}$ .
- (3) 对任意的紧子集  $C \subset X$ , 都存在  $s \in \mathbb{Z}$  使得  $C \subset X_s$ .
- (4) 若  $q \neq s$ , 则  $H_q(X_s, X_{s-1}) = 0$ .

对任意的  $q \in \mathbb{Z}$ , 定义

$$C_q := H_q(X_q, X_{q-1})$$

$$\partial_q := \partial_q(X_q, X_{q-1}, X_{q-2}): H_q(X_q, X_{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2})$$

则有自然的同构

$$H_q(C_\bullet) \cong H_q(X, A)$$

**证明** (1) 我们断言

$$H_q(X_s, A) \cong \begin{cases} H_q(X, A), & s > q \\ 0, & s < q \end{cases}$$

考虑长正合列

$$H_{q+1}(X_{s+1}, X_s) \rightarrow H_q(X_s, A) \rightarrow H_q(X_{s+1}, A) \rightarrow H_q(X_{s+1}, X_s)$$

若  $s > q$  或者  $s < q - 1$ , 则左右端都是 0, 于是可见

$$H_q(X_s, A) \cong H_q(X_{s+1}, A)$$

注意到  $H_q(X_{-1}, A) = \{0\}$ , 从而归纳下去可见

$$H_q(X_s, A) = \{0\}, \forall s < q$$

另外一方面  $q$  可以一直变大, 所以当  $s > q$ , 由紧支撑可见

$$H_q(X_s, A) \cong H_q(X_{s+1}, A) \cong \cdots \implies H_q(X_s, A) \cong \varinjlim_{s \in \infty} H_q(X_s, A) = H_q(X, A)$$

(2) 考虑正合列

$$C_{q+1} = H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) \rightarrow H_q(X_q, A) \rightarrow H_q(X_{q+1}, A) \rightarrow H_q(X_{q+1}, X_q) = 0$$

于是可见

$$H_q(X_q, A) \rightarrow H_q(X_{q+1}, A)$$

是满射, 考虑

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_q(X_{q-1}, A) = 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ C_{q+1} = H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) & \xrightarrow[\partial_{q+1}]{\gamma} & H_q(X_q, A) & \longrightarrow & H_q(X_{q+1}, A) \cong H_q(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \downarrow \alpha & & & & \\ & & C_q = H_q(X_q, X_{q-1}) & \xrightarrow[\partial_q]{} & & & \\ & & \downarrow \beta & & & & \\ H_{q-1}(X_{q-2}, A) = 0 & \longrightarrow & H_{q-1}(X_{q-1}, A) & \hookrightarrow & C_{q-1} = H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}) & & \end{array}$$

然后注意到

$$\begin{aligned} H_q(C_\bullet) &= \frac{\text{Ker } \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}} = \frac{\text{Ker } \beta}{\alpha(\text{Im } \gamma)} \\ &= \frac{\alpha(H_q(X_q, A))}{\alpha(\text{Im } \gamma)} \cong \frac{H_q(X_q, A)}{\text{Im } \gamma} = H_q(X_{q+1}, A) \cong H_q(X, A) \end{aligned} \quad \square$$

### 相对 CW 复形

**定义 2.22.2** 令  $Y$  为拓扑空间,  $Z \subset Y$  为闭集,  $n \in \mathbb{N}$ , 我们称  $Y$  is obtained from  $Z$  by adjoining  $n$ -cells  $\{e_j^n\}_{j \in J_n}$ , 如果

- (1)  $\forall j \in J_n, e_j^n \subset Y$ .
- (2)  $\dot{e}_j^n := e_j^n \cap Z$ , 并且  $Y$  是  $\{e_j^n - \dot{e}_j^n : j \in J_n\}$  与  $Z$  的无交并.
- (3)  $Y$  的拓扑与  $\{e_j^n\}_{j \in J_n} \cup \{Z\}$  在  $Y$  上诱导的弱拓扑一致.
- (4) 对任意的  $j \in J$ , 存在连续映射  $\varphi_j: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_j^n, \dot{e}_j^n)$ , 称为  $e_j^n$  的**特征映射**, 使得

$$\varphi_j(B^n) = e_j^n$$

并且把  $B^n - S^{n-1}$  同胚地映射为  $e_j^n - \dot{e}_j^n$ , 并且  $e_j^n$  的拓扑与

$$\varphi_j: B^n \rightarrow e_j^n, \quad \dot{e}_j^n \rightarrow e_j^n$$

诱导的弱拓扑一致.

对  $\forall j \in J_n$ , 令

$$f_j = \varphi_j|_{S^{n-1}}$$

则上面定义本质在说

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod f_j} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{j \in J_n} B^n & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

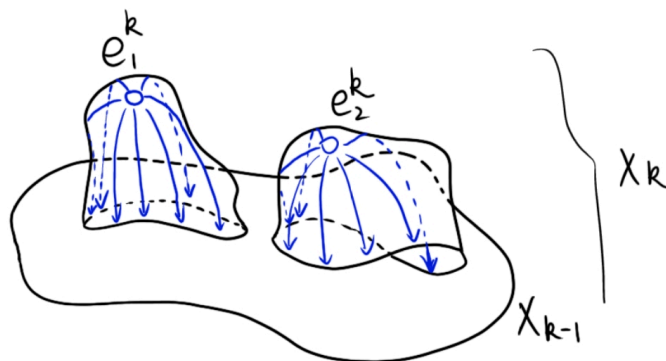
换句话说

$$Y \cong \left( Z \coprod_{j \in J_n} B_j^n \right) / \sim, \quad x \sim f_j(x), \forall x \in S_j^{n-1}$$

**定义 2.22.3 (相对 CW 复形)** **相对 CW 复形**  $(X, A)$  由以下数据组成:

- (1) 拓扑空间  $X$  与闭子空间  $A$ .
- (2) 存在一系列闭子空间  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , 使得
  - (a)  $k < 0$  时  $X_k = A$ .
  - (b)  $k \geq 0$  时,  $X_k$  是由  $X_{k-1}$  加入  $k$ -cells  $\{e_j^k\}_{j \in J_k}$  得到的.
  - (c)  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X_k$ , 并且  $X$  的拓扑与  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  诱导的弱拓扑一致.

考虑一个相对 CW 复形  $(X, A)$ , 下面假设  $k \in \mathbb{N}^*$ , 我们知道  $X_{k-1}$  是  $X_k$  中一个开邻域的强形变收缩核, 只需要对每个  $e_j^k - e_j^k$  中挖去一个小洞, 然后收缩到边界上即可, 如图



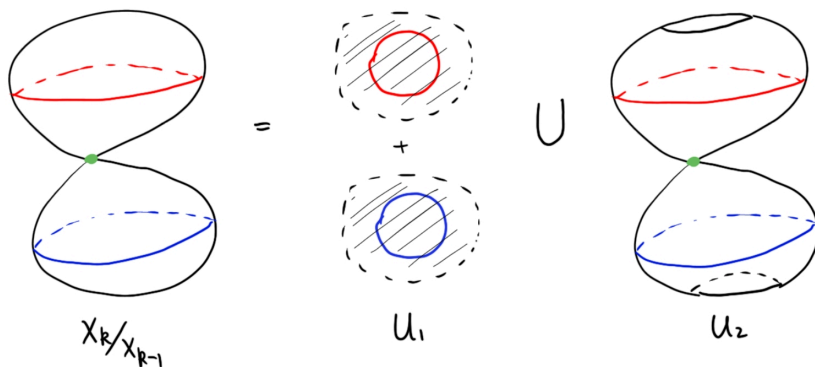
于是定理 2.13.5 告诉我们

$$H_k(X_k, X_{k-1}) \cong H_k(X_k/X_{k-1}, X_{k-1}/X_{k-1})$$

注意到与一个点的相对同调就是绝对情况下的约化同调, 故

$$H_k(X_k, X_{k-1}) \cong \tilde{H}_k(X_k/X_{k-1})$$

而注意到  $X_k/X_{k-1}$  就是把所有的  $k$ -cells 都通过一个点粘起来, 也就是  $\#J_k$  个  $S^k$  的楔和. 利用 M-V 序列我们可以计算出这个同调, 考虑下图开覆盖



由于  $U_1 \cap U_2$  就是两个  $S^{k-1}$  的并, 所以可见

$$\tilde{H}_k(U_1) \oplus \tilde{H}_k(U_2) \rightarrow \tilde{H}_k(X_k/X_{k-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^{k-1} \amalg S^{k-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(U_1) \oplus \tilde{H}_{k-1}(U_2)$$

注意到  $U_1 \simeq B^k \amalg B^k$ ,  $U_2$  可缩, 于是

$$\tilde{H}_k(U_1) = \tilde{H}_k(B^k) \oplus \tilde{H}_k(B^k) = 0$$

同理可见 ( $k \geq 2$ )

$$\tilde{H}_{k-1}(U_1) = 0$$

并且

$$\tilde{H}_k(U_2) = \tilde{H}_{k-1}(U_2) = 0$$

所以可见

$$\tilde{H}_k(X_k/X_{k-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{k-1} \amalg S^{k-1}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$$

同理  $\#J_k$  有限的情况都得到, 无限的情况取余极限即可, 最终可以得到

$$\tilde{H}_k(X_k/X_{k-1}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus \#J_k}$$

而  $k = 1$  的情况单独处理, 上面结论仍然成立.

现在我们考虑

$$\varphi_j^k: (B_j^k, S_j^{k-1}) \rightarrow (X_k, X_{k-1})$$

诱导了同调群上的映射

$$\varphi_{j*}^k: H_k(B_j^k, S_j^{k-1}) \rightarrow H_k(X_k, X_{k-1})$$

从而得到

$$\bigoplus_{j \in J_k} (\varphi_j^k)_*: \bigoplus_{j \in J_k} H_k(B_j^k, S_j^{k-1}) \rightarrow H_k(X_k, X_{k-1})$$

上面之前的讨论告诉我们这是一个同构, 而注意到

$$\bigoplus_{j \in J_k} H_k(B_j^k, S_j^{k-1}) \cong C_k(X, A) := \mathbb{Z}^{\oplus \{e_j^k: j \in J_k\}}$$

我们想知道  $C_k(X, A) \rightarrow C_{k-1}(X, A)$  的边缘映射具体是怎么样的, 还是要考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} C_k(X, A) = \mathbb{Z}^{\oplus \{e_j^k: j \in J_k\}} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & C_{k-1}(X, A) = \mathbb{Z}^{\oplus \{e_j^{k-1}: j \in J_{k-1}\}} & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \bigoplus_{j \in J_k} H_k(B_j^k, S_j^{k-1}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{j \in J_k} H_{k-1}(S_j^{k-1}) & & \bigoplus_{j \in J_{k-1}} H_{k-1}(B_j^{k-1}, S_j^{k-2}) \\ \downarrow \oplus (\varphi_j^k)_* & & \downarrow (\varphi_j^k|_{S_j^{k-1}})_* & & \cong \downarrow \uparrow \\ H_k(X_k, X_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(X_{k-1}) & \xrightarrow{\iota_*} & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) \end{array}$$

后面我摆了，有点难写，暂时略过.