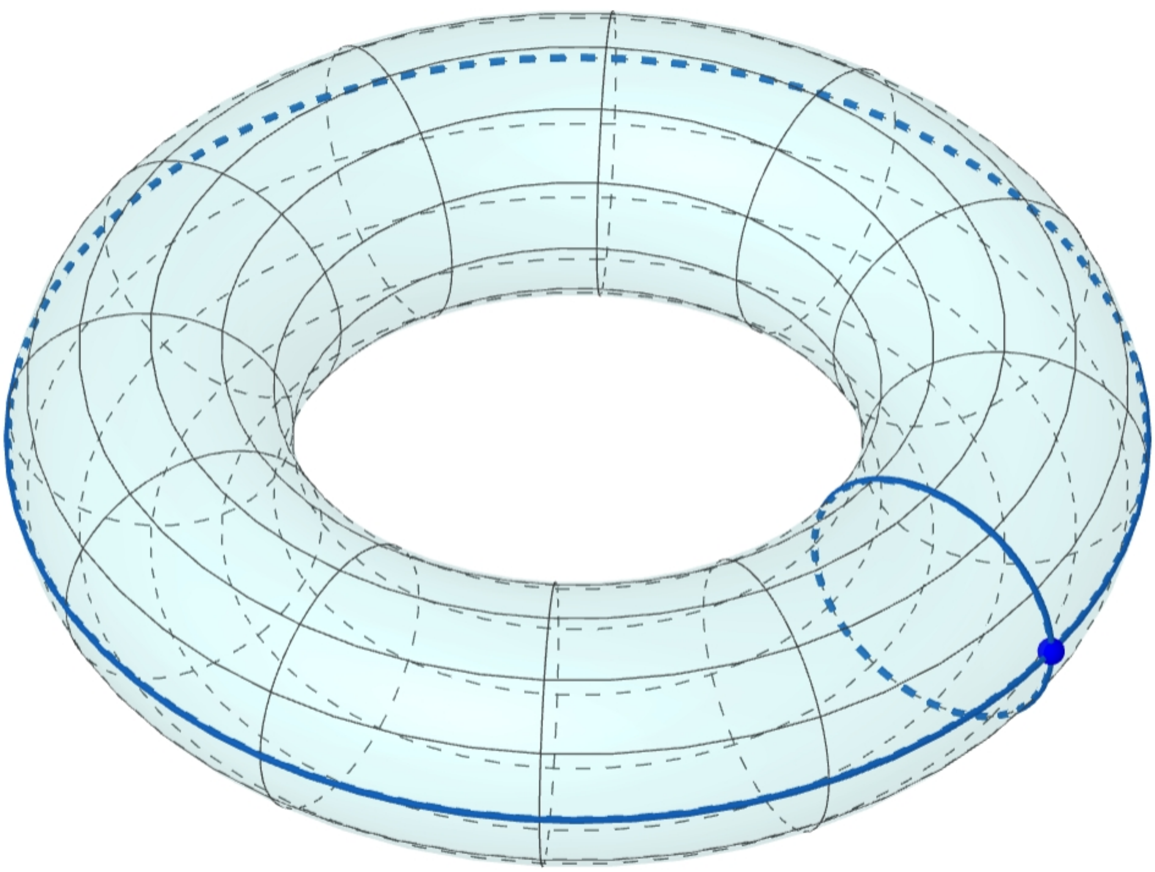
代数拓扑碎碎念

Muke

April 6, 2026



南開大學
Nankai University

Contents

1 对拓扑空间的操作

首先我们来考虑乘积空间上的一些运算：对于内部和闭包来说

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

对于乘积空间中的边界，我们有莱布尼茨律：

$$\partial(A \times B) = \overline{A} \times \partial B \cup \partial A \times \overline{B}$$

在商空间上，我们需要知道的就是商空间上诱导的同伦：考虑 $\sim$ 与 $\approx$ 分别是 X 与 Y 上的等价关系，则如果 $H\colon I \times X \to Y$ 是一个同伦，满足：

$$x \sim x' \Rightarrow H(t,x) \approx H(t,x'), \forall t \in I$$

则存在 $\overline{H}\colon I \times X/{\sim}\colon Y/{\approx}$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
I \times X \arrow[r, "H"] \arrow[d, "1\times q_X"'] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\
I \times X/{\sim} \arrow[r, "\overline{H}"'] & Y/{\approx}
\end{tikzcd}$$

我们可以很容易把这个 $\overline{H}$ 构造出来，即

$$\overline{H}(t,[x]) = [H(t,x)]$$

剩下简单验证连续性即可.

我们现在需要了解一些新的空间种类，我们先引入一个**空间偶范畴 Top^2**，其对象为一对拓扑空间 (X,A)，其中 $A \subset X$，对象之间的态射为 $f\colon (X,A) \to (Y,B)$，其中 $f\colon X \to Y$ 是连续映射并且 $f(A) \subset B$. 容易验证 **Top**^{2} 构成一个范畴.

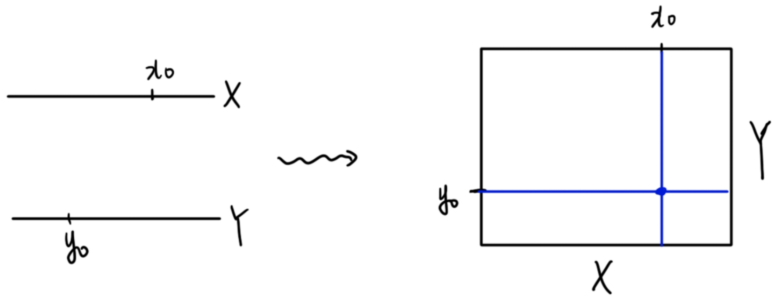
一个特殊情况是**带基点的空间pointed space**，即 (X,A) 中的 A 为单点集，此时 $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ 要求 $f(x_0) = y_0$. 于是所有带基点空间即其态射构成了**带基点空间范畴 Top$_*$**，带基点空间范畴中的态射也称之为**保基点映射(basepoint preserving maps)**.

我们定义带基点空间的乘积空间为：

$$(X,x_0) \times (Y,y_0) = (X \times Y, (x_0,y_0))$$

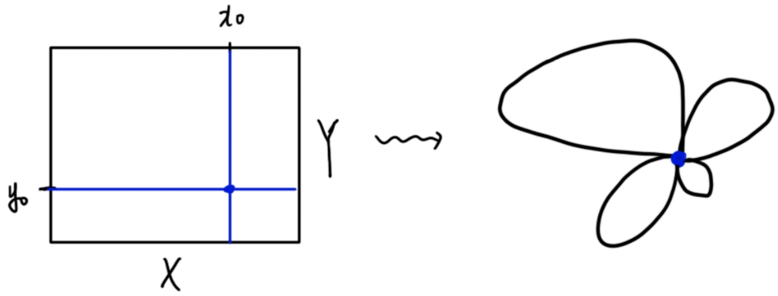
我们可以定义带基点空间的**楔和(wedge sum)**，也即单点并空间

$$(X,x_0) \vee (Y,y_0) = (X \vee Y, *) := \left(X \coprod Y/(x_0 \sim y_0), * = [x_0] = [y_0]\right) \cong (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y, (x_0,y_0))$$



还可以定义带基点空间**楔积(压缩积)(smash product)**为：

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = (X \wedge Y, *) = (X \times Y / X \vee Y, * = [X \vee Y])$$

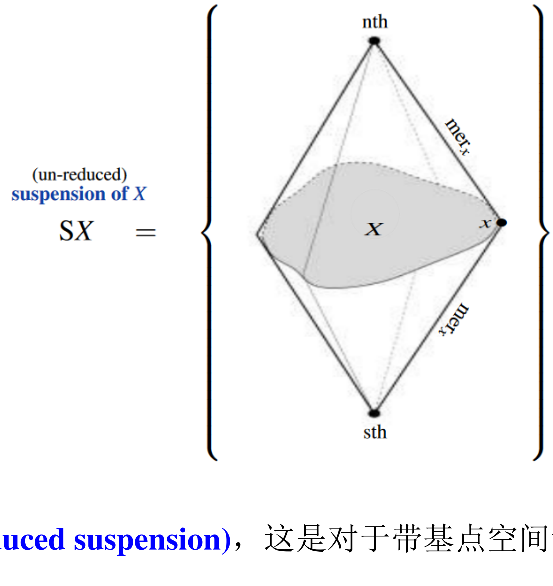


将 $S^1 \vee S^1$，$S^1 \times S^1$ 和 $S^1 \wedge S^1$ 嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中就分别得到了：

前两个都很好理解，最后一个我们放到 CW 复形的时候详细说.

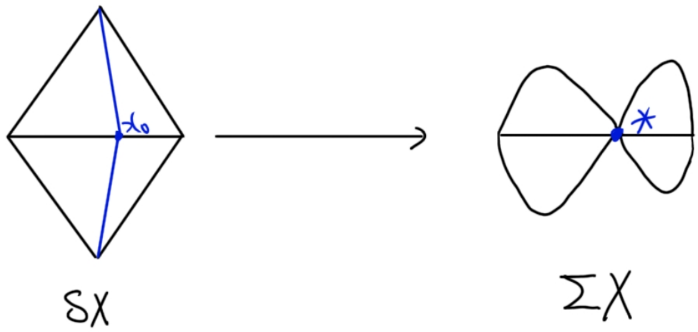
我们下面定义**悬挂(双角锥)(suspension)**: 给定一个拓扑空间 X，我们定义 X 的悬挂 SX 为

$$SX = X \times I/\sim, \quad (x, 1) \sim (x', 1) \ \ \& \ \ (x, 0) \sim (x', 0)$$



我们还可以定义**约化悬挂(reduced suspension)**，这是对于带基点空间讨论的，对 (X, x_0)，定义

$$\Sigma X = SX / \{x_0\} \times I$$



其基点就取 $\{x_0\}\times I$ 坍缩成的那个点，我们可以观察到

$$\Sigma X = X \wedge S^1$$

这是因为 $S^1 = I/(0\sim 1)$，所以我们知道

$$X\wedge S^1 = X\times I/((X\times\{0,1\})\cup\{x_0\}\times I) = \Sigma X$$

下面定义**锥(cone)**，给定一个拓扑空间 X，定义

$$CX = X\times I/X\times\{0\}$$

于是我们自然会有

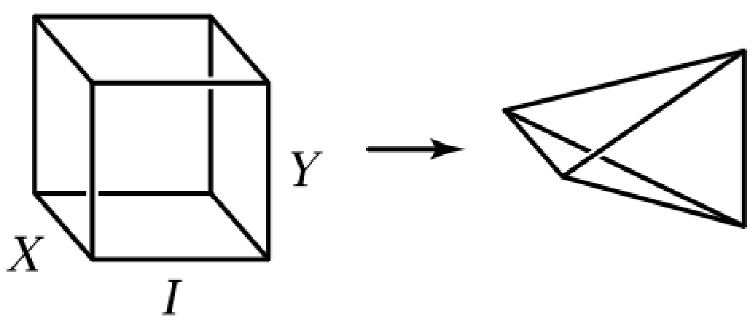
$$SX = CX/X\times\{1\}$$

实际上，悬挂在代数拓扑中是相对重要的，悬挂可以看成是一个函子 S，对态射的作用由下图得到：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X\times I \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "f\times 1"] & SX = X\times I/\sim \arrow[d, "Sf=\widetilde{f\times 1}"] \\
Y \arrow[r] & Y\times I \arrow[r, "q_Y"] & SY = Y\times I/\sim
\end{tikzcd}$$

最后我们可以定义两个空间的**连接(join)**，给定 X,Y，我们定义

$$X*Y = X\times I\times Y/\sim,\quad (x,y,0)\sim(x,y',0)\ \ \&\ \ (x,y,1)=(x',y,1)$$



2 CW复形

CW 复形的名字来自其构造，其中 C 代表 Closure-finite，即闭包有限型，W 代表 Weak topology，即赋予弱拓扑. 但实际上这里的弱拓扑与我们常说的弱拓扑并不是同一种东西，由于一些历史因素导致命名冲突，在后面讲到 CW 复形的拓扑的时候我们再谈.

定义 2.1: CW复形

一个 ***CW 复形***是一个如下构造的空间 X:

(1) 从一个离散空间 X^0 出发，其中的点称为 X 的 ***0-胞腔(0-cell)***.

(2) 归纳地从 X^{n-1} 构造 X^n，我们将 ***n-胞腔(n-cells)*** e^n_α 通过映射 $\varphi_\alpha\colon S^{n-1}\to X^{n-1}$ 粘到 X^{n-1} 上以得到 X^n. 换句话说，$X^n = X^{n-1}\coprod_\alpha D^n_\alpha/(x\sim\varphi_\alpha(x),\forall x\in\partial D^n_\alpha)$. 作为一个集合，$X^n = X^{n-1}\coprod_\alpha e^n_\alpha$，其中 n-胞腔 e^n_α 是 n 维开圆盘.

(3) 这个过程可以在有限步内停止或者可数无穷地进行下去. 如果在有限步内停止，比如说 n 步，我们就令 $X=X^n$; 如果是无穷步，我们令 $X=\bigcup_n X^n$. 在后一种情况中，我们赋予 X ***弱拓扑(weak topology)***：集合 $A\subset X$ 是开集(或闭集)当且仅当 $A\cap X^n$ 是 X^n 中的开集(或闭集)，对于所有 n 成立.

如此构造的 X 有时也称之为 ***胞腔复形(cell complex)***.

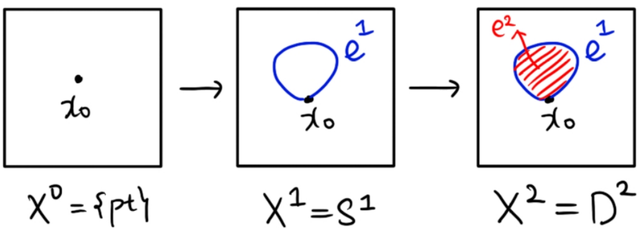
Remark 2.1

上面提到的弱拓扑实际上是历史原因，我们可以将其理解为终拓扑，即由映射族

$$\{i_n\colon X^n\hookrightarrow X\}_{n\in\mathbb{N}}$$

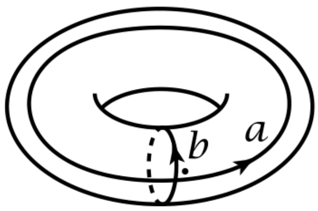
所决定的终拓扑，即 $A\subset X$ 是开集当且仅当对所有的 n，$i_n^{-1}(A)=A\cap X^n$ 在 X^n 中是开集. 此乃使得所有嵌入 i_n 连续的 X 上的最精细的拓扑，某种意义上认为是最强的拓扑. 所以弱拓扑这个名字的描述是不准确的，但是历史上我们如此称呼它，遂延续下来.

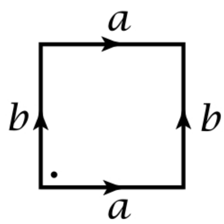
一个 naive 的 CW 复形的例子是取 $n=2$：



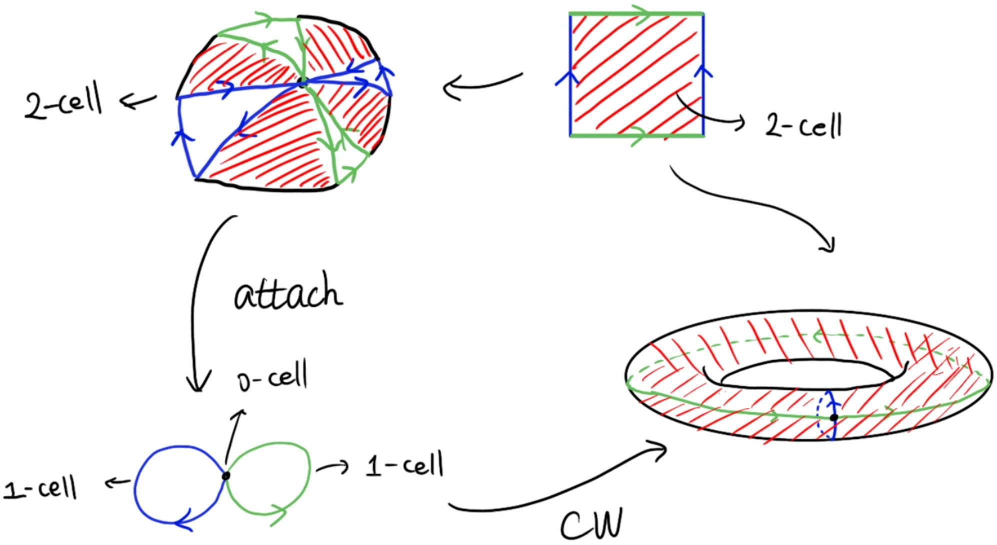
基本的想法是：拓扑空间太复杂，那我们就取一些标准件来描述它，把标准件研究清楚就可以把复杂的拓扑空间刻画明白. 我们下面来讨论一个重要的例子，即如何把二维环面看成是 CW 复形.

首先，一个环面可以由一个矩形对边粘起来得到：

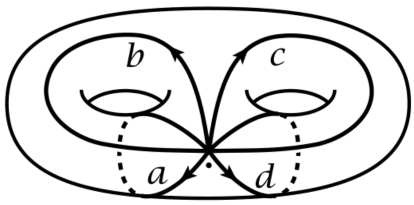


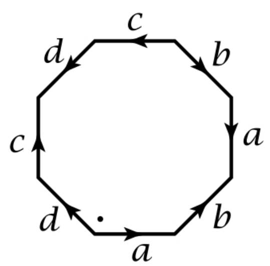


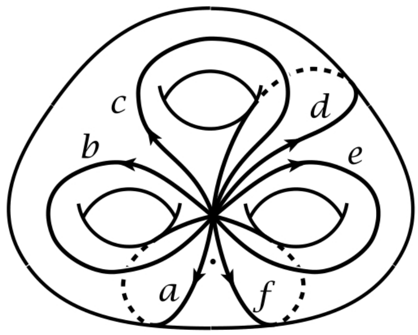
我们从这个角度出发，构造 X^0 为单点集，X^1 为 $S^1 \vee S^1$，然后如图粘上一个圆盘就得到环面：

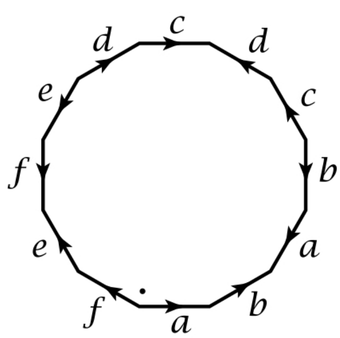


然后就可以照葫芦画瓢去画这些：









CW 复形 X 的每一个胞腔 e^n_α 会有一个**特征映射(characteristic map)** $\Phi_\alpha\colon D^n_\alpha \to X$，使得 Φ_α 作为 φ_α 的延拓，并且是从 $(D^n_\alpha)^\circ$ 到 e^α_n 的同胚. 实际上我们可以显式地把 Φ_α 描述为下面的复合映射：

$$D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha \twoheadrightarrow X^n \hookrightarrow X$$

一个 CW 复形 X 的**子复形**是指一个闭子空间 $A \subset X$，使得 A 是一堆胞腔的并. 由于 A 是闭的，所以每一个 A 中胞腔的特征映射的像都在 A 中，特别地粘贴映射 φ_α 的像也在 A 中，所以 A 自己就成为一个 CW 复形. 一个对 (X, A)，满足 X 是 CW 复形，A 是 X 的子复形，称为**CW 对(CW pair)**.

我们可以定义 CW 复形之间的**乘积**：给定 CW 复形 X, Y，则 $X \times Y$ 拥有 CW 复形的结构，其胞腔为 $e_\alpha^m \times e_\beta^m$，其中 e_α^n 取遍 X 的胞腔，e_β^n 取遍 Y 的胞腔. 比如 $S^1 \times S^1$ 的胞腔结构就可以理解为

$$(e^0, e_1^1) \times (e^0, e_2^1) = (e^0, e^0 \times e_2^1 + e_1^1 \times e^0, e^2)$$

这是非正式的写法，但是你可以想象出来这个就是 $S^1 \vee S^1$ 再粘上一个圆盘，得到的就是环面.

对于一般的 CW 复形 X, Y，它们作为 CW 复形的拓扑有时会比乘积拓扑要更细，但当 X, Y 都是有限的 CW 复形的时候是一样的.

我们定义 CW 复形的**商(quotients)**，如果 (X, A) 是一个 CW 对，则商空间 X/A 自然地继承了 X 的胞腔结构：X/A 的胞腔就是 X 中所有不被 A 包含的胞腔添加上一个新的 0-胞腔(即 A 在 X/A 中的像). 对于一个 $X - A$ 的胞腔 e_α^n，其在 X 中的粘贴映射为 $\varphi_\alpha \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$，则对应在 X/A 中的粘贴映射为

$$S^{n-1} \to X^{n-1} \twoheadrightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$$

最后我们可以看一下压缩积在 CW 复形中是如何表现的. 如果 X, Y 都是 CW复形，x_0, y_0 都是 0-胞腔，我们给 $X \times Y$ 赋予胞腔乘积拓扑，现在我们知道

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

其中 $X \vee Y$ 视为 $X \times Y$ 的子复形.

一个经典的例子就是球面的压缩积仍然为球面：我们先看如何通过 CW 复形构造 S^n，显然是一个非常自然的过程，由于 $S^n \cong D^n/\partial D^n$，所以我们只需要两个胞腔，一个零位胞腔 e^0 和一个 n 维胞腔 e^n，其中

$$\{\mathrm{pt}\} = X^0 = X^1 = \cdots = X^{n-1} \subset X^n = S^n$$

其中 e^n 的粘贴映射为：$\varphi \colon S^{n-1} \to \{\mathrm{pt}\}$ 为常值映射，于是

$$X^n = D^n \coprod \{\mathrm{pt}\}/(\partial D^n \cup \{\mathrm{pt}\}) = D^n/\partial D^n = S^n$$

于是我们知道 $S^m \wedge S^n$ 的胞腔结构为

$$S^m \times S^n / S^m \vee S^n$$

的胞腔结构，$S^m \times S^n$ 有一个 0-胞腔，一个 m-胞腔，一个 n-胞腔和一个 $m+n$-胞腔，$S^m \vee S^n$ 有一个 0-胞腔，一个 m-胞腔和一个 n-胞腔，所以 $S^m \wedge S^n$ 有一个 0-胞腔和一个 $m+n$-胞腔，即 S^{m+n}，所以我们得到

$$S^m \wedge S^n = S^{m+n}$$

我们知道一个有限的 CW 复形很明显是紧的，那么问题来了，一个 CW 复形的紧子空间是不是包含在一个有限子复形里面呢？

定理 2.1

一个 CW 复形的紧子空间被包含在一个有限子复形里面.

证明：我们首先证明 CW 复形 X 中的紧集 C 最多只与 X 的有限个胞腔相交. 反设存在一个无穷点列 $x_i \in C$，其中的点位于不同的胞腔中. 那么集合 $S = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 在 X 中是闭集.

具体来说，对维数 n 进行归纳，假设 $S \cap X^{n-1}$ 在 X^{n-1} 中是闭集，那么对于 X 的每个胞腔 e_α^n，$\varphi_\alpha^{-1}(S)$ 在 ∂D_α^n 中是闭集，并且 $\Phi_\alpha^{-1}(S)$ 在 D_α^n 中至多增加一个点，所以 $\Phi_\alpha^{-1}(S)$ 在 D_α^n 中是闭集. 因此对每个 n，$S \cap X^n$ 在 X^n 中是闭集，从而 S 在 X 中是闭集.

相同的论证表明 S 的任意子集都是闭集，所以 S 具有离散拓扑. 但 S 是紧集 C 的闭子集，因此它也是紧的. 所以 S 必须是有限集，这便产生矛盾.

由于 C 包含于有限个胞腔的并集，我们只需证明有限个胞腔的并集包含于 X 的一个有限子复形中. 有限个有限子复形的并集仍然是有限子复形，所以问题归结为证明单个胞腔 e_α^n 包含于一个有限子复形中.

对于 e_α^n，其粘贴映射 φ_α 的像是紧的，因此根据对维数的归纳，该像包含于一个有限子复形 $A \subset X^{n-1}$ 中. 所以 e_α^n 包含于有限子复形 $A \cup e_\alpha^n$ 中. □ □

现在我们彻底明白了 CW 复形中的 C 到底是什么含义了：每个胞腔的闭包只与有限多个其他胞腔相交，这是前面命题的推论，因为一个胞腔的闭包是紧的，即为一个特征映射的像.

下面我们不加证明地引入一些关于 CW 复形的性质，更详细的内容可以在 [1] 中找到.

定理 2.2

给定一个 Hausdorff 空间 X 和一族映射 $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \to X$，则这些映射为 X 上的一个 CW 结构的特征映射当且仅当：

(1) 每个 Φ_α 限制在 $\operatorname{int} D_\alpha^n$ 上是一个同胚，其像为 X 中的一个胞腔 $e_\alpha^n \subset X$，这些胞腔两两不交且它们的并集为 X.

(2) 对每个胞腔 e_α^n，$\Phi_\alpha(\partial D_\alpha^n)$ 包含在有限个维度小于 n 的胞腔的并集中.

(3) X 的一个子集是闭集当且仅当它与 X 中每个胞腔的闭包的交集为闭集。

定理 2.3

CW 复形是 T4 的. 特别地是 Hausdorff 的.

3 映射同伦与空间伦型

所谓映射同伦就是在映射空间的连续变化，给定 $f, g\colon X \to Y$，称 f 与 g 是**同伦(homotopic)**，或者为了与后面提到的相对同伦作比较，我们也有时称之为**自由同伦(freely homotopic)**，是指存在一个连续函数 $H\colon X \times I \to Y$，使得

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x)$$

记为 $H\colon f \simeq h$ 或者 $f \simeq_H g$，其中 H 为从 f 到 g 的一个**同伦(homotopy)**. 在不强调具体的同伦的时候，记为 $f \simeq g$.

定义 3.1: Congruence

*范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个**同余(congruence)**是指 $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ 上的一个等价关系：*

(1) $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，则 $f \sim f' \implies f' \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

(2) $f \sim f'$，$g \sim g'$，则如果 $g \circ f$ 存在，有 $g \circ f \sim g' \circ f'$.

4　基本群

5 van Kampen 定理及其应用

6 覆叠空间

定义 6.1: 覆叠空间

设 E 和 B 都是道路连通且局部道路连通的拓扑空间，有 $\rho\colon E \to B$ 连通. 若 $\forall b \in B$，存在开邻域 U 使得 $\rho^{-1}(U)$ 是 E 上一组互不相交的开集 $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 的并集，并且 ρ 把每个 V_λ 同胚地映到 U，则称 ρ 是一个**覆叠映射**，称 (E, ρ) 是 B 上的一个**覆叠空间**，称 B 为该覆叠空间的**底空间**，称具有上述性质的开集 U 为该覆叠空间的一个**基本邻域**.

从定义我们可以立刻得到如下性质：

(1) $\forall b \in B$，**纤维** $\rho^{-1}(b)$ 是 E 中的离散子空间.

(2) ρ 是局部同胚.

(3) ρ 是满射，且是开映射，从而 $\rho\colon E \to B$ 是商映射，B 具有商拓扑.

由于底空间 B 是局部道路连通的，所以任意点都存在道路连通的基本邻域 U，此时 V_λ 就是 $\rho^{-1}(U)$ 的道路连通分支，简称 V_λ 为 $\rho^{-1}(U)$ 的**分支**. 在下面的讨论中，我们总是假设所取的基本邻域都是道路连通的.

定义 6.2: 提升

设 $\rho\colon E \to B$ 为覆叠映射，$f\colon X \to B$ 连续，若存在 $\widetilde{f}\colon X \to E$ 使得 $\rho \circ \widetilde{f} = f$，则称 $\widetilde{f}$ 为 f 的一个**提升**.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

定理 6.1: 提升唯一性定理

设 $\rho\colon E \to B$ 为覆叠映射，X 为连通空间，$f\colon X \to B$ 为连续映射. 若 $\widetilde{f_1}$ 与 $\widetilde{f_2}$ 都是 f 的提升，且存在 $x_0 \in X$ 使得 $\widetilde{f_1}(x_0) = \widetilde{f_2}(x_0)$，则 $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$.

证明: 只需要令

$$A = \{x \in X \mid \widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_2}(x)\}$$

然后证明 A 既开又闭就可以了. 开的话利用 E 中一个点附近的基本邻域嵌入 B 再利用交换图拉回到 X 中说明. 闭的话证明补集是开集同理可证. □

定理 6.2: 覆叠道路提升引理

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，$b_0 \in B$，有 $\sigma\colon (I,0) \to (B,b_0)$ 为 B 中道路. 任取 $e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$，则唯一存在 E 中道路 $\widetilde{\sigma}\colon (I,0) \to (E,e_0)$ 使得 $\widetilde{\sigma}$ 是 σ 的以 e_0 为起点的道路提升.

证明: $\forall x \in B$, 取 x 的一个基本邻域 U_x, 则 $\{\sigma^{-1}(U_x) \mid x \in B\}$ 是 I 的开覆盖. 由勒贝格引理, 存在 I 的一个分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, 使得每个 $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ 含于某个 $\sigma^{-1}(U_x)$, $1 \leqslant j \leqslant n, x \in X$. 下面逐段来提升 σ.

首先在 I_1 上提升 $\sigma|_{I_1}$. 对于 b_0 的道路连通的基本邻域 U_{b_0}, 取 $p^{-1}(U_{b_0})$ 的包含 e_0 的分支 V_1. 令 $\tilde{\sigma}_1 : I_1 \to E$, 对任意 $t \in I_1$, $\tilde{\sigma}_1(t) = p|_{V_1}^{-1} \circ \sigma(t)$, 则 $\tilde{\sigma}_1$ 连续, $\tilde{\sigma}_1(0) = e_0$, $p \circ \tilde{\sigma}_1 = \sigma|_{I_1}$.

假设 $\tilde{\sigma}_i : [0, t_i] \to E$ 已有定义, 满足 $\tilde{\sigma}_i(0) = e_0$, $p \circ \tilde{\sigma}_i = \sigma|_{[0,t_i]}$.

设 $\sigma(I_{i+1})$ 含于基本邻域 U, 取 $p^{-1}(U)$ 的包含 $\tilde{\sigma}_i(t_i)$ 的分支 V. 令 $\tau : I_{i+1} \to E$, 对于 $t \in I_{i+1}$, $\tau(t) = p|_V^{-1} \circ \sigma(t)$, 则 $\tau(t_i) = p|_V^{-1} \circ \sigma(t_i) = \tilde{\sigma}_i(t_i)$, 从而 $\tilde{\sigma}_i$ 和 τ 可乘. 令 $\widetilde{\sigma_{i+1}} : [0, t_{i+1}] \to E$,

$$\widetilde{\sigma_{i+1}}(t) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_i(t), & t \in [0, t_i], \\ \tau(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

则 $\widetilde{\sigma_{i+1}}$ 连续, $\widetilde{\sigma_{i+1}}(0) = e_0$, $p \circ \widetilde{\sigma_{i+1}} = \sigma|_{[0,t_{i+1}]}$.

最后, 所得的道路 $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_n : I \to E$ 即为所求. 提升的唯一性由提升唯一性定理保证. □

定理 6.3: 覆盖同伦提升定理

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，$b_0 \in B$，$e_0 \in \rho^{-1}(b_0)$. X 是局部连通空间，$x_0 \in X$，连续映射 $f\colon (X,x_0) \to (B,b_0)$ 存在提升 $\widetilde{f}\colon (X,x_0) \to (E,e_0)$. 若进一步有 $H\colon f \simeq g$，则存在 H 的唯一提升 $\widetilde{H}\colon X \times I \to E$，使得 $\widetilde{H}(x,0) = \widetilde{f}(x)$.

7 覆叠空间的基本群

定理 7.1

设 $\rho\colon E\to B$ 为覆叠映射，$b_0\in B$，$e_0\in\rho^{-1}(b_0)$，则

$$\rho_*\colon \pi_1(E,e_0)\to\pi_1(B,b_0)$$

为单同态.

证明: 设 $\langle\tilde\sigma\rangle,\langle\tilde\tau\rangle\in\pi_1(E,e_0)$. 若 $p_*\langle\tilde\sigma\rangle=p_*\langle\tilde\tau\rangle$, 则

$$\sigma=p\circ\tilde\sigma\simeq_p p\circ\tilde\tau=\tau,$$

即有定端同伦 $H:\sigma\simeq_p\tau$. 往证 $\langle\tilde\sigma\rangle=\langle\tilde\tau\rangle$.

由覆盖同伦提升定理, 存在 H 的唯一提升 $\tilde H: I\times I\to E$, 使得对任意 $s\in I$, $\tilde H(s,0)=\tilde\sigma(s)$. 又对任意 $t\in I$, $p\circ(\tilde H(0,t))=H(0,t)=b_0$, 而 $\{0\}\times I$ 是连通的, 故 $\tilde H(0,t)=\{e_0\}$; 同理, $\forall t\in I$, $\tilde H(1,t)=\{e_0\}$. 这样, $\tilde\sigma$ 和 $\tilde\tau$ 分别是 σ 和 τ 的以 e_0 为基点的提升, 且 $\tilde H:\tilde\sigma\simeq_p\tilde\tau$, 即 p_* 是单同态. □

定理 7.2: 纤维基数相同

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，则对任意的 $b\in B$，$\rho^{-1}(b)$ 的基数都相等.

证明: 往证对任意 $b_0,b_1\in B$，在集合 $\rho^{-1}(b_0)$ 和 $\rho^{-1}(b_1)$ 之间存在一个双射.

设 α 是 B 中从 b_0 到 b_1 的一个道路. 对于 $x\in\rho^{-1}(b_0)$，知道 α 有以 x 为起点的唯一的道路提升 $\widetilde{\alpha_x}:I\to E$，则 $\rho\circ\widetilde{\alpha_x}(1)=\alpha(1)=b_1$，故 $\widetilde{\alpha_x}(1)\in\rho^{-1}(b_1)$. 定义映射 $\varphi:\rho^{-1}(b_0)\to\rho^{-1}(b_1),\varphi(x)=\widetilde{\alpha_x}(1)$.

类似地，对于 α 的逆道路 α^{-1} (它是 B 中从 b_1 到 b_0 的道路)，可以定义 $\psi:\rho^{-1}(b_1)\to\rho^{-1}(b_0)$，对于 $y\in\rho^{-1}(b_1)$，$\psi(y)=\widetilde{\alpha_y^{-1}}(1)$.

对于 $x\in\rho^{-1}(b_0)$，取 $y=\varphi(x)=\widetilde{\alpha_x}(1)$. 易知，$\psi\varphi=\mathrm{id}_{\rho^{-1}(b_0)}$，$\varphi\psi=\mathrm{id}_{\rho^{-1}(b_1)}$，于是 φ 是双射. □

定义 7.1

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，对于任意 $b\in B$，称 $\rho^{-1}(b)$ 的基数为该覆叠的**叶数**或**重数**.

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，$b\in B$，$e\in\rho^{-1}(b)$，我们已知

$$\rho_*\colon\pi_1(E,e)\to\pi_1(B,b)$$

是一个单同态，记

$$H_e=\rho_e(\pi_1(E,e))$$

则 H_e 是 $\pi_1(B,b)$ 的一个同构于 $\pi_1(E,e)$ 的子群，则我们有如下定理

定理 7.3

设 (E,ρ) 是 B 的覆叠空间，$b\in B$，$e\in\rho^{-1}(b)$，则

$$[\pi_1(B,b),H_e]=\#\rho^{-1}(b)$$

即指数等于覆叠重数.

证明: 任取 $x\in\rho^{-1}(b)$, 令 $\tilde{\alpha}_x$ 是 E 中从 e 到 x 的一个道路, 则 $\alpha_x=\rho\circ\tilde{\alpha}_x\in\Omega(B,b)$. 令 $\eta:\rho^{-1}(b)\to\pi_1(B,b)/H_e$, $x\mapsto\langle\alpha_x\rangle H_e$. 只需证明 η 是双射即可.

设 $\langle\alpha_x\rangle H_e=\langle\beta_y\rangle H_e$, 则 $\langle\alpha_x\rangle=\langle\beta_y\rangle\rho_*(\langle\gamma\rangle)$, 其中 $\gamma\in\Omega(E,e)$, 即

$$\rho\circ\tilde{\alpha}_x=\alpha_x\simeq_p\beta_y(\rho\circ\gamma)=(\rho\circ\tilde{\beta}_y)(\rho\circ\gamma)=\rho\circ(\tilde{\beta}_y\gamma_y),$$

其中 γ_y 是 $\rho\circ\gamma$ 的始于 y 的道路提升, 且仍是闭路. 由 $\tilde{\alpha}_x\simeq_p\tilde{\beta}_y\gamma_y$, 于是 $x=y$, 即 η 是单射.

$\forall\langle\alpha\rangle\in\pi_1(B,b)$, 记 α 的始于 e 的唯一道路提升为 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}(1)=x$, 则 $\eta(x)=\langle\alpha\rangle H_e$, 于是 η 是满射, 从而又是双射. □

定理 7.4: 子群共轭定理

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，则 $\{H_e\mid e\in\rho^{-1}(b)\}$ 构成 $\pi_1(B,b)$ 的一个子群共轭类.

证明: 设 $e,e'\in\rho^{-1}(b)$, 令 α 是 E 中从 e 到 e' 的一个道路, $\alpha'=\rho\circ\alpha\in\Omega(B,b)$. 任取 $\langle\sigma\rangle\in\pi_1(E,e)$,

$$\begin{aligned}\rho_*\alpha_\#\langle\sigma\rangle &= \rho_*\langle\alpha^{-1}\sigma\alpha\rangle=\langle(\rho\circ\alpha^{-1})(\rho\circ\sigma)(\rho\circ\alpha)\rangle\\ &= \langle\alpha'^{-1}(\rho\circ\sigma)\alpha'\rangle=\alpha'_\#\circ\rho_*\langle\sigma\rangle,\end{aligned}$$

从而 $\rho_*\alpha_\#=\alpha'_\#\circ\rho_*$. 故

$$\begin{aligned}H_{e'} &= \rho_*(\pi_1(E,e'))=\rho_*\alpha_\#(\pi_1(E,e))\\ &= \alpha'_\#\circ\rho_*(\pi_1(E,e))=\alpha'_\# H_e.\end{aligned}$$

注意到 α' 是一个以 b 为基点的闭路, 即知 H_e 与 $H_{e'}$ 是共轭的.

另一方面, 设 G 是 $\pi_1(B,b)$ 的一个与 H_e 共轭的子群, 即存在 $\langle\gamma\rangle\in\pi_1(B,b)$, 使得 $G=\gamma^{-1}H_e\gamma$. 设 γ' 是 γ 的以 e 为起点的 (唯一) 道路提升, $e'=\gamma'(1)$, 则如上, $G=\gamma_\# H_e=H_{e'}$. □

8 映射提升准则

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，$f\colon X\to B$ 连续，$x_0\in X$，$b_0=f(x_0)$，$e\in\rho^{-1}(b_0)$，若 f 有提升

$$\widetilde{f}\colon (X,x_0)\to(E,e_0)$$

则有

$$\begin{aligned} f_*(\pi_1(X,x_0)) &= (\rho\circ\widetilde{f})_*(\pi_1(X,x_0)) \\ &= \rho_*\circ\widetilde{f}_*(\pi_1(X,x_0)) \\ &\subset \rho_*(\pi_1(E,e_0))=H_{e_0} \end{aligned}$$

在某些特定情况下，这也是提升存在的充分条件.

定理 8.1: 映射提升准则

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，X 是道路连通且局部道路连通的空间，$f\colon(X,x_0)\to(B,b_0)$ 连续，$e_0\in\rho^{-1}(b_0)$，若 $f_*(\pi_1(X,x_0))\subset H_{e_0}$，则 f 存在唯一的提升 $\widetilde{f}\colon(X,x_0)\to(E,e_0)$.

证明: 相信它. □

推论 8.1

设 (E,ρ) 为 B 的覆叠空间，X 是单连通且局部道路连通的空间，$f\colon(X,x_0)\to(B,b_0)$ 连续，$e_0\in\rho^{-1}(b_0)$，则 f 总存在唯一的提升 $\widetilde{f}\colon(X,x_0)\to(E,e_0)$.

Example 8.1

比如当 $n>2$ 时，任意两个连续映射 $f,g\colon S^n\to S^1$ 都是同伦的. 由于 S^n 在 $n>2$ 时单连通且局部道路连通，从而可以提升到 $\mathbb{R}$ 上，而 $\mathbb{R}$ 是凸集，所以提升的道路是同伦的，于是 f 和 g 同伦.

Example 8.2

在比如每个连续映射 $f\colon\mathbb{P}^2\to S^1$ 都是；零伦的. 由于 $\pi_1(\mathbb{P}^2)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，而 $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$ 没有二阶元，所以像只能是平凡的，也就是说满足条件可以提升.

9 覆叠空间的分类与万有覆叠

定义 9.1: 覆叠空间范畴

底空间 B 上的**覆叠空间范畴**的对象是覆叠空间 (E,ρ)，而态射是 $h\colon E_1 \to E_2$，使得 $\rho_2 \circ h = \rho_1$，此即满足一定条件的切片范畴. 若态射 h 还是同胚，则称 (E_1,ρ_1) 与 (E_2,ρ_2) 同构或者等价.

定理 9.1: 覆叠空间等价的刻画

设 (E_1,ρ_1) 与 (E_2,ρ_2) 是 B 上的覆叠空间，$b \in B$，$e_i \in \rho_i^{-1}(b)$，则 (E_1,ρ_1) 与 (E_2,ρ_2) 等价当且仅当 $\rho_{1*}(\pi_1(E_1,e_1))$ 和 $\rho_{2*}(E_2,e_2)$ 是共轭的.

证明: $\Rightarrow$: 设 $h: E_1 \to E_2$ 为同构, $h(e_1) = e_2$. 因 $\rho_2 \circ h = \rho_1$,

$$H_{e_1} = \rho_{1*}(\pi_1(E_1,e_1)) = (\rho_2 \circ h)_*(\pi_1(E_1,e_1)) = \rho_{2*}(\pi_1(E_2,e_2)) = H_{e_2},$$

故 H_{e_1} 和 H_{e_2} 的共轭类相同.

$\Leftarrow$: 对于 $e_1 \in \rho_1^{-1}(b)$, 可取 $e_2 \in \rho_2^{-1}(b)$, 使得 $\rho_{1*}(\pi_1(E_1,e_1)) = \rho_{2*}(\pi_1(E_2,e_2))$. 由映射提升准则, 存在同态 $h: E_1 \to E_2, k: E_2 \to E_1$, 使得 $h(e_1) = e_2, k(e_2) = e_1$. 于是, $k \circ h: E_1 \to E_1$ 是 E_1 的自同态, 满足 $k \circ h(e_1) = e_1$.

另一方面, $\mathrm{id}: E_1 \to E_1$ 是 E_1 的自同态, 满足 $\mathrm{id}(e_1) = e_1$. 由提升的唯一性定理, $k \circ h = \mathrm{id}$. 同理, $h \circ k = \mathrm{id}$. 于是, h 是同胚. 故 (E_1,ρ_1) 和 (E_2,ρ_2) 是等价的. □ □

定义 9.2

设 $\rho\colon E \to B$ 是覆叠映射，若自同胚 $h\colon E \to E$ 满足 $\rho \circ h = \rho$，则称 h 是一个**覆叠变换**.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\rho"'] & & E \arrow[dl, "\rho"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

很显然覆叠变换就是覆叠空间上的自同构，并且覆叠变换的复合还是覆叠变换，所以 (E,ρ) 的全体覆叠变换在复合运算下构成一个群，称之为 (E,ρ) 的**覆叠变换群**，记作 $\mathcal{D}(E,\rho)$.

定理 9.2

设 $\rho\colon E \to B$ 是覆叠映射，$e \in E$，$b = \rho(e)$，$e' \in \rho^{-1}(b)$，则存在 $h \in \mathcal{D}(E,\rho)$ 使得 $h(e) = e'$ 的充分必要条件是 $H_e = H_{e'}$.

证明: $\Rightarrow$: 设有 $h \in \mathcal{D}(E,p)$ 使得 $h(e) = e'$. 因 $\rho \circ h = \rho$, $H_e = \rho_*(\pi_1(E,e)) = (\rho \circ h)_*(\pi_1(E,e)) = \rho_*(\pi_1(E,e')) = H_{e'}$.

$\Leftarrow$: 若 $H_e = H_{e'}$, 则由映射提升准则, 存在 $\rho : E \to B$ 的提升 $h, h' : E \to E$, 使得 $h(e) = e', h'(e') = e$. 于是, $h' \circ h : E \to E$ 也是 $\rho : E \to B$ 的提升, 且 $h' \circ h(e) = e$.

另一方面, $\mathrm{id} : E \to E$ 也是 $\rho : E \to B$ 的提升, 满足 $\mathrm{id}(e) = e$. 由提升的唯一性定理, $h' \circ h = \mathrm{id}$. 同理, $h \circ h' = \mathrm{id}$. 于是, h 是自同胚, 从而是覆盖变换, $h(e) = e'$. □

定义 9.3

设 $\rho: E \to B$ 为覆叠映射, 若对某个 $e \in E$, H_e 是 $\pi_1(B, \rho(e))$ 的正规子群, 则称 ρ 为**正规覆叠映射**, 称 (E, ρ) 为 B 上的**正规覆叠空间**.

若 (E, ρ) 为 B 上的正则覆叠空间，$\forall e' \in E$，$H_{e'}$ 都是 $\pi_1(B, \rho(e'))$ 的正规子群. 事实上，从 e 到 e' 的道路 γ 和道路 $\rho\gamma$ 诱导的同构有以下的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(E,e) \arrow[r, "\gamma_\#"] \arrow[d, "\rho_*"] & \pi_1(E,e') \arrow[d, "\rho_*"] \\
\pi_1(B,\rho(e)) \arrow[r, "(\rho\gamma)_\#"'] & \pi_1(B,\rho(e'))
\end{tikzcd}$$

于是我们知道

$$H_{e'} = (\rho\gamma)_\#(H_e) \lhd \pi_1(B, \rho(e'))$$

当 $\rho: E \to B$ 是正规覆叠的时候，我们知道如果 $e, e' \in \rho^{-1}(b)$，由于正规子群只和自己共轭，所以有

$$H_e = H_{e'}$$

也就是说任意的 $e \in \rho^{-1}(b)$ 对应的 H_e 仅由 b 决定，我们把这个正规子群记为 H_b.

推论 9.1

$\rho: E \to B$ 是正规覆叠映射当且仅当对任意的 $e, e' \in E$, 若 $\rho(e) = \rho(e')$, 则存在覆叠变换 $h \in \mathcal{D}(E, \rho)$ 使得 $h(e) = e'$.

定理 9.3

设 $\rho: E \to B$ 为正规覆叠映射, $b \in B$, 则

$$\mathcal{D}(E, \rho) \cong \pi_1(B, b)/H_b$$

定义 9.4

设 $\rho: E \to B$ 为覆叠映射, 若 E 是单连通的, 则称 ρ 为**万有覆叠映射**或者**泛覆叠映射**, (E, ρ) 为 B 上的**万有覆叠空间**或者**泛覆叠空间**.

Remark 9.1
对于万有覆叠空间而言，任意的 $e \in E$ 都有 H_e 是平凡群，所以是正规覆叠空间.

Example 9.1
当 (E, ρ) 是万有覆叠空间时，我们有

$$\pi_1(B) \cong \mathcal{D}(E, \rho)$$

这可以帮我计算基本群，比如指数映射

$$\rho\colon \mathbb{R} \to S^1$$

就是万有覆叠，容易看出覆叠变换是移动距离为整数的平移，容易看出

$$\mathcal{D}(E, \rho) \cong \mathbb{Z}$$

从而

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

下面的定理说明万有覆叠空间是一切覆叠空间的覆叠空间，这也是其名称的来源.

定理 9.4

设 $\rho_0\colon E_0 \to B$ 为万有覆叠映射，$\rho\colon E \to B$ 为覆叠映射，则有覆叠映射

$$\widetilde{\rho}\colon E_0 \to E$$

满足下图交换

$$\begin{tikzcd}
(E_0, e_0) \arrow[rr, dashed, "\widetilde{\rho}"] \arrow[dr, "\rho_0"'] & & (E, e) \arrow[dl, "\rho"] \\
& (B, b) &
\end{tikzcd}$$

换句话说，(E_0, ρ_0) 是覆叠空间范畴的始对象.

证明: 因 E_0 单连通, 对于覆盖映射 $\rho : E \to B$, 由提升准则, 存在 ρ_0 的提升 $\tilde{\rho} : E_0 \to E$, 即上述图表可以交换. 下面验证 $\tilde{\rho}$ 为覆盖映射.

$$\begin{tikzcd}
W_\alpha \subset (E_0, e_0) \arrow[rr, "\widetilde{\rho}"] \arrow[dr, "\rho_0"'] & & (E, e) \supset V \arrow[dl, "\rho"] \\
& (B, b) \supset U &
\end{tikzcd}$$

$\forall e \in E, b = \rho(e)$. 取 U 是 b 的一个道路连通的开邻域, U 关于 ρ 和 ρ_0 都是基本邻域. 设 V 是 $\rho^{-1}(U)$ 中 e 所在的道路分支, 则 $\rho|_V : V \to U$ 是同胚.

$\rho_0^{-1}(U)$ 的连通分支集合记为 $\{W_\alpha\}$. 因

$$\rho_0^{-1}(U) = (\rho \circ \tilde{\rho})^{-1}(U) = \tilde{\rho}^{-1}(\rho^{-1}(U)),$$

故 $\tilde{\rho}^{-1}(V) \subset \rho_0^{-1}(U) = \bigcup_\alpha W_\alpha$.

$\forall \alpha, \tilde{\rho}(W_\alpha) \subset \rho^{-1}(U)$, 并且是道路连通的, 于是它在 $\rho^{-1}(U)$ 的某个分支上. 这样,

$$\tilde{\rho}^{-1}(V) = \bigcup_{\tilde{\rho}(W_\alpha) \subset V} W_\alpha.$$

如果 $\tilde{\rho}(W_\alpha) \subset V$, 则 $\rho_0|_{W_\alpha} = \rho|_V \circ \tilde{\rho}|_{W_\alpha}$, 其中 $\rho|_V$ 和 $\rho_0|_{W_\alpha}$ 都是同胚, 故 $\tilde{\rho}|_{W_\alpha} : W_\alpha \to V$ 也是同胚. 这就证明了 $\tilde{\rho}$ 为覆盖映射. □

命题 9.1

设 $\rho\colon E \to B$ 为万有覆叠映射, $e_0 \in E$, $\rho(e_0) = b_0$, 则 b_0 有一个邻域 U 使得含入映射 $i\colon (U, b_0) \to (B, b_0)$ 诱导的基本群之间的同态是平凡的.

证明: 设 U 是 b_0 的一个基本邻域, V 是 $\rho^{-1}(U)$ 的包含 e_0 的道路分支. 设 α 为 U 中以 b_0 为基点的一个闭路, 则 $\tilde{\alpha} = \rho|_U^{-1} \circ \alpha$ 是 V 中以 e_0 为基点的一个闭路, 且 $\tilde{\alpha}$ 是 α 的以 e_0 为起点的提升. 因 E 是单连通的, 存在定端同伦 $F : \tilde{\alpha} \simeq_p C_{e_0}$, 从而 $\rho \circ F : \alpha \simeq_p C_{b_0}$. 这样, $i_* : \pi_1(U, b_0) \to \pi_1(B, b_0)$ 为零同态. □

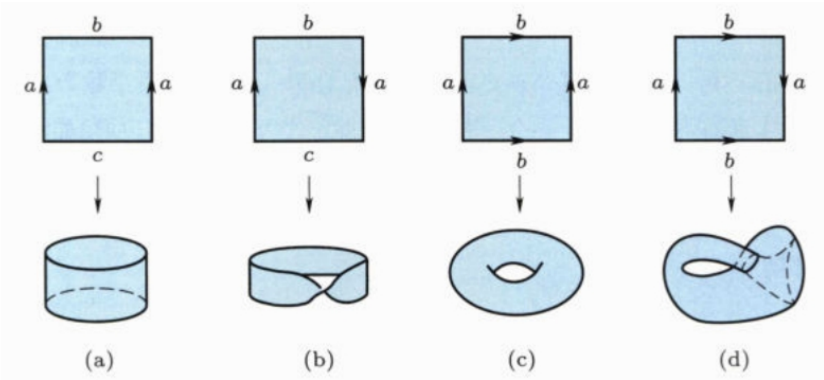
10 曲面的拓扑分类

设 Σ_m 为平面上的 m 边形，取 Σ_m 的 $2n(2n < m)$ 条边，其构成的集合为 $\Lambda = \{a_1, \cdots, a_n\}, a_i = \{a_i'.a_i''\}$. 分别给每组 a_i 的两条边一个定向，使它们构成有向边，再将其同向粘贴在一起，给定一个同胚 $h_i: a_i' \to a_i''$，使得其保持定向，我们将商空间

$$\Sigma_m/(x \sim h_i(x), x \in a_i', 1 \le i \le n)$$

记为 S，容易验证 S 是一个紧致连通曲面. 特别地，如果 $2n = m$，则 S 是一个闭曲面，把这 $2n$ 条边的整体黏合方式记为 φ，则称 (Σ, φ) 为曲面 S 的一个多边形表示，称 a_i 为其中的一个黏合边对.

需要注意的是 S 的同胚型与 h_i 的选取无关，只需要把对应边的起点和终点粘起来即可，中间如何黏合其实不会改变同胚型. 一些例子如下：



设 (Σ, φ) 为曲面 S 的一个如上的多边形表示，(Σ, φ) 也可以按如下方式来记：先确定 Σ 边界的一个定向 Ω，如逆时针方向. 对于 Σ 的 a_i 中的一条边，如果其方向与 Ω 一致，就用 a_i 来标记，反之用 a_i^{-1} 来标记. 对于 Σ 没有参与粘合的边，就用其他字母来表示，不同的边用不同的字母表示，然后选定 Σ 的一个定点作为出发点，按 Ω 方向绕 Σ 的边界走一圈，从左到右依次写出标在各边上的字母，所读出来的字 w 就与多边形表示 (Σ, φ) 一一对应(实际上要商掉一些等价类，即不同的对于 h_i 的选择)，称之为曲面 S 的一个字表示.

如上图中的 (a)，其字表示为：$aba^{-1}c$；(b) 的子表示为：$a^{-1}ba^{-1}c$；(c) 的字表示为 $ab^{-1}a^{-1}c$；(d) 的字表示为 $a^{-1}b^{-1}a^{-1}b$.

设 (Σ, φ) 为紧致连通曲面 S 的一个多边形表示，若 Σ 的两个顶点在 φ 下粘合成一点，则称它们是等价的. 等价的点在 S 中被捏成一点. 若 $D_1, \cdots, D_k$ 是曲面 S 上 k 个互不相交的闭圆盘，则称从 S 上挖除 $D_1, \cdots, D_k$ 的内部所得的曲面为 k 次穿孔的 S.

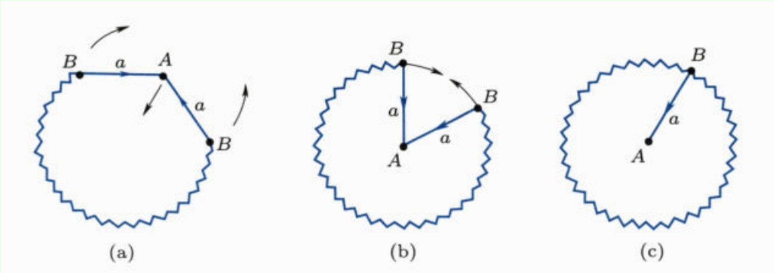
定理 10.1: Rado

任意一个紧致连通曲面都有多边形表示.

下面我们讨论一下紧致连通曲面的多边形表示的手术与性质，这是为了对过多的多边形表示进行简化，下面所涉及的曲面都是紧致连通的.

定义 10.1: I 型手术

设曲面 S 的多边形表示 (Σ_m, φ) 中有一个边对 a 是相邻的反向对边，其公共顶点为 A，先黏合多边形 Σ 这个反向对边 a，其他边对暂不黏合，则得到一个 $m-2$ 边型 Σ'. φ 在 Σ' 上诱导的黏合关系为 φ'. 这样就得到 S 的一个新的多边形表示 (Σ', φ'). 称这样的操作为沿相邻反向边 a 对 (Σ_m, φ) 作 ***I* 型手术**.

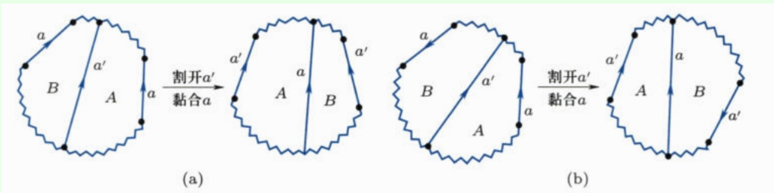


在经过 I 型手术后，A 变成一个内点，不再是顶点，故 (Σ', φ') 的顶点比 (Σ, φ) 少一个.

设 α 是曲面 Σ 上的一个简单弧，若 $\partial\alpha \subset \partial\Sigma$，$\alpha^\circ \subset \Sigma^\circ$，则称 α 是**真嵌入的**.

定义 10.2: II 型手术

设 a 是曲面 S 的多边形表示 (Σ, φ) 中的一个黏合边对. 在 Σ 中取一条真嵌入的定向简单弧 a'，使得 a 的两条边分别位于 a' 的两侧，且 a' 的每个端点或者是 Σ 的一个顶点，或者是 Σ 的一条未参与黏合的边的内部，沿 a' 剪开 Σ 得到两片 A 和 B，然后将 A 和 B 沿 a 黏合得到多边形 Σ'，Σ' 上黏合关系 φ' 保留了 a 以外的黏合关系，并且增添了 a' 的黏合关系，这样的操作称为用 (a', a) 对 (Σ, φ) 作 ***II* 型手术**，称 a' 为 (Σ, φ) 的一个**分割线**.



很显然，对曲面 S 的多边形表示 (Σ, φ) 作有限次的 I,II 型手术后所得到的 (Σ', φ') 仍然是 S 的一个多边形表示. 并且很显然我们有如下性质：

命题 10.1

设闭曲面 S 的有多边形表示 (Σ, φ)，则

(1) II 型手术不改变多边形的边数和顶点类数.

(2) 若 (Σ, φ) 中有同向边对，经过一次 I 型手术或 II 型手术后得到的多边形表示记为 (Σ', φ')，则 (Σ', φ') 中仍然有同向边对.

我们现在可以再谈论一下曲面的定向：

定义 10.3: 曲面的定向

若一个曲面 S 上有一个同胚于莫比乌斯带的子曲面，则称 S 是**不可定向的**，反正称之为**可定向的**.

现在我们来进行多边形的拓扑分类.

定义 10.4: 闭曲面的标准多边形表示

(1) 设 $n \geq 1$，称闭曲面的多边形表示：

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

为闭曲面的 ***I_n* 型标准多边形表示**，简记为 $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

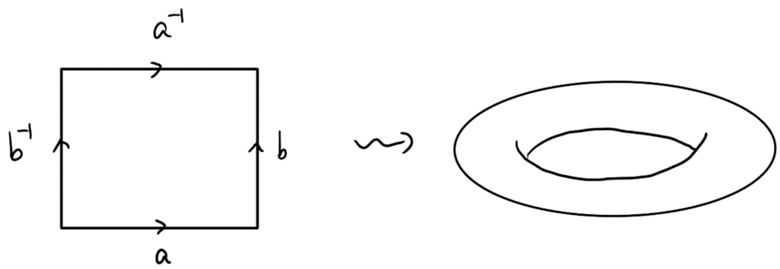
(2) 设 $m \geq 1$，称闭曲面的多边形表示

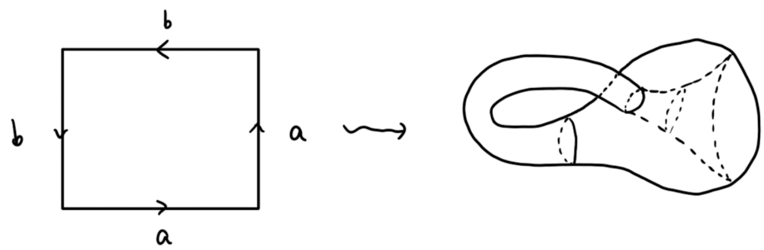
$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_m a_m$$

为闭曲面的 ***II_n* 型标准多边形表示**，简记为 $\prod_{i=1}^{n} a_i^2$.

(3) 特别约定，球面 S^2 的多边形标准表示是 $(\Sigma_m, \partial\Sigma_m)$，是将 Σ_m 的边界黏合成一点得到的商空间.

下面是标准表示的一个例子：





定理 10.2

任意闭曲面都有标准的多边形表示.

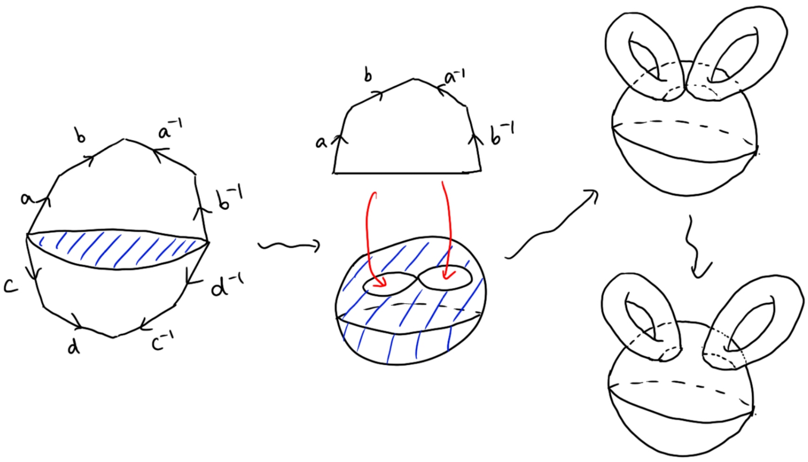
有这个定理之后我们就可以给出标准表示代表的曲面了：

定理 10.3

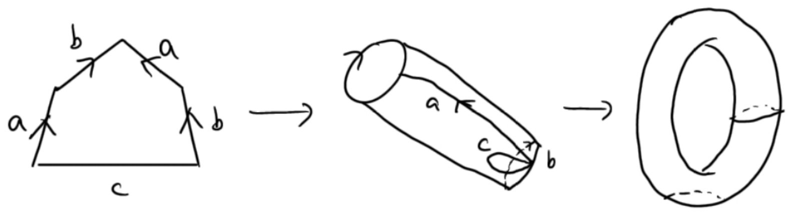
(1) 闭曲面有标准多边形表示 I_n，则 S 是 n 次穿孔球面粘上一个环柄所得到了曲面.

(2) 设闭曲面 S 有标准的多边形表示 II_m，则 S 是沿 m 次穿孔球面的每个边界分支各黏合一个莫比乌斯带得到的曲面.

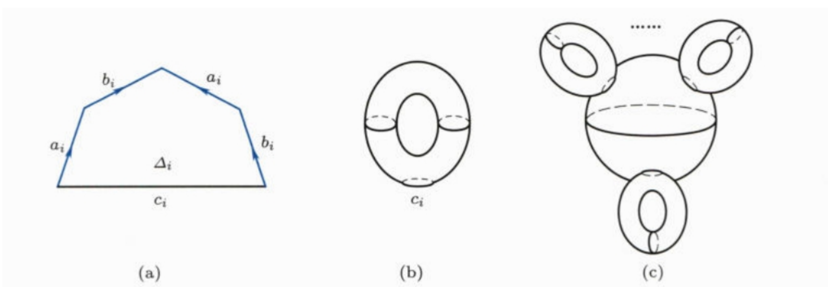
其中 (1) 是因为可以把多边形($m = 2$)剖分成下图最左边那样：



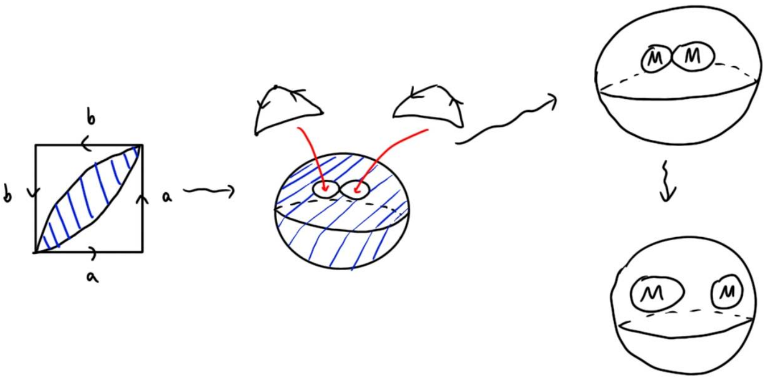
然后由于我们可以从每一个外面的五边形按照如下步骤得到一个环柄：



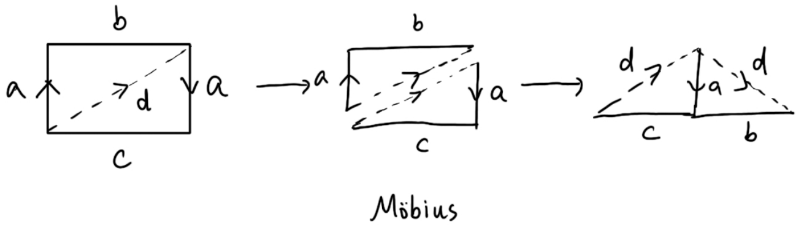
然后粘起来就得到了前面一张图后面的部分，$m = 3$ 的情况如下所示：



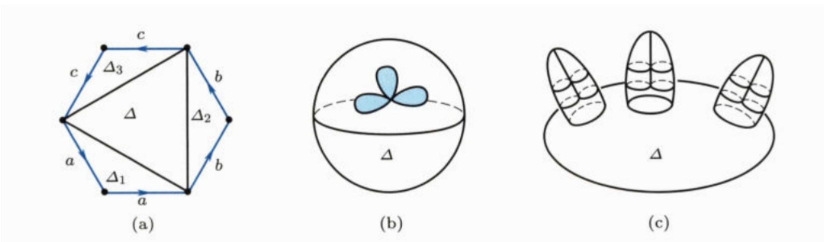
其中 (2) 是因为可以把多边形($n = 2$)剖分成下图最左边那样：



然后由于我们可以从每一个外面的三角形按照如下步骤得到一个莫比乌斯带：



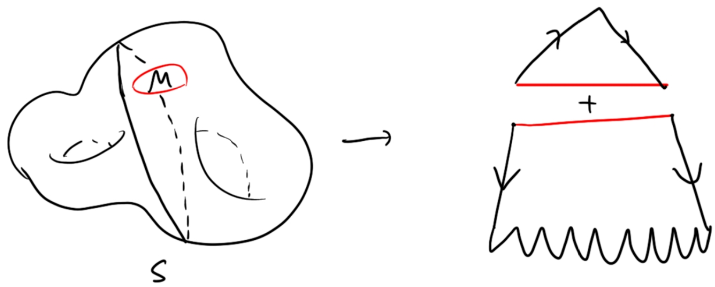
然后粘起来就得到了前面一张图后面的部分，$n = 3$ 的情况如下所示：



推论 10.1

闭曲面 S 有 II 型多边形表示当且仅当 S 上有一个子曲面是一个莫比乌斯带.

证明: 必要性显然，反之，如果 S 的一个子曲面 M 是一个莫比乌斯带，则总可以取到 $\overline{S-M}$ 的一个顶点类数为 1 的多边形表示，从而 S 有一个顶点类数为 1 的多边形表示，并且包含一个同向黏合边对，从而得证.

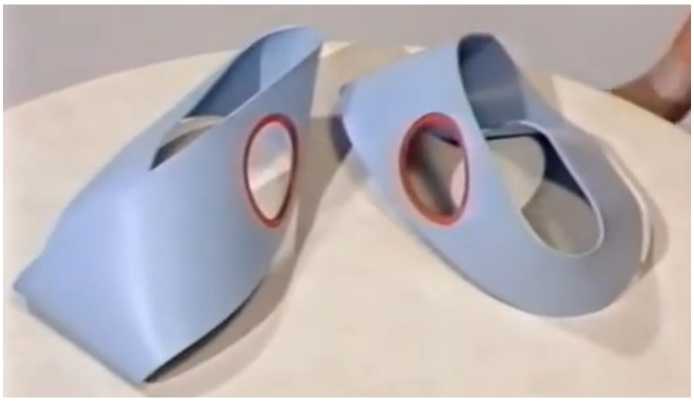


□

定义 10.5: 亏格

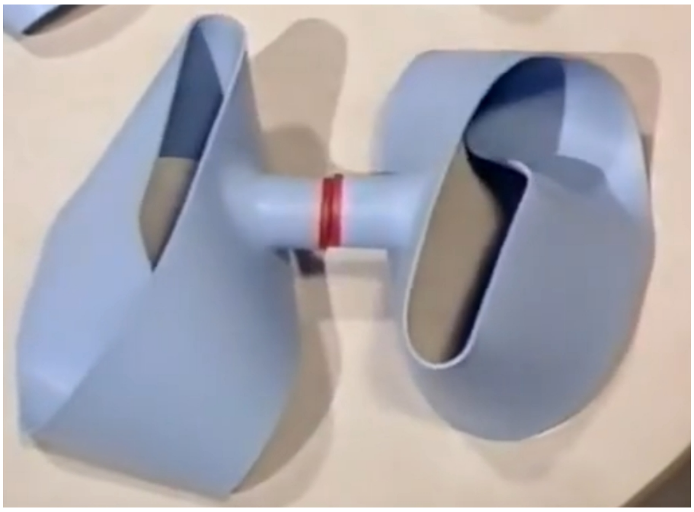
对于 $n \geq 1$，将 I_n 型多边形表示确定的闭曲面记为 $n\mathbb{T}^2$，称 n 为它的**亏格(genus)**；对于 $m \geq 1$，将 II_m 型多边形表示确定的闭曲面记为 $m\mathbb{RP}^2$，称 m 为它的**亏格(genus)**.

为什么这样子记呢？这实际上是一些连通和，下面我们从一种直观的角度去理解. 首先我们要定义连通和，这里就不严谨写了，直观的角度来说就是给定两个曲面如下，各挖去一个圆盘：

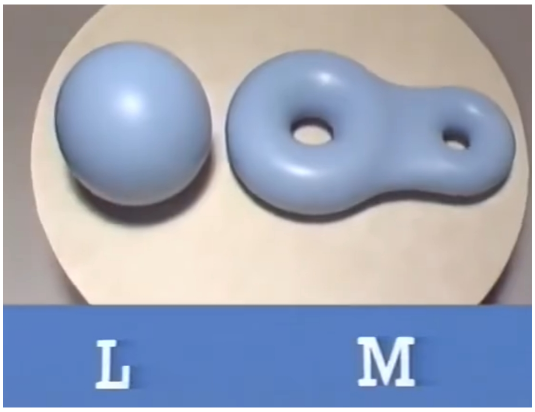


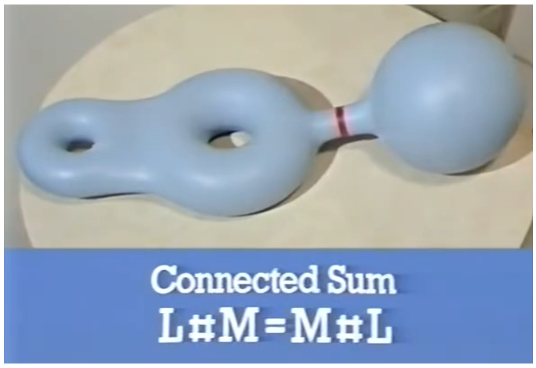
然后把这圆盘周围的延长出去：

然后再粘在一起：



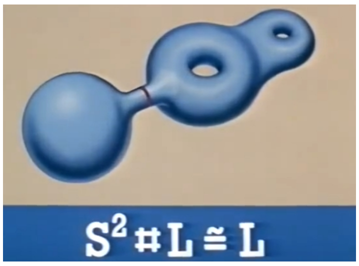
我们可以对任意两个曲面这样子干(曲面是局部欧的，所以从可以删去圆盘)，所得到的新曲面就称为两个旧曲面 L, M 的**连通和(connected sum)**，记为 $L\#M$.

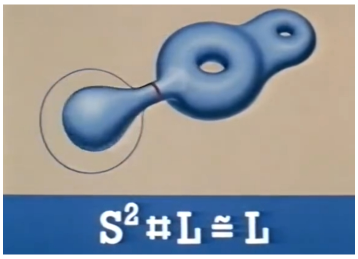




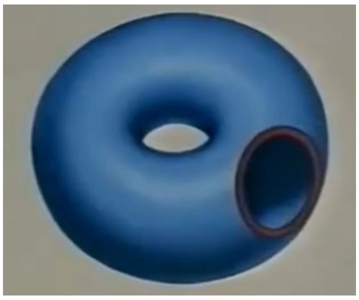
直观上容易看出来，连通和是交换的.

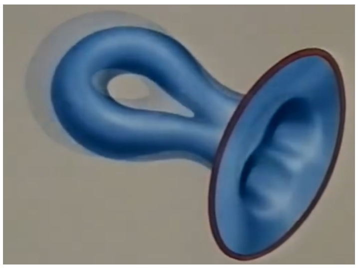
下面我们来看一些连通和的例子：比如 S^2 就扮演了幺元的角色：

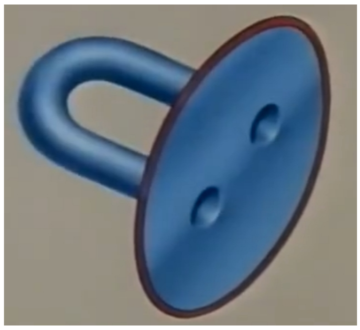




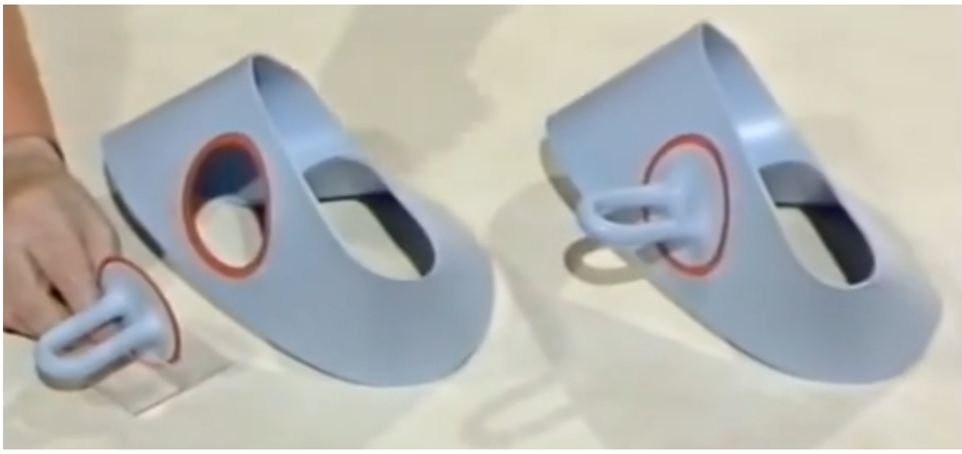
一个圆环去掉一个圆盘就得到了一个可以黏到其他曲面上的环柄：所以我们如果把一个圆环与



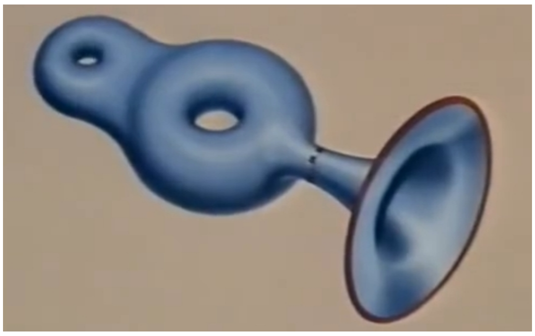


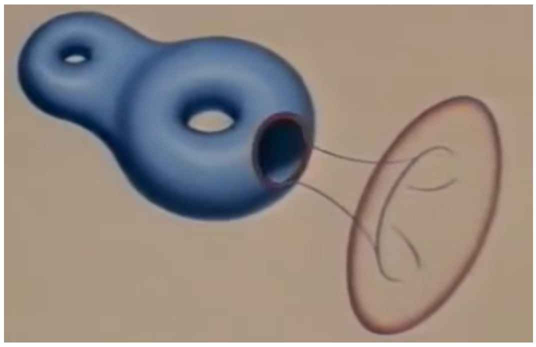


一个莫比乌斯带做连通和，就得到一个带环柄的莫比乌斯带：



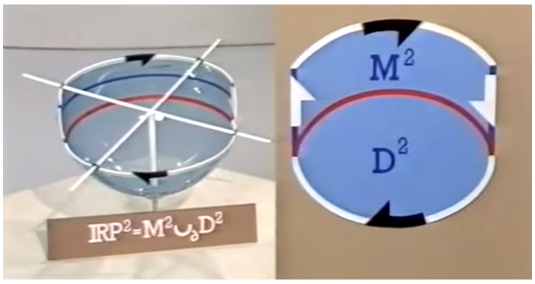
当你把一个曲面和一个圆盘做连通和的时候，会发现看似加上了东西，实际上删除了东西，即曲面与圆盘作连通和，得到的东西实际上是曲面删去了圆盘：

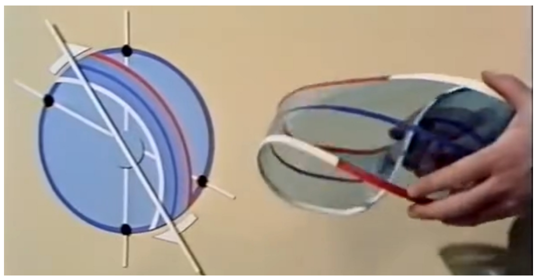




最后要说的东西就是我们的射影平面：

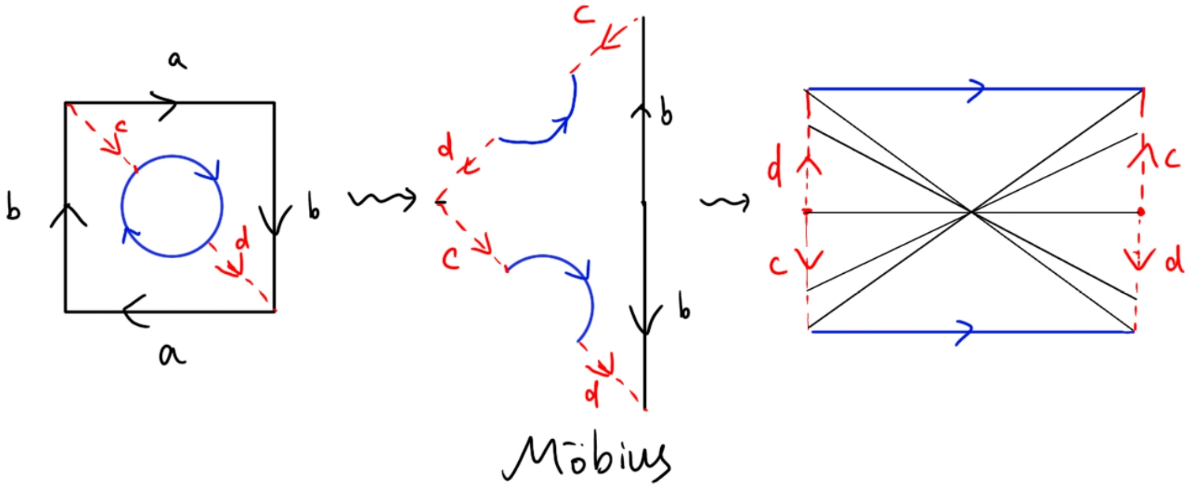
射影平面去掉一个圆盘是什么？答案是**实射影平面去掉圆盘是莫比乌斯带**. 过程如下：





最后 be like:

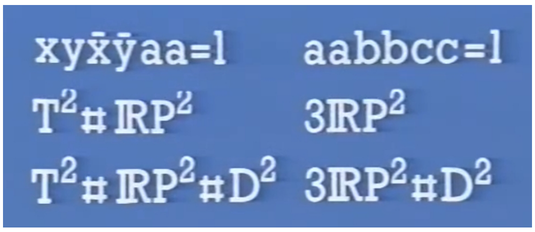
我们还可以稍微formal一点地看出来

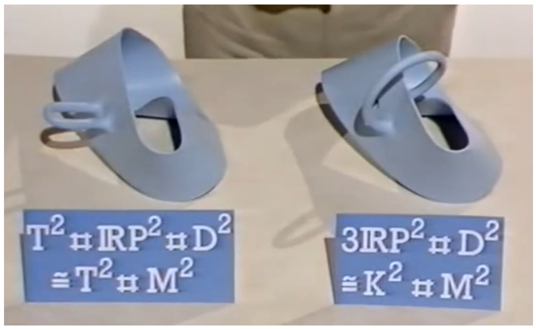


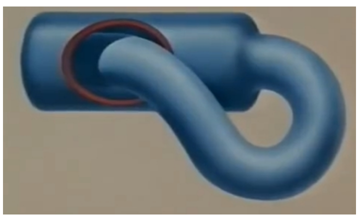
于是断言，所有的曲面都可以由球面不断地添加一些环柄或者莫比乌斯带得到. 添加环柄就相当于圆环做连通和，添加莫比乌斯环就相当于 $\mathbb{RP}^2$ 作连通和，于是现在可以理解前面的两个记号.

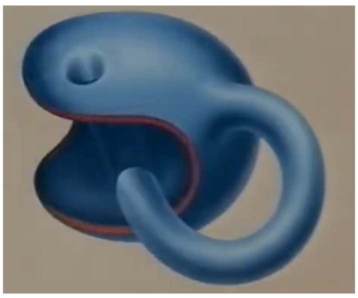
聪明的你一定会思考下面这个问题：我们已经知道一个闭曲面要么是球面粘上 n 个环柄，要么是球面粘上 n 个莫比乌斯带，那么一个球面粘上一个环柄和一个莫比乌斯带是什么呢？

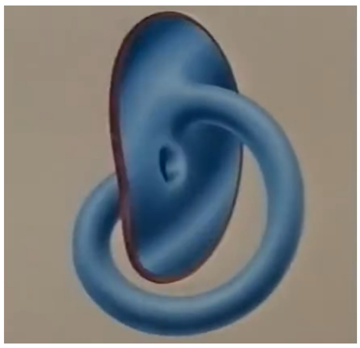
我们要说明这实际上就是三个射影平面的连通和，也就是一个球面粘上三个莫比乌斯带，然而我们无法将这个图形嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中，所以我们对这两个东西各去掉一个圆盘使得可以嵌入 $\mathbb{R}^3$，注意 $(\mathbb{RP}^2)^3-\mathbb{D}=(\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2)\#(\mathbb{RP}^2\#\mathbb{D})=\mathbb{K}\#\mathbb{M}$. 而 Klein 瓶去掉一个圆盘可以变成下图最右边的样子，过程在下面： 上图右边的两个实际上是同胚的：



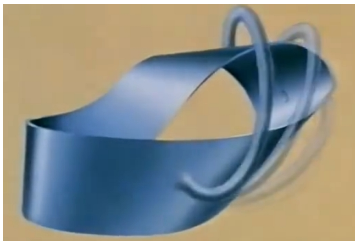


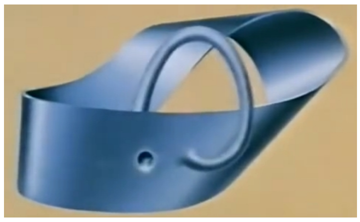






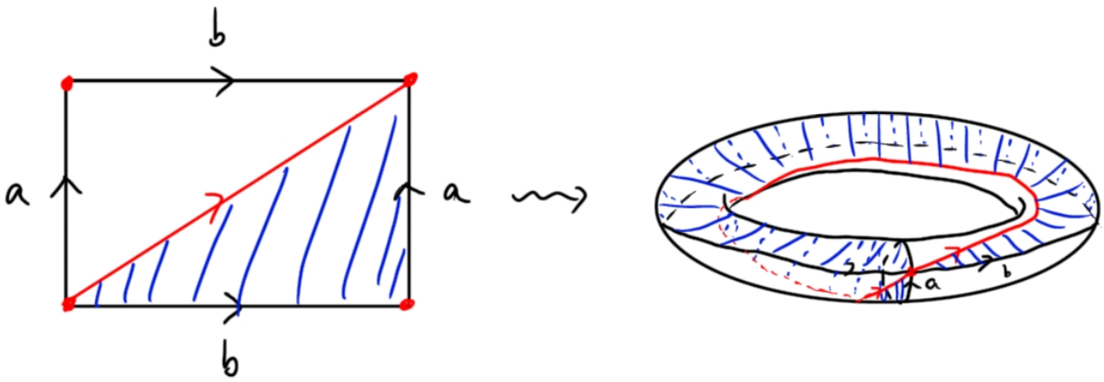
所以一旦存在任意一个子曲面是莫比乌斯环，我们可以把其他任意的环柄都变成 $\mathbb{RP}^2-\mathbb{D}$，也就是莫比乌斯环，这与我们前面所得到的标准表示结果是一致的.





所以我们最后只剩下一步，就是说明这些可定向的不可定向的不同亏格的闭曲面，确确实实不是同胚的，而说明一些东西不是同胚的，一般的方法是找到一些同胚不变量，去说明他们的这个不变量不同. 实际上我们有两种选择，一种是欧拉示性数，一种是基本群. 我们先看三角剖分.

所谓三角剖分，就是用一堆三角形把曲面给肢解，如下图就是对环面的一个三角剖分：



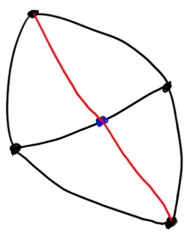
由于多边形肯定是可以用三角形剖分的，所以由于任何闭曲面都有多边形表示，我们可以对任何闭曲面作三角剖分. 这实际上有一点倒反天罡，因为闭曲面的多边形表示存在性实际上是由三角剖分得到的，也就是说我们先证明了任何闭曲面都有三角剖分，然后才证明了曲面有多边形表示. 不过我们会默认三角剖分的存在性.

有了三角剖分的存在性，我们可以对任意一个闭曲面 S 去定义欧拉示性数 $\chi(S)$，定义为

$$\chi(S) = \#V - \#E + \#F$$

其中 V, E, F 分别为曲面 S 在任意一个三角剖分下的顶点类集，边类集，面集. 我们下一步的工作自然就是说明这是良定义的：我们的思路是任意两个曲面 S 的三角剖分都可以通过一些精细化的操作变成相同的三角剖分，并且精细化的操作不改变欧拉示性数.

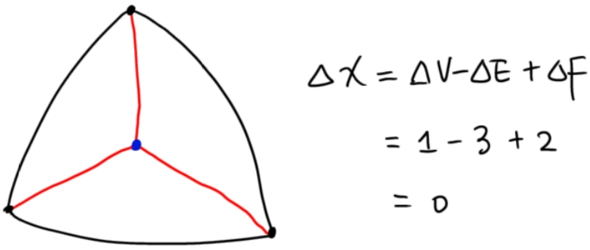
(1) 在边上加点：如图



$$\begin{aligned}\Delta\chi &= \Delta V - \Delta E + \Delta F \\ &= 1 - 3 + 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

其中新增的顶点就是图中蓝色的点，新增的边是两条红色的边加上一条原本中间的边被分成两条之后多出的一条，新增的面显然是两个，所以知道 $\Delta\chi = 1 - 3 + 2 = 0$.

(2) 在面上加点：如图



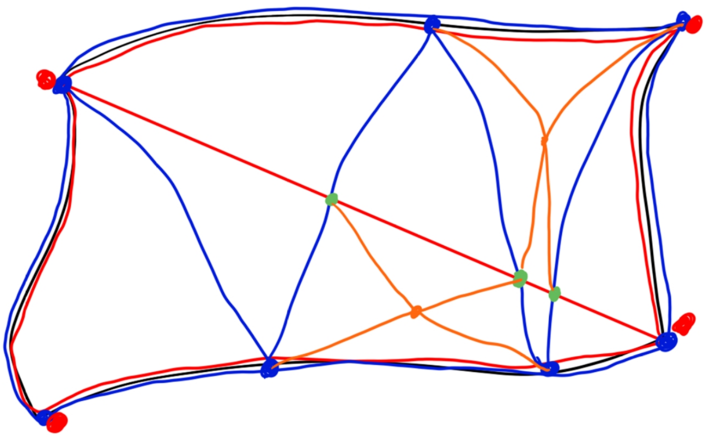
同理有不改变欧拉示性数.

下面我们要说明任何两个不同的三角剖分都可以精细化成同一个三角剖分，从而说明欧拉示性数是良定义的：

引理 10.1: 共同精细化

对于同一个曲面上的任意两个三角剖分 T_1 和 T_2，总存在第三个三角剖分 T，它既是 T_1 的精细化，又是 T_2 的精细化.

想象一个透明的曲面上用红色的笔画出了三角剖分 T_1 的所有边，然后用蓝色的笔画出了三角剖分 T_2 的所有边，现在球面上布满了红色和蓝色的线条，这些线条会相互交叉，形成一个新的、更复杂的网络，这个网络分割出的最小区域不再是三角形，而是一些多边形.



(1) 构造新的顶点: T 的顶点集 = (T_1 的所有顶点) ∪ (T_2 的所有顶点) ∪ (所有红色边与蓝色边的交点).

(2) 构造新的边: T 的一部分边是原 T_1 和 T_2 的边被新顶点分割后产生的线段.

(3) 构造新的面: 此时曲面被这个复杂的网络分割成了很多小多边形，我们可以在每个多边形内部添加一个额外的顶点，然后添加一些边，将它与该多边形的所有顶点连接起来，从而将这个多边形三角化，完成这一步后，整个曲面就被一个新的三角剖分 T 所覆盖.

设 $\chi(T)$ 代表三角剖分 T 的欧拉示性数，根据我们上面的讨论，我们已经证明了如果 T 是 T_1 的精细化，那么 $\chi(T) = \chi(T_1)$，因为 T 可以通过在 T_1 的基础上反复应用两种基本操作得到，每一步操作都不改变欧拉示性数. 同理， $\chi(T) = \chi(T_2)$，因此：

$$\chi(T_1) = \chi(T) = \chi(T_2)$$

这就严格证明了，对于同一个曲面，任意两个三角剖分计算出的欧拉示性数都是相等的，即这个值确实是曲面本身的属性，与剖分方式无关.

下面我们说明欧拉示性数是一个拓扑不变量，也就是说在同胚下不改变，这是因为：假设 S_1 和 S_2 是同胚的，同胚映射为 $f : S_1 \to S_2$，我们在曲面 S_1 上任意取一个三角剖分 $T_1 = \{V_1, E_1, F_1\}$.

我们可以利用同胚映射 f 在 S_2 上得到三角剖分 T_2：

(1) $V_2 = f(V_1) = \{f(p)|p \in V_1\}$，由于 f 是双射，所以 V_1 和 V_2 的顶点个数完全相同：$|V_2| = |V_1|$.

(2) 定义为 S_1 上所有边在 f 下的像. 一条边是连接两个顶点的一条曲线，它在 f 下的像也是连接对应两个像点的一条曲线，由于 f 的连续性和双射性，边的连接关系被完美地保持. 因此边的数量也完全相同：$|E_2| = |E_1|$.

(3) 同理面的数量也完全相同：$|F_2| = |F_1|$.

于是我们有

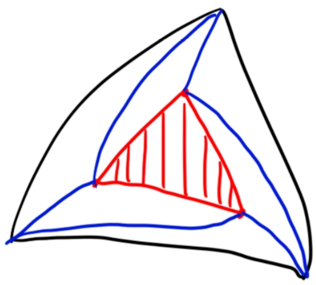
$$\chi(S_1) = |V_1| - |E_1| + |F_1| = |V_2| - |E_2| + |F_2| = \chi(S_2)$$

于是欧拉示性数在同胚意义下保持不变.

最后一块拼图是如下的恒等式：

$$\chi(L\#M) = \chi(L) + \chi(M) - 2$$

也即两个曲面之间的连通和的欧拉示性数可以如上计算，这是因为当两个曲面同时扣掉一个圆盘，实际上我们知道圆盘和三角形是同胚的，所以相当于我们同时扣掉两个曲面的三角剖分中的一个面，然后沿面的边界粘起来. 得到一个新的曲面及其三角剖分. 为了避免一些不必要的关于顶点类和边类的讨论，我们按照如下方式对每个曲面构造一个新的三角剖分，并扣去中间的红色三角形：



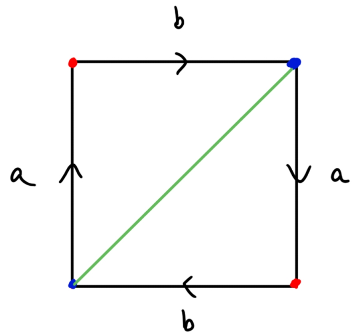
于是我们把两个曲面按照上面的方式粘起来，发现由于三对顶点和三对边粘在一起，所以顶点数量和边的数量各减少三个，而加一起的面减少了两个被挖去的红色三角形，所以

$$\begin{aligned}\chi(L\#M) &= V(L\#M) - E(L\#M) + F(L\#M) \\ &= (V(L) + V(M) - 3) - (E(L) + E(M) - 3) + (F(L) + F(M) - 2) \\ &= \chi(L) + \chi(M) - 2\end{aligned}$$

现在我们计算环面和射影平面的欧拉示性数，由上面的环面的三角剖分我们计算得出

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 1 - 3 + 2 = 0$$

实射影平面的三角剖分如下：



计算得出

$$\chi(\mathbb{RP}^2) = 2 - 3 + 2 = 1$$

于是我们可以归纳得到

$$\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n, \quad \chi(m\mathbb{RP}^2) = 2 - m$$

所以得到：对于不同的 n，$n\mathbb{T}^2$ 之间是不同胚的，对于不同的 m，$m\mathbb{RP}^2$ 之间是不同胚的. 再结合曲面是否可以定向是同胚不变的(考虑莫比乌斯环的同胚还是莫比乌斯环)，所以 $n\mathbb{T}^2$ 和 $m\mathbb{RP}^2$ 之间是不同胚的，于是我们给出了闭曲面的完全分类.

最后我们给出其基本群的刻画：

定理 10.4

(1) $\pi_1(n\mathbb{T}^2) = \langle a_i, b_i \mid 1 \le i \le n;\ \prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1 \rangle$，对 $n \ge 1$.

(2) $\pi_1(m\mathbb{RP}^2) = \langle a_i \mid 1 \le i \le m;\ \prod_{i=1}^{m} a_i^2 = 1 \rangle$，对 $m \ge 1$.

如果我们令 $\widetilde{G}$ 为 G 的交换化，则有

(1) $\widetilde{\pi_1(n\mathbb{T}^2)} \cong \mathbb{Z}^{2n}$，$n \ge 1$.

(2) $\widetilde{\pi_1(m\mathbb{RP}^2)} \cong \mathbb{Z}^{m-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$m \ge 1$.

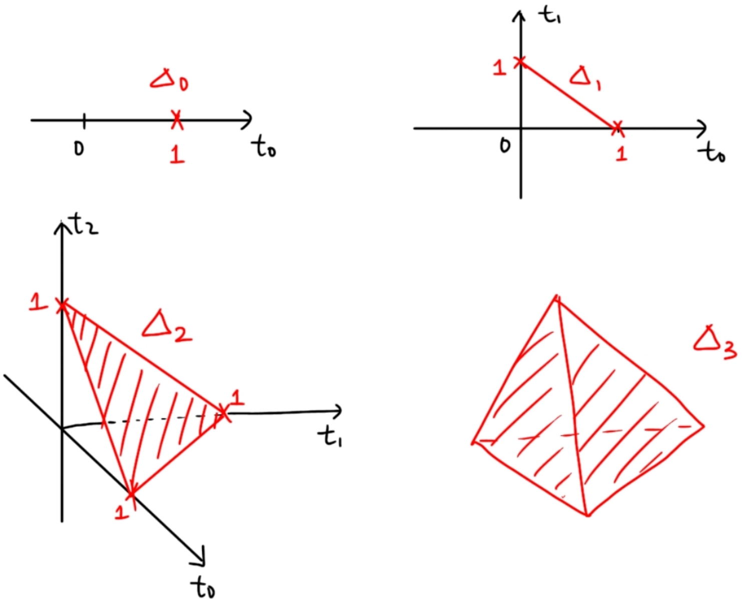
11 奇异同调群

这部分比较基础，我们先堆砌一些概念.

定义 11.1: 标准单形

Standard simplexes 定义为对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，有

$$\Delta_k := \left\{ (t_0, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \,\middle|\, \sum_{r=0}^{k} t_r = 1, t_i \geq 0 \right\}$$



定义 11.2: i-th face inclusion

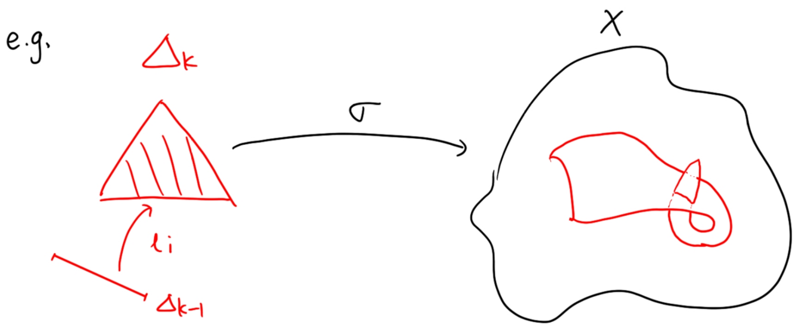
对于 $i \leq k$，我们可以定义 ***i-th face inclusion***：

$$\iota_i : \Delta_k \to \Delta_{k+1}, \quad (t_0, \cdots, t_k) \mapsto (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_k)$$

定义 11.3: singular simplexes

X 是拓扑空间，一个 X 上的 ***singular k-simplex*** 是一个连续映射

$$\sigma : \Delta_k \to X$$



定义 11.4: faces of a singular simplex

给定一个奇异单形 $\sigma\colon \Delta_k \to X$，则它的 ***faces*** 定义为

$$\sigma_i := \sigma \circ \iota_i, \quad i = 0, \cdots, k$$

现在我们可以定义奇异链复形函子：

定义 11.5: singular chain functors

给定拓扑空间 X，对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$S_k(X) := \begin{cases} \bigoplus\limits_{\sigma\colon \Delta\to X} \mathbb{Z}\sigma, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

其函子性体现在给定拓扑空间范畴中的态射 $f\colon X \to Y$，我们可以得到

$$f_\# := S_k(f)\colon S_k(X) \to S_k(Y)$$

其构造过程由如下交换图保证：

$$\begin{tikzcd} \Delta_k \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f_\#(\sigma)=f\circ\sigma"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

因为 $S_k(X)$ 是自由的，所以只需要考虑生成元 σ 就可以决定整个态射，容易验证这样定义的确实是一个从拓扑空间范畴到 Abel 群范畴的函子.

下面我们可以定义一些边缘算子.

定义 11.6: boundary operation

我们可以定义 ***boundary operation*** $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ 如下：

$$\partial_k : \sigma \mapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_i$$

容易发现 ∂_k 是从 $S_k \to S_{k-1}$ 的一个自然变换，即给定 $f : X \to Y$ 为拓扑空间的态射，则有下图交换

$$\begin{tikzcd}
S_k(X) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\partial_k(X)"'] & S_k(Y) \arrow[d, "\partial_k(Y)"] \\
S_{k-1}(X) \arrow[r, "f_\#"'] & S_{k-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

由于态射都是典范的，很容易验证交换.

下面我们简单介绍一个引理：

引理 11.1

对于 $1 \leq j+1 \leq i \leq k \geq 2$，我们有下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{k-2} \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "\iota_{i-1}"'] & \Delta_{k-1} \arrow[d, "\iota_i"] \\
\Delta_{k-1} \arrow[r, "\iota_j"'] & \Delta_k
\end{tikzcd}$$

证明： 交换图道尽一切：

$$\begin{tikzcd}
(t_0, \cdots, t_{k-2}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (t_0, \cdots, t_{j-1}, 0, t_j, \cdots, t_{k-2}) \arrow[d, mapsto] \\
(t_0, \cdots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \cdots, t_{k-2}) \arrow[r, mapsto] & (\cdots, 0, \cdots, 0, \cdots)
\end{tikzcd}$$

□

现在我们可以说明 $S_\bullet(X)$ 构成一个链复形，这只需要说明下面的定理：

定理 11.1

对 $\sigma\colon \Delta_k \to X$，我们有

$$\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) = 0$$

证明: 直接计算得到

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+j}(\sigma_i)_j \\
&= \sum_{0\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j + \sum_{1\le j+1\le i\le k}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j \\
&= \sum_{0\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j + \sum_{1\le j+1\le i\le k}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_j\circ\iota_{i-1} \\
&= \sum_{0\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j - \sum_{1\le j+1\le i\le k}(-1)^{(i-1)+j}\sigma\circ\iota_j\circ\iota_{i-1} \\
&= \sum_{0\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j - \sum_{0\le s\le t\le k-1}(-1)^{s+t}\sigma\circ\iota_s\circ\iota_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

于是由于所有 σ 是生成元，自然得到

$$\partial_{k-1}\circ\partial_k = 0$$

于是我们可以得到 X 的 **k-singular homology group**:

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X)$$

12 链复形

定义 12.1: chain complex

一个 *Abel* 群的 ***chain complex*** 是一个序列

$$C_\bullet:\ \cdots \to C_{k+1} \to C_k \to C_{k-1} \to \cdots$$

其态射为

$$\partial_k : C_k \to C_{k-1}$$

满足

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

两个链复形之间的 ***chain map*** $f_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ 定义为一族态射

$$f_k : C_k \to C'_k$$

使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "f_k"'] & C_{k-1} \arrow[d, "f_{k-1}"] \\
C'_k \arrow[r, "\partial'_k"'] & C'_{k-1}
\end{tikzcd}$$

换言之可以说一个链复形是一个从整数序范畴到 *Abel* 群范畴的协变函子，满足相邻态射复合为 0，而 *chain map* 就是函子间的自然变换.

Remark 12.1

所有的链复形和 chain maps 构成了一个范畴，

定义 12.2

$C_\bullet$ 是一个链复形，我们定义 ***k-cycle*** 和 ***k-boundary*** 为:

$$Z_k(C_\bullet) := \operatorname{Ker} \partial_k, \quad B_k(C_\bullet) := \operatorname{Im} \partial_{k+1}$$

由于两次边缘算子复合为零，自然有 $B_k(C_\bullet) \subseteq Z_k(C_\bullet)$，于是可以定义 ***k-homology group*** 为:

$$H_k(C_\bullet) := Z_k(C_\bullet)/B_k(C_\bullet)$$

如果给定一个 chain map $f_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$，通过追图我们很容易知道

$$f_k(Z_k(C_\bullet)) \subseteq Z_k(C'_\bullet), \quad f_k(B_k(C_\bullet)) \subseteq B_k(C'_\bullet)$$

于是自动可以得到一个 f 所诱导的在同调群上的态射

$$H_k(f)\colon H_k(C_\bullet) \to H_k(C'_\bullet)$$

实际上我们可以很容易验证 H_k 是一个从链复形范畴到 Abel 群范畴的协变函子.

定义 12.3

X 是拓扑空间，我们令

$$\pi_0(X) := \textit{the set of path-connected components of } X$$

容易验证 π_0 是从拓扑空间范畴到集合范畴的一个协变函子.

定理 12.1

存在函子间的自然同构

$$T\colon \mathbb{Z}^{\oplus \pi_0(-)} \to H_0(-)$$

证明: 考虑

$$S_1(X) \to S_0(X) \to 0$$

注意到

$$H_0(X) = S_0(X)/\mathrm{Im}\,\partial_1 = \mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}(\Delta_0, X)}/\partial_1(\mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}(\Delta_1, X)})$$

因为 $\Delta_0 \to X$ 相当于 X 中的点，$\Delta_1 \to X$ 相当于 X 中的路，而对于任意的 $\gamma \in \mathrm{Hom}(\Delta_1, X)$，都有

$$\partial\gamma = \gamma \circ \iota_0 - \gamma \circ \iota_1 = \gamma(1) - \gamma(0)$$

于是

$$\partial_1(\mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}(\Delta_1, X)}) = \mathbb{Z}^{\oplus\{\gamma(1)-\gamma(0) | \gamma \in X^{\Delta_1}\}}$$

所以在 $H_0(X)$ 中 $[\alpha] = [\beta]$ 当且仅当有

$$\alpha - \beta = \sum(\gamma(1) - \gamma(0)) = (\sum \gamma)(1) - (\sum \gamma)(0)$$

即 α 与 β 在同一个道路连通分支里面，所以容易构造出自然变换并说明是自然同构. $\square$

13 Singular homology of a star-shaped set in $\mathbb{R}^n$

定义 13.1: star-shaped

我们称 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集 X 是 ***star-shaped***，如果 $0 \in X$，并且如果 $p \in X$，则对任意 $t \in [0, 1]$，有 $tp \in X$.

下面的篇幅我们来计算 Star-shaped set 的同调群. 方便起见，我们令

$$H_k(X) := H_k(S_\bullet(X))$$

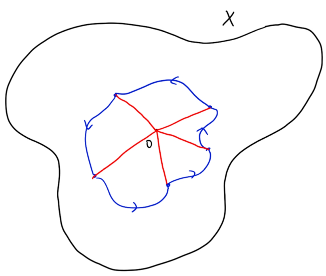
$Z_k(X), B_k(X)$ 同理，考虑

$$S_2(X) \to S_1(X) \to S_0(X)$$

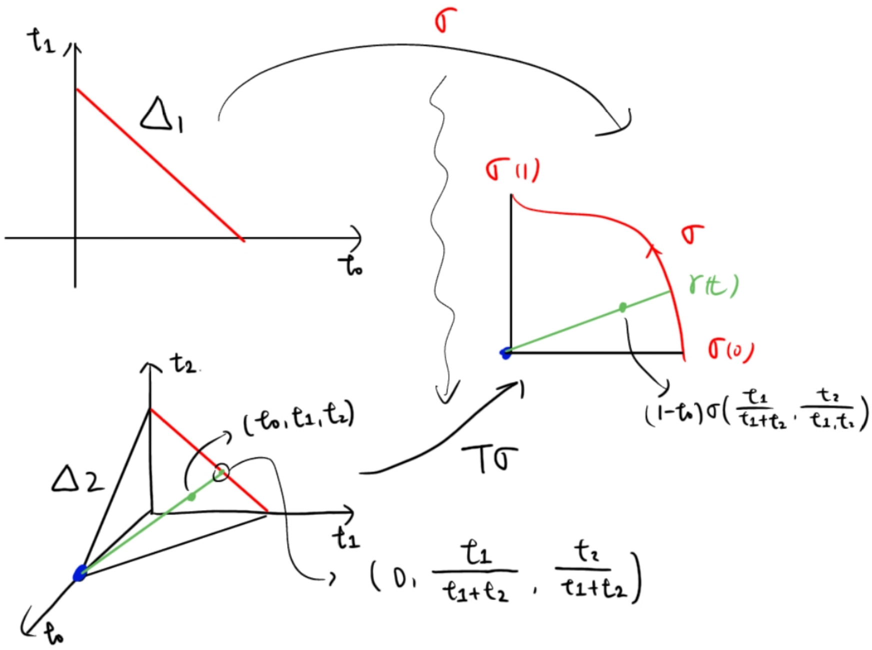
我们知道

$$Z_1(X) = \operatorname{Ker} \partial_1 = \left\{ \sum \gamma \mid \sum (\gamma(1) - \gamma(0)) = 0 \right\} = \text{set of closed paths}$$

而 $B_1(X) = \operatorname{Im} \partial_2$ 为 X 中的奇异 2-单形，即曲边三角形生成的自由群. 观察下图我们容易发现闭路可以被拆分成三角形，所以促使我们思考同调群 $H_1(X) = 0$.



那现在就是想构造一个这样子的映射，即从 Δ_2 到一个如图中分割的"三角形"，我们可以通过如下的方式来构造：



假设被切割的那一部分 path 为 $\sigma\colon \Delta_1 \to X$，我们可以构造一个 $T\sigma\colon \Delta_2 \to X$ 为：

$$T\sigma(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} (1-t_0)\sigma\left(\dfrac{t_1}{t_1+t_2}, \dfrac{t_2}{t_1+t_2}\right), & t_0 \neq 1 \\ 0, & (t_0, t_1, t_2) = (1, 0, 0) \end{cases}$$

我们可以进一步推广到一般情况，即给定 $\sigma\colon \Delta_k \to X$，我们构造 $T\sigma\colon \Delta_{k+1} \to X$ 为

$$T\sigma(t_0, \cdots, t_k) = \begin{cases} (1-t_0)\sigma\left(\dfrac{t_1}{1-t_0}, \cdots, \dfrac{t_k}{1-t_0}\right), & t_0 \neq 1 \\ 0, & (t_0, t_1, t_2) = (1, 0, 0) \end{cases}$$

可以观察到

$$(T\sigma)_0 = (T\sigma) \circ \iota_0 = \sigma, \quad (T\sigma)_i = T(\sigma_{i-1}), i = 1, \cdots, k+1$$

于是有

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}(T\sigma) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i (T\sigma)_i \\ &= \sigma + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i T\sigma_{i-1} \\ &= \sigma - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i T\sigma_i \\ &= \sigma - T(\partial_k \sigma) \end{aligned}$$

于是有

$$\sigma = (\partial_{k+1} T + T\partial_k)\sigma$$

若 $\sigma \in Z_k(X)$，有 $\partial_k(\sigma) = 0$，则有

$$\sigma = (\partial_{k+1} T + T\partial_k)\sigma = \partial_{k+1}(T\sigma) \in B_k(X)$$

所以我们得到当 $k \geq 1$ 时，有

$$H_k(X) = 0$$

Remark 13.1
这里实际上说明了 id 与 0 同伦，从而同调群与 0 态射诱导的同调群一样，所以是 0.

14 链同伦

在上一节中，我们定义了一个 $T\colon S_k \to S_{k+1}$，画成交换图就是下图：

$$\begin{tikzcd}
& S_k(X) \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[dl, "T_k"'] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "id"] & S_{k-1}(X) \arrow[dl, "T_{k-1}"] \\
S_{k+1}(X) \arrow[r, "\partial_{k+1}"'] & S_k(X) &
\end{tikzcd}$$

在其中我们有

$$id - 0 = id = T_{k-1}\partial_k + \partial_{k+1}T_k$$

这给出了链同伦的想法：

定义 14.1: chain homotopy

$C_\bullet$ 与 $C'_\bullet$ 是两个链复形，给定两个 *chain map*

$$(f_0)_\bullet, (f_1)_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$$

一个从 $(f_0)_\bullet$ 到 $(f_1)_\bullet$ 的 ***chain homotopy*** $h_\bullet$ 由一族群态射 $h_k\colon C_k \to C'_{k+1}$ 构成，满足

$$(f_1)_k - (f_0)_k = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd}
& C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[dl, "h_k"'] \arrow[d, shift right, "(f_0)_k"'] \arrow[d, shift left, "(f_1)_k"] & C_{k-1} \arrow[dl, "h_{k-1}"] \\
C'_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"'] & C'_k &
\end{tikzcd}$$

记为 $h_\bullet\colon (f_0)_\bullet \simeq (f_1)_\bullet$.

定理 14.1

如果给定

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C'_\bullet \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & C''_\bullet
\end{tikzcd}$$

满足 $F\colon f \simeq g, G\colon h \simeq k$，则有 $hf \simeq kg$.

证明: 我们需要尝试构造一个同伦，首先观察下面的交换图来寻找可以构造什么:

$$
\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[r] \arrow[dl, "F_n"'] \arrow[d, "f_n{,}g_n"] \arrow[ddl, dashed] & C_{n-1} \arrow[dl, "F_{n-1}"'] \arrow[d, "f_{n-1}{,}g_{n-1}"] \arrow[ddl, dashed] \\
C'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{n+1}{,}k_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r] \arrow[dl, "G_n"'] \arrow[d, "h_n{,}k_n"] & C'_{n-1} \arrow[dl, "G_{n-1}"'] \\
C''_{n+1} \arrow[r] & C''_n &
\end{tikzcd}
$$

我们的目的是说明 $h_nf_n - k_ng_n$ 可以某个同伦表示，注意到

$$
\begin{aligned}
h_nf_n - k_ng_n &= h_n(f_n - g_n) + (h_n - k_n)g_n \\
&= h_n(\partial'_{n+1}F_n + F_{n-1}\partial_n) + (\partial''_{n+1}G_n + G_{n-1}\partial'_n)g_n \\
&= h_n\partial'_{n+1}F_n + h_nF_{n-1}\alpha_n + \partial''_{n+1}G_ng_n + G_{n-1}\partial'_ng_n
\end{aligned}
$$

上面式子中可以看到的从 $C_n \to C''_{n+1}$ 的态射有

$$h_{n+1}F_n, \quad G_ng_n$$

本着多收集信息肯定没错的原则，我们构造

$$H_n = h_{n+1}F_n + G_ng_n$$

现在来计算一下

$$
\begin{aligned}
\partial''_{n+1}H_n + H_{n-1}\partial_n &= \partial''_{n+1}(h_{n+1}F_n + G_ng_n) + (h_nF_{n-1} + G_{n-1}g_{n-1})\partial_n \\
&= \partial''_{n+1}h_{n+1}F_n + \partial''_{n+1}G_ng_n + h_nF_{n-1}\partial_n + G_{n-1}g_{n-1}\partial_n
\end{aligned}
$$

则想要 $h_nf_n - k_ng_n = \partial''_{n+1}H_n + H_{n-1}\partial_n$，去掉两边一样的项，等价于证明

$$h_n\partial'_{n+1}F_n + G_{n-1}\partial'_ng_n = \partial''_{n+1}h_{n+1}F_n + G_{n-1}g_{n-1}\partial_n$$

这等价于证明

$$G_{n-1}(\partial'_ng_n - g_{n-1}\partial_n) = (\partial''_{n+1}h_{n+1} - h_n\partial'_{n+1})F_n$$

注意到 f, g 都是 chain map，所以有

$$\partial'_ng_n = g_{n-1}\partial_n, \quad \partial''_{n+1}h_{n+1} = h_n\partial'_{n+1}$$

故上式左右两边都是 0，从而显然成立，于是我们证明了同伦. □

定理 14.2: 链同伦诱导同调群上的相同作用

如果 $(f_0)_\bullet \simeq (f_1)_\bullet \colon C_\bullet \to C'_\bullet$，则有

$$(f_0)_* = (f_1)_* \colon H_k(C_\bullet) \to H_k(C'_\bullet)$$

证明: 简单运算即可. $\square$

15 拓扑同伦诱导链同伦

本节的想法是给定在拓扑空间范畴上的一个同伦

$$H\colon f_0 \simeq f_1\colon X \to Y$$

能否诱导链复形的同伦：

$$(f_0)_\# \simeq (f_1)_\#\colon S_\bullet(X) \to S_\bullet(Y)$$

要解决这个问题，我们只需要处理 $Y = X \times [0,1]$ 的情况就可以了，我们考虑交换图：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_0"'] \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_0"'] & X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

其中

$$i_1(x) = (x,1), \quad i_0(x) = (x,0)$$

如果我们有 $h_\bullet\colon (i_0)_\# \simeq (i_1)_\#$，则我们有

$$(i_1)_\# - (i_0)_\# = \partial h + h\partial$$

于是我们注意到

$$\begin{aligned}(f_1)_\# - (f_0)_\# &= (Hi_1)_\# - (Hi_0)_\# \\ &= H_\#((i_1)_\# - (i_0)_\#) \\ &= H_\#(\partial h + h\partial) \\ &= \partial(H_\# h) + (H_\# h)\partial\end{aligned}$$

于是得到 $H_\# h\colon (f_1)_\# \simeq (f_0)_\#$. 所以我们下面仅研究 $Y = X \times [0,1]$ 的情况就充足.

定理 15.1

存在一族自然变换 $h_k\colon S_k \to S_{k+1}(- \times I)$ 使得

$$(i_1)_\# - (i_0)_\# = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

证明: 我们分五步来证明这个定理.

(1) 我们先说明如果这样的 $\{h_k\}$ 存在，那么这些 h_k 完全由 $\{h_k(\Delta_k) id_{\Delta_k}\}$ 所决定. 这里面是 Yoneda Lemma 的思想，下面交换图说明了这个道理(注意 $\sigma\colon \Delta_k \to X$ 是 $S_k(X)$ 的生成元，并且相互

自由，所以只需要决定生成元上的作用就可以，后面会不断使用这个思想，下不再赘述):

$$
\begin{tikzcd}
S_k(\Delta_k) \arrow[rrr, "\sigma_\#"] \arrow[ddd, "h_k(\Delta_k)"'] & & & S_k(X) \arrow[ddd, "h_k(X)"] \\
& id_{\Delta_k} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \sigma\colon \Delta_k \to X \arrow[d, mapsto] & \\
& h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} \arrow[r, mapsto] & (\sigma\times id_I)_\# h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} & \\
S_{k+1}(\Delta_k\times I) \arrow[rrr, "(\sigma\times id_I)_\#"'] & & & S_{k+1}(X\times I)
\end{tikzcd}
$$

(2) 如果我们取 $\xi_k \in S_{k+1}(\Delta_k\times I)$ 来表示 $h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$，并且定义

$$h_k(X)\colon S_k(X)\to S_{k+1}(X\times I),\quad \sigma\mapsto(\sigma\times id_I)_\#\xi_k$$

则可以说明

$$h_k\colon S_k\to S_{k+1}(-\times I)$$

是一个自然变换. 下面交换图告诉你一切(给定 $f\colon X\to Y$):

$$
\begin{tikzcd}
& & S_k(\Delta_k) \arrow[rr, "h_k(\Delta_k)"] \arrow[ddll, "\sigma_\#"'] \arrow[ddddll, "(f\circ\sigma)_\#"] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & S_{k+1}(\Delta_k\times I) \arrow[ddl, "(\sigma\times id_I)_\#"'] \arrow[ddddl, "(f\times id_I)_\#(\sigma\times id_I)_\#"] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & \\
& & & id_{\Delta_k} \arrow[rr, mapsto] \arrow[ddll, mapsto] \arrow[ddddll, mapsto] & & \xi_k \arrow[ddl, mapsto] \arrow[ddddl, mapsto] \\
S_k(X) \arrow[rrr, "h_k(X)"] \arrow[dd, "f_\#"] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & & S_{k+1}(X\times I) \arrow[dd, "(f\times id_I)_\#"] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & \\
& \sigma \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & & (\sigma\times id_I)_\#\xi_k \arrow[dd, mapsto] & \\
S_k(Y) \arrow[rrr, "h_k(Y)"] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & & S_{k+1}(Y\times I) \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & \\
& f\circ\sigma \arrow[rrr, mapsto] & & & ((f\circ)\times id_I)_\#\xi_k &
\end{tikzcd}
$$

(3) 我们断言如果对任意的 k，h_{k-1} 和 h_k 都已经按上面方式定义好了

$$
\begin{tikzcd}
& S_k(\Delta_k) \arrow[r, "\partial_k(\Delta_k)"] \arrow[dl, "h_k(\Delta_k)"'] \arrow[d, "i_1(\Delta_k)_\#-i_0(\Delta_k)_\#"] & S_{k-1}(\Delta_k) \arrow[dl, "h_{k-1}(\Delta_k)"] \\
S_{k+1}(\Delta_k\times I) \arrow[r, "\partial_{k+1}(\Delta_k\times I)"'] & S_k(\Delta_k\times I) &
\end{tikzcd}
$$

并且 $\xi_k = h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$ 满足

$$(\bigstar)\quad \partial_{k+1}(\Delta_k\times I)h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} = i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$$

则有

$$\partial_{k+1}h_k = (i_1)_\# - (i_0)_\# - h_{k-1}\partial_k$$

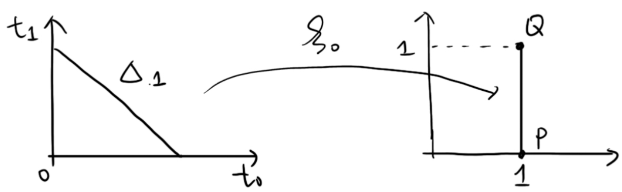
下面的交换图告诉你一切：

$$\begin{tikzcd}
 & S_k(\Delta_k) \arrow[rr, "\partial_k(\Delta_k)"] \arrow[dl, "h_k(\Delta_k)"'] \arrow[dr, "(i_1(\Delta_k))_\# - (i_2(\Delta_k))_\#"] \arrow[dd, "\sigma_\#"] & & S_{k-1}(\Delta_k) \arrow[dl, "h_{k-1}(\Delta_k)"] \arrow[dd, "\sigma_\#"] \\
S_{k+1}(\Delta_k \times I) \arrow[rr, "\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)"] \arrow[dd, "(\sigma\times 1_I)_\#"] & & S_k(\Delta_k \times I) \arrow[dd, "(\sigma\times 1_I)_\#"] & \\
 & S_k(X) \arrow[rr, "\partial_k(X)"] \arrow[dl, "h_k(X)"'] \arrow[dr, "(i_1(X))_\# - (i_2(X))_\#"] & & S_{k-1}(X) \arrow[dl, "h_{k-1}(X)"] \\
S_{k+1}(X \times I) \arrow[rr, "\partial_{k+1}(X\times I)"'] & & S_k(X \times I) &
\end{tikzcd}$$

(4) 当 $k=0$ 时，我们把具体的态射给构造出来以说明存在性：

$$\begin{tikzcd}
 & S_0(\Delta_0) \arrow[r] \arrow[dl, "h_0(\Delta_0)"'] \arrow[d, "i_1(\Delta_0)_\# - i_0(\Delta_0)_\#"] & 0 \arrow[dl, "0"] \\
S_1(\Delta_0 \times I) \arrow[r, "\partial_1(\Delta_0 \times I)"'] & S_0(\Delta_0 \times I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

还是考虑 id_{Δ_0} 送到 $S_0(\Delta_0 \times I)$ 中是什么，由于 $\Delta_0 \to X$ 就是一个点，所以通过 $i_1(\Delta_0)_\# - i_0(\Delta_0)_\#$ 送下去之后就是两个点相减，我们记为 $Q-P$，则我们需要找到一个 $\xi_0 \in S_1(\Delta_0 \times I)$ 通过边缘算子送过去就是 $Q-P$.



所以我们直接构造

$$\xi_0 \colon (t_0, t_1) \mapsto (1, t_1)$$

从而满足

$$\partial_1 h_0 = (i_1)_\# - (i_0)_\# - h_{-1}\partial_0$$

(5) 最后我们假设已经定义了所有的满足条件的 $h_l(l < k)$，现在我们来构造 h_k，我们的目的就是构造出 ξ_k 来满足 (★)，现在考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
 & S_k(\Delta_k) \arrow[r, "\partial_k(\Delta_k)"] \arrow[dl, "h_k(\Delta_k)"'] \arrow[d, "i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#"] & S_{k-1}(\Delta_k) \arrow[dl, "h_{k-1}(\Delta_k)"] \\
S_{k+1}(\Delta_k \times I) \arrow[r, "\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)"'] & S_k(\Delta_k \times I) \arrow[r, "\partial_k(\Delta_k \times I)"'] & S_{k-1}(\Delta_k \times I)
\end{tikzcd}$$

我们只需要说明存在 ξ_k 使得

$$\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)\xi_k = \partial_{k+1}(\Delta_k \times I)h_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} = i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$$

也就是

$$i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} \in \operatorname{Im}\partial_{k+1}(\Delta_k \times I)$$

注意到 $\Delta_k \times I$ 显然是 Star-shaped，于是其同调群为 $0(k \geq 1)$，于是在此处正合，从而

$$\operatorname{Im}\partial_{k+1}(\Delta_k \times I) = \operatorname{Ker}\partial_k(\Delta_k \times I)$$

所以我们只需要说明

$$\partial_k(\Delta_k \times I)\left(i_1(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\# id_{\Delta_k} - h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}\right) = 0$$

观察下图

$$\begin{tikzcd}
S_k(\Delta_k) \arrow[r, "\partial_k(\Delta_k)"] \arrow[d, "i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#"'] & S_{k-1}(\Delta_k) \arrow[r, "\partial_{k-1}(\Delta_k)"] \arrow[dl, "h_{k-1}(\Delta_k)"] \arrow[d, "i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#"] & S_{k-2}(\Delta_k) \arrow[dl, "h_{k-2}(\Delta_k)"] \\
S_k(\Delta_k \times I) \arrow[r, "\partial_k(\Delta_k \times I)"'] & S_{k-1}(\Delta_k \times I) &
\end{tikzcd}$$

归纳假设告诉我们

$$\partial_k h_{k-1} = (i_1)_\# - (i_0)_\# - h_{k-2}\partial_{k-1}$$

所以

$$\partial_k(\Delta_k \times I)h_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} = i_1(\Delta_k)_\#\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} - i_0(\Delta_k)_\#\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k} - h_{k-2}(\Delta_k)\partial_{k-1}(\Delta_k)\partial_k(\Delta_k)id_{\Delta_k}$$

所以只需要证明

$$\partial_k(\Delta_k \times I)\left(i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#\right)(id_{\Delta_k}) = (i_1(\Delta_k)_\# - i_0(\Delta_k)_\#)\partial_k(\Delta_k)(id_{\Delta_k})$$

而这时 $(i_1)_\#, (i_0)_\#$ 作为 chain map 所自动得到的，得证.

□

16 Acyclic Model Theorems

所谓 Acyclic Model Theorem 实际上源于下面的问题：如果我们有一族从 $\mathscr{C}$ 到 Abel 群范畴的协变函子，和它们之间的自然变换，使得下图有 $\partial_{k-1}\circ\partial_k=0$ 并且 $\partial'_{k-1}\circ\partial'_k=0$

$$\begin{tikzcd}
K_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, dashed, "\exists ? f_k"'] & K_{k-1} \arrow[r, "\partial_{k-1}"] \arrow[d, "f_{k-1}"] & K_{k-2} \arrow[d, "f_{k-2}"] \\
K'_k \arrow[r, "\partial'_k"'] & K'_{k-1} \arrow[r, "\partial'_{k-1}"'] & K'_{k-2}
\end{tikzcd}$$

则是否存在 f_k 使得下图交换？类似的问题是如果 $\partial_{k-1}\circ\partial_k=0$ 并且 $\partial'_{k-1}\circ\partial'_k=0$ 并且 $f_{k-1}=\partial'_k h_{k-1}+h_{k-2}\partial_{k-1}$

$$\begin{tikzcd}
 & K_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "f_k"] \arrow[dl, dashed, "\exists ? h_k"'] & K_{k-1} \arrow[r, "\partial_{k-1}"] \arrow[d, "f_{k-1}"] \arrow[dl, "h_{k-1}"'] & K_{k-2} \arrow[dl, "h_{k-2}"'] \\
K'_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"'] & K'_k \arrow[r, "\partial'_k"'] & K'_{k-1} &
\end{tikzcd}$$

则是否存在 h_k 使得

$$f_k=\partial'_{k+1}h_k+h_{k-1}\partial_k$$

为了处理这两个问题，我们先给出一些定义.

定义 16.1

给定一个范畴 $\mathscr{C}$，一个函子 $F\colon\mathscr{C}\to(\mathrm{Ab})$，我们选出一个子集 $\mathcal{M}\subseteq\mathrm{ob}(\mathscr{C})$，取

$$\mathcal{U}=\{U_M\subseteq F(M)\mid M\in\mathcal{M}\}$$

定义一个函子

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{\mathcal{U}}\colon\mathscr{C}&\to(\mathrm{Ab})\\ x&\mapsto\mathbb{Z}^{\bigoplus\{(\varphi,m)\mid\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,X),m\in U_M,M\in\mathcal{M}\}}\end{aligned}$$

在态射上的作用为：

$$\widetilde{F}^{\mathcal{U}}(f)\colon\widetilde{F}^{\mathcal{U}}(X)\to\widetilde{F}^{\mathcal{U}}(Y),\quad(\varphi,m)\mapsto(f\circ\varphi,m)$$

我们还有一个自然变换

$$\begin{aligned}\pi\colon\widetilde{F}^{\mathcal{U}}&\to F\\ \widetilde{F}^{\mathcal{U}}(X)&\to F(X)\\ (\varphi,m)&\mapsto F(\varphi)(m)\end{aligned}$$

我们称 F 是 ***$\mathcal{U}$-expressible***，如果 π 是一个自然同构，我们称 F 是 ***weakly $\mathcal{U}$-expressible***，如果存在一个自然变换 $\tau\colon F\to\widetilde{F}^{\mathcal{U}}$，使得 $\pi\circ\tau=1$.

下面我们来陈述 Acyclic Model Theorem：

定理 16.1: Acyclic Model Theorem - A

如果 K_k 是 $\mathcal{U}$-*expressible* 的，并且对任意的 $M \in \mathcal{M}$ 都有

$$K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k-1}(M)} K'_{k-2}(M)$$

正合，则存在 f_k.

定理 16.2: Acyclic Model Theorem - B

如果 K_k 是 $\mathcal{U}$-*expressible* 的，并且对任意的 $M \in \mathcal{M}$ 都有

$$K'_{k+1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k+1}(M)} K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M)$$

正合，则存在 h_k.

实际上还能加强：

定理 16.3: Acyclic Model Theorem - A plus

如果 K_k 是 *weakly* $\mathcal{U}$-*expressible* 的，并且对任意的 $M \in \mathcal{M}$ 都有

$$K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k-1}(M)} K'_{k-2}(M)$$

正合，则存在 f_k.

定理 16.4: Acyclic Model Theorem - B plus

如果 K_k 是 *weakly* $\mathcal{U}$-*expressible* 的，并且对任意的 $M \in \mathcal{M}$ 都有

$$K'_{k+1}(M) \xrightarrow{\partial'_{k+1}(M)} K'_k(M) \xrightarrow{\partial'_k(M)} K'_{k-1}(M)$$

正合，则存在 h_k.

我们证明 A 版本和 B-plus 版本以学习两种证明方法，均可迁移到 A-plus 和 B.

下面我们先证明 A：

证明: 当 π 是自然同构的时候，我们注意到

$$K_k(X) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,X), u \in U_M \subseteq K_k(M), M \in \mathcal{M}} \mathbb{Z}K_k(\varphi)u$$

是自由生成的，所以我们仿照上一节的思路来证明.

(1) 对于 $M \in \mathcal{M}$，$u \in U_M \subseteq K_k(M)$，考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
K_k(M) \arrow[r, "\partial_k(M)"] \arrow[d, dashed] & K_{k-1}(M) \arrow[r, "\partial_{k-1}(M)"] \arrow[d, "f_{k-1}(M)"] & K_{k-2}(M) \arrow[d, "f_{k-2}(M)"] \\
K'_k(M) \arrow[r, "\partial'_k(M)"'] & K'_{k-1}(M) \arrow[r, "\partial'_{k-1}(M)"'] & K'_{k-2}(M)
\end{tikzcd}$$

想构造出 f_k，首先我们至少要对 u 满足交换律：

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, mapsto, "\partial_k(M)"] \arrow[d, mapsto, dashed] & \partial_k(M)u \arrow[d, mapsto, "f_{k-1}(M)"] \\
\xi_u \arrow[r, mapsto, "\partial'_k(M)"'] & f_{k-1}(M)\partial_k(M)u
\end{tikzcd}$$

也就是说要存在一个 $\xi_u \in K'_k(M)$ 满足

$$\partial'_k(M)\xi_u = f_{k-1}(M)\partial_k(M)u$$

等价于说

$$f_{k-1}(M)\partial_k(M)u \in \operatorname{Im}\partial'_k(M) = \operatorname{Ker}\partial'_{k-1}(M)$$

注意到

$$\partial'_{k-1}(M)f_{k-1}(M)\partial_k(M)u = f_{k-2}(M)\partial_{k-1}(M)\partial_k(M)u = 0$$

所以 ξ_u 是存在的.

(2) 现在选定我们的 ξ_u. 假设 f_k 确实是自然变换，考虑 $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M, X)$，$u \in U_M$，我们来说明 f_k 完全由 $\xi_u = f_k(M)u$ 来决定.

$$\begin{tikzcd}
K_k(M) \arrow[rr, "K_k(\varphi)"] \arrow[dd, "f_k(M)"'] & & K_k(X) \arrow[dd, "f_k(X)"] & \\
& u \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & K_k(\varphi)u \arrow[dd, mapsto] \\
K'_k(M) \arrow[rr, "K'_k(\varphi)"'] & & K'_k(X) & \\
& \xi_u \arrow[rr, mapsto] & & K'_k(\varphi)\xi_u
\end{tikzcd}$$

交换图告诉我们

$$f_k(X)K_k(\varphi)(u) = K'_k(\varphi)\xi_u$$

因为 $K_k(\varphi)(u)$ 是 $K_k(X)$ 的生成元，所以在生成元上的作用完全决定了整个的作用，故 f_k 被决定.

(3) 我们现在来说明按照

$$f_k(X)\colon K_k(\varphi)(u) \mapsto K'_k(\varphi)\xi_u$$

定义的 f_k 确实是一个自然变换，从而结论得证. 所以给定 $g\colon X \to Y$，我们要说明下图最前面的正方形面交换

$$\begin{tikzcd}
K_k(M) \arrow[dr, "K_k(\varphi)"] \arrow[drr, "K_k(g\circ\varphi)"] \arrow[dd, "f_k(M)"] & & \\
& K_k(X) \arrow[r, "K_k(g)"] \arrow[dd, "f_k(X)"] & K_k(Y) \arrow[dd, "f_k(Y)"] \\
K'_k(M) \arrow[dr, "K'_k(\varphi)"] \arrow[drr, "K'_k(g\circ\varphi)"] & & \\
& K'_k(X) \arrow[r, "K'_k(g)"] & K'_k(Y)
\end{tikzcd}$$

要说明交换只需要说明在生成元上交换即可，注意蓝色面在生成元 u 上是交换的，从而我们考虑元素的图表：

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, mapsto, "K_k(\varphi)"] \arrow[drr, mapsto, "K_k(g\circ\varphi)"] \arrow[dd, mapsto, "f_k(M)"] & & \\
& K_k(\varphi)u \arrow[r, mapsto, "K_k(g)"] \arrow[dd, mapsto, "f_k(X)"] & K_k(g\circ\varphi)u \arrow[dd, mapsto, "f_k(Y)"] \\
\xi_u \arrow[dr, mapsto, "K'_k(\varphi)"] \arrow[drr, mapsto, "K'_k(g\circ\varphi)"] & & \\
& K'_k(\varphi)\xi_u \arrow[r, mapsto, "K'_k(g)"] & K'_k(g\circ\varphi)\xi_u
\end{tikzcd}$$

由于红面关于 u 也是交换的，所以确实是交换的.

(4) 我们最后来说明定义的 f_k 确实满足函子上的交换图表，只需要在生成元上验证，即对于任意的 $X \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, X)$ 都有下图在生成元 $K_k(\varphi)u$ 上交换

$$\begin{tikzcd}
K_k(M) \arrow[rr, "\partial_k(M)"] \arrow[dr, "K_k(\varphi)"] \arrow[dd, "f_k(M)"] & & K_{k-1}(M) \arrow[dr, "K_{k-1}(\varphi)"] \arrow[dd, "f_{k-1}(M)"] & \\
& K_k(X) \arrow[rr, "\partial_k(X)"] \arrow[dd, "f_k(X)"] & & K_{k-1}(X) \arrow[dd, "f_{k-1}(X)"] \\
K'_k(M) \arrow[rr, "\partial'_k(M)"] \arrow[dr, "K'_k(\varphi)"] & & K'_{k-1}(M) \arrow[dr, "K'_{k-1}(\varphi)"] & \\
& K'_k(X) \arrow[rr, "\partial'_k(X)"] & & K'_{k-1}(X)
\end{tikzcd}$$

我们只需要把元素的交换图画出来就立刻得到结论:

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[rr, mapsto, "\partial_k(M)"] \arrow[dr, mapsto, "K_k(\varphi)"] \arrow[dd, mapsto, "f_k(M)"'] & & \partial_k(M)u \arrow[dr, mapsto, "K_{k-1}(\varphi)"] \arrow[dd, mapsto, "f_{k-1}(M)" near start] & \\
& K_k(\varphi)u \arrow[rr, mapsto, "\partial_k(X)"] \arrow[dd, mapsto, "f_k(X)" near end] & & \partial_k(X)K_k(\varphi)u \arrow[dd, mapsto, "f_{k-1}(X)"] \\
\xi_u \arrow[rr, mapsto, "\partial'_k(M)"] \arrow[dr, mapsto, "K'_k(\varphi)"] & & f_{k-1}(M)\partial_k(M)u \arrow[dr, mapsto, "K'_{k-1}(\varphi)"] & \\
& K'_k(\varphi)\xi_u \arrow[rr, mapsto, "\partial'_k(X)"] & & ?
\end{tikzcd}
$$

问号处是说前面的图交换当且仅当

$$\partial'_k(X)K'_k(\varphi)\xi_u = f_{k-1}(X)\partial_k(X)K_k(\varphi)u$$

注意到除了前表面其他五个面都是关于 u 交换的，于是交换性立刻得到.

$\square$

我们发现在 A 的证明中，完全没有用到 $\widetilde{K_k}^{\mathcal{U}}$ 这样子的东西，实际上只在第一步中利用 π 是自然同构来说明 $K_k(X)$ 是一个由若干元素生成的自由群，如果我们有自由的条件(满足一定自然性)，那确实就不需要这个 π 和其他构造，所以可以对 $\mathcal{U}$-expressible 的条件进行一定的减弱，我们来通过对定理 B-plus 的证明来说明这一点.

证明: 我们还是分步骤来证明:

(1) 首先我们来说明可以对于 $u \in U_M$ 来定义 ξ_u(希望这个东西就是 $h_k(M)u$) 使得满足

$$\partial'_{k+1}(M)\xi_u = f_k(M)u - h_{k-1}(M)\partial_k(M)u$$

我们考虑交换图:

$$
\begin{tikzcd}
& K_k(M) \arrow[r, "\partial_k(M)"] \arrow[dl, dashed, "h_k(M)"'] \arrow[d, "f_k(M)"] & K_{k-1}(M) \arrow[r, "\partial_{k-1}(M)"] \arrow[dl, "h_{k-1}(M)"'] \arrow[d, "f_{k-1}(M)"] & K_{k-2}(M) \arrow[dl, "h_{k-2}(M)"'] \\
K'_{k+1}(M) \arrow[r, "\partial'_{k+1}(M)"'] & K'_k(M) \arrow[r, "\partial'_k(M)"'] & K'_{k-1}(M) &
\end{tikzcd}
$$

由于下面的行是正合的，所以要说明

$$f_k(M)u - h_{k-1}(M)\partial_k(M)u = \partial'_{k+1}(M)\xi_u \in \mathrm{Im} = \mathrm{Ker}$$

只需要说明

$$\partial'_k(M)\left(f_k(M)u - h_{k-1}(M)\partial_k(M)u\right) = 0$$

这等价于说明

$$f_{k-1}(M)\partial_k(M)u=\partial'_k(M)h_{k-1}(M)\partial_k(M)u+0=\partial'_k(M)h_{k-1}(M)\partial_k(M)u+h_{k-2}(M)\partial_{k-1}(M)\partial_k(M)u$$

这利用 $f_{k-1}=h_{k-2}\partial_{k-1}+\partial'_k h_{k-1}$ 立刻得到. 于是所需要的 ξ_u 是存在的.

(2) 我们定义一个从 $\widetilde{K}_k^{\mathcal{U}}\to K'_{k+1}$ 的自然变换 $\widetilde{h_k}$, 定义如下:

$$\begin{aligned}\widetilde{h_k}(X)\colon \widetilde{K}_k^{\mathcal{U}}(X) &\to K'_{k+1}(X)\\ (\varphi,u) &\mapsto K'_{k+1}(\varphi)\xi_u\end{aligned}$$

定义的合理性利用如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K_k}^{\mathcal{U}}(X) \arrow[rr, "\pi(X)"] \arrow[dd, dashed] & & K_k(X) \arrow[dll] & \\
& (\varphi,u) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto, dashed] & & K_k(\varphi)u \arrow[dll] \\
K'_{k+1}(X) & & & \\
& K'_{k+1}(\varphi)\xi_u & &
\end{tikzcd}$$

现在我们来说明这确实是一个自然变换, 只需要对于 $g\colon X\to Y$ 验证下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K_k}^{\mathcal{U}}(X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & K'_{k+1}(X) \arrow[dd] & \\
& (\varphi,u) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & K'_{k+1}(\varphi)\xi_u \arrow[dd, mapsto] \\
\widetilde{K_k}^{\mathcal{U}}(Y) \arrow[rr] & & K'_{k+1}(Y) & \\
& (g\circ\varphi,u) \arrow[rr, mapsto] & & K'_{k+1}(g\circ\varphi)\xi_u
\end{tikzcd}$$

交换性几乎是显然的.

(3) 我们来说明

$$f_k\circ\pi=\partial'_{k+1}\circ\widetilde{h_k}+h_{k-1}\circ\partial_k\circ\pi$$

给定 $\varphi\colon M \to X$，我们考虑交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & & K_{k-1}(M) \arrow[dr, "K_{k-1}(\varphi)"] \arrow[dddl, "h_{k-1}(M)"'] & \\
 & K_k(M) \arrow[ur, "\partial_k(M)"] \arrow[dr, "K_k(\varphi)"] \arrow[dd, "f_k(M)"] & & K_{k-1}(X) \arrow[dddl, "h_{k-1}(X)"'] \\
 & & K_k(X) \arrow[ur, "\partial_k(X)"] \arrow[dd, "f_k(X)"] & \\
 & K'_k(M) \arrow[dr, "K'_k(\varphi)"] & & \\
K'_{k+1}(M) \arrow[ur, "\partial'_{k+1}(M)"] \arrow[dr, "K'_{k+1}(\varphi)"'] & & K'_k(X) & \\
 & K'_{k+1}(X) \arrow[ur, "\partial'_{k+1}(X)"] & & \widetilde{K_k}^{\mathcal{U}}(X) \arrow[ll, "\widetilde{h_k}(X)"] \arrow[ul, "f_k\circ\pi"'] \arrow[uuul, "\pi(X)"] \arrow[uuuu, "\partial_k(X)\circ\pi(X)"']
\end{tikzcd}$$

我们直接计算

$$\begin{aligned}
f_k(X)\pi(X)(\varphi,u) &= f_k(X)K_k(\varphi)u \\
&= K'_k(\varphi)f_k(M)u \\
&= K'_k(\varphi)(\partial'_{k+1}(M)\xi_u + h_{k-1}(M)\partial_k(M)u) \\
&= K'_k(\varphi)\partial'_{k+1}(M)\xi_u + K'_k(\varphi)h_{k-1}(M)\partial_k(M)u \\
&= \partial'_{k+1}(X)K'_{k+1}(\varphi)\xi_u + h_{k-1}(X)K_{k-1}(\varphi)\partial_k(M)u \\
&= \partial'_{k+1}(X)\widetilde{h_k}(X)(\varphi,u) + h_{k-1}(X)\partial_k(X)K_k(\varphi)u \\
&= \partial'_{k+1}(X)\widetilde{h_k}(X)(\varphi,u) + h_{k-1}(X)\partial_k(X)\pi(X)(\varphi,u)
\end{aligned}$$

所以在生成元上成立，于是恒有

$$f_k(X)\pi(X) = \partial'_{k+1}(X)\widetilde{h_k}(X) + h_{k-1}(X)\partial_k(X)\pi(X)$$

即

$$f_k \circ \pi = \partial'_{k+1} \circ \widetilde{h_k} + h_{k-1} \circ \partial_k \circ \pi$$

我们现在令

$$h_k = \widetilde{h_k} \circ \tau$$

在上式两边复合 τ 就得到

$$f_k = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k$$

定理得证.

$\square$

我们完成了定理证明，无圈模型定理定理实际上相当于为我们提供了一个自动证明机，使得我们不需要再去通过归纳方式手动构造需要的映射，比如我们如果取 $\mathscr{C}$ 为拓扑空间范畴，$K_k = S_k$，

$K'_k = S_k(- \times I)$，$\mathcal{M} = \{\Delta_k\}$，$U_{\Delta_k} = \{id_{\Delta_k}\}$，我们会发现

$$\widetilde{K_k}^{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}^{\oplus\{(\varphi, id_{\Delta_k}) | \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Delta_k \to X)\}} = S_k(X) = K_k(X)$$

于是自然是 $\mathcal{U}$-expressible 的，并且我们注意到 K'_k 在模型 Δ_k 上是 acyclic 的，所以我们直接套用定理 B 就立刻得到了我们上一节的结论.

于是我们看到无圈模型定理的威力在于只要你在最简单的几何对象(即所谓模型，如单纯形)上定义好了某种运算或映射，并且证明了它在这些模型上是同伦正确的，那么这个运算就能自动推广到所有空间，且在同伦意义下是唯一的.

以下是该定理在现代数学中的主要应用(from Gemini-3)：

1. **艾伦伯格-齐尔伯定理 (Eilenberg-Zilber Theorem) —— 积空间的同调**

   这是无圈模型定理最经典的应用，旨在解决积空间 $X \times Y$ 的同调计算问题。

   - **背景**：我们希望建立奇异链复结 $S_*(X \times Y)$ 与张量积复结 $S_*(X) \otimes S_*(Y)$ 之间的联系。
   - **定理应用**：利用模型 (Δ^p, Δ^q) 的无圈性，可以证明存在自然的链同伦等价：

     $$S_*(X \times Y) \simeq S_*(X) \otimes S_*(Y)$$

     其中的链映射包括 Alexander-Whitney 映射（对角线近似）和 Shuffle 映射（洗牌积）。
   - **结果**：这直接导出了代数拓扑中的 Künneth 公式，使得我们可以通过因子的同调群计算积空间的同调群。

2. **上同调运算的构造 (Steenrod Squares / Power Operations)**

   该定理在同伦论的高阶结构构造中起着基础性作用。

   - **背景**：奇异上同调环中的杯积（Cup Product）在链水平上不是严格交换的，即 $u \smile v \neq \pm v \smile u$，它仅是“同伦交换”的。
   - **定理应用**：为了度量这种交换性的缺失，需要构造高阶同伦算子。无圈模型定理保证了存在一个 S_2-等变的链映射逼近对角线映射：

     $$\Delta : S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$$

     由于模型（单纯形）是可缩的，不存在拓扑阻碍，因此可以逐维构造这些高阶同伦。
   - **结果**：这导致了 Steenrod 平方运算 (Sq^i) 的定义，它们是区分同伦类型的精细不变量。

3. **不同同调理论的比较 (Comparison Theorems)**

   当需要证明针对一般空间的两种不同同调定义等价时，该定理提供了标准范式。

   - **背景**：例如比较奇异同调（Singular Homology）与切赫同调（Čech Homology）或 Alexander-Spanier 上同调。

- **定理应用**：只要空间是局部可缩的（例如流形或 CW 复形），我们可以将局部开集视为"模型"。由于两种理论在模型上都归结为点的同调（无圈），因此它们是全局链同伦等价的。
- **结果**：这在德拉姆定理（De Rham Theorem）的证明中至关重要，连接了微分形式的分析性质与空间的拓扑性质。

4. **群同调定义的独立性 (Group Homology)**

   这是无圈模型定理在纯代数语境下的体现。

   - **背景**：群 G 的同调 $H_*(G, \mathbb{Z})$ 定义为平凡模 $\mathbb{Z}$ 在群环 $\mathbb{Z}G$ 上的投射消解（Projective Resolution）的同调。
   - **定理应用**：这里的"模型"对应于自由模的基。定理断言，任意两个投射消解之间都存在链映射，且在链同伦意义下是唯一的。
   - **结果**：证明了群同调（以及 Tor 和 Ext 函子）不依赖于具体消解的选择。

5. **单纯集合与拓扑空间的等价性 (Simplicial Sets vs. Top)**

   在现代同伦论中，通常利用单纯集合来代替拓扑空间进行组合研究。

   - **背景**：考虑几何实现函子 $|\cdot| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$ 和奇异单纯形函子 $\mathrm{Sing} : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$。
   - **定理应用**：要证明对于任意 CW 复形 X，自然映射 $|\mathrm{Sing}(X)| \to X$ 是弱同伦等价，或者证明单纯集合 K 的同调同构于 $|K|$ 的奇异同调。
   - **结果**：无圈模型定理将这些证明归结为验证标准单纯形 Δ^n 上的性质，从而建立了组合拓扑与经典拓扑之间的桥梁。

References

[1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[2] Joseph J Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Vol. 119. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] 雷锋春，杨志青，李风玲. *基础拓扑学及应用*. 高等教育出版社, 2024.

[4] 齐震宇. *代数拓扑课程录像*.

[5] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. “Acyclic models”. In: *American journal of mathematics* 75.1 (1953), pp. 189–199.