

想不到这里该写什么

经典李理论

我真的不懂分析

慕可

网络版 · 编译于 2026-08-26

网络版 (也没有实体版)

编译日期: 2026-08-26

本书没有由任何出版社发行

IMSB: 111-1-11-111111-1

慕可

个人主页: yyhmuke.com



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可. 访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议.

目录

第一章	紧李群表示	1
1.1	有限维 Lie 群表示	1
1.2	矩阵系数与 Schur 正交关系	3
1.3	紧 Lie 群的无穷维表示	5
1.4	Peter-Weyl 定理	7
第二章	李代数与极大环面理论	11
2.1	Lie 群的 Lie 代数	11
2.2	Lie 子群与 Lie 子代数	15
2.3	极大环面与 Cartan 子代数	16
2.4	李代数与紧李群的结构	19
第三章	李代数表示	21
3.1	Lie 代数表示	21
3.2	权与根系	24
3.3	标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组	29
第四章	Weyl 群理论	35
4.1	Lattices	35
4.2	Weyl 群	40
4.3	Simple Roots 与 Weyl Chambers	41

4.4	Weyl Group as a Reflection Group	46
第五章	最高权表示	49
5.1	最高权	49
5.2	Weyl 积分公式	52
5.3	Weyl 特征公式	55
第六章	具体例子	59
6.1	$SU(2)$	59
6.2	$SU(3)$	69
	详细证明	97

第一章

紧李群表示

1.1 有限维 Lie 群表示

定义 1.1 李群 G 在有限维复空间 V 上的表示是一个李群同态 $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$, 其表示维数定义为 V 的维数. 表示之间的态射称为 G -map 或者交织算子, 即对 $T \in \text{Hom}(V, V')$ 满足 $T \circ \pi = \pi' \circ T$, 所有 G -map 的集合记为 $\text{Hom}_G(V, V')$.

定义 1.2 对李群 G 的有限维复表示, 其不可约表示的定义与有限群相同, 即不存在非平凡不变子空间.

引理 1.3 (Schur) 令 V 与 W 为 Lie 群 G 的有限维不可约表示, 则有

$$\dim \text{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1, & V \cong W \\ 0, & V \not\cong W \end{cases}$$

证明 注意到代数闭域上有特征值即可. □

定义 1.4 V 为李群 G 的表示, 一个双线性型 $(-, -): V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ 被称为 G -不变, 如果

$$(gv, gv') = (v, v'), \quad \forall g \in G, v, v' \in V$$

表示 V 称为酉表示, 如果存在 G -不变 Hermite 内积.

定理 1.5 紧李群的有限维表示都是酉表示.

证明 取有限维表示 V 上任意的内积 $\langle -, - \rangle$, 定义

$$(v, v') := \int_G \langle gv, gv' \rangle dg$$

由 Haar 测度不变性立刻注意到这就是所求的 G -不变内积. $\square$

定义 1.6 有限维李群表示称为**完全可约的**, 如果为不可约子表示的直和 (实际上和就足够了).

推论 1.7 紧李群的有限维表示都是完全可约的.

证明 取 G -不变内积之后构造正交补即可. $\square$

虽然我们现在知道紧李群的有限维表示是完全可约的, 但是很多情况下分解并非典范的, 下面会见到典范的分解.

推论 1.8 V 为紧李群 G 的有限维表示, 则 V 不可约当且仅当 $\dim \text{Hom}_G(V, V) = 1$.

推论 1.9 若 V 为紧李群 G 的有限维表示, 则有表示同构 $\bar{V} \cong V^*$, 从而如果 V 是不可约的, 则其上的 G -不变内积在差一个正实数的意义下唯一.

证明 取 G -不变内积 $(-, -)$, 考虑双射线性映射

$$T: \bar{V} \rightarrow V^*, \quad v \mapsto (-, v)$$

易证此为表示同构. 此时若 V 不可约, 设 $(-, -)'$ 为另一个 G -不变映射, 考虑第二个同构

$$T': \bar{V} \rightarrow V^*, \quad v \mapsto (-, v)'$$

由 Schur 引理, 我们知道

$$T = cT' \implies (-, v) = c(-, v)', \forall v \in V$$

$\square$

推论 1.10 V 为紧李群 G 的有限维表示, 取一个 G -不变内积 $(-, -)$, 若 V_1, V_2 为不同构的 V 的不可约子模, 从而在内积意义下 $V_1 \perp V_2$.

证明 考虑

$$W = \{v_1 \in V_1 : (v_1, V_2) = 0\}$$

不难看出这是 G -不变子空间, 若结论不成立, 则 $W \neq V_1$ 即 $W = 0$, 所以可见 $(-, -)$

给出了 V_1 与 V_2 的非退化配对, 因此

$$v_1 \mapsto (-, v_1) \implies \overline{V_1} \cong V_2^* \implies V_1 \cong V_2$$

故矛盾, 结论得证. □

定义 1.11 G 为紧李群, 将 G 的有限维不可约表示的同构类记为 $\hat{G}$, 令 (π, E_π) 为 $[\pi]$ 的代表元, 对 $[\pi] \in \hat{G}$, 我们定义 $V_{[\pi]}$ 为 V 中最大的同构于 E_π 的子模的直和, 称为 V 的 π -isotypic component, 记 π 在 V 中的重数为 m_π , 有 $m_\pi = \dim V_{[\pi]} / \dim E_\pi$.

在这种语言下我们可以得到不依赖选择的典范分解.

定理 1.12 (典范分解) V 为紧李群 G 的有限维表示, 则我们有 G -map 同构

$$\iota_\pi: \text{Hom}_G(E_\pi, V) \otimes E_\pi \rightarrow V_{[\pi]}, \quad T \otimes v \mapsto T(v)$$

并且可见

$$m_\pi = \dim \text{Hom}_G(E_\pi, V)$$

从而会有 G -模同构

$$V = \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}} V_{[\pi]} \cong \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}} \text{Hom}_G(E_\pi, V) \otimes E_\pi$$

证明 由于 $T \in \text{Hom}_G(E_\pi, V)$ 都是 G -map, 而注意 G 作用在 $\text{Hom}_G(E_\pi, V)$ 上是平凡作用, 所以

$$g(T \otimes v) = (gT) \otimes (gv) \mapsto gT(g^{-1}gv) = T(gv)$$

后面结论都容易验证. □

1.2 矩阵系数与 Schur 正交关系

定义 1.13 (矩阵系数) 紧李群 G 的矩阵系数为形如

$$f_{u,v}^V(g) = (gu, v)$$

的函数, 其中 V 为 G 的有限维表示, $u, v \in V$, $(-, -)$ 为其上的 G -不变内积. 所有矩阵系数的集合记为 $MC(G)$.

可以将矩阵系数想象成 $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$ 在某组基下的矩阵元函数, 比如 $\pi(g) =$

$(a_{ij}(g))_{n \times n}$, 则

$$a_{ij}(g) = (ge_j, e_i)$$

就是矩阵系数, 同理我们通过表示的直和, 张量积也可以看出矩阵系数为 G 上光滑函数的子代数, 即如下引理:

引理 1.14 $MC(G)$ 为 G 上光滑函数的子代数, 包含常值函数, 若 $\{v_i^\pi\}_{i=1}^{n_\pi}$ 为 E_π 的基, $[\pi] \in \hat{G}$, 则

$$MC(G) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{f_{v_i^\pi, v_j^\pi}^{E_\pi} : [\pi] \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq n_\pi\}$$

[详细证明见第 97 页](#)

定理 1.15 (Schur 正交关系) 令 U, V 为紧李群 G 的有限维不可约酉表示, 带有 G -不变内积 $(-, -)_U$ 与 $(-, -)_V$, 对 $u_i \in U, v_i \in V$, 有

$$\int_G (gu_1, u_2)_U \overline{(gv_1, v_2)_V} dg = \begin{cases} 0, & U \not\cong V \\ \frac{(u_1, v_1)_U \overline{(u_2, v_2)_U}}{\dim V}, & U = V \end{cases}$$

[详细证明见第 97 页](#)

同理对紧李群的有限维表示可以定义特征, 注意特征就是矩阵对角元的和, 从而也是矩阵系数, 特征的各种性质与有限群表示相同, 不再赘述.

定理 1.16 令 V 与 W 为紧李群 G 的有限维表示, 则

$$\int_G \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)} dg = \dim \text{Hom}_G(V, W)$$

特别地, 有

$$\int_G \chi_V(g) dg = \dim V^G$$

当 V, W 不可约时, 有

$$\int_G \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)} dg = \begin{cases} 0, & V \not\cong W \\ 1, & V \cong W \end{cases}$$

并且

$$V \cong \bigoplus_i n_i V_i \iff \chi_V = \sum_i n_i \chi_{V_i}$$

[详细证明见第 97 页](#)

定理 1.17 G_1 与 G_2 是紧李群, 则 $G_1 \times G_2$ 的有限维不可约表示 W 一定形如 $V_1 \otimes V_2$, 其中 V_i 是 G_i 的不可约表示.

1.3 紧 Lie 群的无穷维表示

定义 1.18 李群 G 在拓扑线性空间 V 上的表示是一个群同态

$$\pi: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

并且要求

$$G \times V \rightarrow V, \quad (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

是连续的. 同理可以定义 G -map. 与有限维不同的是, 此时的子表示并不是不变子空间, 而不在 G -作用下不变的闭子空间. 此时 V 称为不可约的, 如果不存在非平凡子表示.

为了方便处理, 我们下面讨论 Hilbert 空间上的表示, 实际上许多结果可以归结到局部凸拓扑线性空间上.

定理 1.19 (Schur) V, W 为李群 G 在 Hilbert 空间上的酉表示, 若 V, W 都是不可约的, 则

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1, & V \cong W \\ 0, & V \not\cong W \end{cases}$$

[详细证明见第 97 页](#)

引理 1.20 令 (π, V) 为紧李群 G 在 Hilbert 空间上的酉表示, 则存在 V 的非零有限维 G -不变子表示.

[详细证明见第 97 页](#)

对于一族 Hilbert 空间 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 我们可以定义所谓 **Hilbert 空间直和**

$$\widehat{\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha} = \{(v_\alpha): v_\alpha \in V_\alpha, \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|v_\alpha\|_\alpha^2 < \infty\}$$

其上带有内积

$$((v_\alpha), (v'_\alpha)) = \sum_{\alpha} (v_\alpha, v'_\alpha)_\alpha$$

定义 1.21 V 是 G 在拓扑线性空间上的表示, 定义 **G -finite** 向量为

$$V_{G\text{-fin}} = \{v \in V : \dim \text{span}\{gv : g \in G\} < \infty\}$$

推论 1.22 (紧李群的不可约酉表示有限维) (π, V) 为紧李群 G 在 Hilbert 空间上的酉表示, 则存在有限维不可约 G -子模 $V_\alpha \subset V$ 使得

$$V = \widehat{\bigoplus_\alpha V_\alpha}$$

特别地, G 的不可约酉表示都是有限维的, 并且可以看见 G -有限向量在 V 中稠密.

证明 由 Zorn 引理反证立刻得到. $\square$

下面我们讨论一下对于 Hilbert 空间上酉表示的典范分解. 由于不可约酉表示都是有限维的, 所以我们还是可以良定义地使用 $\hat{G}$. 我们同样可以对 $[\pi] \in \hat{G}$ 讨论代表元 (π, E_π) 与 π -等型分量 $V_{[\pi]}$, 即最大的同构于 E_π 的子模的 Hilbert 直和. 典范分解是针对 Hilbert 空间的, 那当务之急就是给

$$\text{Hom}(E_\pi, V)$$

这样的空间一个内积使之成为 Hilbert 空间.

引理 1.23 V 为紧李群 G 在 Hilbert 空间上的酉表示, 其内积为 $(-, -)_V$, 对 $[\pi] \in \hat{G}$, 我们断言

$$\text{Hom}_G(E_\pi, V)$$

是一个 Hilbert 空间并且有 G -不变内积 $(-, -)_{\text{Hom}}$, 由

$$(T_1, T_2)_{\text{Hom}} I = T_2^* \circ T_1$$

定义. 此外 $\|T\|_{\text{Hom}}$ 与 T 的算子范数相同.

证明 结合 Schur 引理结合

$$(T_1, T_2)_{\text{Hom}}(x_1, x_2)_{E_\pi} = (T_1 x_1, T_2 x_2)_V$$

不难验证. $\square$

同理可以定义 Hilbert 空间的张量积 $V_1 \widehat{\otimes} V_2$, 即代数张量积在张量积内积意义下的完备化, 即

$$(v_1 \otimes v_2, v'_1 \otimes v'_2) = (v_1, v'_1)_1 (v_2, v'_2)_2$$

定理 1.24 (酉表示的典范分解) V 为紧李群 G 在 Hilbert 空间上的酉表示, 则我们有 G -map 同构

$$\iota_\pi: \text{Hom}_G(E_\pi, V) \widehat{\otimes} E_\pi \rightarrow V_{[\pi]}, \quad T \otimes v \mapsto T(v)$$

从而会有 G -模同构

$$V = \widehat{\bigoplus}_{[\pi] \in \hat{G}} V_{[\pi]} \cong \widehat{\bigoplus}_{[\pi] \in \hat{G}} \text{Hom}_G(E_\pi, V) \widehat{\otimes} E_\pi$$

证明 容易验证在代数张量积下是良定义的, 并且有稠密的像, 结合引理 1.23 知道 ι_π 保持内积, 从而可以唯一延拓到 Hilbert 空间张量积上的同构, 结合推论 1.22 与推论 1.10 知道 V 是 $V_{[\pi]}$ 们的 Hilbert 直和. $\square$

1.4 Peter-Weyl 定理

本节我们来分解 $L^2(G)$, 策略为先讨论更容易控制的 $C(G)$. 首先我们给出紧李群 G 在 $C(G)$ 与 $L^2(G)$ 上的左右正则表示¹, 即

$$(l_g f)(h) = f(g^{-1}h), \quad (r_g f)(h) = f(hg)$$

要说明是表示, 就需要证明作用是连续的.

引理 1.25 紧李群 G 在 $C(G)$ 与 $L^2(G)$ 上的左右正则作用是连续的, 并且保持范数.

证明 经典放缩. $\square$

定理 1.26 紧李群 G 在 $C(G)$ 上的左作用 G -有限向量与右作用 G -有限向量是一样的, 所以可以良定义谈论 $C(G)_{G\text{-fin}}$, 并且有

$$C(G)_{G\text{-fin}} = MC(G)$$

详细证明见第 97 页

要研究 $L^2(G)$ 的典范分解, 就需要计算

$$\text{Hom}_G(E_\pi, L^2(G))$$

¹ $C(G)$ 上用上确界范数, $L^2(G)$ 是经典的 L^2 -范数.

由于 $C(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密, 可以归结为计算

$$\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G))$$

再通过 $C(G)_{G-\mathrm{fin}}$ 归结为计算

$$\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G-\mathrm{fin}})$$

现在, 典范分解告诉我们如果只看左作用, 就有

$$C(G)_{G-\mathrm{fin}} \cong \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}} \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G-\mathrm{fin}}) \otimes E_\pi$$

对左作用而言, G 在重数空间上的作用平凡, 但是 $C(G)_{G-\mathrm{fin}}$ 上还有一个与左作用交换的右作用, 而可以通过右作用在重数空间上定义作用, 定义

$$(gT)(x) = r_g(Tx), \quad \forall T \in \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G-\mathrm{fin}})$$

通过左正则作用于有正则作用交换, 可以证明 gT 仍然落于 $\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G-\mathrm{fin}})$.

引理 1.27 考虑紧李群 G 在 $C(G)_{G-\mathrm{fin}}$ 上的左正则表示与上面定义的重数空间上的作用, 则有 G -模同构

$$\mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)) = \mathrm{Hom}_G(E_\pi, C(G)_{G-\mathrm{fin}}) \cong E_\pi^*$$

最后的同构由 $T \mapsto (\lambda_T: x \mapsto (Tx)(e))$ 给出.

[详细证明见第 98 页](#)

注记 1.28 此引理不依赖 E_π 的不可约, 对任意的有限维表示 E , 都有

$$\mathrm{Hom}_G(E, C(G)) \cong E^* \quad \triangle$$

对紧李群 G , 固定不可约表示 (π, E_π) , 对 $\lambda \in E_\pi^*, x \in E_\pi$, 定义矩阵系数

$$f_{\lambda \otimes x}(g) = \lambda(g^{-1}x) = \langle x, g\lambda \rangle$$

现在我们将 $C(G)_{G-\mathrm{fin}}$ 视为 $G \times G$ -双模, 作用为

$$(g_1, g_2)f = r_{g_1}l_{g_2}f, \quad (g_1, g_2)f(h) = f(g_2^{-1}hg_1)$$

定理 1.29 对紧李群 G , 有 $G \times G$ -模同构

$$C(G)_{G-\text{fin}} \cong \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}} E_{\pi}^* \otimes E_{\pi}, \quad f_{\lambda \otimes x} \mapsto \lambda \otimes x$$

[详细证明见第 98 页](#)

定理 1.30 (Peter-Weyl) G 是紧李群, 则 $C(G)_{G-\text{fin}}$ 在 $C(G)$ 与 $L^2(G)$ 中稠密.

[详细证明见第 98 页](#)

定理 1.31 (Peter-Weyl 分解) G 是紧李群, 则有 G -模同构

$$E_{\pi}^* \cong \text{Hom}_G(E_{\pi}, L^2(G))$$

于是有 $G \times G$ -模同构

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}} E_{\pi}^* \otimes E_{\pi}}$$

[详细证明见第 98 页](#)

定理 1.32 紧李群 G 存在有限维忠实表示, 从而通过 $\pi: G \rightarrow GL(V)$, 抽象紧李群可以实现为具体矩阵群.

[详细证明见第 98 页](#)

第二章

李代数与极大环面理论

2.1 Lie 群的 Lie 代数

所谓 G 上的左不变向量场，即一个向量场 X 满足

$$(dl_g)_h X_h = X_{gh}$$

对任意的 $v \in T_e G$ ，我们可以定义

$$\tilde{v}_g := (dl_g)_e(v)$$

同理，给定左不变向量场 X ，不难见

$$X_g = (dl_g)_e(X_e)$$

其中 $X_e \in T_e G$ ，如此我们可以将 $T_e G$ 与 G 上的左不变向量场认同起来。而流形上的向量场有 Lie 括号

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

从而通过上面的认同，可以在 $T_e G$ 上定义 Lie 括号，我们记

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = T_e G$$

对于紧李群而言, Peter-Weyl 定理的推论说明每个紧李群都可以嵌入为 $GL(n, \mathbb{C})$ 的闭子群, 所以可以把紧李群当成矩阵李群来处理, 此后我们提到紧李群都默认为矩阵李群. 从而可见

$$\mathfrak{g} = T_e G \subset T_I(GL(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M_{n,n}(\mathbb{C})$$

于是李代数 $\mathfrak{g}$ 上的李括号就是矩阵的交换子

$$[X, Y] = XY - YX$$

定理 2.1 G 为 $GL(n, \mathbb{C})$ 的 Lie 子群, 则

- (1) $\mathfrak{g}$ 为实线性空间.
- (2) 李括号是双线性, 反对称的, 并且满足 Jacobi 恒等式

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

- (3) $\mathfrak{g}$ 在 Lie 括号意义下是封闭的.

证明 注意 $X \in \mathfrak{g}$ 本质上即光滑曲线在此处的导数, 设 $X_i = \gamma'_i(0)$, 于是通过构造

$$\gamma(t) = \gamma_1(rt)\gamma_2(t), \quad \sigma_s(t) = \gamma_1(s)\gamma_2(t)\gamma_1(s)^{-1}$$

求导即可得到. □

我们通过左平移可以将 $\mathfrak{g}$ 迁移到 $T_g G$. 具体考虑光滑曲线

$$\gamma(0) = I, \quad \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$$

定义

$$\sigma(t) = g\gamma(t) \implies \sigma'(0) = g\gamma'(0)$$

于是可以将 $T_g G$ 与 $g\mathfrak{g}$ 认同起来, 从而可以作如下定义.

定义 2.2 令 G 为 $GL(n, \mathbb{C})$ 的李子群, $X \in \mathfrak{g}$, 定义左不变向量场

$$\tilde{X}_g = gX, \quad g \in G$$

令 γ_X 为 $\tilde{X}$ 的积分曲线, 由方程

$$\gamma_X(0) = I, \quad \gamma'_X(t) = \tilde{X}_{\gamma_X(t)} = \gamma_X(t)X$$

唯一确定, ODE 理论告诉我们这个积分曲线是存在且唯一的.

定理 2.3 (指数映射) $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $X \in \mathfrak{g}$, 则

$$\gamma_X(t) = \exp(tX) = e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

并且 γ_X 是一个同态, 并且是完备的, 即对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 都有 $e^{tX} \in G$.

[详细证明见第 98 页](#)

定理 2.4 $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, 则

- (1) $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
- (2) 指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 为 0 附近的局部微分同胚.
- (3) 若 G 连通, 则 $\exp \mathfrak{g}$ 生成 G (注意, 这并不是说指数映射是满射).

证明 由指数映射可见任意 $X \in \mathfrak{g}$, 都有 e^{tX} 完全落在 G 中, 所以

$$\mathfrak{g} \subset \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

反过来, 若 e^{tX} 完全落在 G 中, 则求导得到 X 就是切向量, 故得证. 反过来, 由反函数定理可以知道是局部微分同胚. 最后, 连通拓扑群由单位元处的任意开邻域生成, 结合局部微分同胚立刻得到. $\square$

下面我们来简单讨论一下李代数的结构. 给定矩阵李群同态

$$\varphi: H \rightarrow G$$

其微分

$$d\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad X \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(e^{tX})$$

定理 2.5 设 $\varphi, \varphi_i: H \rightarrow G$ 为矩阵李子群的同态, 则

- (1) 下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

从而可见对 $X \in \mathfrak{h}$, 有 $e^{d\varphi(X)} = \varphi(e^X)$.

(2) 微分 $d\varphi$ 为李代数同态, 即对 $X, Y \in \mathfrak{h}$ 有

$$d\varphi[X, Y] = [d\varphi X, d\varphi Y]$$

(3) 若 H 是连通李群, 则 $d\varphi_1 = d\varphi_2 \implies \varphi_1 = \varphi_2$.

[详细证明见第 98 页](#)

从实数加群 $\mathbb{R}$ 到李群 G 的光滑同态成为 G 的**单参数子群**. 下面的推论告诉我们所有单参数子群都形如 $t \mapsto e^{tX}$, 其中 $X \in \mathfrak{g}$.

推论 2.6 G 为矩阵李群, 令 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ 为光滑同态, 若 $\gamma'(0) = X$, 则 $\gamma(t) = e^{tX}$.

证明 将 $\mathbb{R}^+$ 视为 $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ 的李子群, 考虑

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} G$$

令 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \ln$, 令 $\sigma(x) = e^{(\ln x)X}$, 则可见

$$d\tilde{\gamma}(x) = xX = d\sigma(x)$$

从而由定理 2.5 可见 $\tilde{\gamma} = \sigma$, 所以 $\gamma(t) = e^{tX}$. □

令 G 为矩阵李群, 对 $g \in G$, **共轭**作用

$$c_g: G \rightarrow G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

则我们可以依此定义 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的**伴随表示**, 即

$$\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto d(c_g)$$

在这个意义下, 对 $g \in G, X \in \mathfrak{g}$, 有

$$\mathrm{Ad}(g)X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_g(e^{tX}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ge^{tX}g^{-1} = gXg^{-1}$$

则同样可以定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的**伴随表示**, 即

$$\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad} = d\mathrm{Ad}$$

从而对 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 有

$$(\operatorname{ad} X)(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Ad}(e^{tX})Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX}Y e^{-tX} = XY - YX = [X, Y]$$

从而可见

$$\operatorname{ad} X = [X, -]$$

最后由定理 2.5 可见

$$\operatorname{Ad}(e^X) = e^{\operatorname{ad} X}$$

2.2 Lie 子群与 Lie 子代数

本节回答一个问题: 给定 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$, 是否存在 G 的 Lie 子群 H , 使其 Lie 代数恰好为 $\mathfrak{h}$? 答案是肯定的.

中间过程暂且省略, 考虑可积分分布这些东西来做.

定理 2.7 G 是矩阵李群, 则存在双射

$$\{G \text{ 的连通 Lie 子群}\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{g} \text{ 的 Lie 子代数}\}, \quad H \mapsto \operatorname{Lie}(H)$$

[详细证明见第 98 页](#)

定理 2.8 (积分定理) H, G 为连通矩阵李群, 且 H 单连通, 则对李群同态

$$\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$$

存在唯一的李代数同态

$$\varphi: H \rightarrow G$$

使得 $d\varphi = \psi$.

[详细证明见第 98 页](#)

2.3 极大环面与 Cartan 子代数

李代数 $\mathfrak{g}$ 称为是**交换的**，如果对任意的 $X, Y \in \mathfrak{g}$ ，都有

$$[X, Y] = 0$$

定理 2.9 令 G 为矩阵李群，则

- (1) 对 $X, Y \in \mathfrak{g}$ ， $[X, Y] = 0$ 当且仅当对任意的 $s, t \in \mathbb{R}$ ，有 $e^{tX}e^{sY} = e^{sY}e^{tX}$ 。
- (2) 若 A 是 G 的连通李子群，其李代数为 $\mathfrak{a}$ ，则 A 交换当且仅当 $\mathfrak{a}$ 交换。

证明 由于连通李群由李代数在指数映射下的像生成，所以只需要证明 (1) 即可。而 (1) 是简单的数学分析。 $\square$

定理 2.10 (紧交换李群的结构定理) 任意紧 Abel 李群 G 都同构于 $T^k \times F$ ，其中 F 为有限 Abel 群。特别地，紧连通 Abel 李群恰为环面。此外对紧 Abel 李群 G 有

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G^0$$

是满射。

详细证明见第 98 页

定义 2.11 令 G 为紧李群， $\mathfrak{g}$ 为其李代数。则 G 的一个极大连通交换子群称为 G 的**极大环面**。 $\mathfrak{g}$ 的极大交换李子代数称为 $\mathfrak{g}$ 的**Cartan 子代数**。

定理 2.12 令 G 为紧李群， T 为李子群。则 T 为极大环面当且仅当 $\mathfrak{t}$ 为 Cartan 子代数。

证明 定理 2.7 与定理 2.9 立刻知道结论成立。 $\square$

引理 2.13 (π, V) 是紧李群 G 的有限维表示， $(-, -)$ 为其上 G -不变内积。

- (1) 在上述内积意义下， $d\pi(X)$ 为斜 Hermite 算子，即

$$(d\pi(X)v, w) + (v, d\pi(X)w) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, v, w \in V$$

- (2) 存在 $\mathfrak{g}$ 上的 Ad-不变内积，并且对此内积， $\text{ad}(X)$ 是斜对称算子，即

$$(\text{ad}(X)Y_1, Y_2) + (Y_1, \text{ad}(X)Y_2) = 0, \quad X, Y_i \in \mathfrak{g}$$

证明 (2) 是 (1) 的特殊情况. (1) 是显然的, 由于有 G -不变内积, 从而

$$(\pi(e^{tX})v, \pi(e^{tX})w) = (v, w)$$

在 $t = 0$ 处求导, 就得到 (1) 的结论. $\square$

定义 2.14 紧李群 G 的 **rank** 定义为极大环面的维数, 也等于 Cartan 子代数的维数.

对 $X \in \mathfrak{g}$, 我们定义其**中心化子**为

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) = \{Y \in \mathfrak{g} : [Y, X] = 0\}$$

定义 2.15 若对 Cartan 子代数 $\mathfrak{t}$, 存在 $X \in \mathfrak{t}$ 使得

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$$

则称 X 为其**正则元**.

注记 2.16 直观上, 正则元是中心化子尽可能小的元素. $\triangle$

引理 2.17 对紧李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$, 任取 Cartan 子代数 $\mathfrak{t}$, 都存在对应的正则元.

[详细证明见第 99 页](#)

定理 2.18 设 $\mathfrak{t}$ 为紧李群 G 的一个 Cartan 子代数, 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 都存在 $g \in G$ 使得 $\text{Ad}(g)X \in \mathfrak{t}$.

证明 神秘小技术. 取 $Y \in \mathfrak{t}$ 使得 $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y)$, 取 $\langle -, - \rangle$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的 Ad -不变内积, 定义函数

$$f(g) = \langle Y, \text{Ad}(g)X \rangle$$

由 G 紧, 知存在最大值点 g_0 , 显然在此处任意方向导数为 0, 对 $\forall Z \in \mathfrak{g}$, 有

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle Y, \text{Ad}(e^{tZ}g_0)X \rangle = 0 \implies \langle Y, [Z, \text{Ad}(g_0)X] \rangle = 0$$

而注意 ad 为反对称算子, 所以可见

$$\langle [\text{Ad}(g_0)X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [\text{Ad}(g_0)X, Z] \rangle = 0$$

对任意的 $Z \in \mathfrak{g}$ 成立, 从而可见

$$[\text{Ad}(g_0)X, Y] = 0 \implies \text{Ad}(g_0)X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y) = \mathfrak{t}$$

$\square$

推论 2.19 G 是紧李群, 李代数为 $\mathfrak{g}$.

- (1) $\text{Ad}(G)$ 在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数集合上传递.
- (2) G 通过共轭作用在 G 的极大环面集合上传递.

证明 (1) 设 $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X_1)$, $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X_2)$, 由定理 2.18 可见存在 $g \in G$ 使得 $\text{Ad}(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$, 由 $\text{Ad}(g) = d(c_g)$ 为李代数同态, 保持李括号, 可见

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 &= \{\text{Ad}(g)Y \in \mathfrak{g}: [Y, X_1] = 0\} \\ &= \{Y' \in \mathfrak{g}: [\text{Ad}(g)^{-1}Y', X_1] = 0\} \\ &= \{Y' \in \mathfrak{g}: [Y', \text{Ad}(g)X_1] = 0\} \\ &= \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\text{Ad}(g)X_1) \end{aligned}$$

由 $\text{Ad}(g)X_1 \in \mathfrak{t}_2$, 从而不难见

$$\mathfrak{t}_2 \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\text{Ad}(g)X_1) = \text{Ad}(g)\mathfrak{t}_1$$

结合 $\mathfrak{t}_2$ 是极大的 Abel 子代数, 所以可见 $\mathfrak{t}_2 = \text{Ad}(g)\mathfrak{t}_1$.

(2) 设 $T_i = \exp \mathfrak{t}_i$, 从而有

$$c_g T_1 = c_g \exp \mathfrak{t}_1 = \exp(\text{Ad}(g)\mathfrak{t}_1) = \exp \mathfrak{t}_2 = T_2 \quad \square$$

引理 2.20 G 是紧连通李群, 则 $\text{Ad}(g) = I \iff g \in Z(G)$.

证明 注意到

$$c_g e^X = e^{\text{Ad}(g)X} = e^X$$

因此 c_g 在 I 附近的邻域内是恒等, 结合 G 连通, 得证. $\square$

定理 2.21 (极大环面定理) G 为紧连通李群, T 为 G 的极大环面, 则

- (1) $G = \bigcup_{g \in G} c_g T = \bigcup_{g \in G} g T g^{-1}$.
- (2) $\exp$ 是满射, 即 $G = \exp \mathfrak{g}$.

从而可以推出

- (3) $Z_G(T) = T$, 即 T 不仅是极大连通交换子群, 还是极大交换子群.
- (4) $Z(G) \subset T$.

详细证明见第 99 页

2.4 李代数与紧李群的结构

设 $\mathfrak{g}_i$ 为 G_i 的李代数, 则 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 可以视为 $G_1 \times G_2$ 的李代数, 其李括号为

$$[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2], \quad X_i, Y_i \in \mathfrak{g}_i$$

定义 2.22 我们给出如下定义:

- (1) $\mathfrak{g}$ 是李代数, 其线性子空间 $\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**理想**, 如果 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.
- (2) $\mathfrak{g}$ 称为 **simple**, 如果 $\mathfrak{g}$ 不是交换李代数, 并且没有非零真理想.
- (3) $\mathfrak{g}$ 称为 **semisimple**, 如果为若干单李代数的直和.
- (4) $\mathfrak{g}$ 称为 **reductive**, 如果 $\mathfrak{g}$ 可以表示为半单李代数与交换李代数的直和.
- (5) 定义 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{[X, Y]: X, Y \in \mathfrak{g}\}$.

注记 2.23 不难看出, 李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 就是伴随表示 ad 下的不变子空间. △

定理 2.24 (紧李群的李代数约化) G 为紧李群, $\mathfrak{g}$ 为其李代数, 则 $\mathfrak{g}$ 约化. 特别地, 令 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}: [X, \mathfrak{g}] = 0\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**中心**, 则有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

其中 $\mathfrak{g}'$ 半单而 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 交换. 此外存在 $\mathfrak{g}'$ 的单理想使得

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{s}_i$$

其中

$$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \mathfrak{s}_i, & i = j \end{cases}$$

详细证明见第 99 页

回忆 G 的导群定义为

$$G' = [G, G] = \langle [g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}: g_i \in G \rangle$$

定理 2.25 (交换子定理) 设 G 为紧连通李群, 则 G' 为正规连通闭 Lie 子群, 且其李代数恰好为 $\mathfrak{g}$, 即 $\text{Lie}(G') = \mathfrak{g}$.

详细证明见第 99 页

定理 2.26 G 为紧连通李群, 则 $G = G'Z(G)^0$, 并且

- (1) $Z(G)^0$ 为环面.
- (2) $Z(G') = G' \cap Z(G)$ 是有限 Abel 群.

令 $F = G' \cap Z(G)^0$, 则

$$G \cong \frac{G' \times Z(G)^0}{\{(f, f^{-1}) : f \in F\}}$$

将 $\mathfrak{g}'$ 分解为单理想的直和 $\mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_k$, 令 $S_i = \exp \mathfrak{s}_i$. 则

- (3) S_i 为 G' 的连通闭正规 Lie 子群.
- (4) $\text{Lie}(S_i) = \mathfrak{s}_i$.
- (5) S_i 的任意闭正规 Lie 子群为有限离散子群, 并且落在 $Z(G)$ 中.
- (6) $S_1 \times \cdots \times S_k \rightarrow G', (s_1, \cdot, s_k) \mapsto s_1 \cdots s_k$ 是满射, 其 kernel F' 为有限中心子群, 有

$$G \cong \frac{S_1 \times \cdots \times S_k}{F'}$$

详细证明见第 99 页

第三章

李代数表示

3.1 Lie 代数表示

定义 3.1 令 $\mathfrak{g}$ 为 $GL(n, \mathbb{C})$ 的李子群的李代数, $\mathfrak{g}$ 的表示是一个对 (ψ, V) , 其中 V 是一个有限维复线性空间, $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ 为线性映射, 并且满足

$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)] = \psi(X) \circ \psi(Y) - \psi(Y) \circ \psi(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

表示 ψ 是不可约的, 如果不存在非平凡 $\psi(\mathfrak{g})$ -不变子空间.

现在 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ 为李子群, (π, V) 是有限维群表示, 则我们可以定义

$$d\pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(e^{tX}), \quad X \in \mathfrak{g}$$

则可以验证 $d\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ 为 Lie 代数表示.

定理 3.2 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ 是李群, V 为有限维表示, 则

- (1) G 连通, 则子空间 $W \subset V$ 是 $\pi(G)$ -不变的当且仅当 $d\pi(\mathfrak{g})$ -不变的. 特别地, V 是不可约 G -模当且仅当是不可约 $\mathfrak{g}$ -模.
- (2) G 是连通紧群, 则 V 不可约当且仅当与所有 $d\pi(\mathfrak{g})$ 交换的自同态都是数乘算子, 即

$$\text{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \{T \in \text{End}(V): [T, d\pi(X)] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\} = \mathbb{C} \text{Id}_V$$

证明 (1) $\implies$: 对 $w \in W, X \in \mathfrak{g}$, 考虑曲线 $c(t) = \pi(e^{tX})w$, 由于 W 是闭的, 从而可见

$$d\pi(X)w = c'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(t) - c(0)}{t} \in W$$

$\impliedby$: 这个方向需要 G 连通, 由于 W 是 $d\pi(X)$ 不变的, 从而有 W 闭可见

$$\pi(e^X) = e^{d\pi(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} w \in W$$

结合 G 连通, 所以由 $\exp \mathfrak{g}$ 生成, 所以得证.

(2) 考虑 $[T, d\pi(X)] = 0$ 当且仅当 $\text{ad}(d\pi(X))(T) = 0$ 当且仅当的

$$e^{t \text{ad}(d\pi(X))} T = (I + t \text{ad}(d\pi(X)) + \cdots) T = T$$

当且仅当 $\text{Ad}(e^{t d\pi(X)}) T = T$ 当且仅当

$$\pi(e^{tX}) T = T \pi(e^{tX})$$

从而由 G 连通从而由 $\exp \mathfrak{g}$ 生成可见 T 是 G -map, 由 Schur 引理立刻知道 T 是数乘算子. $\square$

例 3.3 考虑 $\text{SU}(2)$ 在二元 n 次齐次多项式空间 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 上的表示 $(g \cdot P)(\eta) = P(g^{-1}\eta)$, 具体有

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot z_1^k z_2^{n-k} = (\bar{a}z_1 + \bar{b}z_2)^k (-b_1z_1 + az_2)^{n-k}$$

现在注意

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix & -\bar{w} \\ w & -ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \right\}$$

取

$$X = \begin{pmatrix} ix & -\bar{w} \\ w & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2), \quad x \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$$

则

$$\det X = x^2 + |w|^2$$

记

$$\lambda = \sqrt{\det X} = \sqrt{x^2 + |w|^2}$$

由于 $\text{tr } X = 0$, 由 Cayley-Hamilton 定理,

$$X^2 + (\det X)I = 0$$

故

$$X^2 = -\lambda^2 I$$

于是

$$X^{2m} = (-1)^m \lambda^{2m} I, \quad X^{2m+1} = (-1)^m \lambda^{2m} X$$

因此

$$\begin{aligned} e^{tX} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m X^m}{m!} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda t)^{2m}}{(2m)!} \right) I + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) X \\ &= (\cos \lambda t) I + \frac{\sin \lambda t}{\lambda} X \end{aligned}$$

即

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} \cos \lambda t + \frac{ix}{\lambda} \sin \lambda t & -\frac{\bar{w}}{\lambda} \sin \lambda t \\ \frac{w}{\lambda} \sin \lambda t & \cos \lambda t - \frac{ix}{\lambda} \sin \lambda t \end{pmatrix}$$

因此可见李代数作用为

$$\begin{aligned} X \cdot (z_1^k z_2^{n-k}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\begin{pmatrix} \cos \lambda t + \frac{ix}{\lambda} \sin \lambda t & -\frac{\bar{w}}{\lambda} \sin \lambda t \\ \frac{w}{\lambda} \sin \lambda t & \cos \lambda t - \frac{ix}{\lambda} \sin \lambda t \end{pmatrix} \cdot z_1^k z_2^{n-k} \right) \\ &= k(-ixz_1 + \bar{w}z_2) z_1^{k-1} z_2^{n-k} + (n-k)(-wz_1 + ixz_2) z_1^k z_2^{n-k-1} \\ &= k\bar{w} z_1^{k-1} z_2^{n-k+1} + i(n-2k)x z_1^k z_2^{n-k} + (k-n)w z_1^{k+1} z_2^{n-k-1} \end{aligned}$$

△

最后，李代数表示的一些构造的道理在于对李群表示的求导，比如考虑在两个表示 V, W 上的作用，则 X 在 $V \otimes W$ 上的作用可以如下计算：

$$X(v \otimes w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi_V(e^{tX})v \otimes \pi_W(e^{tX})w$$

注意

$$\pi(e^{tX}) = e^{t\mathrm{d}\pi(X)} = I + t\mathrm{d}\pi(X) + O(t^2)$$

将上面张量积展开得到

$$v \otimes w + t(Xv) \otimes w + tv \otimes (Xw) + t^2(Xv) \otimes (Xw) + O(t^2)$$

对 t 在 0 处求导即可发现结果为

$$(Xv) \otimes w + v \otimes (Xw)$$

同理可得:

定义 3.4 设 V, W 是 Lie 群 $GL(n, \mathbb{C})$ 的某个 Lie 子群的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, 则有如下自然表示:

- (1) $\mathfrak{g}$ 在 $V \oplus W$ 上的作用定义为 $X(v, w) = (Xv, Xw)$.
- (2) $\mathfrak{g}$ 在 $V \otimes W$ 上的作用定义为 $X\left(\sum_j v_j \otimes w_j\right) = \sum_j Xv_j \otimes w_j + \sum_j v_j \otimes Xw_j$.
- (3) $\mathfrak{g}$ 在 $\text{Hom}(V, W)$ 上的作用定义为 $(XT)(v) = XT(v) - T(Xv)$.
- (4) $\mathfrak{g}$ 在 $\bigotimes^k V$ 上的作用定义为 $X(\sum v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}) = \sum (Xv_{i_1}) \otimes \cdots \otimes v_{i_k} + \cdots + \sum v_{i_1} \otimes \cdots \otimes (Xv_{i_k})$.
- (5) $\mathfrak{g}$ 在 $\bigwedge^k V$ 上的作用定义为 $X(\sum v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}) = \sum (Xv_{i_1}) \wedge \cdots \wedge v_{i_k} + \cdots + \sum v_{i_1} \wedge \cdots \wedge (Xv_{i_k})$.
- (6) $\mathfrak{g}$ 在 $S^k(V)$ 上的作用定义为 $X(\sum v_{i_1} \cdots v_{i_k}) = \sum (Xv_{i_1}) \cdots v_{i_k} + \cdots + \sum v_{i_1} \cdots (Xv_{i_k})$.
- (7) $\mathfrak{g}$ 在对偶空间 V^* 上的作用定义为 $(XT)(v) = -T(Xv)$.
- (8) $\mathfrak{g}$ 在共轭向量空间 $\bar{V}$ 上的作用与其在 V 上的作用相同.

3.2 权与根系

定义 3.5 令 $\mathfrak{g}$ 为李子群 $G < GL(n, \mathbb{C})$ 的李代数 (注意默认为实李代数), 定义 $\mathfrak{g}$ 的复化为

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$$

最后是线性空间同构, 并且将 $\mathfrak{g}$ 上的 Lie 括号 $\mathbb{C}$ -线性延拓到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上.

若 (ψ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 则我们可以 $\mathbb{C}$ -线性延拓到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上, 即考虑

$$\psi(X + iY) = \psi(X) + i\psi(Y) \in \text{End}(V), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

于是我们自然也可以去考虑所谓 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 不可约, 即没有真 $\psi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -不变子空间.

现在给定紧李群 G , 我们可以将其实现为某个 $U(n)$ 的 Lie 子群, 于是可见此时有

$$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n) \implies \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

最后一个等号是因为对任意的 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, 有

$$A = \frac{A - A^*}{2} + i \frac{A + A^*}{2i} \in \mathfrak{u}(n) + i\mathfrak{u}(n)$$

所以我们可以不妨写成

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{X + iY : X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

引理 3.6 (复化不改变可约性) $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数 V 为复表示空间, 则 V 为 $\mathfrak{g}$ -不可约当且仅当 v 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -不可约.

证明 若 $\mathfrak{g}$ -不可约则显然 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -不可约, 反之如果 $W \subset V$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -不变复子空间, 则很显然为 $\mathfrak{g}$ -不变子空间, 因为对表示 ψ 有

$$\psi(X + iY)W = \psi(X)W + i\psi(Y)W \subset W + iW \subset W$$

于是 V 也是 $\mathfrak{g}$ -不可约. □

例 3.7 对于 $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, 考虑标准基

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有标准的关系

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

注意到

$$E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

从而结合例 3.3 可见 E 作用在 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 上如下:

$$E \cdot (z_1^k z_2^{n-k}) = -k z_1^{k-1} z_2^{n-k+1}$$

同理有

$$H \cdot (z_1^k z_2^{n-k}) = (n - 2k) z_1^k z_2^{n-k}, \quad F \cdot (z_1^k z_2^{n-k}) = (k - n) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}$$

从而立刻可以发现 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 是不可约 $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ -模, 于是结合复化保持不可约可知是不可

约 $\mathfrak{su}(2)$ -模, 于是结合定理 3.2 可知是不可约 $SU(2)$ -模. $\triangle$

现在令 G 是一个紧李群, $\mathfrak{g}$ 是李代数, $\mathfrak{t}$ 是一个 Cartan 子代数, 记 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 为其复化. 任给一个有限维表示 (π, V) , 其上有 G -不变内积 $(-, -)$, 对表示求微分即得到李代数表示

$$d\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$$

下面用 Xv 来表示 $d\pi(X)v$, 由于 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 是交换的, 从而对 $X, Y \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 有

$$[d\pi(X), d\pi(Y)] = d\pi([X, Y]) = 0$$

从而 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 中元素对应的线性算子两两交换. 而我们早知道对 $X \in \mathfrak{g}$, 有 $d\pi(X)$ 是斜 Hermite 算子, 即

$$d\pi(X)^* = -d\pi(X)$$

从而对于 $iX \in i\mathfrak{g}$, 有 $d\pi(iX)$ 是 Hermite 算子, 即

$$d\pi(iX)^* = -id\pi(X)^* = id\pi(X) = d\pi(iX)$$

于是 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 中元素对应的算子是正规算子 (由斜 Hermite 与 Hermite 算子得到), 并且两两交换, 从而可以同时对角化, 即存在一个基 $v_1, \dots, v_n$, 使得对每一个 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 都有

$$d\pi(H)v_j = \lambda_j(H)v_j$$

取一个共同特征向量 $0 \neq v \in V$, 从而可见对任意的 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 存在 $\lambda(H) \in \mathbb{C}$ 使得

$$d\pi(H)v = \lambda(H)v$$

可以看出得到了一个复线性泛函

$$\lambda: \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$$

这个 $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 就是我们要讨论的 **weight**.

定义 3.8 (权) G 是紧 Lie 群, (π, V) 为有限维表示, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 存在有限集合 $\Delta(V) = \Delta(V, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, 称为 V 的 **权**, 使得

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(V)} V_{\alpha}$$

其中

$$V_{\alpha} = \{v \in V: d\pi(H)v = \alpha(H)v, \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\}$$

为非零子空间，如上的分解称为相对 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 的**权空间分解**.

定理 3.9 令 G 为紧李群， (π, V) 为有限维表示， T 为一个极大环面，考虑权空间分解

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(V, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})} V_{\alpha}$$

对于每个 $\alpha \in \Delta(V)$ ，都有 α 在 $\mathfrak{t}$ 上纯虚而在 $i\mathfrak{t}$ 上实. 给定 $t \in T$ ，存在 $H \in \mathfrak{t}$ 使得 $e^H = t$ ，则有

$$tv_{\alpha} = e^{\alpha(H)}v_{\alpha}, \quad v_{\alpha} \in V_{\alpha}$$

证明 对 $H \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ ， $d\pi(H)$ 是斜 Hermite 算子，从而在其上的特征为纯虚数，而在 $i\mathfrak{t}$ 为 Hermite 算子，从而特征值都是实数，故第一个论断得证. 对第二个论断是因为

$$\pi(t)v_{\alpha} = e^{d\pi(H)}v_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (d\pi(H))^n v_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(H)^n v_{\alpha} = e^{\alpha(H)}v_{\alpha} \quad \square$$

现在，我们将上面的权理论用于 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示 Ad ，并且将这个表示进行复化得到 G 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的作用，从而有权空间分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

此时有

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \text{ad}(H)(Z) = \alpha(H)Z, \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\}$$

结合 ad 的作用，有

$$\text{ad}(H)(Z) = [H, Z]$$

注意此时有

$$\mathfrak{g}_0 = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : [H, Z] = 0, \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\}$$

结合 $\mathfrak{t}$ 是极大的交换子空间，从而可见

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$$

因此我们可以通过考虑非零权的方式把 Cartan 子代数给摘出来，如此就有根的定义.

定义 3.10 G 是紧李群， $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，则存在有限的非零泛函集合

$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, 称为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的**根**, 使得

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

如上分解称为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 相对 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 的**根空间分解**.

定理 3.11 (根向量平移权) G 是紧李群, (π, V) 是其有限维表示, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 与 $\beta \in \Delta(V)$, 都有

- (1) 对任意 $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $v_{\beta} \in V_{\beta}$, 有 $d\pi(X_{\alpha})v_{\beta} \in V_{\alpha+\beta}$ ^a.
- (2) 特别地, 对 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 有 $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
- (3) 令 $(-, -)$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的一个 $\text{Ad}(G)$ -不变内积, 对 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 若 $\alpha + \beta \neq 0$, 则 $(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$.
- (4) 若 $\mathfrak{g}$ 中心平凡 (由定理 2.24 可见即 $\mathfrak{g}$ 半单), 则 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 张成 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$.

^a约定若 $\alpha + \beta \notin \Delta(V)$, 则 $V_{\alpha+\beta} = 0$.

证明 (1) 对 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 我们直接计算有

$$\begin{aligned} d\pi(H)(d\pi(X_{\alpha})v_{\beta}) &= (d\pi(X_{\alpha})d\pi(H) + [d\pi(H), d\pi(X_{\alpha})])v_{\beta} \\ &= (d\pi(X_{\alpha})d\pi(H) + d\pi([H, X_{\alpha}]))v_{\beta} \\ &= d\pi(X_{\alpha})d\pi(H)v_{\beta} + \alpha(H)d\pi(X_{\alpha})v_{\beta} \\ &= (\beta(H) + \alpha(H))d\pi(X_{\alpha})v_{\beta} \end{aligned}$$

故得证, 从而 (2) 也得证.

(3) 由引理 2.13 可见 ad 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上 ad 是斜 Hermite 的, 因此对 $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $X_{\beta} \in \mathfrak{g}_{\beta}$, 有

$$\alpha(H)[X_{\alpha}, X_{\beta}] = ([H, X_{\alpha}], X_{\beta}) = -(X_{\alpha}, [H, X_{\beta}]) = -\beta(H)(X_{\alpha}, X_{\beta})$$

因此如果 $\alpha + \beta \neq 0$, 则存在某个 H 使得 $\alpha(H) + \beta(H) \neq 0$, 因此可见 $(X_{\alpha}, X_{\beta}) = 0$.

(4) 假设 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 使得对任意的 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 都有 $\alpha(H) = 0$, 而这意味着对任意的 $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, 都有

$$[H, X_{\alpha}] = \alpha(H)X_{\alpha} = 0$$

从而

$$[H, \mathfrak{g}_{\alpha}] = 0$$

结合根空间分解, 可见

$$H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

不难验证 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$, 因此由 $\mathfrak{g}$ 半单, 所以 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, 从而 $H = 0$, 故得证. $\square$

例 3.12 考虑 $G = \mathrm{SU}(n)$, 则 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{\mathrm{diag}\{z_1, \dots, z_n\} : \sum z_i = 0\}$, 取

$$H = \mathrm{diag}\{z_1, \dots, z_n\}$$

定义泛函 $\varepsilon_i: \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 为

$$\varepsilon_i(H) = z_i$$

考虑标准矩阵 E_{ij} , 有

$$[H, E_{ij}] = (z_i - z_j)E_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(H)E_{ij}$$

因此可见 $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ 是根, 并且可见

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathbb{C}E_{ij}$$

从而

$$\Delta(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq n\} \quad \triangle$$

3.3 标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组

定义 3.13 令 G 为紧李群, 定义 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的 **Cartan involution** θ 为 $\theta(X+iY) = X-iY$, 其中 $X, Y \in \mathfrak{g} \otimes 1 \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

从而可见

$$\theta Z = Z \iff Z \in \mathfrak{g}$$

以及

$$\theta Z = -Z \iff Z \in i\mathfrak{g}$$

对于紧李群, 我们知道 G 可以嵌入 $U(n)$, 从而可以认为 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$, 此时对于矩阵形式, 有

$$\theta Z = -Z^*$$

因此对含于 $\mathfrak{u}(n)$ 的李代数而言计算起来比较方便.

引理 3.14 G 是紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 则

(1) 若 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则 $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 并且 $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \theta \mathfrak{g}_{\alpha}$.

$$(2) \theta t_{\mathbb{C}} = t_{\mathbb{C}}.$$

证明 取 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 注意到 θ 是一个对合, 从而只需要证明

$$\theta \mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

取 $Z \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, 写作 $Z = X + iY$, 其中 $X, Y \in \mathfrak{g} \otimes 1$, 则对 $H \in \mathfrak{t}$ 有

$$\alpha(H)(X + iY) = [H, X + iY] = [H, X] + i[H, Y]$$

由定理 3.9, 可见 $\alpha(H) \in i\mathbb{R}$, 因此可见

$$\alpha(H)X = i[H, Y], \quad \alpha(H)Y = -i[H, X]$$

因此

$$[H, \theta Z] = [H, X] - i[H, Y] = -\alpha(H)(X - iY) = -\alpha(H)(\theta Z)$$

因此可见 $\theta Z \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. 从而得证. $\square$

定义 3.15 $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 为李子群, $\mathfrak{g}$ 为李代数, 对 $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 定义其 **Killing 型** 为

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad} X \circ \mathrm{ad} Y)$$

简单回忆对于紧李群的李代数有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

其中 $\mathfrak{g}'$ 是半单部分, 如果 $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 则很显然 $\mathrm{ad} Z = 0$, 于是自然有

$$B(Z, Y) = 0$$

我们下面讨论 Killing 型的各种性质, 并借此研究根空间的性质.

定理 3.16 $\mathfrak{g}$ 为紧李群 G 的李代数, 则

- (1) 对 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 有 $B(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad} X \circ \mathrm{ad} Y)$.
- (2) B 是 Ad -不变的, 即对 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, g \in G$, 有 $B(X, Y) = B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y)$.
- (3) B 是斜 ad -不变的, 即对 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 有 $B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) = -B(X, \mathrm{ad}(Z)Y)$.
- (4) B 限制在 $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ 上是负定的.
- (5) 对 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$ 并且 $\alpha + \beta \neq 0$, B 限制在 $\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{\beta}$ 上是零.

- (6) 对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, B 在 $\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 上是非奇异的. 若 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 则 B 在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上也是非奇异的.
- (7) B 的根, $\text{rad}(B) = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : B(X, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = 0\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.
- (8) 若 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 则双线性型 $(X, Y) := -B(X, \theta Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 Ad-不变内积.
- (9) 若 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, 选择 G 的一个线性实现, 使得 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$, 则存在一个正实数 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $B(X, Y) = c \text{tr}(XY)$, 对 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

[详细证明见第 99 页](#)

由定理内容可知, 如果 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 则 B 在 $i\mathfrak{t}$ 上就是正定的, 因为 B 在 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 上负定, 乘两个 i 就变号了, 于是 B 给出了同构

$$i\mathfrak{t} \cong (i\mathfrak{t})^*$$

而定理 3.9 告诉我们任意权都在 $i\mathfrak{t}$ 上实, 故落在 $(i\mathfrak{t})^*$ 中, 从而允许我们把 root α 变成向量.

定义 3.17 令 G 为紧李群, 其李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{t}$ 为 Cartan 子代数, 对 $\alpha \in (i\mathfrak{t})^*$, 令 $u_{\alpha} \in i\mathfrak{t}$ 为唯一满足下式的向量

$$\alpha(H) = B(H, u_{\alpha})$$

对 $H \in i\mathfrak{t}$, 若 $\alpha \neq 0$, 令

$$h_{\alpha} = \frac{2u_{\alpha}}{B(u_{\alpha}, u_{\alpha})}$$

称如此的 h_{α} 为 **coroot**, 也记为 $\alpha^{\vee}$.

定义中 h_{α} 右侧的 2 是为了使得

$$\alpha(h_{\alpha}) = 2$$

从而与标准的 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 中 $[H, E] = 2E$ 相同. 若 $\mathfrak{g}$ 不是半单李代数, 考虑紧李代数的分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

其 Cartan 子代数也相应分成

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

其中 $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}'$, 于是可见

$$i\mathfrak{t} = i\mathfrak{t}' \oplus i\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

而我们知道对 $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 有 $\text{ad}(Z) = 0$, 因此 B 在中心方向完全退化, 因此对于非半单李代数不可以直接按照上面的方式来讨论, 但是由于 $\mathfrak{g}'$ 是半单的, 所以我们可以对其 $\mathfrak{t}'$ 来定义, 即对 $\alpha \in (i\mathfrak{t}')^*$ 定义

$$\alpha(H) = B(H, u_\alpha), \quad \forall H \in i\mathfrak{t}'$$

而根在中心上取 0, 从而可以良定义延拓到 $i\mathfrak{t}$ 上. 于是我们可以对约化但非半单情况定义 **coroot system**

$$\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^\vee = \{h_\alpha : \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}, \quad h_\alpha = \frac{2u_\alpha}{B(u_\alpha, u_\alpha)}$$

引理 3.18 令 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则

$$(1) \quad \alpha(h_\alpha) = 2.$$

$$(2) \quad \text{对 } E \in \mathfrak{g}_\alpha, F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \text{ 有}$$

$$[E, F] = B(E, F)u_\alpha = \frac{1}{2}B(E, F)B(u_\alpha, u_\alpha)h_\alpha$$

$$(3) \quad \text{给定非零 } E \in \mathfrak{g}_\alpha, \text{ 在适当常数放缩下, 令 } F = -\theta E, \text{ 则有 } [E, F] = h_\alpha.$$

证明 (1) 显然. (2) 首先注意到 $[E, F] \in \mathfrak{g}_{\alpha+(-\alpha)} \cap (\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}$, 因此给定任意的 $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, 有

$$\begin{aligned} B([E, F], H) &= B(E, [F, H]) = \alpha(H)B(E, F) \\ &= B(u_\alpha, H)B(E, F) = B(B(E, F)u_\alpha, H) \end{aligned}$$

因为 B 在 $(\mathfrak{t}')_{\mathbb{C}}$ 上非奇异, 因此由 H 的任意性可见 $[E, F] = B(E, F)u_\alpha$.

(3) 注意

$$[cE, -\theta cE] = c^2 \frac{1}{2} B(E, -\theta E) B(u_\alpha, u_\alpha) h_\alpha$$

取正实数 c 满足

$$c^2 = \frac{2}{-B(E, \theta E) B(u_\alpha, u_\alpha)}$$

即可, 因为 $-B(-, \theta -)$ 是内积. □

定理 3.19 (标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组) 设 G 是一个紧 Lie 群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, 并且 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 固定一个非零的 $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, 并令 $F_{\alpha} = -\theta E_{\alpha}$. 伸缩 E_{α} (因而也伸缩 F_{α}), 使得 $[E_{\alpha}, F_{\alpha}] = H_{\alpha}$, 其中 $H_{\alpha} = h_{\alpha}$.

(1) 则 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{\alpha}, H_{\alpha}, F_{\alpha}\}$, 其中 $\{E_{\alpha}, H_{\alpha}, F_{\alpha}\}$ 对应于标准基

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 令 $I_{\alpha} = iH_{\alpha}$, $J_{\alpha} = -E_{\alpha} + F_{\alpha}$, 并且 $K_{\alpha} = -i(E_{\alpha} + F_{\alpha})$. 则 $I_{\alpha}, J_{\alpha}, K_{\alpha} \in \mathfrak{g}$, 并且 $\mathfrak{su}(2) \cong \text{span}_{\mathbb{R}}\{I_{\alpha}, J_{\alpha}, K_{\alpha}\}$, 其中 $\{I_{\alpha}, J_{\alpha}, K_{\alpha}\}$ 对应于基

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 存在一个 Lie 代数同态 $\varphi_{\alpha}: SU(2) \rightarrow G$, 使得 $d\varphi: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{g}$ 实现 (2) 中的同构, 并且其复化 $d\varphi: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 实现 (1) 中的同构.

(4) φ_{α} 在 G 中的像是 G 的一个 Lie 子群, 根据 φ_{α} 的核是 $\{I\}$ 还是 $\{\pm I\}$, 该子群分别同构于 $SU(2)$ 或 $SO(3)$.

证明 (1) 回忆我们有

$$\alpha(H_{\alpha}) = 2$$

因此可见

$$[H_{\alpha}, E_{\alpha}] = \alpha(H_{\alpha})E_{\alpha} = 2E_{\alpha}$$

$$[H_{\alpha}, F_{\alpha}] = -\alpha(H_{\alpha})F_{\alpha} = -2F_{\alpha}$$

结合 $[E_{\alpha}, F_{\alpha}] = H_{\alpha}$, 完美和 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的标准基对应, 从而立刻得到李代数同构. (2) 同理可得, 从复化中恢复其紧实形式即可.

(3) 结合 $SU(2)$ 单连通立刻得到可以积分. (4) 考虑 $\text{Ker } \varphi_{\alpha}$ 是正规离散子群, 结合连通性可见落于中心, 从而得证. $\square$

定义 3.20 G 是紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 称上面定理中得到的 $\{E_{\alpha}, H_{\alpha}, F_{\alpha}\}$ 为 **standard $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -triple**, $\{I_{\alpha}, J_{\alpha}, K_{\alpha}\}$ 称为 **standard $\mathfrak{su}(2)$ -triple**.

推论 3.21 G 紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 则

(1) α 在 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 中的倍数只有 $\pm\alpha$.

- (2) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 即 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_\alpha$.
- (3) 若 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, 则 $\alpha(h_\beta) \in \pm\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.
- (4) 对 (π, V) 为 G 的有限维表示, $\lambda \in \Delta(V)$, 有 $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

[详细证明见第 101 页](#)

第四章

Weyl 群理论

4.1 Lattices

G 是紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\alpha)$, 我们知道 α 可以视为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中的元素, 于是我们可以将 Killing 型从 $i\mathfrak{t}$ 上传递到 $(i\mathfrak{t})^*$ 上, 定义为

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = B(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in (i\mathfrak{t})^*$$

特别地, 对 $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$, 有

$$\lambda(h_\alpha) = \frac{2\lambda(u_\alpha)}{B(u_\alpha, u_\alpha)} = \frac{2B(u_\alpha, u_\lambda)}{B(u_\alpha, u_\alpha)} = \frac{2B(\alpha, \lambda)}{B(\alpha, \alpha)}$$

同时也容易得到

$$\alpha(H) = \frac{2B(H, h_\alpha)}{B(h_\alpha, h_\alpha)}, \quad \forall H \in i\mathfrak{t}$$

定义 4.1 G 是紧李群, T 是一个极大环面, 对应的 Cartan 子代数为 $\mathfrak{t}$, 则定义

- (1) **根格**: $R = R(\mathfrak{t})$, 为 $(i\mathfrak{t})^*$ 中由根生成的格, $R = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha : \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$.
- (2) **权格**: $P = P(\mathfrak{t})$, 定义为 $P = \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* : \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$.
- (3) **解析格**: $A = A(T)$, 定义为

$$A = \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^* : \lambda(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \forall H \in \mathfrak{t} \text{ s.t. } \exp H = I\}$$

根格很容易理解, 这就是根在 $(it)^*$ 中自然张成的格, 而权格也是在表示论里自然出现的概念, 回忆推论 3.21 (4) 的结论, 任意的有限维表示的权都满足权格的要求. 而解析格 (analytically integral weights) 的定义为对 $H \in \mathfrak{t}$, 只要 $e^H = I$, 就必须有

$$\lambda(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

这是因为我们希望定义

$$\xi_\lambda(e^H) = e^{\lambda(H)}$$

但是同一个 $t \in T$ 可能会在李代数层面有多个对数, 即

$$e^{H_1} = e^{H_2}$$

所以为了让我们上面的定义成立, 就需要让

$$e^{\lambda(H_1)} = e^{\lambda(H_2)} \implies e^{\lambda(H_1 - H_2)} = 1$$

也就是

$$\lambda(H_1 - H_2) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

定义 4.2 G 为紧李群, T 为极大环面, $\mathfrak{t}$ 为对应的 Cartan 子代数, 则

(1) **对偶根格**: $R^\vee = R^\vee(\mathfrak{t})$, 为 it 中的格, 定义为

$$R^\vee = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{h_\alpha : \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

(2) **对偶权格**: $P^\vee = P^\vee(\mathfrak{t})$, 为 it 中的格, 定义为

$$P^\vee = \{H \in it : \alpha(H) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

(3) 令 $\text{Ker } \mathcal{E} = \text{Ker } \mathcal{E}(T)$ 为 it 中的格, 定义为

$$\text{Ker } \mathcal{E} = \{H \in it : \exp(2\pi iH) = I\}$$

(4) 若 Λ_1 为 $(it)^*$ 中的完备格 (即张成 $(it)^*$), 而 Λ_2 为 it 中的完备格, 我们可以分别定义其对偶格为

$$\Lambda_1^* = \{H \in it : \lambda(H) \in \mathbb{Z}, \forall \lambda \in \Lambda_1\}$$

$$\Lambda_2^* = \{\lambda \in (it)^* : \lambda(H) \in \mathbb{Z}, \forall H \in \Lambda_2\}$$

注记 4.3 $\vee$ 是 root 与 coroot 之间的对偶, 而 $*$ 是格的整数对偶, 二者意义不同. $\triangle$

容易看出

$$\mathcal{E}: it \rightarrow T, \quad H \mapsto \exp(2\pi i H)$$

是从左边加法群到右边乘法群的李群同态, 所以 $\text{Ker } \mathcal{E}$ 首先是一个加法子群. 而结合 $\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T$ 是满射, 可见 $\mathcal{E}$ 也是满射, 结合 $\exp$ 在零附近是微分同胚, 可见 $\mathcal{E}$ 在原点附近也是微分同胚, 所以 $\text{Ker } \mathcal{E}$ 自然是离散子群, 从而是格, 再结合

$$it / \text{Ker } \mathcal{E} \cong T$$

后者是紧的, 所以 $\text{Ker } \mathcal{E}$ 还是完备格. 现在我们来证明对完备格 $\Lambda \subset V$ 而言有 $\Lambda^{**} = \Lambda$, 这是纯粹的线性代数, 现在对 $H \in \Lambda$, 按照 Λ^* 的定义, 有

$$\lambda(H) \in \mathbb{Z}, \quad \forall \lambda \in \Lambda^* \implies H \in \Lambda^{**}$$

从而可见显然有

$$\Lambda \subset \Lambda^{**}$$

反过来, 由于 Λ 是完备格, 从而存在 V 的一组基 $v_1, \dots, v_n$ 使得

$$\Lambda = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_n$$

取其对偶基

$$v^1, \dots, v^n \in V^* \implies v^i(v_j) = \delta_{ij}$$

从而可以断言

$$\Lambda^* = \mathbb{Z}v^1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v^n$$

于是立刻可见对

$$H = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

若对任意的 j 有 $v^j(H) \in \mathbb{Z}$, 这说明 $a_j \in \mathbb{Z}$, 于是 $H \in \Lambda$, 所以

$$\Lambda^{**} \subset \Lambda \implies \Lambda^{**} = \Lambda$$

引理 4.4 G 为连通紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 Cartan 子代数, 对 $H \in \mathfrak{t}$, 有

$$\exp H \in Z(G) \iff \alpha(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

证明 令 $g \in \exp H$, 回忆引理 2.20, 知道 $g \in Z(G)$ 当且仅当 $\text{Ad}(g)X = X$ 对任意

的 $X \in \mathfrak{g}$ 成立. 因此对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$ 与 $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, 有

$$\mathrm{Ad}(g)X = e^{\mathrm{ad} H} X = e^{\alpha(H)} X$$

根空间分解告诉我们命题成立. □

定义 4.5 G 是紧李群, T 是极大环面, 令 $\chi(T)$ 为 T 上的**特征群**, 所谓特征及李群同态

$$\xi: T \rightarrow \mathbb{C}^{\times} = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$

定理 4.6 G 为紧李群, T 为极大环面, 则有

(1) $R \subset A \subset P$.

(2) 对 $\lambda \in (it)^*$, 有

$$\lambda \in A \iff \xi_{\lambda} \in \chi(T), \quad \xi_{\lambda}(\exp H) := e^{\lambda(H)}, \forall H \in \mathfrak{t}$$

而 $\lambda \in (it)^*$ 可以复线性延拓到 $(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})^*$, 从而自然作用在 $\mathfrak{t}$ 上. 并且 $\lambda \mapsto \xi_{\lambda}$ 给出了一个双射

$$A \longleftrightarrow \chi(T)$$

(3) 若李代数 $\mathfrak{g}$ 半单, 则 $|P/R|$ 是有限的.

证明 (1) 对 $H \in \mathfrak{t}$, 若 $\exp H = e$, 对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 引理 4.4 可见有 $\alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 于是立刻可见

$$R \subset A$$

现在考虑一个标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组 $\{E_{\alpha}, h_{\alpha}, F_{\alpha}\}$, 由于

$$\exp(2\pi i h_{\alpha}) = \varphi_{\alpha}(\exp H) = \varphi_{\alpha}(I) = I$$

其中 H 为 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 中的标准 $H = \mathrm{diag}\{1, -1\}$, 故可见若 $\lambda \in A$, 则一定有

$$\lambda(2\pi i h_{\alpha}) \in 2\pi i\mathbb{Z} \implies \lambda(h_{\alpha}) \in \mathbb{Z}$$

因此可见

$$A \subset P$$

(2) 我们已经通过解析格的定义知道 ξ_{λ} 是良定义的, 并且不难发现 ξ_{λ} 是同态, 故

确实是特征. 反过来, 如果给定一个 $\xi_\lambda \in \chi(T)$, 满足

$$\xi_\lambda(\exp H) = e^{\lambda(H)}$$

也可以发现一旦 $\exp H = I$, 一定有 $\lambda(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 故 $\lambda \in A$. 因此我们给出从解析格到特征群的一个双射, 即实际上有

$$A(T) \cong \chi(T)$$

(3) 最后由定理 3.11 可见 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 张成 $(i\mathfrak{t})^*$, 因此 R 是一个完备格, 而 $R \subset P$, 所以 P 也是完备格, 两个同 rank 格之间的商必然有限. $\square$

定理 4.7 G 是紧李群, $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, T 为极大环面, 对应 Cartan 子代数为 $\mathfrak{t}$, 则有

$$(1) R^* = P^\vee.$$

$$(2) P^* = R^\vee.$$

$$(3) A^* = \text{Ker } \mathcal{E}.$$

$$(4) P^* \subset A^* \subset R^*, \text{ 即 } R^\vee \subset \text{Ker } \mathcal{E} \subset P^\vee.$$

证明 (1) 与 (2) 基本就是定义, 检查即可.

(3) 我们只需要证明 $(\text{Ker } \mathcal{E})^* = A$ 即可, 考虑 $\lambda \in (\text{Ker } \mathcal{E})^*$ 当且仅当对任意的 $H \in i\mathfrak{t}, \exp(2\pi iH) = I$, 都有 $\lambda(H) \in \mathbb{Z}$, 这当且仅当对任意的 $K = 2\pi iH \in \mathfrak{t}, \exp K = I$, 都有 $\lambda(K) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, 即 $\lambda \in A$, 故得证, 从而可见

$$A^* = (\text{Ker } \mathcal{E})^{**} = \text{Ker } \mathcal{E}$$

(4) 显然. $\square$

本节最终得到下图, 上下通过 dual lattices 对应.

$$\begin{array}{ccccc} R & \subseteq & A(T) & \subseteq & P \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ P^\vee & \supseteq & \text{Ker } \mathcal{E} & \supseteq & R^\vee \end{array}$$

4.2 Weyl 群

定义 4.8 G 为紧连通李群, 极大环面为 T , 令 $N = N(T)$ 为 T 在 G 中的正规化子, 则我们定义 G 的 **Weyl 群** 为

$$W = W(G) = W(G, T) := N/T$$

若 T' 为 G 的另外一个极大环面, 则推论 2.19 告诉我们存在 $g \in G$ 使得 $gTg^{-1} = T'$ 并且 $\implies gN(T)g^{-1} = N(T')$, 因此可见

$$N(T')/T' = gN(T)g^{-1}/gTg^{-1} \cong N(T)/T \implies W(G, T) \cong W(G, T')$$

因此可见 Weyl 群在同构意义下无关于极大环面的选择.

给定 $w \in N, H \in \mathfrak{t}$, 与 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, 定义 N 在 $\mathfrak{t}^*$ 上的作用为

$$w(H) := \text{Ad}(w)H, \quad [w(\lambda)](H) = \lambda(w^{-1}H) = \lambda(\text{Ad}(w^{-1})H)$$

因此, 我们可以把这个作用复线性地延拓到 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 上, 因此可以自然地定义在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用. 由于 $\text{Ad}(T)$ 在 $\mathfrak{t}$ 上平凡作用, 因为

$$\text{Ad}(w)H = d(c_w)H = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} we^{tH}w^{-1} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tH} = H, \quad \forall w \in T, H \in \mathfrak{t}$$

因此 N 的作用下降到 $W = N/T$ 上.

定理 4.9 令 G 为紧连通李群, T 是极大环面.

- (1) W 在 $i\mathfrak{t}$ 与 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用是忠实的.
- (2) 对 $w \in N, \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$, 有 $\text{Ad}(w)\mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{g}_{w\alpha}$.
- (3) W 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用保持 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 并且在其上忠实作用.
- (4) W 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用保持 $\{h_{\alpha}: \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$, 并且在其上忠实作用. 特别地有 $wh_{\alpha} = h_{w\alpha}$.
- (5) W 是一个有限群.
- (6) 给定 $t_i \in T$, 则存在 $g \in G$ 使得 $c_g t_1 = t_2$ 当且仅当存在 $w \in N$ 使得 $c_w t_1 = t_2$.

详细证明见第 101 页

4.3 Simple Roots 与 Weyl Chambers

定义 4.10 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 Cartan 子代数, 令 $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{t}$.

- (1) A **system of simple roots**, $\Pi = \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 为 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一个子集, 恰好构成 $(i\mathfrak{t}')^*$ 的一组基, 且满足对任意的 $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 都可以写成 $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_{\alpha} \alpha$ 满足 $\{k_{\alpha} : \alpha \in \Pi\} \subset \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 或者 $\{k_{\alpha} : \alpha \in \Pi\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Π 中的元素被称为 **simple roots**.

- (2) 给定一个单根系统 Π , 则对应的 **positive roots** 为

$$\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) : \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_{\alpha} \alpha, k_{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

对应的 **negative roots** 为

$$\Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) : \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_{\alpha} \alpha, k_{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$$

从而可见 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \amalg \Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 并且 $\Delta^-(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = -\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

之所以是 $(i\mathfrak{t}')^*$ 的基而不是 $(i\mathfrak{t})^*$ 的基, 是因为根在中心方向上是 0, 所以根只作用在半单方向上.

定义 4.11 记号同上, 我们定义

- (1) $(i\mathfrak{t}')^* \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha^{\perp} \right)$ 的连通分支称为 $(i\mathfrak{t}')^*$ 的 **(open) Weyl chambers**, $i\mathfrak{t}' \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} h_{\alpha}^{\perp} \right)$ 的连通分支称为 $i\mathfrak{t}$ 的 **(open) Weyl chambers**.
- (2) 若 C 是 $(i\mathfrak{t})^*$ 的一个 Weyl 腔, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 称为 **C-positive** 如果 $B(C, \alpha) > 0$, 称为 **C-negative** 如果 $B(C, \alpha) < 0$. 若 α 是 C -positive 的, 则称为对于 C **decomposable**, 如果存在 $\beta, \gamma \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是 C -positive 的, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$, 反之则称为对于 C **indecomposable**.
- (3) 若 $C^{\vee}$ 是 $i\mathfrak{t}$ 的一个 Weyl 腔, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 称为 **$C^{\vee}$ -positive** 如果 $\alpha(C^{\vee}) > 0$, 称为 **$C^{\vee}$ -negative** 如果 $\alpha(C^{\vee}) < 0$. 若 α 是 $C^{\vee}$ -positive 的, 则称为对于 $C^{\vee}$ **decomposable**, 如果存在 $\beta, \gamma \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是 $C^{\vee}$ -positive 的, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$, 反之则称为对于 $C^{\vee}$ **indecomposable**.

注意这里的 $\alpha^\perp$ 定义为

$$\alpha^\perp = \{\lambda \in (it')^*: B(\lambda, \alpha) = 0\}$$

所以定义中去掉了所有取 0 的点, 从而在每一个连通分支, 也就是 Weyl 腔上, α 要么是恒正的, 要么是恒负的, 故 positive 与 negative 是良定义的. 同理

$$h_\alpha^\perp := \{H \in it': B(H, h_\alpha) = 0\}$$

回忆我们之前就已经声明

$$\alpha(H) = \frac{2B(H, h_\alpha)}{B(h_\alpha, h_\alpha)}$$

所以可见

$$\alpha(H) > 0 \iff B(H, h_\alpha) > 0$$

同理有对偶情况的 positive 与 negative.

定义 4.12 记号同上, 若 C 是 $(it)^*$ 的 Weyl 腔, 令

$$\Pi(C) = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}): \alpha \text{ is } C\text{-positive and indecomposable}\}$$

若 $C^\vee$ 为 it 的 Weyl 腔, 令

$$\Pi(C^\vee) = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}): \alpha \text{ is } C^\vee\text{-positive and indecomposable}\}$$

若 Π 是一个单根系统, 则在 $(it)^*$ 中的 **associated Weyl chamber** 为

$$C(\Pi) = \{\lambda \in (it)^*: B(\lambda, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Pi\}$$

在 it 中的 **associated Weyl chamber** 为

$$C^\vee(\Pi) = \{H \in it: \alpha(H) > 0, \forall \alpha \in \Pi\}$$

下面给定一个单根系统 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, 其中 $l = \text{rank } G = \dim T$, 定义其在 $(it)^*$ 上的**基本权**由下式决定

$$\pi_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$$

从而可见 $\{\pi_1, \dots, \pi_l\}$ 为 $(it)^*$ 的一组基, 实际上就是 simple coroots 的对偶基, 再定义

$$\rho = \rho(\Pi) = \sum_i \pi_i \in (it)^*$$

从而可见有

$$\rho(h_{\alpha_i}) = 1 \implies \rho \in P$$

下面我们介绍 **Dynkin 图**, 给定单根系统 Π , Dynkin 图的顶点由单根 α_i 组成, 若 $B(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0 (i \neq j)$, 就在 α_i 与 α_j 之间连上 $m_{ij} = \alpha_i(h_{\alpha_j})\alpha_j(h_{\alpha_i})$ 条边, 现在假设

$$p = -\alpha_i(h_{\alpha_j}), \quad q = -\alpha_j(h_{\alpha_i})$$

推论 3.21 告诉我们 p, q 都是整数, 我们定义

$$B(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha_i||\alpha_j| \cos \theta$$

其中 θ 就是在内积 B 的意义下的夹角, 结合

$$\alpha_i(h_{\alpha_j}) = \frac{2\alpha_i(u_{\alpha_j})}{B(\alpha_j, \alpha_j)} = \frac{2B(\alpha_i, \alpha_j)}{B(\alpha_j, \alpha_j)}$$

立刻可见

$$m_{ij} = m_{ji} = \frac{4B(\alpha_i, \alpha_j)^2}{B(\alpha_i, \alpha_i)B(\alpha_j, \alpha_j)} = 4 \cos^2 \theta$$

而结合 p, q 都是整数, 所以 m_{ij} 也只能是整数, 所以只能取

$$0, 1, 2, 3, 4$$

若取 4, 则说明 $\cos^2 \theta = 1$, 这表示 α_i 与 α_j 线性相关, 但是这俩都落在单根系统内, 肯定不是线性相关的, 所以矛盾, 只能取 0, 1, 2, 3. 于是不难发现实际上 $B(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ 的需求是不重要的, 因为 m_{ij} 也可以等于 0.

定理 4.13 (根串理论) G 是紧李群, 李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的, $\mathfrak{t}$ 为 Cartan 子代数, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. 令 V 为任意的有限维表示, $\lambda \in \Delta(V)$, 则 **α -string through λ** 为所有的权形如 $\lambda + n\alpha$, 对 $n \in \mathbb{Z}$.

(1) 过 λ 的 α -串形如 $\{\lambda + n\alpha : -p \leq n \leq q\}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 并且 $\lambda(h_{\alpha}) = p - q$.

(2) 若 $\lambda(h_{\alpha}) < 0$, 则 $\lambda + \alpha \in \Delta(V)$. 若 $\lambda(h_{\alpha}) > 0$, 则 $\lambda - \alpha \in \Delta(V)$.

证明 考虑子模

$$W = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\lambda + n\alpha}$$

由于 V 是有限维的, 所以 W 自然也是有限维. 考虑标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组 $\{E_{\alpha}, H_{\alpha}, F_{\alpha}\}$,

定理 3.11 告诉我们

$$E_\alpha V_{\lambda+n\alpha} \subset V_{\lambda+(n+1)\alpha}, \quad F_\alpha V_{\lambda+n\alpha} \subset V_{\lambda+(n-1)\alpha}, \quad H_\alpha V_{\lambda+n\alpha} \subset V_{\lambda+n\alpha}$$

从而可见 W 是一个有限维 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -模. 记 $a = \lambda(h_\alpha)$, 则对 $v \in V_{\lambda+n\alpha}$, 有

$$H_\alpha v = (\lambda + n\alpha)(h_\alpha)v = (a + 2n)v$$

从而可见 $V_{\lambda+n\alpha}$ 是 H_α 对应特征值 $a + 2n$ 的特征子空间, 定义

$$S = \{n \in \mathbb{Z}: V_{\lambda+n\alpha} \neq 0\}$$

容易看见 $0 \in S$ 并且 S 是有限集. 现在由于有限维 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -模完全可约, 从而存在不可约分解

$$W = \bigoplus_{i=1}^r W_i$$

每个不可约分量都存在 $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 H_α 在其上的特征值为

$$m_i, m_i - 2, \dots, -m_i$$

由于 W 中所有 H_α 的特征值都形如 $a + 2n$, 从而可见

$$m_i \equiv a \pmod{2}$$

现在取所有不可约分量中的最高权

$$M = \max\{m_1, \dots, m_r\}$$

从而可见 H_α 在 W 上的所有特征值就是 $M, M - 2, \dots, -M$. 由于 $0 \in S$, 可见 $|a| \leq M$, 我们定义

$$p = \frac{M+a}{2}, \quad q = \frac{M-a}{2}$$

由于同奇偶, 可见 p, q 为正整数, 而由于

$$-M = a + 2(-p), \quad M = a + 2q$$

可见

$$S = \{-p, -p+1, \dots, q\}$$

第一个论断得证, 而结合 p, q 的定义, 立刻可见

$$\lambda(h_\alpha) = a = p - q$$

从而 (2) 也是显然的. □

现在回到 Dynkin 图的讨论, 由单根系统的定义, 凡是根都一定是正根或者负根, 而考虑

$$\alpha_j - \alpha_i$$

这个系数一正一负, 从而不可能落在 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$ 中, 于是根串理论告诉我们 $s = 0$, 而 $r \geq 0$, 所以可见

$$\alpha_i(h_{\alpha_j}) = s - r \leq 0$$

同理

$$\alpha_j(h_{\alpha_i}) \leq 0$$

结合

$$\alpha_j(h_{\alpha_i}) = \frac{2B(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\|^2} \leq 0 \implies \cos \theta \leq 0$$

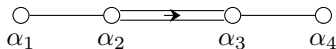
于是在内积 B 的意义下, 单根之间的夹角 $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 现在结合 $pq \in \{0, 1, 2, 3\}$ 可以得出夹角只能是

$$\boxed{\frac{\pi}{4}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{6}}$$

最后, 注意到若两个根不是正交的, 则 $p, q \in \{1, 2, 3\}$, 并且 $pq \leq 3$, 从而至少有一个是 1, 不妨设 $p \geq q$, 此时 $q = 1$, 于是

$$m_{ij} = pq = \frac{p}{q} = \frac{\|\alpha_i\|^2}{\|\alpha_j\|^2}$$

此时称 α_i 为长根, α_j 为短根. 当相邻的两个根一长一短时, 我们就在 Dynkin 图上从长根到短根画一个箭头, 以此表明根之间的长短关系. 一个图例为:



4.4 Weyl Group as a Reflection Group

定义 4.14 令 G 为紧李群, $\mathfrak{t}$ 为 Cartan 子代数. 对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(1) 定义反射 $r_{\alpha}: (\mathfrak{it})^* \rightarrow (\mathfrak{it})^*$ 为

$$r_{\alpha}(\lambda) = \lambda - 2 \frac{B(\lambda, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} \alpha = \lambda - \lambda(h_{\alpha})\alpha$$

定义反射 $r_{h_{\alpha}}: \mathfrak{it} \rightarrow \mathfrak{it}$ 为

$$r_{h_{\alpha}}(H) = H - 2 \frac{B(H, h_{\alpha})}{B(h_{\alpha}, h_{\alpha})} h_{\alpha} = H - \alpha(H)h_{\alpha}$$

(2) 定义 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 为由 $\{r_{\alpha}: \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 生成的反射群, 定义 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\vee})$ 为由 $\{r_{h_{\alpha}}: \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$ 生成的反射群.

这个定义的道理就是关于 α 对应的超平面 $\alpha^{\perp}$ 的正交反射, 将 λ 分解成 $\lambda_{\perp} + c\alpha$, 可见

$$r_{\alpha}(\lambda) = \lambda_{\perp} - c\alpha$$

这两个反射都是对合, 并且需要注意到

$$(r_{\alpha}\lambda)(H) = \lambda(r_{h_{\alpha}}H)$$

展开计算即可, 这说明 r_{α} 与 $r_{h_{\alpha}}$ 为同一个反射在互为对偶的空间上的表现.

引理 4.15 G 是紧李群, T 是极大环面.

(1) 对 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 则存在 $w_{\alpha} \in N(T)$ 使得 w_{α} 在 $(\mathfrak{it})^*$ 上的作用由 r_{α} 给出, 在 $\mathfrak{it}$ 上的作用由 $r_{h_{\alpha}}$ 给出.

(2) 对 $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 有 $r_{\alpha}(\beta) \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 与 $r_{h_{\alpha}}(h_{\beta}) = h_{r_{\alpha}(\beta)}$.

证明 选择标准的 $\mathfrak{su}(2)$ 三元组 $\{\mathcal{I}_{\alpha}, \mathcal{J}_{\alpha}, \mathcal{K}_{\alpha}\}$ 与 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组 $\{E_{\alpha}, H_{\alpha}, F_{\alpha}\}$, 对应着一个李群同态

$$\varphi_{\alpha}: \mathrm{SU}(2) \rightarrow G$$

现在令

$$w = \exp\left(\frac{\pi}{2}J\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $J = -E + F \in \mathfrak{su}(2)$, 因此可见

$$d\varphi_\alpha(J) = \mathcal{J}_\alpha = -E_\alpha + F_\alpha$$

定义 $w_\alpha = \varphi_\alpha(w) \in G$. 现在对 $H \in i\mathfrak{t}$, 有

$$\mathrm{ad}\left(d\varphi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}J\right)\right)H = \frac{\pi}{2}\mathrm{ad}(-E_\alpha + F_\alpha)H = \alpha(H)\frac{\pi}{2}(E_\alpha + F_\alpha)$$

特别地, 若 $H \in h_\alpha^\perp$, 即 $B(H, h_\alpha) = 0$, 则有 $\alpha(H) = 0$, 于是 $\mathrm{ad}\left(d\varphi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}J\right)\right)H = 0$, 所以可见

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(w_\alpha)H &= \mathrm{Ad}(\varphi_\alpha(\exp(\pi J/2)))H = \mathrm{Ad}(\exp(d\varphi_\alpha(\pi J/2)))H \\ &= \exp(\mathrm{ad}\left(d\varphi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}J\right)\right))H = H\end{aligned}$$

从而 w_α 逐点固定 $h_\alpha^\perp$, 而在 $\mathrm{SU}(2)$ 中, 有

$$c_w H = w H w^{-1} = -H$$

首先注意到

$$\varphi_\alpha(w)\varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(w)^{-1} = \varphi_\alpha(xw w^{-1}) \implies c_{\varphi_\alpha(w)} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha \circ c_w$$

取微分可见

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha) \circ d\varphi_\alpha = d\varphi_\alpha \circ \mathrm{Ad}(w)$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(w_\alpha)h_\alpha &= \mathrm{Ad}(w_\alpha)d\varphi_\alpha(H) \\ &= d\varphi_\alpha(\mathrm{Ad}(w)H) \\ &= d\varphi_\alpha(-H) = -h_\alpha\end{aligned}$$

从而可见在 $i\mathfrak{t}$ 上, $\mathrm{Ad}(w_\alpha) = r_{h_\alpha}$, 而且它保持 $\mathfrak{t}$, 因此可见

$$w_\alpha T w_\alpha^{-1} = T \implies w_\alpha \in N(T)$$

现在在对偶空间 $(i\mathfrak{t})^*$ 上, 注意到

$$(w_\alpha \lambda)(H) = \lambda(\mathrm{Ad}(w_\alpha)^{-1}H) = B(u_\lambda, \mathrm{Ad}(w_\alpha)^{-1}H) = B(\mathrm{Ad}(w_\alpha)u_\lambda, H)$$

对 $\lambda = \alpha$, 有 $\mathrm{Ad}(w_\alpha)u_\alpha = -u_\alpha$, 对 $\lambda \in \alpha^\perp$ 有 $u_\lambda \in h_\alpha^\perp$, 从而 $\mathrm{Ad}(w_\alpha)u_\lambda = u_\lambda$, 从而在对偶空间上也得证. 而定理 4.9 告诉我们 $wh_\beta = h_{w\beta}$, 对 $w \in W$, 而我们第一问已经说明了 r_α 与 r_{h_α} 的作用就是 $N(T)$ 中元素的作用, 所以立刻得到. $\square$

引理 4.16 (Weyl 腔与单根系是同一份信息) G 是紧李群, $\mathfrak{t}$ 是 Cartan 子代数.

(1) 存在一一对应:

$$\begin{aligned} \{\text{systems of simple roots}\} &\longleftrightarrow \{\text{Weyl chambers of } (i\mathfrak{t})^*\} \\ \Pi &\mapsto C(\Pi) \\ \Pi(C) &\leftarrow C \end{aligned}$$

(2) 存在一一对应:

$$\begin{aligned} \{\text{systems of simple roots}\} &\longleftrightarrow \{\text{Weyl chambers of } i\mathfrak{t}\} \\ \Pi &\mapsto C^\vee(\Pi) \\ \Pi(C^\vee) &\leftarrow C^\vee \end{aligned}$$

(3) 若 Π 是单根系统, $\alpha, \beta \in \Pi$, 则有 $B(\alpha, \beta) \leq 0$.

[详细证明见第 101 页](#)

定理 4.17 G 是紧李群, T 是极大环面, 则

(1) $W(G, T)$ 在 $i\mathfrak{t}$ 上的作用给出同构 $W(G, T) \cong W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\vee)$.

(2) $W(G, T)$ 在 $(i\mathfrak{t})^*$ 上的作用给出同构 $W(G, T) \cong W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$.

(3) $W(G, T)$ 在 Weyl 腔的集合上给出传递作用, 并且如果 $w_1 C_1 = w_2 C_1 \implies w_1 = w_2$.

[详细证明见第 102 页](#)

第五章

最高权表示

5.1 最高权

Peter-Weyl 定理告诉我们从 $L^2(G)$ 中可以找到紧李群 G 的全部不可约表示，但是我们仍然不知道如何用一组简单的数据把所有不可约表示参数化，并且针对一个给定参数去恢复这个不可约表示. 这两个问题的答案都是最高权.

在本节中，我们固定 G 是紧李群， T 是极大环面， $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 为相对于单根系 $\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的正根系，定义

$$\mathfrak{n}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^{\pm}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

使得

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^{-} \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}^{+}$$

将其称为**三角分解**. 可以将 $\mathfrak{n}^{+}$ 视为严格上三角矩阵，而 $\mathfrak{n}^{-}$ 视为严格下三角矩阵，注意我们有

$$[\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^{+}, \mathfrak{n}^{+}] \subset \mathfrak{n}^{+}, \quad [\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^{-}, \mathfrak{n}^{-}] \subset \mathfrak{n}^{-}$$

定义 5.1 令 V 是 $\mathfrak{g}$ 的表示，有权空间分解

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Delta(V)} V_{\lambda}$$

- (1) 非零向量 $v \in V_{\lambda_0}$ 称为 λ_0 相对 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的**最高权向量**，如果 $\mathfrak{n}^{+}v = 0$. 在这种情况下，称 λ_0 为 V 的**最高权**.

- (2) 一个权 λ 称为是 **dominant**, 如果对任意 $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 都有 $B(\lambda, \alpha) \geq 0$, 即 λ 落于 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 所对应的 Weyl 腔之内.

定理 5.2 G 为连通紧李群, V 为 G 的不可约表示, 则

- (1) V 有唯一最高权 λ_0 .
- (2) 最高权 λ_0 是支配权, 并且是解析整的, 即 $\lambda_0 \in A(T)$.
- (3) 在差一个非零常数的意义下最高权向量唯一.
- (4) 任何权 $\lambda \in \Delta(V)$ 都形如

$$\lambda = \lambda_0 - \sum_{\alpha_i \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

- (5) 对 $w \in W$, 有 $wV_\lambda = V_{w\lambda}$, 从而 $\dim V_\lambda = \dim V_{w\lambda}$. (此处 W 认同为 $W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$.)
- (6) 考虑由 Killing 型诱导的范数, 有 $\|\lambda\| \leq \|\lambda_0\|$, 取等当且仅当存在 $w \in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 使得 $\lambda = w\lambda_0$.
- (7) 在同构的意义下, V 由 λ_0 唯一决定.

证明 我们混着证明, 首先我们在权上考虑偏序

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} n_\alpha \alpha, \quad \text{s. t. } n_\alpha \geq 0$$

既然是排序就肯定有极大元, 取为 λ_0 , 现在对任意的 $\alpha \in \Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 取 $v_0 \in V_{\lambda_0}$, 都有

$$\mathfrak{g}_\alpha v_0 \subset V_{\lambda_0 + \alpha} = 0$$

定义 $V_0 = \mathbb{C}v_0$, 然后递归定义

$$V_n = V_{n-1} + \mathfrak{n}^- V_{n-1}$$

最后定义

$$V_\infty = \bigcup_n V_n$$

不难发现 $V_\infty \subset V$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -子模, 结合 V 是不可约的, 从而可见 $V = V_\infty$, 于是立刻看出所有的权都是最高权通过负根平移得到. 从而也立刻看出最高权是唯一的, 并且最高权向量也是唯一的. 其他几个也不难验证, 暂略. $\square$

定义 5.3 令 G 为紧连通李群, V 是 G 的不可约表示, 最高权为 λ , 由于 V 被 λ 唯一决定, 我们用 $V(\lambda)$ 来表示 V , 并且 χ_λ 表示 χ_V .

引理 5.4 (对偶表示的最高权) G 是紧连通李群, $V(\lambda)$ 为 G 的一个不可约表示, 则

$$V(\lambda)^* \cong V(-w_0\lambda)$$

其中 $w_0 \in W(\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$ 为唯一的把正 Weyl 腔送到负 Weyl 腔的元素.

证明 首先我们注意到

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$$

所以 Schur 引理告诉我们

$$V \text{ irreducible} \iff \int_G |\chi_V(g)|^2 dg = 1 \iff V^* \text{ irreducible}$$

所以 $V(\lambda)^*$ 也不可约, 故只需找到它的最高权. 取定一个 $V(\lambda)$ 上的 G -不变 Hermite 内积 $(-, -)$, 定义对 $v \in V(\lambda)$,

$$\mu_v(-) := (-, v)$$

由此给出了

$$V(\lambda)^* = \{\mu_v : v \in V(\lambda)\}$$

注意 $v \mapsto \mu_v$ 是共轭线性而非复线性. 现在结合内积是 G -不变的, 立刻得到

$$g\mu_v(-) = (g^{-1}-, v) = (-, gv) = \mu_{gv}$$

于是对 $X \in \mathfrak{g}$, 有

$$e^{tX}\mu_v = \mu_{e^{tX}v} \implies X\mu_v = \mu_{Xv}$$

现在任取 $Z = X + iY \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, 有

$$Z\mu_v = \mu_{\theta(Z)v}$$

其中 θ 为 Cartan 对合, 这是因为 $v \mapsto \mu_v$ 是共轭线性的. 现在取最高权向量 $v_\lambda \in V(\lambda)$, 有 $\mathfrak{n}^+v_\lambda = 0$, 而定理 5.2 告诉我们 w_0v_λ 是权为 $w_0\lambda$ 的权向量. 现在取 $Y \in i\mathfrak{t}$, Cartan 对合满足 $\theta Y = -Y$, 所以可见

$$Y\mu_{w_0v_\lambda} = \mu_{\theta(Y)w_0v_\lambda} = \mu_{-Yw_0v_\lambda}$$

而 $w_0 v_\lambda$ 为权为 $w_0 \lambda$ 的权向量, 所以

$$Y w_0 v_\lambda = [Y, w_0 v_\lambda] = w_0 \lambda(Y) w_0 v_\lambda$$

注意权在 $\mathfrak{it}$ 上是实数, 所以有

$$Y \mu_{w_0 v_\lambda} = \mu_{-Y w_0 v_\lambda} = \mu_{-w_0 \lambda(Y) w_0 v_\lambda} = \overline{-w_0 \lambda(Y)} \mu_{w_0 v_\lambda} = -w_0 \lambda(Y) \mu_{w_0 v_\lambda}$$

所以 $\mu_{w_0 \lambda}$ 是权 $-w_0 \lambda$ 的向量, 最后我们要证明这是最高权, 也就是

$$\mathfrak{n}^+ \mu_{w_0 \lambda} = 0$$

引理 3.14 告诉我们 $\theta \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^-$, 所以

$$\mathfrak{n}^+ \mu_{w_0 \lambda} = 0 \iff \mathfrak{n}^- w_0 v_\lambda = 0$$

注意到

$$\mathfrak{n}^- w_0 v_\lambda = w_0 (\text{Ad}(w_0^{-1}) \mathfrak{n}^-) v_\lambda = w_0 (\mathfrak{n}^+) v_\lambda = 0$$

得证. □

这个引理的道理就在于下图:

$$\begin{array}{ccccccc} V(\lambda) : & \lambda & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & w_0 \lambda \\ & \text{highest} & & & & \text{lowest} \\ \\ V(\lambda)^* : & -w_0 \lambda & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & -\lambda \\ & \text{highest} & & & & \text{lowest} \end{array}$$

5.2 Weyl 积分公式

本节的目标是把 G 上的积分下降到极大环面上的积分, 即形成如下公式

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{|W(G)|} \int_T d(t) \int_{G/T} f(gt g^{-1}) dg T dt$$

定义 5.5 G 是紧连通李群, T 是极大环面.

(1) $g \in G$ 称为 **regular**, 如果 $Z_G(g)^0$ 是极大环面.

(2) 令 $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中的正则元, 令 G^{reg} 表示 G 中的正则元.

(3) 对 $t \in T$, 定义

$$d(t) = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} (1 - \xi_{-\alpha}(t))$$

注记 5.6 无论是李群还是李代数的正则元, 其道理都是让中心化子的维数尽可能小. $\triangle$

定理 5.7 G 是紧连通李群, 则

(1) $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是开稠密的.

(2) G^{reg} 在 G 中是稠密的.

(3) T 是极大环面且 $t \in T$, 则 $t \in T^{\text{reg}}$ 当且仅当 $d(t) \neq 0$.

(4) 对 $H \in \mathfrak{t}$, e^H 是正则元当且仅当

$$H \in \Xi = \{H \in \mathfrak{t}: \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

(5) 有 $G^{\text{reg}} = \bigcup_{g \in G} gT^{\text{reg}}g^{-1}$.

详细证明见第 102 页

定义 5.8 G 是紧连通李群, T 是极大环面, 定义一个光滑满射

$$\psi: G/T \times T \rightarrow G, \quad (gT, t) \mapsto gtg^{-1}$$

我们有时也将其看做限制映射 $\psi: G/T \times T^{\text{reg}} \rightarrow G^{\text{reg}}$.

我们记 $\pi: G \rightarrow G/T$ 为投影映射.

引理 5.9 G 是紧连通李群, T 是极大环面, 则有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

并且存在 0 在 $\left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$ 中的开邻域 $U_{\mathfrak{g}}$ 使得如果 $U_G = \exp U_{\mathfrak{g}}$, 并且 $U_{G/T} = \pi(U_G)$, 则

(1) 映射 $\pi \circ \exp: U_{\mathfrak{g}} \rightarrow U_G \rightarrow U_{G/T}$ 是微分同胚.

(2) $U_{G/T}$ 是 eT 在 G/T 中的开邻域.

(3) $U_G T = \{gt: g \in U_G, t \in T\}$ 是 e 在 G 中的一个开邻域.

(4) 映射 $\xi: U_G T \rightarrow G/T \times T$, $gt \mapsto (gT, t)$ 是满射到 $U_{G/T} \times T$ 的光滑良定义微分同胚.

[详细证明见第 102 页](#)

引理 5.10 G 紧连通李群, T 是极大环面. 按照上一个引理选择 $U_G \subset G$, 对 $g \in G$ 与 $t \in T$, 定义

$$\varphi: U_G T \rightarrow G, \quad \varphi = l_{gt^{-1}g^{-1}} \circ \psi \circ (l_{gT} \times l_t) \circ \xi$$

则其微分 $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 由下式给出

$$(H + X) \mapsto \text{Ad}(g) ((\text{Ad}(t^{-1}) - I)X + H), \quad H \in \mathfrak{t}, X \in \left(\mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

并且有

$$\det(d\varphi) = d(t)$$

[详细证明见第 102 页](#)

定理 5.11 G 是紧连通李群, T 是极大环面, 映射

$$\psi: G/T \times T^{\text{reg}} \rightarrow G^{\text{reg}}, \quad (gT, t) \mapsto gtg^{-1}$$

是满射, 且为 $|W(G, T)|$ 对 1 的局部微分同构.

[详细证明见第 102 页](#)

然后通过一些繁琐的微分流形体积形式处理, 就得到:

定理 5.12 (Weyl 积分公式) G 是紧连通李群, T 是极大环面, 对 $f \in C(G)$, 有

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{|W(G)|} \int_T d(t) \int_{G/T} f(gtg^{-1}) dgT dt$$

[详细证明见第 102 页](#)

推论 5.13 如果 f 还是一个类函数, 则有

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{|W(G)|} \int_T d(t) f(t) dt$$

5.3 Weyl 特征公式

定义 5.14 G 是紧李群, T 是极大环面, 定义

- (1) 令 $f: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ 为一个函数, 我们称 f **下降** 到 T , 如果 $f(H + Z) = f(H)$, 对任意的 $H \in \mathfrak{t}$, $Z \in \text{Ker exp}$. 在这种情况下, 记 $f: T \rightarrow \mathbb{C}$ 为

$$f(e^H) = f(H)$$

- (2) 若 $f: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $f(wH) = f(H)$, 对任意 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\vee})$, 则称 f 为 **W -不变**.

- (3) 若 $f: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $f(wH) = \det(w)f(H)$, 对任意 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\vee})$, 则称 f 为 **斜- W -不变**.

- (4) 若 $F: T \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $F(c_w t) = F(t)$, 对任意 $w \in N(T)$, 则称 F 为 **W -不变**.

- (5) 若 $F: T \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $F(c_w t) = \det(\text{Ad}(w)|_{\mathfrak{t}})F(t)$, 对任意 $w \in N(T)$, 则称 F 为 **斜- W -不变**.

引理 5.15 G 是紧连通李群, T 是极大环面, 则

- (1) 若 $f: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ 下降到 T 并且 W -不变, 则 $f: T \rightarrow \mathbb{C}$ 是 W -不变的.
(2) G 上连续类函数与 T 上 W -不变连续函数存在一一对应.

[详细证明见第 102 页](#)

此引理第二条就是在说

$$C(G)^{\text{class}} \cong C(T)^W$$

现在取单根系 $\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, 对应正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 回忆存在唯一的 $\rho \in (i\mathfrak{t})^*$ 满足

$$\rho(h_{\alpha_i}) = 2 \frac{B(\rho, \alpha_i)}{B(\alpha_i, \alpha_i)} = 1, \quad 1 \leq i \leq l$$

引理 5.16 G 是紧李群, T 是极大环面.

$$(1) \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha.$$

(2) 对 $w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$, $w\rho - \rho \in R \subset A(T)$, 因此函数 $\xi_{w\rho-\rho}$ 下降到 T .

[详细证明见第 102 页](#)

定义 5.17 G 是紧李群, T 是极大环面, 令 $\Delta: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ 定义为

$$\Delta(H) = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \left(e^{\alpha(H)/2} - e^{-\alpha(H)/2} \right), \quad \forall H \in \mathfrak{t}$$

引理 5.18 G 是紧李群, T 是极大环面.

(1) 函数 Δ 在 $\mathfrak{t}$ 上斜对称.

(2) 函数 Δ 下降到 T 当且仅当函数 $H \mapsto e^{-\rho(H)}$ 下降到 T .

(3) 函数 $|\Delta|^2$ 总是下降到 T , 并且对 $t \in T$, 有 $d(t) = |\Delta(t)|^2$.

[详细证明见第 102 页](#)

于是上一节的 Weyl 积分公式可以改写为:

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{|W(G)|} \int_T |\Delta(t)|^2 \int_{G/T} f(gtg^{-1}) dg T dt$$

回忆我们之前定义过

$$\Xi = \{H \in \mathfrak{t}: \alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

在 $\mathfrak{t}$ 中稠密, 并且 $\exp \Xi = T^{\text{reg}}$.

定义 5.19 G 是紧李群, T 是极大环面, 固定 $\lambda \in A(T)$, 令 $\Theta_\lambda: \Xi \rightarrow \mathbb{C}$ 定义为

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(H) &= \frac{\sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{(w(\lambda+\rho))(H)}}{\Delta(H)} \\ &= \frac{\sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{(w(\lambda+\rho)-\rho)(H)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} (1 - e^{-\alpha(H)})} \end{aligned}$$

引理 5.20 G 是紧连通李群, T 是极大环面. 固定一个 $\lambda \in A(T)$. 函数 Θ_λ 下降到 T^{reg} 上的一个光滑 W -不变函数. 对应的这个函数仍然记为 Θ_λ , 并且唯一延拓到

G^{reg} 上的一个光滑类函数.

[详细证明见第 103 页](#)

对 G 是紧连通李群, T 是极大环面, $\lambda, \lambda' \in A(T)$, 函数 $\xi_\lambda: T \rightarrow \mathbb{C}$ 可以被视为 T 的一个一维不可约表示. 因此可见 ξ_λ 与 $\xi_{\lambda'}$ 是等价的当且仅当它们作为函数是一样的, 即当且仅当 $\lambda = \lambda'$, 由 T 上的特征根理论, 即有

$$\int_T \xi_\lambda(t) \xi_{-\lambda'}(t) dt = \begin{cases} 1, & \lambda = \lambda' \\ 0, & \lambda \neq \lambda' \end{cases}$$

定理 5.21 (Weyl Character Formula) G 是紧连通李群, T 是极大环面, $V(\lambda)$ 是对应最高权 λ 的不可约表示, 则其特征 χ_λ 满足

$$\chi_\lambda(g) = \Theta_\lambda(g), \quad \forall g \in G^{\text{reg}}$$

[详细证明见第 103 页](#)

定理 5.22 (Weyl Denominator Formula) G 是紧连通李群, T 是极大环面, 则

$$\Delta(H) = \sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{(w\rho)(H)}, \quad H \in \mathfrak{t}$$

[详细证明见第 103 页](#)

从而我们可见

$$\chi_\lambda(e^H) = \frac{\sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{(w(\lambda+\rho))(H)}}{\sum_{w \in W(\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))} \det(w) e^{(w\rho)(H)}}$$

对 $H \in \mathfrak{t}$, $e^H \in T^{\text{reg}}$, 即 $H \in \Xi$.

定理 5.23 (Weyl Dimension Formula) G 是紧连通李群, 有极大环面 T , 则有

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \frac{B(\lambda + \rho, \alpha)}{B(\rho, \alpha)}$$

[详细证明见第 103 页](#)

定理 5.24 (Highest Weight Classification) 对紧连通李群 G , T 是极大环面, 则存在不可约表示到支配解析整权的一一对应, 由态射 $V(\lambda) \rightarrow \lambda$ 给出.

[详细证明见第 103 页](#)

第六章

具体例子

6.1 $SU(2)$

具体矩阵表示 回忆

$$SU(2) = \{g \in GL(2, \mathbb{C}) : g^* g = I, \det g = 1\}$$

现在设

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

由于 g 是酉矩阵，从而第一列是单位向量，即

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

所以与其正交的单位向量只能形如

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix}$$

结合行列式只能为 1，得到 $e^{i\theta} = 1$ ，从而得到

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

所以作为流形, 有

$$\mathrm{SU}(2) \cong S^3 \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{SU}(2) = 3$$

从而可以看见 $\mathrm{SU}(2)$ 是紧连通并且单连通的.

现在我们可以考虑其在单位元处的切空间, 得到 $\mathfrak{su}(2)$, 即取光滑曲线 $g(t) \in \mathrm{SU}(2)$, $g(0) = I$, 设

$$X = g'(0)$$

由于

$$g(t)^* g(t) = I$$

在 $t = 0$ 处求导, 得到

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(t)^* g(t) = X^* + X = 0$$

另外一方面, 由于 $\det(g(t)) = 1$, 从而求导可以得到 $\mathrm{tr} X = 0$, 因此可见

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X^* + X = 0, \mathrm{tr} X = 0\}$$

而通过设元素, 不难得到

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & -\overline{w} \\ w & -ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \right\}$$

由于这是切空间, 另一方面通过自由度也可以看出来

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2) = 3$$

指数映射公式 对于 $\mathfrak{su}(2)$ 的指数映射而言, 回忆例 3.3 可见

$$e^{tX} = (\cos \lambda t)I + \frac{\sin \lambda t}{\lambda} X$$

极大环面与 Cartan 子代数 $\mathrm{SU}(2)$ 中最自然的极大环面就是对角子群

$$T = \left\{ t_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

显然可见

$$T \cong S^1$$

所以可见

$$\mathrm{rank} \mathrm{SU}(2) = 1$$

对应的 Cartan 子代数为

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

定义

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则可见

$$\mathfrak{t} = \mathbb{R}(iH)$$

并且 $i\mathfrak{t} = \mathbb{R}H$.

李代数的复化 注意到对 $X \in \mathfrak{su}(2)$, 可以写成

$$X = \begin{pmatrix} ix & z \\ -\bar{z} & -ix \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

令 $z = b + ic$ 就得到

$$X = a \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

将上面三个矩阵分别记为 X_1, X_2, X_3 , 这是 $\mathfrak{su}(2)$ 作为实线性空间的基, 从而可见

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3$$

所以复化之后立刻得到

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \oplus \mathbb{C}X_3$$

注意 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的标准基

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可以写成

$$H = -iX_1, \quad E = \frac{1}{2}(X_2 - iX_3), \quad F = \frac{1}{2}(X_2 + iX_3)$$

从而可见

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

此时不难注意到

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

根系 我们的 Cartan 子代数的复化是

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}H$$

其伴随表示由

$$\mathrm{ad}(H)(X) = [H, X]$$

给出, 我们已经注意到

$$[H, E] = 2E, \quad [H, H] = 0, \quad [H, F] = -2F$$

于是定义线性泛函 $\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 满足

$$\alpha(H) = 2$$

则可见

$$E \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad H \in \mathfrak{g}_0$$

因此得到完整的根空间分解

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E$$

所以根系就是

$$\Delta(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \{\alpha, -\alpha\}$$

Killing 型与余根 在基 E, H, F 之下, 有

$$\mathrm{ad} H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

因此可见

$$B(H, H) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H)^2) = 8$$

同理可以计算

$$B(E, F) = 4$$

现在由于 $i\mathfrak{t} = \mathbb{R}H$, 而 $u_{\alpha} \in i\mathfrak{t}$, 设 $u_{\alpha} = cH$, 按定义应满足

$$2 = \alpha(H) = B(H, cH) = 8c$$

所以可见

$$u_{\alpha} = \frac{1}{4}H$$

从而

$$h_\alpha = \frac{2u_\alpha}{B(u_\alpha, u_\alpha)} = H$$

从而在这个 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组里面, 就是自然的

$$E_\alpha = E, \quad H_\alpha = H, \quad F_\alpha = F$$

表示 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 现在令 $V_n = \mathbb{C}[z_1, z_2]_n$ 为所有二元 n 次齐次多项式, 其基为 $v_k = z_1^k z_2^{n-k}$, 有

$$\dim V_n = n + 1$$

定义 $SU(2)$ 在其上的作用为

$$(g \cdot P)(z) = P(g^{-1}z)$$

我们把群作用微分成李代数作用, 对 $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, 其作用为

$$d\pi(X)P(z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P(e^{-tX}z)$$

由于

$$e^{-tX} = I - tX + O(t^2)$$

从而可见

$$e^{-tX}z = z - tXz + O(t^2)$$

若 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则对 $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, 有

$$Xz = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}$$

因此链式法则给出

$$d\pi(X) = -(az_1 + bz_2) \frac{\partial}{\partial z_1} - (cz_1 + dz_2) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

现在代入 E, H, F 就得到

$$Ev_k = -kv_{k-1}, \quad Hv_k = (n - 2k)v_k, \quad Fv_k = (k - n)v_{k+1}$$

由于

$$\alpha(H) = 2$$

令

$$w = \frac{1}{2}\alpha$$

从而有

$$w(H) = 1$$

也就是说 w 是基本权, 此时结合

$$Hv_k = (n - 2k)v_k$$

可见 v_k 的权为

$$\lambda_k = (n - 2k)w$$

所以可见

$$\Delta(V_n) = \{nw, (n-2)w, \dots, -(n-2)w, -nw\}$$

此时 E 是上升算子, F 是下降算子, 注意到

$$Ev_0 = 0, \quad Hv_0 = nv_0$$

所以可见 $v_0 = z_2^n$ 是最高权向量, 其最高权为 $\lambda = nw$, 现在可以利用李群和李代数表示的对应关系立刻得到 $V_n(\mathbb{C}^2)$ 不可约.

所有有限维 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -不可约表示都是 V_n 现在设 V 是有限维 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 不可约表示, 取一个 H -特征向量 v_0 , 设

$$Hv_0 = \lambda v_0$$

因为我们注意到

$$[H, E] = 2E$$

所以有

$$H(Ev_0) = EHv_0 + [H, E]v_0 = (\lambda + 2)Ev_0$$

所以如果 $Ev_0 \neq 0$, 它就是特征值 $\lambda + 2$ 对应的特征向量, 通过不断施加 E , 由于 V 是有限维的, 这个过程一定会停止, 所以可以选取一个非零的 v_0 满足

$$Hv_0 = \lambda v_0, \quad Ev_0 = 0$$

这就是最高权向量. 现在考虑 $F^r v_0$, 首先由

$$[H, F] = -2F$$

可以归纳得到

$$HF^r v_0 = (\lambda - 2r)F^r v_0$$

因为 V 是有限维, 所以存在最大的 N 使得

$$F^N v_0 \neq 0$$

所以有

$$F^{N+1} v_0 = 0 \implies EF^{N+1} v_0 = 0$$

我们通过归纳法可以得到

$$[E, F^r] = \sum_{j=0}^{r-1} F^j [E, F] F^{r-1-j}$$

结合 $[E, F] = H$ 与 F^m 的权为 $-2m$, 可见

$$[H, F^m] = -2mF^m \implies HF^m = F^m(H - 2m)$$

所以可见

$$[E, F^r] = F^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} (H - 2(r-1-j)) = rF^{r-1}(H - r + 1)$$

从而作用在最高权上面有

$$EF^r v_0 = F^r E v_0 + rF^{r-1}(H - r + 1)v_0 = r(\lambda - r + 1)F^{r-1} v_0$$

现在代入 $r = N + 1$ 立刻得到

$$0 = (N + 1)(\lambda - N)F^N v_0$$

结合 $F^N v_0 \neq 0$ 立刻得到 $\lambda = N$, 所以可见所有的 H 特征值为

$$N, N - 2, \dots, -N + 2, N$$

而

$$v_0, Fv_0, \dots, F^N v_0$$

张成一个非零子模, 由不可约性必然等于 V , 所以可见

$$\dim V = N + 1$$

也就是说

$$V \cong V_N(\mathbb{C}^2)$$

计算 Lattices 回忆基本群满足 $\alpha = 2w$, 则根格

$$R = \mathbb{Z}\alpha \implies R = 2\mathbb{Z}w$$

现在计算权格

$$P = \{\lambda \in (\mathfrak{t})^*: \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\}$$

设 $\lambda = cw$, 可见

$$\lambda(h_\alpha) = \lambda(H) = cw(H) = c \in \mathbb{Z}$$

所以可见

$$P = \mathbb{Z}w$$

所以可见 $R \subset P$ 并且 $P/R \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 现在计算解析格, 由于

$$\mathfrak{t} = \mathbb{R}(iH)$$

所以指数映射

$$\exp(i\theta H) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix} = I \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

所以可见

$$\text{Ker}(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T) = 2\pi i\mathbb{Z}H$$

而解析权格的条件是对任意 $K \in \text{Ker exp}$, 都有

$$\lambda(K) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

设 $\lambda = cw$, 取 $K = 2\pi iH$, 有

$$\lambda(2\pi iH) = 2\pi ic \in 2\pi i\mathbb{Z} \iff c \in \mathbb{Z}$$

所以可见

$$A(T) = \mathbb{Z}w = P$$

因此对于 $\text{SU}(2)$, 有

$$R = 2\mathbb{Z}w \subset A(T) = P = \mathbb{Z}w$$

此时因为 $\mathfrak{it} = \mathbb{R}H$, 有对偶根格为

$$R^\vee = \mathbb{Z}h_\alpha = \mathbb{Z}H$$

余权格为

$$P^\vee = \{xH : \alpha(xH) \in \mathbb{Z}\}$$

这等价于说

$$\alpha(xH) = 2x \in \mathbb{Z}$$

所以可见

$$P^\vee = \frac{1}{2}\mathbb{Z}H$$

再考虑

$$E: \mathfrak{it} \rightarrow T, \quad X \mapsto \exp(2\pi i X)$$

对 $X = xH$, 计算得到

$$E(xH) = I \iff x \in \mathbb{Z}$$

因此可见

$$\text{Ker } E = \mathbb{Z}H$$

所以可见

$$R^\vee = \text{Ker } E \subset P^\vee$$

Weyl 群 回忆我们的定义是

$$W = N(T)/T$$

取

$$w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

有

$$w^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

现在计算

$$wt_\theta w^{-1} = t^{-\theta}$$

所以 $w \in N(T)$, 现在假设 $g \in G$, 若

$$gTg^{-1} = T$$

则说明对 $t_\theta \in T$, 有 $gt_\theta g^{-1} \in T$, 所以其特征子空间为 $\mathbb{C}e_1$ 与 $\mathbb{C}e_2$, 所以可见

$$g\{\mathbb{C}e_1, \mathbb{C}e_2\} = \{\mathbb{C}e_1, \mathbb{C}e_2\}$$

所以 g 要么保持两个特征直线, 要么交换两个特征直线, 所以可见 $g \in T$ 或者 $g \in wT$, 于是不难得到

$$N(T) = T \amalg wT$$

可见

$$W(T) = N(T)/T \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

根的反射群 我们的定义是

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha$$

设 $\lambda = mw$, 则

$$r_\alpha(mw) = mw - m(2w) = -mw$$

因此可见

$$r_\alpha(\lambda) = -\lambda$$

也就是说一维的 Weyl 群就是数轴上的反射 $x \mapsto -x$, 在 it 上同样为 $H \mapsto -H$.

Weyl 腔 由于 $\text{rank} = 1$, 所以可见 $\alpha^\perp = \{0\}$, 所以有两个 Weyl 腔, 即

$$\mathbb{R}_{>0}w, \quad \mathbb{R}_{<0}w$$

令 α 为正根, 就得到单根系

$$\Pi = \{\alpha\}, \quad \Delta^+ = \{\alpha\}, \quad \Delta^- = \{-\alpha\}$$

所以其 Dynkin 图只有一个点.

最高权对应 现在我们已经知道

$$A(T) = \mathbb{Z}w$$

所谓支配条件就是

$$\lambda(h_\alpha) \geq 0$$

所以对应的支配解析权就是

$$nw, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

对应为

$$n \longleftrightarrow V_n$$

6.2 SU(3)

具体矩阵表示 回忆

$$\mathrm{SU}(3) = \{g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) : g^* g = I, \det g = 1\}$$

现在设

$$g = \begin{pmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

其中

$$u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

由于 g 是酉矩阵, 所以其三列构成 $\mathbb{C}^3$ 的一组标准正交基, 特别地有

$$\|u_1\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$$

以及

$$\|u_2\|^2 = |d|^2 + |e|^2 + |f|^2 = 1$$

并且

$$(u_1, u_2) = \bar{a}d + \bar{b}e + \bar{c}f = 0$$

因此一旦给定了互相正交的单位向量 u_1, u_2 , 与它们都正交的单位向量构成一个一维复空间中的单位圆, 从而 u_3 在差一个 S^1 中常数的意义下唯一.

为了将这个向量具体写出来, 定义复向量的形式叉积

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

则

$$\overline{u_1 \times u_2} = \begin{pmatrix} \overline{bf - ce} \\ \overline{cd - af} \\ \overline{ae - bd} \end{pmatrix}$$

与 u_1, u_2 在 Hermite 内积意义下正交. 例如

$$\begin{aligned}(u_1, \overline{u_1 \times u_2}) &= \overline{a} \overline{bf - ce} + \overline{b} \overline{cd - af} + \overline{c} \overline{ae - bd} \\ &= \overline{a(bf - ce) + b(cd - af) + c(ae - bd)} = 0\end{aligned}$$

同理

$$(u_2, \overline{u_1 \times u_2}) = 0$$

另一方面, 复版本的 Lagrange 恒等式给出

$$\|u_1 \times u_2\|^2 = \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - |(u_1, u_2)|^2 = 1$$

所以 $\overline{u_1 \times u_2}$ 本身就是单位向量.

进一步有

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \overline{u_1 \times u_2} \end{pmatrix} &= (u_1 \times u_2) \cdot \overline{u_1 \times u_2} \\ &= \|u_1 \times u_2\|^2 = 1\end{aligned}$$

因此行列式为 1 的条件恰好唯一确定第三列, 从而可以写成

$$\mathrm{SU}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & \overline{bf - ce} \\ b & e & \overline{cd - af} \\ c & f & \overline{ae - bd} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1, \\ |d|^2 + |e|^2 + |f|^2 = 1, \\ \overline{a}d + \overline{b}e + \overline{c}f = 0 \end{array} \right\}$$

与 $\mathrm{SU}(2)$ 不同, $\mathrm{SU}(3)$ 作为流形并不直接同构于某个球面. 但是可以考虑 $\mathrm{SU}(3)$ 在 $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ 上的自然作用

$$g \cdot v = gv$$

这个作用是传递的, 而 e_1 的稳定子为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in \mathrm{SU}(2) \right\} \cong \mathrm{SU}(2)$$

因此有

$$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \cong S^5$$

也就是说存在纤维化

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SU}(3) \longrightarrow S^5$$

由于

$$\dim_{\mathbb{R}} S^5 = 5, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{SU}(2) = 3$$

所以得到

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{SU}(3) = 5 + 3 = 8$$

另一方面, 由于 $\mathrm{SU}(3)$ 是 $U(3)$ 的闭子群, 所以是紧的, 并且由上面的纤维化可以看出其连通性. 再结合

$$\pi_1(\mathrm{SU}(2)) = 0, \quad \pi_1(S^5) = 0$$

以及纤维化的同伦长正合列, 可以得到

$$\pi_1(\mathrm{SU}(3)) = 0$$

所以 $\mathrm{SU}(3)$ 是紧连通并且单连通的.

现在考虑其在单位元处的切空间, 得到 $\mathfrak{su}(3)$. 取光滑曲线

$$g(t) \in \mathrm{SU}(3), \quad g(0) = I$$

并设

$$X = g'(0)$$

由于

$$g(t)^* g(t) = I$$

在 $t = 0$ 处求导得到

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(t)^* g(t) = X^* + X = 0$$

另一方面, 由于

$$\det g(t) = 1$$

在 $t = 0$ 处求导得到

$$\mathrm{tr} X = 0$$

因此

$$\mathfrak{su}(3) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) : X^* + X = 0, \mathrm{tr} X = 0\}$$

将一般元素写开, 得到

$$\mathfrak{su}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & z_{12} & z_{13} \\ -\bar{z}_{12} & ix_2 & z_{23} \\ -\bar{z}_{13} & -\bar{z}_{23} & -i(x_1 + x_2) \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, z_{12}, z_{13}, z_{23} \in \mathbb{C} \right\}$$

其中对角部分提供 2 个实自由度, 而三个复数 z_{12}, z_{13}, z_{23} 一共提供 6 个实自由度, 所

以

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(3) = 2 + 6 = 8$$

这也与 $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{SU}(3) = 8$ 一致.

指数映射公式 与 $\mathfrak{su}(2)$ 不同, 一般的 $\mathfrak{su}(3)$ 元素不满足某个统一的二次关系, 所以不会得到

$$e^{tX} = (\cos \lambda t)I + \frac{\sin \lambda t}{\lambda}X$$

这样简单的公式. 但是由于 $X \in \mathfrak{su}(3)$ 满足

$$X^* = -X$$

所以 X 是正规算子, 因此可以酉对角化. 也就是说存在 $U \in U(3)$ 以及

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

使得

$$X = U \begin{pmatrix} i\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & i\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda_3 \end{pmatrix} U^{-1}$$

又因为

$$\mathrm{tr} X = 0$$

所以

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

于是指数映射可以写成

$$e^{tX} = U \begin{pmatrix} e^{it\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it\lambda_3} \end{pmatrix} U^{-1}$$

由于

$$e^{it\lambda_1} e^{it\lambda_2} e^{it\lambda_3} = e^{it(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} = 1$$

可见

$$e^{tX} \in \mathrm{SU}(3)$$

事实上, 对 $SU(3)$ 而言指数映射还是满射. 给定 $g \in SU(3)$, 由于 g 是酉矩阵, 所以存在 $U \in U(3)$ 使得

$$g = U \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix} U^{-1}$$

由 $\det g = 1$ 可见

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

通过将其中某一个 θ_j 加上适当的 2π 整数倍, 可以不妨取

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$$

于是令

$$X = U \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 \end{pmatrix} U^{-1} \in \mathfrak{su}(3)$$

就有

$$e^X = g$$

所以

$$\exp: \mathfrak{su}(3) \longrightarrow SU(3)$$

是满射.

极大环面与 Cartan 子代数 $SU(3)$ 中最自然的极大环面就是对角子群

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\theta_1+\theta_2)} \end{pmatrix} : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

显然可见

$$T \cong S^1 \times S^1$$

所以

$$\text{rank } SU(3) = 2$$

对应的 Cartan 子代数为

$$\mathfrak{t} = \left\{ i \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

定义

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathfrak{t} = \mathbb{R}(iH_1) \oplus \mathbb{R}(iH_2)$$

并且

$$i\mathfrak{t} = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$$

注意这里与 $SU(2)$ 最大的区别之一，就是 $\dim \mathfrak{t} = 2$ ，所以后面的根、权、Weyl 腔都真正变成二维几何对象.

李代数的复化 令 E_{ij} 表示第 (i, j) 个位置为 1，其余位置为 0 的标准矩阵. 对 $1 \leq i < j \leq 3$ ，定义

$$A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \quad B_{ij} = i(E_{ij} + E_{ji})$$

同时定义

$$X_1 = iH_1, \quad X_2 = iH_2$$

则

$$X_1, X_2, A_{12}, B_{12}, A_{13}, B_{13}, A_{23}, B_{23}$$

构成 $\mathfrak{su}(3)$ 的一组实基，所以

$$\mathfrak{su}(3) = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} (\mathbb{R}A_{ij} \oplus \mathbb{R}B_{ij})$$

复化之后得到

$$\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} (\mathbb{C}A_{ij} \oplus \mathbb{C}B_{ij})$$

现在注意

$$H_1 = -iX_1, \quad H_2 = -iX_2$$

并且

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - iB_{ij})$$

以及

$$E_{ji} = -\frac{1}{2}(A_{ij} + iB_{ij})$$

所以所有 E_{ij} 与 H_1, H_2 都落在 $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}}$ 中. 它们一共给出 8 个复线性无关元素, 恰好构成

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} X = 0\}$$

的一组基, 所以得到

$$\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$$

同时 Cartan 子代数复化为

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} : z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\} = \mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}H_2$$

根系 现在取

$$H = \operatorname{diag}(z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$$

其中

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

定义线性泛函

$$\varepsilon_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*, \quad \varepsilon_i(H) = z_i$$

注意由于 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 所以在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上有

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

现在对标准矩阵 E_{ij} 计算

$$HE_{ij} = z_i E_{ij}$$

而

$$E_{ij}H = z_j E_{ij}$$

所以

$$[H, E_{ij}] = (z_i - z_j)E_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(H)E_{ij}$$

因此对 $i \neq j$, 都有

$$E_{ij} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$$

并且

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathbb{C}E_{ij}$$

所以根系为

$$\Delta(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i \neq j\}$$

也就是

$$\Delta(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})) = \{\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\}$$

为了简化记号, 令

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

则

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

于是完整根系可以写为

$$\Delta(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$$

对应的根空间分别为

$$\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{C}E_{12}, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha_1} = \mathbb{C}E_{21}$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{C}E_{23}, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha_2} = \mathbb{C}E_{32}$$

以及

$$\mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2} = \mathbb{C}E_{13}, \quad \mathfrak{g}_{-(\alpha_1 + \alpha_2)} = \mathbb{C}E_{31}$$

因此得到完整的根空间分解

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{21} \oplus \mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{32} \oplus \mathbb{C}E_{13} \oplus \mathbb{C}E_{31}$$

也就是

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

Killing 型与余根 对于 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, Killing 型为

$$B(X, Y) = 6 \operatorname{tr}(XY)$$

特别地, 先计算

$$H_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$B(H_1, H_1) = 6 \operatorname{tr}(H_1^2) = 12$$

同理

$$B(H_2, H_2) = 12$$

另一方面

$$H_1 H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$B(H_1, H_2) = 6 \operatorname{tr}(H_1 H_2) = -6$$

现在计算 α_1 对应的 u_{α_1} . 由于

$$i\mathfrak{t} = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$$

并且

$$\alpha_1(H) = B(H, u_{\alpha_1})$$

对任意 $H \in i\mathfrak{t}$ 成立. 注意如果

$$H = \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3)$$

则

$$\alpha_1(H) = x_1 - x_2$$

而

$$B\left(H, \frac{1}{6}H_1\right) = 6 \operatorname{tr}\left(H \frac{1}{6}H_1\right) = x_1 - x_2$$

所以

$$u_{\alpha_1} = \frac{1}{6}H_1$$

于是

$$B(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) = \frac{1}{36}B(H_1, H_1) = \frac{1}{3}$$

因此

$$h_{\alpha_1} = \frac{2u_{\alpha_1}}{B(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})} = \frac{2(H_1/6)}{1/3} = H_1$$

同理

$$u_{\alpha_2} = \frac{1}{6}H_2$$

并且

$$h_{\alpha_2} = H_2$$

对于

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

注意

$$H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

同样可以计算得到

$$u_{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{1}{6}(H_1 + H_2)$$

以及

$$h_{\alpha_1+\alpha_2} = H_1 + H_2$$

因此三个正根对应的余根分别为

$$h_{\alpha_1} = H_1, \quad h_{\alpha_2} = H_2, \quad h_{\alpha_1+\alpha_2} = H_1 + H_2$$

现在计算单根在单余根上的取值. 首先

$$\alpha_1(h_{\alpha_1}) = \alpha_1(H_1) = 2$$

以及

$$\alpha_2(h_{\alpha_2}) = \alpha_2(H_2) = 2$$

另一方面

$$\alpha_1(h_{\alpha_2}) = \alpha_1(H_2) = -1$$

以及

$$\alpha_2(h_{\alpha_1}) = \alpha_2(H_1) = -1$$

所以 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(h_{\alpha_1}) & \alpha_1(h_{\alpha_2}) \\ \alpha_2(h_{\alpha_1}) & \alpha_2(h_{\alpha_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组 $SU(3)$ 与 $SU(2)$ 相比最重要的新现象之一, 就是现在每一个根都会在 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 中产生一份 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 三元组.

首先对根 α_1 , 取

$$E_{\alpha_1} = E_{12}, \quad H_{\alpha_1} = H_1, \quad F_{\alpha_1} = E_{21}$$

直接计算

$$[H_1, E_{12}] = 2E_{12}$$

以及

$$[H_1, E_{21}] = -2E_{21}$$

并且

$$[E_{12}, E_{21}] = E_{11} - E_{22} = H_1$$

因此

$$\mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}E_{21} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

同理, 对根 α_2 , 有

$$E_{\alpha_2} = E_{23}, \quad H_{\alpha_2} = H_2, \quad F_{\alpha_2} = E_{32}$$

并且

$$[H_2, E_{23}] = 2E_{23}, \quad [H_2, E_{32}] = -2E_{32}, \quad [E_{23}, E_{32}] = H_2$$

所以

$$\mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}H_2 \oplus \mathbb{C}E_{32} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

最后, 对根

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

有

$$E_{\alpha_1+\alpha_2} = E_{13}, \quad H_{\alpha_1+\alpha_2} = H_1 + H_2, \quad F_{\alpha_1+\alpha_2} = E_{31}$$

并且

$$[H_1 + H_2, E_{13}] = 2E_{13}$$

$$[H_1 + H_2, E_{31}] = -2E_{31}$$

以及

$$[E_{13}, E_{31}] = E_{11} - E_{33} = H_1 + H_2$$

所以

$$\mathbb{C}E_{13} \oplus \mathbb{C}(H_1 + H_2) \oplus \mathbb{C}E_{31} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

因此 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 中三个正根分别给出三个 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数. 后面关于根串、Weyl 反射以及最高权的许多结论, 本质上就是分别限制到这些 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数上之后使用 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示论.

标准表示 $\mathbb{C}^3$ 现在考虑 $SU(3)$ 在

$$V = \mathbb{C}^3$$

上的标准表示

$$g \cdot v = gv$$

其李代数表示就是

$$X \cdot v = Xv$$

令 e_1, e_2, e_3 为 $\mathbb{C}^3$ 的标准基. 对

$$H = \text{diag}(z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$$

有

$$He_1 = z_1 e_1 = \varepsilon_1(H) e_1$$

$$He_2 = z_2 e_2 = \varepsilon_2(H) e_2$$

以及

$$He_3 = z_3 e_3 = \varepsilon_3(H) e_3$$

所以 $V = \mathbb{C}^3$ 的权为

$$\Delta(\mathbb{C}^3) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$$

对应的权空间为

$$V_{\varepsilon_1} = \mathbb{C}e_1, \quad V_{\varepsilon_2} = \mathbb{C}e_2, \quad V_{\varepsilon_3} = \mathbb{C}e_3$$

所以

$$\mathbb{C}^3 = V_{\varepsilon_1} \oplus V_{\varepsilon_2} \oplus V_{\varepsilon_3}$$

现在考察根向量的作用. 有

$$E_{12}e_2 = e_1$$

而

$$\varepsilon_2 + \alpha_1 = \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_1$$

所以

$$E_{12}: V_{\varepsilon_2} \longrightarrow V_{\varepsilon_1}$$

正好将权增加 α_1 .

同理

$$E_{23}e_3 = e_2$$

而

$$\varepsilon_3 + \alpha_2 = \varepsilon_2$$

所以

$$E_{23}: V_{\varepsilon_3} \longrightarrow V_{\varepsilon_2}$$

又有

$$E_{13}e_3 = e_1$$

而

$$\varepsilon_3 + \alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1$$

所以

$$E_{13}: V_{\varepsilon_3} \longrightarrow V_{\varepsilon_1}$$

这就具体体现了

$$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$$

计算 Lattices 现在选择单根系

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

其中

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

定义基本权 w_1, w_2 满足

$$w_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$$

由于

$$h_{\alpha_1} = H_1, \quad h_{\alpha_2} = H_2$$

所以需要

$$w_1(H_1) = 1, \quad w_1(H_2) = 0$$

以及

$$w_2(H_1) = 0, \quad w_2(H_2) = 1$$

设

$$w_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$$

则

$$w_1(H_1) = 2a - b = 1$$

以及

$$w_1(H_2) = -a + 2b = 0$$

第二式给出

$$a = 2b$$

代入第一式得到

$$4b - b = 1$$

所以

$$b = \frac{1}{3}, \quad a = \frac{2}{3}$$

因此

$$w_1 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{3}$$

同理可以计算得到

$$w_2 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3}$$

所以

$$w_1 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{3}, \quad w_2 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3}$$

反过来有

$$\alpha_1 = 2w_1 - w_2, \quad \alpha_2 = -w_1 + 2w_2$$

利用

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

还可以将基本权写为

$$w_1 = \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3}$$

以及

$$w_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}{3}$$

而在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上, 由于

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

所以可以简写为

$$w_1 = \varepsilon_1$$

以及

$$w_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\varepsilon_3$$

现在根格为

$$R = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$$

而权格定义为

$$P = \{\lambda \in (i\mathfrak{t})^*: \lambda(h_{\alpha_1}), \lambda(h_{\alpha_2}) \in \mathbb{Z}\}$$

由于 w_1, w_2 是 $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}$ 的对偶基, 任取

$$\lambda = aw_1 + bw_2$$

都有

$$\lambda(h_{\alpha_1}) = a, \quad \lambda(h_{\alpha_2}) = b$$

所以

$$\lambda \in P \iff a, b \in \mathbb{Z}$$

因此

$$P = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$$

结合

$$\alpha_1 = 2w_1 - w_2, \quad \alpha_2 = -w_1 + 2w_2$$

可见

$$R \subset P$$

并且从变换矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的行列式

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

可见

$$[P : R] = 3$$

所以

$$P/R \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

现在计算解析格. 回忆

$$\mathfrak{t} = \{i \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3) : x_j \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

如果

$$K = i \operatorname{diag}(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{t}$$

则

$$\exp K = \text{diag}(e^{ix_1}, e^{ix_2}, e^{ix_3})$$

所以

$$\exp K = I$$

当且仅当

$$x_1, x_2, x_3 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

结合

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

可见

$$\text{Ker}(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T) = 2\pi i \{ \text{diag}(m_1, m_2, m_3) : m_j \in \mathbb{Z}, m_1 + m_2 + m_3 = 0 \}$$

而任意满足

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0$$

的整数对角矩阵都可以唯一写成

$$m_1 H_1 - m_3 H_2$$

所以

$$\text{Ker}(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T) = 2\pi i (\mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2)$$

现在设

$$\lambda = aw_1 + bw_2$$

解析整条件要求对任意

$$K \in \text{Ker exp}$$

都有

$$\lambda(K) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

特别地取

$$K = 2\pi i H_1$$

得到

$$\lambda(2\pi i H_1) = 2\pi i a$$

所以必须有

$$a \in \mathbb{Z}$$

同理取

$$K = 2\pi i H_2$$

得到

$$b \in \mathbb{Z}$$

反过来, 如果 $a, b \in \mathbb{Z}$, 显然解析整条件成立, 所以

$$A(T) = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 = P$$

因此对于 SU(3), 有

$$R \subset A(T) = P$$

并且

$$P/R \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

现在计算对偶格. 对偶根格为

$$R^\vee = \mathbb{Z}h_{\alpha_1} \oplus \mathbb{Z}h_{\alpha_2} = \mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2$$

余权格定义为

$$P^\vee = \{H \in i\mathfrak{t} : \alpha_1(H), \alpha_2(H) \in \mathbb{Z}\}$$

定义基本余权 $w_1^\vee, w_2^\vee$ 满足

$$\alpha_i(w_j^\vee) = \delta_{ij}$$

设

$$w_1^\vee = aH_1 + bH_2$$

则要求

$$2a - b = 1$$

以及

$$-a + 2b = 0$$

所以

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}$$

因此

$$w_1^\vee = \frac{2H_1 + H_2}{3}$$

同理

$$w_2^\vee = \frac{H_1 + 2H_2}{3}$$

所以

$$P^\vee = \mathbb{Z}w_1^\vee \oplus \mathbb{Z}w_2^\vee$$

再考虑

$$E: it \longrightarrow T, \quad X \longmapsto \exp(2\pi i X)$$

对

$$X = xH_1 + yH_2$$

有

$$X = \text{diag}(x, -x + y, -y)$$

从而

$$E(X) = \text{diag}\left(e^{2\pi ix}, e^{2\pi i(-x+y)}, e^{-2\pi iy}\right)$$

所以

$$E(X) = I$$

当且仅当

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

因此

$$\text{Ker } E = \mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2 = R^\vee$$

所以对于 $\text{SU}(3)$, 完整的格关系为

$$R \subset A(T) = P$$

以及

$$R^\vee = \text{Ker } E \subset P^\vee$$

同时

$$P/R \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

这个 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 与 $\text{SU}(3)$ 的中心

$$Z(\text{SU}(3)) = \{\zeta I: \zeta^3 = 1\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

密切相关.

Weyl 群 回忆 Weyl 群定义为

$$W = N(T)/T$$

其中

$$N(T) = \{g \in \mathrm{SU}(3) : gTg^{-1} = T\}$$

首先取

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

显然

$$w_1 \in \mathrm{SU}(3)$$

对

$$t = \mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3) \in T$$

直接计算得到

$$w_1 t w_1^{-1} = \mathrm{diag}(z_2, z_1, z_3)$$

所以 w_1 交换第一、第二个对角元.

同理取

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$w_2 t w_2^{-1} = \mathrm{diag}(z_1, z_3, z_2)$$

所以 w_2 交换第二、第三个对角元.

现在说明所有 $N(T)$ 中的元素都只能给出这种排列. 取一个正则元素

$$t = \mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3) \in T$$

其中

$$z_1, z_2, z_3$$

两两不同. 此时 t 的三个特征子空间恰好为

$$\mathbb{C}e_1, \quad \mathbb{C}e_2, \quad \mathbb{C}e_3$$

如果

$$g \in N(T)$$

则

$$gtg^{-1} \in T$$

所以 gtg^{-1} 仍然以

$$\mathbb{C}e_1, \quad \mathbb{C}e_2, \quad \mathbb{C}e_3$$

为特征子空间.

另一方面, gtg^{-1} 的特征子空间就是

$$g\mathbb{C}e_1, \quad g\mathbb{C}e_2, \quad g\mathbb{C}e_3$$

所以必然有

$$g\{\mathbb{C}e_1, \mathbb{C}e_2, \mathbb{C}e_3\} = \{\mathbb{C}e_1, \mathbb{C}e_2, \mathbb{C}e_3\}$$

因此 g 必然将三个坐标直线进行某个排列. 换句话说, g 必然是一个 monomial matrix, 也就是每一行和每一列恰好只有一个非零元素的酉矩阵.

模掉对角矩阵 T 之后, 只剩下对三个坐标的排列, 因此

$$W = N(T)/T \cong S_3$$

更具体地, 可以写成

$$N(T) = \coprod_{\sigma \in S_3} w_\sigma T$$

其中 w_σ 是对应排列 σ 的某个 $SU(3)$ 中代表元.

特别地, w_1, w_2 对应两个相邻换位

$$s_1 = (12), \quad s_2 = (23)$$

所以

$$W = \langle s_1, s_2 \rangle \cong S_3$$

并满足

$$s_1^2 = s_2^2 = 1$$

以及 braid relation

$$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$$

根的反射群 对根 α , 反射定义为

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha$$

首先考虑

$$r_{\alpha_1}$$

设

$$\lambda = aw_1 + bw_2$$

由于

$$\lambda(h_{\alpha_1}) = a$$

所以

$$\begin{aligned} r_{\alpha_1}(\lambda) &= aw_1 + bw_2 - a\alpha_1 \\ &= aw_1 + bw_2 - a(2w_1 - w_2) \\ &= -aw_1 + (a+b)w_2 \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{r_{\alpha_1}(aw_1 + bw_2) = -aw_1 + (a+b)w_2}$$

同理, 由于

$$\lambda(h_{\alpha_2}) = b$$

所以

$$\begin{aligned} r_{\alpha_2}(\lambda) &= aw_1 + bw_2 - b\alpha_2 \\ &= aw_1 + bw_2 - b(-w_1 + 2w_2) \\ &= (a+b)w_1 - bw_2 \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{r_{\alpha_2}(aw_1 + bw_2) = (a+b)w_1 - bw_2}$$

从 ε_i 的角度看则更加直观. 由于

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

所以 r_{α_1} 恰好交换

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2$$

而固定 ε_3 . 同理, r_{α_2} 恰好交换

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3$$

而固定 ε_1 .

因此根反射群就是对

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

进行所有排列, 所以

$$W(\Delta) = \langle r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2} \rangle \cong S_3$$

这与前面从

$$N(T)/T$$

得到的 Weyl 群完全一致.

Weyl 腔 现在

$$it = \{\text{diag}(x_1, x_2, x_3): x_j \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

这是一个二维实向量空间.

三个正负根对应的反射超平面分别为

$$\alpha_1(H) = 0 \iff x_1 = x_2$$

$$\alpha_2(H) = 0 \iff x_2 = x_3$$

以及

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(H) = 0 \iff x_1 = x_3$$

所以三条直线

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = x_3, \quad x_1 = x_3$$

将二维空间 it 分成 6 个连通分支, 也就是 6 个 Weyl 腔.

我们选择其中一个 Weyl 腔

$$x_1 > x_2 > x_3$$

则

$$\alpha_1(H) = x_1 - x_2 > 0$$

以及

$$\alpha_2(H) = x_2 - x_3 > 0$$

所以对应的单根系为

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

正根系为

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$$

负根系为

$$\Delta^- = \{-\alpha_1, -\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\}$$

在权空间 $(it)^*$ 中, 如果写

$$\lambda = aw_1 + bw_2$$

则

$$\lambda(h_{\alpha_1}) = a, \quad \lambda(h_{\alpha_2}) = b$$

所以正 Weyl 腔可以写成

$$a > 0, \quad b > 0$$

而闭的支配 Weyl 腔为

$$a \geq 0, \quad b \geq 0$$

由于

$$\alpha_1(h_{\alpha_2}) = \alpha_2(h_{\alpha_1}) = -1$$

而两根长度相同, 所以

$$\frac{2B(\alpha_1, \alpha_2)}{B(\alpha_2, \alpha_2)} = -1$$

从而

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{2}B(\alpha_2, \alpha_2)$$

所以单根之间夹角满足

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

也就是

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

因此 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的根系为 A_2 型, 其 Dynkin 图为两个点之间连接一条单边, 即

$$A_2: \quad \circ - \circ$$

对应两个单根 α_1, α_2 .

最高权与标准表示 现在我们已经知道

$$A(T) = P = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$$

支配条件为

$$\lambda(h_{\alpha_1}) \geq 0, \quad \lambda(h_{\alpha_2}) \geq 0$$

所以支配解析整权恰好为

$$\lambda = aw_1 + bw_2, \quad a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

因此最高权分类给出

$$\widehat{\mathrm{SU}(3)} \longleftrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$$

具体为

$$(a, b) \longleftrightarrow V(aw_1 + bw_2)$$

通常将这个不可约表示简记为

$$V_{a,b} = V(aw_1 + bw_2)$$

现在回到标准表示

$$V = \mathbb{C}^3$$

我们之前已经知道其三个权为

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

而

$$w_1 = \varepsilon_1$$

同时

$$w_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

所以

$$\varepsilon_1 = w_1$$

$$\varepsilon_2 = w_2 - w_1$$

以及

$$\varepsilon_3 = -w_2$$

因此标准表示的权为

$$\Delta(\mathbb{C}^3) = \{w_1, -w_1 + w_2, -w_2\}$$

选择前面的正根系

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$$

则

$$\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}E_{23} \oplus \mathbb{C}E_{13}$$

也就是严格上三角矩阵.

注意

$$E_{12}e_1 = 0, \quad E_{23}e_1 = 0, \quad E_{13}e_1 = 0$$

所以

$$\mathfrak{n}^+e_1 = 0$$

另一方面, e_1 的权为

$$w_1$$

因此 e_1 是最高权向量, 最高权为

$$w_1$$

所以标准表示就是

$$\boxed{\mathbb{C}^3 \cong V(w_1) = V_{1,0}}$$

通过负根向量可以看到其他两个权. 首先

$$E_{21}e_1 = e_2$$

所以权由

$$w_1$$

下降一个 α_1 , 得到

$$w_1 - \alpha_1 = w_1 - (2w_1 - w_2) = -w_1 + w_2$$

这正是 e_2 的权.

然后

$$E_{32}e_2 = e_3$$

所以再次下降一个 α_2 , 得到

$$\begin{aligned} (-w_1 + w_2) - \alpha_2 &= -w_1 + w_2 - (-w_1 + 2w_2) \\ &= -w_2 \end{aligned}$$

这正是 e_3 的权.

所以标准表示的权可以画成

$$w_1 \longrightarrow -w_1 + w_2 \longrightarrow -w_2$$

其中第一步减去 α_1 , 第二步减去 α_2 .

第二个基本表示 现在考虑

$$\Lambda^2 \mathbb{C}^3$$

其一组基为

$$e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_3, \quad e_2 \wedge e_3$$

由于张量积以及外幂中的权相加, 所以

$$e_1 \wedge e_2$$

的权为

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = w_2$$

同理

$$e_1 \wedge e_3$$

的权为

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = w_1 - w_2$$

以及

$$e_2 \wedge e_3$$

的权为

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -w_1$$

所以

$$\Delta(\Lambda^2 \mathbb{C}^3) = \{w_2, w_1 - w_2, -w_1\}$$

现在检查

$$e_1 \wedge e_2$$

是最高权向量. 有

$$E_{12}(e_1 \wedge e_2) = (E_{12}e_1) \wedge e_2 + e_1 \wedge (E_{12}e_2) = 0 + e_1 \wedge e_1 = 0$$

同理

$$E_{23}(e_1 \wedge e_2) = 0$$

以及

$$E_{13}(e_1 \wedge e_2) = 0$$

所以

$$\mathfrak{n}^+(e_1 \wedge e_2) = 0$$

因此其最高权为

$$w_2$$

所以

$$\Lambda^2 \mathbb{C}^3 \cong V(w_2) = V_{0,1}$$

另一方面, 由于 $\det = 1$, 存在自然的 SU(3)-模同构

$$\Lambda^2 \mathbb{C}^3 \cong (\mathbb{C}^3)^*$$

所以两个基本权 w_1, w_2 分别对应两个基本表示

$$V(w_1) = \mathbb{C}^3, \quad V(w_2) = (\mathbb{C}^3)^* \cong \Lambda^2 \mathbb{C}^3$$

伴随表示的最高权 现在考虑 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 自身的伴随表示. 它的非零权就是根

$$\pm\alpha_1, \quad \pm\alpha_2, \quad \pm(\alpha_1 + \alpha_2)$$

而零权空间就是

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$$

其中维数为 2.

最高根为

$$\alpha_1 + \alpha_2$$

而

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= (2w_1 - w_2) + (-w_1 + 2w_2) \\ &= w_1 + w_2 \end{aligned}$$

对应最高权向量为

$$E_{13} \in \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2}$$

所以伴随表示的最高权为

$$w_1 + w_2$$

因此

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \cong V(w_1 + w_2) = V_{1,1}$$

作为表示，其维数为

$$\dim \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = 8$$

所以 $SU(3)$ 的不可约表示最终可以统一记为

$$V_{a,b} = V(aw_1 + bw_2), \quad a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

其中最基本的几个例子为

$$V_{0,0} = \mathbb{C}$$

$$V_{1,0} = \mathbb{C}^3$$

$$V_{0,1} = (\mathbb{C}^3)^*$$

以及

$$V_{1,1} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$$

这就是 $SU(3)$ 的最高权分类.

详细证明

证明 (引理 1.14) 暂略, 参见 GTM235-Lemma-3.2. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.15) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.3. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.16) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.7. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.19) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.12. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 1.20) 暂略, 参见 GTM235-Lemma-3.13. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.26) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.21. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 1.27) 暂略, 参见 GTM235-Lemma-3.23. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.29) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.24. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.30) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.25. □

[返回原环境](#)

证明 (推论 1.31) 暂略, 参见 GTM235-Corollary-3.26. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 1.32) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-3.28. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.3) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-4.5. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.5) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-4.8. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.7) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-4.14. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.8) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-4.16. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.10) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-5.2. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 2.17) 暂略, 参见 GTM235-Lemma-5.7. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.21) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-5.12 与 Corollary-5.13. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.24) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-5.18. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.25) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-5.21. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 2.26) 暂略, 参见 GTM235-Theorem-5.22. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 3.16) (1) 显然. (2) 由于 $\text{Ad}(g) = d(c_g)$, 所以保持李括号, 因此有

$$\text{ad}(\text{Ad}(g)X)(Y) = [\text{Ad}(g)X, Y] = \text{Ad}(g)[X, \text{Ad}(g)^{-1}Y]$$

从而

$$\text{ad}(\text{Ad}(g)X) = \text{Ad}(g) \circ \text{ad}(X) \circ \text{Ad}(g)^{-1}$$

从而可见

$$\begin{aligned} B(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) &= \text{tr}(\text{Ad}(g) \circ \text{ad}(X) \circ \text{Ad}(g)^{-1} \circ \text{Ad}(g) \circ \text{ad}(Y) \circ \text{Ad}(g)^{-1}) \\ &= \text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad}(Y)) = B(X, Y) \end{aligned}$$

(3) 对 (2) 取 $g(t) = e^{tZ}$ 求导就立即得到.

(4) 对 $X \in \mathfrak{fg}$, 选择一个包含 X 的 Cartan 子代数, 则根空间分解告诉我们

$$B(X, X) = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} \alpha^2(X)$$

由定理 3.9 可知在 $\mathfrak{t}$ 上是纯虚的, 从而 B 首先是半负定的, 如果 $B(X, X) = 0$, 则 $\alpha(X) = 0$ 对所有 α 成立, 也就是说 $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, 考虑分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 就立刻得到.

(5) 对 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $H \in \mathfrak{t}$, 由 (3) 得

$$0 = B(\operatorname{ad}(H)X_\alpha, X_\beta) + B(X_\alpha, \operatorname{ad}(H)X_\beta) = (\alpha + \beta)(H)B(X_\alpha, X_\beta)$$

故得证.

(6) 回忆有 $\theta \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 因此对 $X_\alpha = U_\alpha + iV_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $U_\alpha, V_\alpha \in \mathfrak{g}$, 则可见 $U_\alpha - iV_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 所以

$$B(U_\alpha + iV_\alpha, U_\alpha - iV_\alpha) = B(U_\alpha, U_\alpha) + B(V_\alpha, V_\alpha)$$

由于对 $\alpha \neq 0$ 有 $\mathfrak{g}_\alpha \subset (\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}$, 所以上式非零, 是非奇异的.

(7) 很显然 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \operatorname{rad}(B)$, 因为对中心中的元素 Z , 有 $\operatorname{ad}(Z) = 0$. 反过来, 结合

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

可见任意的 $X \in \operatorname{rad}(B)$ 可以写成

$$X = Z + S, \quad Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), S \in (\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}$$

由于 $X, Z \in \operatorname{rad}(B)$, 所以自然有 $S = X - Z \in \operatorname{rad}(B)$, 现在考虑半单李代数 $\mathfrak{g}'$ 的根空间分解

$$(\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{t}')_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta((\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_\alpha$$

因此 S 可以唯一写成

$$S = H + \sum_{\alpha \in \Delta((\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}})} S_\alpha$$

由于对任意的 $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 都有

$$B(S, Y) = 0 \implies B(S_\alpha, Y) = 0 \quad \square$$

从而结合在 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 上非奇异可见 $S_\alpha = 0$. 同理结合 $\mathfrak{g}'$ 半单, 我们还知道 B 在 $\mathfrak{t}'_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{t}'_{\mathbb{C}}$ 上非奇异, 同理可见 $S = H \in \operatorname{rad}(B)$ 从而 $H = 0$, 因此 $S = 0$, 即 $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(8) 结合 $\mathfrak{g}_\alpha$ 仅与 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 配对, 而 $\theta \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 代入验证不难发现正定性.

(9) 思路为: 先说明 $\operatorname{tr}(XY)$ 是 Ad -不变的, 然后由于在 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ 负定, 因此 $-\operatorname{tr}(X\theta Y)$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的 Ad -不变内积, 而 $-B(X, \theta Y)$ 也是, 结合 $\mathfrak{g}$ 单, 可见 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 在 Ad -作用下是不可约表示, 而推论 1.9 告诉我们其上得到不变内积在差一个正常数的意义下唯一, 消掉 θ 立刻得证.

[返回原环境](#)

证明 (推论 3.21) 暂略, 参见 GTM235-Corollary-6.22. $\square$

[返回原环境](#)

证明 (定理 4.9) (1) 若 $w \in N$ 在 $\mathfrak{t}$ 上通过 Ad 平凡作用, 由于 $\exp \mathfrak{t} = T$, 并且

$$c_w \circ \exp = \exp \circ \text{Ad}(w)$$

可见 $w \in Z_G(T)$, 而定理 2.21 告诉我们 $Z_G(T) = T$, 因此可见 $w \in T$, 故忠实作用.

(2) 对 $w \in N$, $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 与 $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, 则可见

$$[H, \text{Ad}(w)X_{\alpha}] = \text{Ad}(w)[\text{Ad}(w)^{-1}H, X_{\alpha}] = (w\alpha)(H) \text{Ad}(w)X_{\alpha}$$

从而 $\text{Ad}(w)\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{g}_{w\alpha}$, 结合 $\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ 与作用是可逆的立刻可见取等. 特别地可见 $w\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(3) 由 (2) 立刻得到. (4) 注意

$$B(u_{w\alpha}, H) = \alpha(w^{-1}H) = B(u_{\alpha}, w^{-1}H) = B(wu_{\alpha}, H)$$

故可见 $u_{w\alpha} = wu_{\alpha}$, 由于 w 的作用保持 Killing 型, 故可见 $wh_{\alpha} = h_{w\alpha}$.

(5) 注意到 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是有限集, 而 W 在其上的作用是忠实的, 从而只能是其置换群的子群, 故为有限的.

(6) 意思即 T 中元素在 G 中的共轭类等价于 W 作用下的轨道. 现在假设对 $g \in G$ 有

$$gt_1g^{-1} = t_2$$

从而可见 T 与 gTg^{-1} 包含在 $Z_G(t_2)^{\circ}$ 中, 而左边二者都是极大环面, 从而由共轭性知道存在 $z \in Z_G(t_2)$ 使得

$$z(gTg^{-1})z^{-1} = T \implies zg \in N(T)$$

 $\square$

而再注意到 $c_{zg}t_1 = c_zt_2 = t_2$, 故得证.

[返回原环境](#)

证明 (引理 4.16) 道理在于单根的法平面切出来 Weyl 腔, 反之亦然, (3) 之前用根串理论也说明过了. 具体见 GTM-235-Lemma-6.42. $\square$

[返回原环境](#)

证明 (定理 4.17) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-6.43. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.7) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.7. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 5.9) 暂略, 参见 GTM-235-Lemma-7.9. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 5.10) 暂略, 参见 GTM-235-Lemma-7.10. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.11) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.11. □

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.12) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.16. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 5.15) 暂略, 参见 GTM-235-Lemma-7.19. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 5.16) 暂略, 参见 GTM-235-Lemma-7.20. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 5.18) 暂略, 参见 GTM-235-Lemma-7.22. □

[返回原环境](#)

证明 (引理 5.20) 暂略, 参见 GTM-235-Lemma-7.26.

□

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.21) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.29.

□

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.22) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.30.

□

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.23) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.32.

□

[返回原环境](#)

证明 (定理 5.24) 暂略, 参见 GTM-235-Theorem-7.34.

□

[返回原环境](#)