利用引理将其扩张到 $A$，给出从 $A$ 到 $D_1$ 的一个同胚，这个同胚将 $\gamma$ 映为 $\gamma'$.

最后，将同胚按常识扩张到 $\beta$ 上，使得 $\beta$ 映为 $\beta'$，并且再用一次引理将同胚扩张到 $B$ 上，从而得证. □

## 2.3 一些简单拓扑空间及其性质

### 乘积空间

**定义 2.19 (乘积拓扑(product topology))**

设 $(X,\tau_X)$，$(Y,\tau_Y)$ 是两个拓扑空间，令

$$\tau=\left\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\times V_\lambda)\colon U_\lambda\in\tau_X, V_\lambda\in\tau_Y\right\}$$

则 $\tau$ 是 $X\times Y$ 上的一个拓扑结构，称为 $\tau_X$ 与 $\tau_Y$ 的**乘积拓扑**，拓扑空间 $(X\times Y,\tau)$ 称为这两个空间的乘积空间，记为 $(X,\tau_X)\times(Y,\tau_Y)$. ♣

**命题 2.7 (乘积空间的投影映射)**

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 和 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为拓扑空间，$(X\times Y,\mathscr{T}_{X\times Y})$ 为乘积拓扑空间，则投影映射

$$\pi_X\colon X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto x$$

$$\pi_Y\colon X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto y$$

都是连续映射，且都是开映射. ♠

**证明** 我们只证明 $\pi_X$ 的结论：由于

$$\forall V\in\mathscr{T}_X,\pi_X^{-1}(U)=U\times Y\in\mathscr{T}_{X\times Y}$$

从而 $\pi_X$ 为连续映射，下证 $\pi_X$ 为开映射：由于对任意开集 $W\in X\times Y$，和任意 $x\in\pi_X(W)$，存在点 $(x,y)\in W$，从而存在 $X$ 中开集 $U\ni x$ 和 $Y$ 中开集 $V\ni y$ 使得 $(x,y)\in U\times V\subseteq W$，于是 $x\in U\subset W$，从而 $\pi_X(W)$ 是开集，即 $\pi_X$ 是开映射. □

**笔记** 注意投影映射不一定是闭映射，例如平面 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 里的闭集 $\left\{(x,\dfrac{1}{x})\mid x>0\right\}$ 到分量 $\mathbb{R}$ 上的投影是 $(0,+\infty)$，并不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

**定义 2.20**

对于一个映射 $f\colon A\to X\times Y$，$j_x,j_Y$ 为含入映射，设

$$f_X=j_X\circ f,\quad f_Y=j_Y\circ f$$

换言之 $f(a)\equiv(f_X(a),f_Y(a))$，称 $f_X,f_Y$ 为 $f$ 的**分量(component)**. ♣

**定理 2.12**

映射 $f\colon A\to X\times Y$ 连续的充分必要条件是两个分量 $f_X$ 和 $f_Y$ 都连续. ♡

**证明** 如果 $f$ 连续，由复合函数连续性显然 $f_X$ 与 $f_Y$ 都连续.

反过来，如果 $f_X$ 和 $f_Y$ 都连续，则因为 $f^{-1}(U\times V)=f_X^{-1}(U)\cap f_Y^{-1}(V)$，所以开集的原像是开集，故连续. □

## 子空间

**定理 2.13 (粘结引理(pasting lemma))**

设 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是 $X$ 的一个有限闭覆盖(finite closed cover)，如果映射 $f\colon X\to Y$ 使得每个 $f|_{C_k}$ 都连续，则 $f$ 连续. ♡

**证明** 任取 $Y$ 中的闭集 $A$，有

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}(A)\bigcap(C_1\cup\cdots\cup C_n)\\ &= \bigcup_{k=1}^{n}\left(f^{-1}(A)\cap C_k\right)\end{aligned}$$

因为每一个 $f|_{C_k}$ 连续，所以每个 $f^{-1}(A)\cap C_k=(f|_{C_k})^{-1}(A)$ 在 $C_k$ 中闭，即它是 $X$ 中某闭集 $D_k$ 与 $C_k$ 的交，而 $C_k$ 本身也在 $X$ 中闭，因此这个交集在 $X$ 中闭，于是作为有限多个闭集的并集，$f^{-1}(A)$ 在 $X$ 中闭，从而连续. □

## 商空间

**定义 2.21 (强拓扑(strong topology))**

设有一族拓扑空间 $(X_\lambda,\tau_\lambda)$ 及映射 $f_\lambda\colon X_\lambda\to Y$，则 $Y$ 上满足对于每个 $f_\lambda\colon(X_\lambda,\tau_\lambda)\to(Y,\tau)$ 都连续的最大拓扑称为由这些 $f_\lambda$ 决定的**强拓扑**. ♣

**注** 最大的意思是：如果有其他拓扑 $\mu$ 也满足条件，则 $\mu\subset\tau$.

事实上这样的最大的拓扑是存在的，我们可以如下定义最强拓扑 $\tau$：

**命题 2.8**

设有一族拓扑空间 $(X_\lambda,\tau_\lambda)$ 及映射 $f_\lambda\colon X_\lambda\to Y$，则 $Y$ 上使得所有 $f_\lambda$ 都连续的最强拓扑为：

$$\tau=\left\{U\subseteq Y \mid \text{每个 } f_\lambda^{-1}(U) \text{ 都是 } \tau_\lambda \text{ 中的开集}\right\}$$

♠

**证明** 显然 $\emptyset\in\tau$，$Y\in\tau$，且容易验证

$$f_\lambda^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)=\bigcup_\alpha f_\lambda^{-1}(U_\alpha)$$

因此，如果每个 $U_\alpha\in\tau$，则 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha\in\tau$.

同理知道

$$f_\lambda^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n}U_k\right)=\bigcap_{k=1}^{n}f_\lambda^{-1}(U_k)$$

可以知道如果 $U_1,\cdots,U_n\in\tau$，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}U_k\in\tau$.

综上所述，$\tau$ 是一个拓扑结构，而且如果 $Y$ 上的拓扑 $\mu$ 同样满足条件，则任取 $U\in\mu$，每个 $f_\lambda^{-1}(U)$ 都必须是 $\tau_\lambda$ 中的开集，因此 $U\in\tau$，这就说明 $\tau$ 确实是最大的拓扑. $\square$

**定义 2.22 (商拓扑(quotient topology))**

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 是拓扑空间，$Y$ 是非空集合，$p\colon X\to Y$ 是满射.

(1) 我们称 $Y$ 上由 $p$ 诱导的强拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 为 $Y$ 上的**商拓扑**，称 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为 $(X,\mathscr{T}_X)$ 的**商空间**，称 $p\colon(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为**商映射**.

(2) 给定商映射 $p$，我们称 $p^{-1}(y)$ 为 $p$ 在点 $y\in Y$ 的**纤维**.

♣

容易验证商映射满足下列性质：

**命题 2.9**

设 $f\colon X\to Y$ 是一个满射，则 $f$ 是商映射的充分必要条件是：$U$ 是闭集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是闭集.

♠

**命题 2.10**

两个商映射的复合还是商映射.

♠

**命题 2.11**

设 $f\colon X\to Y$ 是个连续的满映射，则下列两个条件都是 $f$ 是商映射的充分不必要条件：

(1) $f$ 是开映射；

(2) $f$ 是闭映射.

♠

**证明** 对于一个满射 $f$ 而言，$U=f(f^{-1}(U))$，因此如果满射 $f$ 是开映射，则 $f^{-1}(U)$ 开蕴含 $U$ 开. 而如果 $f$ 连续则 $U$ 开也蕴含 $f^{-1}(U)$ 开，因此如果一个连续满射是开映射，则一定是商映射. 同理可证闭映射. $\square$

**笔记** 显然同胚一定是商映射，但商映射比同胚多多了，可以理解为：每个 $Y$ 中的点 $y$ 提供了一个进行粘合操作的位置，让所有 $f^{-1}(y)$ 中的点可以放到这个位置去粘合起来.

**定理 2.14**

设 $p\colon X\to Y$ 是商映射，则任取 $f\colon Y\to Z$，$f$ 连续当且仅当 $f\circ p\colon X\to Z$ 连续.

♡

**证明** 如果 $f$ 连续，显然 $f\circ p$ 连续.

反之如果 $f\circ p$ 连续，则任取 $Z$ 中开集 $U$，$p^{-1}(f^{-1}(U))$ 为 $X$ 中开集，但是 $Y$ 的子集 $V$ 开当且仅当 $p^{-1}(V)$ 开，因此 $f^{-1}(U)$ 是 $Y$ 中的开集，这说明 $f$ 连续. $\square$

**定理 2.15**

如果 $p\colon X\to Y$ 和 $q\colon X\to Z$ 都是商映射，并且 $p(x)=p(x')$ 当且仅当 $q(x)=q(x')$，则 $Y$ 与 $Z$ 同胚.

♡

**证明** 定义一个映射 $f\colon Y \to Z$，使得 $p(x) = y$ 当且仅当 $q(x) = f(y)$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
Y \arrow[rr, bend left, "f"] & & Z \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

因为 $p(x) = p(x')$ 当且仅当 $q(x) = q(x')$，所以这样的 $f$ 确实是存在的，而且是一个双射. 不仅如此，$f \circ p = q$，$f^{-1} \circ q = p$，所以由定理 2.14 可知 $f$ 与 $f^{-1}$ 都连续，即 $f$ 是同胚. □

## 作为等价类的商空间

下面是构建商映射的典型方法：从拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_X)$ 开始，先在 $X$ 上选定一个等价关系 $\sim$，然后我们得到一个由所有等价类构成的抽象空间

$$Y = X/\sim$$

和一个自然映射：

$$p\colon X \to X/\sim, \quad x \mapsto [x]$$

从而可以在等价类集合 $Y$ 上构造商拓扑. 在这种情况下，每个纤维恰是一个等价类.

**注** 注意用“满映射定义商空间”和用“等价关系定义商空间”的描述是等价的：给定等价关系的描述，我们有如上的自然映射作为我们的商映射；反之给定任何商映射 $f\colon X \to Y$，我们可以通过 $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ 来定义 $X$ 上的一个等价关系，其等价类集合恰为 $Y$.

**注** 我们可以现在再来看一看定理 2.15，此时我们注意到 $Y$ 与 $Z$ 的等价类在某种程度下是一样的，所以只要构造等价类之间的一一对应就很容易验证定理了.

**定义 2.23 (粘合映射与商拓扑)**

设 $\sim$ 是集合 $X$ 上的一个等价关系，则所有等价类构成的集合 $\mathscr{R}$ 称为 $X$ 关于 $\sim$ 的**商集(quotient set)**，记为 $X/\sim$，称映射

$$p\colon X \to \mathscr{R}, \quad x \mapsto [x]$$

为**粘合映射(gluing map)**. 若 $X$ 上有拓扑 $\tau$，则称 $p$ 在 $\mathscr{R}$ 上决定的相应强拓扑为**商拓扑**，记为 $\tau/\sim$，称拓扑空间 $(X/\sim, \tau/\sim)$ 为 $(X, \tau)$ 的**商空间(quotient space)**，记为 $(X, \tau)/\sim$. ♣

**定理 2.16**

商空间中的子集开当且仅当其关于粘合映射的原像开，换言之，粘合映射是商映射. ♡

**定理 2.17**

设 $f\colon X \to Y$ 是商映射，$\sim$ 是 $X$ 上的等价关系，满足 $x \sim x'$ 当且仅当 $f(x) = f(x')$，则商空间 $X/\sim$ 与 $Y$ 同胚.

**证明** 由定理 2.15 显然成立. □

## 2.4 可数公理

在拓扑学中针对一堆研究对象谈他们的可数性时，往往并不是指这些对象的全体可数(因为这个要求很难达到)，而是从这堆对象中可以选出可数多个代表来刻画出其他所有对象.

一个点的邻域基就是它的邻域里面选出的代表团，拓扑基则是所有开集里面选出的代表团. 用邻域基和拓扑基可以分别定义一种可数性，分别称之为第一可数公理和第二可数公理.

可数性对于一些数学技巧(尤其是数学归纳法)是否能应用至关重要，点集拓扑中有好几个著名定理，如果去掉可数的条件就证明不出来了. 可数性被称为“可数公理”也正是因为这个原因.

**定义 2.24 (邻域基(neighbourhood base or local base))**

拓扑空间 $X$ 中点 $x$ 的一个**邻域基**指由 $x$ 的邻域构成的子集族 $\mathcal{N}_x$，使得 $x$ 的任何邻域均包含 $\mathcal{N}_x$ 中的某个邻域.

**笔记** 比如 $\mathcal{N}$ 是第一章定义的那种基准开邻域机构，因为只有包含一个基准开邻域的子集才叫邻域，所以每个点 $x$ 的所有基准开邻域构成的子集族 $\mathcal{N}(x)$ 是 $x$ 的一个邻域基.

**命题 2.12**

考虑映射 $f\colon X \to Y$，设 $f(x_0) = y_0$，并且 $\mathcal{N}_{y_0}$ 是 $y_0 \in Y$ 的一个邻域基，则 $f$ 在 $x_0$ 处连续的充分必要条件是任取 $V \in \mathcal{N}_{y_0}$，$f^{-1}(V)$ 是 $x_0$ 的邻域.

**定义 2.25**

如果 $x$ 的一个邻域基 $\mathcal{N}_x$ 只含可数多个成员，则称之为 $x$ 的**可数邻域基(countabel neighborhood base)**条件.

**定义 2.26**

条件

$C_1$ 每个点都拥有一个可数邻域基.

称为**第一可数公理(first axiom of countability)**，满足该条件的空间称为**第一可数空间(first-countable sapce)**.

**注** 度量拓扑空间都是第一可数空间.

**注** 是否满足可数公理与这个空间是否只含可数个点并没有什么关系，第一可数空间可以含有

不可数个点，反过来只含可数多个点的空间也可以不满足第一可数公理.

**命题 2.13**

若 $x$ 有一个可数邻域基，则 $x$ 有一个可数邻域基 $\{V_1, V_2, \cdots\}$，使得当 $m > n$ 时，总有 $V_m \subseteq V_n$.

**证明** 设 $\{U_1, U_2, \cdots\}$ 是 $x$ 的一个可数邻域基，令 $V_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$.

从而当 $m > n$ 的时候，就一定有 $V_m \subseteq V_n$. 任取 $x$ 的邻域 $U$，存在某个正整数 $n$ 使得 $U \subseteq U_n$，从而 $V_n \subseteq U_n \subseteq U$. 这说明 $\{V_1, V_2, \cdots\}$ 也是 $x$ 的邻域基. □

**定义 2.27**

设 $\{x_n\}$ 是一个点列，若 $x$ 满足任取 $x$ 的邻域 $U$，存在自然数 $N$，使得 $n > N$ 时每个 $x_n$ 都在 $U$ 中，则称 $x$ 为点列 $\{x_n\}$ 的一个**极限**.

**命题 2.14**

设 $x \in X$ 有可数邻域基，$A \subseteq X$，则 $x$ 是 $A$ 的聚点当且仅当存在由 $A \backslash \{x\}$ 中的点构成的点列 $\{x_n\}$ 以 $x$ 为极限.

**证明** 如果存在 $A \backslash \{x\}$ 中的点列 $\{x_n\}$ 以 $x$ 为极限，则 $x$ 的任何邻域都要包含某个 $x_n \in A \backslash \{x\}$，因此 $x$ 是 $A$ 的聚点.

反之，如果 $x$ 是 $A$ 的聚点，取 $x$ 的可数邻域基 $\{V_1, V_2, \cdots\}$ 使得当 $m > n$ 时总有 $V_m \subset V_n$，然后在每个 $V_n \cap A$ 中取一点 $x_n \neq x$，则点列 $\{x_n\}$ 以 $x$ 为一个极限. □

**命题 2.15**

设 $x \in X$ 有可数邻域基，则映射 $f \colon X \to Y$ 在 $x$ 点处连续的充分必要条件是：任取以 $x$ 为极限的点列 $\{x_n\}$，点列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $f(x)$ 为极限.

**证明** 如果 $f$ 在 $x$ 点处连续并且点列 $\{x_n\}$ 以 $x$ 为极限，则任取 $f(x)$ 的邻域 $U$，$f^{-1}(U)$ 是 $x$ 的邻域，因此存在自然数 $N$ 使得 $n > N$ 时 $x_n \in f^{-1}(U)$，从而 $f(x_n) \in U$. 这说明点列 $\{f(x_n)\}$ 以 $f(x)$ 为极限.

假设任取以 $x$ 为极限的点列 $\{x_n\}$，点列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $f(x)$ 为极限，我们来证明任取 $f(x)$ 的邻域 $U$，$f^{-1}(U)$ 是 $x$ 的邻域，取 $x$ 的可数邻域基 $\{V_1, V_2, \cdots\}$ 使得当 $m > n$ 时有 $V_m \subset V_n$. 假如 $f^{-1}(U)$ 不是 $x$ 的邻域，则每个 $V_n \not\subseteq f^{-1}(U)$，从而存在一点 $x_n \in V_n \backslash f^{-1}(U)$. 于是点列 $\{x_n\}$ 以 $x$ 为极限，而点列 $\{f(x_n)\}$ 却完全落在 $U$ 之外，从而不能以 $f(x)$ 为极限，与假设矛盾，故 $f^{-1}(U)$ 是 $x$ 的邻域，即 $f$ 连续. □

领域基是一种挑出来一部分邻域来代表所有邻域的机制，类似地，也有一种挑出一部分开集来代表所有开集的机制，称为拓扑基，拓扑基的概念参见定义 2.12.

**定义 2.28**

如果拓扑基 $\mathcal{B}$ 只含可数多个成员，则称之为**可数拓扑基(countabel topological base)**条件.

$C_2$ 存在可数拓扑基.

称为**第二可数公理**，满足该条件的空间称为**第二可数空间**. ♣

显然第二可数公理蕴含第一可数公理，这是因为若 $\mathcal{B}$ 是 $X$ 的一个可数拓扑基，则 $\mathcal{B}$ 中由包含着点 $x$ 的那些元素所组成的子族就是 $x$ 处的一个可数邻域基.

**定理 2.18**

第一可数空间的子空间是第一可数的. 第一可数空间的可数积是第一可数的. 第二可数空间的子空间是第二可数的. 第二可数空间的可数积是第二可数的. ♡

**证明** 考虑第二可数性公理. 若 $\mathcal{B}$ 是 $X$ 的一个可数基,则 $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ 便是 $X$ 的子空间 $A$ 的一个可数基. 若 $\mathcal{B}_i$ 是空间 $X_i$ 的一个可数基,则所有积 $\prod U_i$ 构成的族便是 $\prod X_i$ 的一个可数基,其中 $U_i$ 满足条件: 对于有限多个 $i, U_i \in \mathcal{B}_i$ . 而对于其他的所有 $i, U_i = X_i$ .

关于第一可数性公理的证明是类似的. □

**定理 2.19**

设 $X$ 有一个可数邻域基. 则

(a) $X$ 的每一个开覆盖有一个可数子族覆盖 $X$ .

(b) $X$ 存在一个可数子集在 $X$ 中稠密. ♡

**证明** 设 $\{B_n\}$ 是 $X$ 的一个可数邻域基.

(a) 令 $\mathcal{A}$ 为 $X$ 的一个开覆盖. 对于每一个正整数 $n$ ,只要可能,我们就选取一个 $A_n \in \mathcal{A}$ , 使得 $A_n$ 包含基元素 $B_n$ . 那么,这些集合 $A_n$ 构成的族 $\mathcal{A}'$ 是可数的,因为它的下标集 $J$ 是正整数的一个子集. 而且 $\mathcal{A}'$ 覆盖 $X$ ,因为任意给定 $X$ 的一个点 $x$ ,可以在 $\mathcal{A}$ 中选择一个集合 $A$ 包含点 $x$ . 因为 $A$ 是开的,所以存在基元素 $B_n$ 使得 $x \in B_n \subset A$ . 因而 $B_n$ 就必定包含在 $\mathcal{A}$ 的一个成员中,其下标属于集合 $J$ . 于是 $A_n$ 有定义. 并且 $A_n$ 包含 $B_n$ ,所以 $A_n$ 包含点 $x$ .

(b) 从基中的每一个非空元素 $B_n$ 中选取一点 $x_n$ . 设这些点 $x_n$ 构成集合 $D$ ,那么 $D$ 在 $X$ 中稠密. 这是因为对于 $X$ 中任意给定的一点 $x$ ,每一个包含 $x$ 的基元素都和 $D$ 相交,所以 $x$ 属于 $\overline{D}$ . □

定理 2.19 所列出的两个性质有时也分别被当作一种可数性公理. 每一个开覆盖都包含可数子覆盖的空间, 通常称为 Lindelöf 空间 (Lindelöf space). 有可数稠密子集的空间常被称为可分的 (separable). 一般说来,这两个性质都比第二可数性公理弱. 但若空间是可度量化的, 则它们与第二可数性公理等价[3]. 就其重要性而言, 它们不及第二可数性公理,但也不可忽视,使用它们会给我们带来方便. 例如,通常证明一个空间 $X$ 具有可数稠密子集就比证明 $X$ 具有可数基容易. 如果空间还是可度量化的 (像分析中常见的那样),那么这就蕴涵了 $X$ 是第二可数的.

[3]可以按照如下步骤证明 (a) 证明: 每一个有可数稠密子集的度量空间都有可数基.(b) 证明: 每一个可度量的 Lindelöf 空间都有可数基.

## 2.5 分离公理

**定义 2.29 (Hausdorff空间)**

空间 $X$ 称为 **Hausdorff** 的,指的是: 如果对于 $X$ 中每两个互不相同的点 $x$ 和 $y$ ,存在无交的两个开集分别包含 $x$ 和 $y$ .

**命题 2.16**

Hausdorff 空间中单点集都是闭集.

证明 任取 $y \notin \{x\}$，Hausdorff 空间保证了 $y$ 必有邻域包含于 $\{x\}^c$，从而 $\{x\}^c$ 是开集，从而 $\{x\}$ 是闭集. □

**定理 2.20**

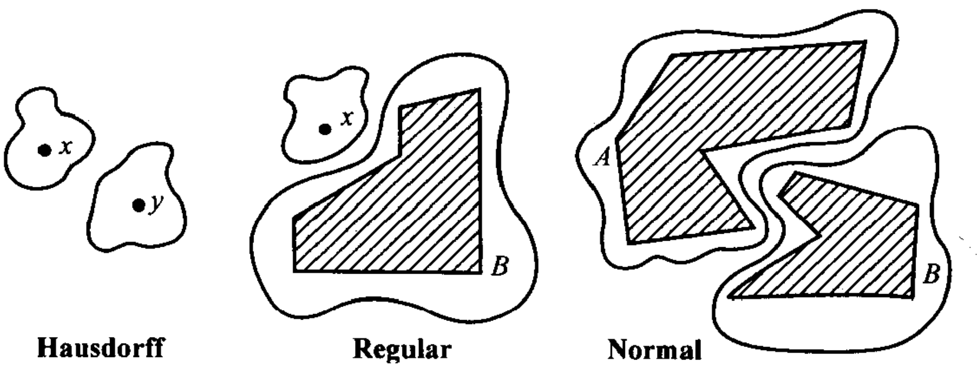
Hausdorff 空间收敛点列的极限唯一.

**定义 2.30**

设 $X$ 中的每一个单点集在 $X$ 中都是闭的. 如果对于任意给定的一个点 $x$ 和不包含这个点的一个闭集 $B$ , 存在无交的两个开集分别包含 $x$ 和 $B$ , 则称 $X$ 为**正则**的 (regular). 如果对于 $X$ 中每一对无交的闭集 $A$ 和 $B$ 总存在无交的开集分别包含它们, 则称 $X$ 是**正规**的(normal).

显然, 正则空间是 Hausdorff 的, 正规空间是正则的.

这些公理之所以被称为分离性公理, 是因为它们都涉及用无交的开集, 把一定类型的集合彼此“分离”. 三个分离公理如图所示.




我们下面给出一些术语:

**定义 2.31**

- 对于任意的 $x, y \in X$，如果存在一个开集 $U$，使得 $U$ 只包含 $x, y$ 中的一个，则称满足 $T_0$ **公理**.
- 若单点集是闭集，则称满足 $T_1$ **公理**.

- 对于任意的两个点，存在不相交的开邻域，即 Hausdorff 的，则称满足 $T_2$ **公理**.
- 任意一个闭集与其外一点有不相交的开邻域，则称满足 $T_3$ **公理**.
- 不相交的闭集有不相交的开邻域，则称满足 $T_4$ **公理**.

**定理 2.21**

(在本定理中邻域指包含某点的开集)设 $X$ 是一个拓扑空间, $X$ 中的单点集都是闭的. 则
(a) $X$ 是正则的当且仅当对 $X$ 中任意给定的一个点 $x$ 和 $x$ 的任何一个邻域 $U$ ,存在 $x$ 的一个邻域 $V$ ,使得 $\overline{V} \subset U$ .
(b) $X$ 是正规的当且仅当对于任意闭集 $A$ 和包含 $A$ 的任何一个开集 $U$ ,存在一个包含 $A$ 的开集 $V$ ,使得 $\overline{V} \subset U$ .

**证明** (a) 设 $X$ 是正则的,给定点 $x$ 和 $x$ 的邻域 $U$ . 令 $B = X - U$ ,则 $B$ 是一个闭集. 根据假设,存在分别包含 $x$ 和 $B$ 的无交开集 $V$ 和 $W$ . 因为若 $y \in B$ ,则集合 $W$ 就是 $y$ 的一个邻域, 它与 $V$ 无交,所以集合 $\overline{V}$ 与 $B$ 无交. 因此 $\overline{V} \subset U$ .

为了证明其逆命题成立,设给定点 $x$ 和不包含 $x$ 的闭集 $B$ . 令 $U = X - B$ . 根据假设,存在 $x$ 的邻域 $V$ ,使得 $\overline{V} \subset U$ . 于是,开集 $V$ 和 $X - \overline{V}$ 就是分别包含 $x$ 和 $B$ 的无交开集. 从而 $X$ 是正则的.

(b) 这个证明完全与上面的证明相同,只需在整个证明中用集合 $A$ 代替点 $x$ 就可以了. □

**定理 2.22**

(在本定理中邻域指包含某点的开集)
(a) Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 的. Hausdorff 空间的积空间也是 Hausdorff 的.
(b) 正则空间的子空间是正则的. 正则空间的积空间也是正则的.

**证明** (a) 设 $X$ 是一个 Hausdorff 空间, $x$ 和 $y$ 是 $X$ 的子空间 $Y$ 中的两点. 如果 $U$ 和 $V$ 分别是点 $x$ 和 $y$ 在 $X$ 中的无交邻域,那么 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 便分别是 $x$ 和 $y$ 在 $Y$ 中的无交邻域.

设 $\{X_a\}$ 是 Hausdorff 的空间的一个族. 设 $x = (x_a)$ 和 $y = (y_a)$ 是积空间 $\prod X_a$ 中不同的两点. 因为 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ,故存在某一个指标 $\beta$ ,使得 $x_\beta \neq y_\beta$ . 在 $X_\beta$ 中选取分别包含 $x_\beta$ 和 $y_\beta$ 的无交开集 $U$ 和 $V$ . 这样,集合 $\pi_\beta^{-1}(U)$ 和 $\pi_\beta^{-1}(V)$ 就是 $\prod X_a$ 中分别包含 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的无交开集.

(b) 设 $Y$ 是一个正则空间 $X$ 的子空间. 则 $Y$ 中的单点集都是闭的. 设 $x$ 是 $Y$ 的一个点, $B$ 是 $Y$ 中不包含 $x$ 的一个闭子集. 于是 $\overline{B} \cap Y = B$ ,其中 $\overline{B}$ 表示 $B$ 在 $X$ 中的闭包. 因此, $x \notin \overline{B}$ . 再应用 $X$ 的正则性,我们可以选取 $X$ 中分别包含 $x$ 和 $\overline{B}$ 的无交开集 $U$ 和 $V$ . 因此 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 分别是 $Y$ 中包含 $x$ 和 $B$ 的无交开集.

设 $\{X_a\}$ 是正则空间的一个族. 令 $X = \prod X_a$ . 根据 (a) 可见, $X$ 是一个 Hausdorff 空间,因此 $X$ 中的单点集都是闭的. 我们应用前面的引理来证明 $X$ 的正则性. 设 $x = (x_a)$ 为 $X$ 的一个点, $U$ 为 $x$ 在 $X$ 中的一个邻域. 取基中的元素 $\prod U_a$ 使得它包含于 $U$ 中,且包含着点 $x$ . 对于每一个 $\alpha$ ,选取 $x_a$ 在 $X_a$ 中的一个邻域 $V_a$ ,使得 $\overline{V}_a \subset U_a$ . 如果恰好有 $U_a = X_a$ ,那就选取 $V_a = X_a$ . 于是 $V = \prod V_a$ 便是点 $x$ 在 $X$ 中的一个邻域. $\overline{V} = \prod \overline{V}_a$ ,所以 $\overline{V} \subset \prod U_a \subset U$ . 因

此, $X$ 是正则的. □

## 2.6 正规空间

现在我们来更全面地研究一下满足正规性公理的空间. 从某种意义上说, 这个术语“正规”并不是很恰当, 因为所谓正规空间并不如我们所想像的那样理想. 另一方面, 我们所熟知的许多空间都满足这个公理, 就像我们下面所见到的那样. 它之所以重要, 是因为在假设了正规性的情况下, 我们所能证明的很多结论都是拓扑学中很重要的结论. 其中 Urysohn 度量化定理和 Tietze 扩张定理就是这样的两个结论, 在本章稍后的几节中, 我们将会处理这些问题.

**定理 2.23**

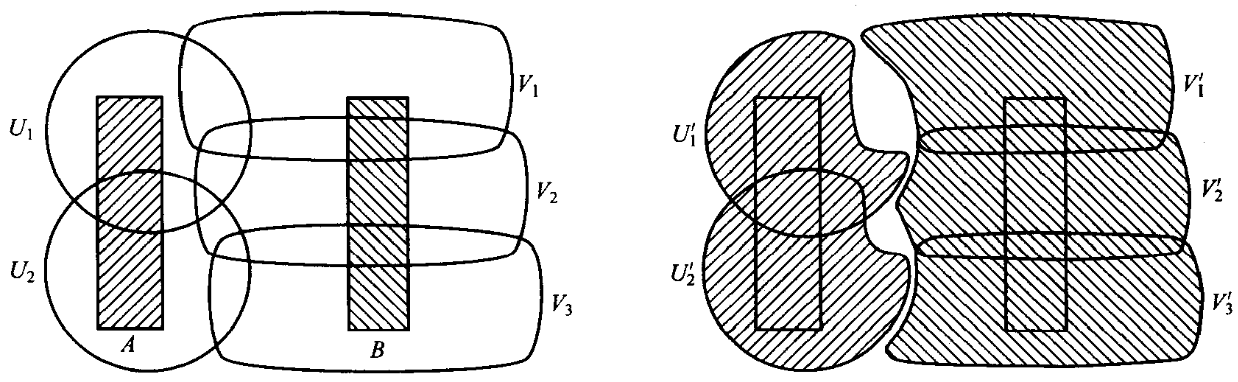
(在本定理中邻域指包含某点的开集)每一个有可数邻域基的正则空间是正规的.

**证明** 设 $X$ 是有可数基 $\mathcal{B}$ 的一个正则空间, $A$ 和 $B$ 是 $X$ 的两个无交闭子集. $A$ 中的每一个点 $x$ 都存在一个邻域 $U$ 与 $B$ 无交. 应用正则性,选取 $x$ 的一个邻域 $V$ ,使得 $\overline{V}$ 包含于 $U$ . 最后选取 $\mathcal{B}$ 中的一个包含着 $x$ 的元素,使得它包含于 $V$ . 通过对 $A$ 中每一个点 $x$ 选取基中的这样一个元素,我们就构造了 $A$ 的一个开覆盖,其中的每一个开集的闭包都与 $B$ 无交. 因 $A$ 的这个覆盖是可数的,故我们可以选用正整数作为其下标,将其记为 $\{U_n\}$ .

类似地,选取集合 $B$ 的一个可数开覆盖 $\{V_n\}$ ,使得每一个 $\overline{V}_n$ 都与 $A$ 无交. 于是集合 $U = \cup U_n$ 和 $V = \cup V_n$ 就是分别包含 $A$ 和 $B$ 的开集,但它们未必是无交的. 我们通过下面的方法来构造两个无交开集. 给定 $n$ ,定义

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i \quad 和 \quad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i.$$

注意,每一个集合 $U'_n$ 都是开集,因为它是一个开集 $U_n$ 和一个闭集 $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i$ 的差. 同样,每一个 $V'_n$ 也是开集. 又因为 $A$ 中的每一个点 $x$ 都属于某一个 $U_n$ ,却不属于任何一个集合 $\overline{V}_i$ ,所以族 $\{U'_n\}$ 覆盖 $A$ . 同理,族 $\{V'_n\}$ 覆盖 $B$ .




最后, 集合

$$U' = \bigcup_{n \in Z_+} U'_n \quad 和 \quad V' = \bigcup_{n \in Z_+} V'_n$$

是无交的. 因为若 $x \in U' \cap V'$ ,则对某一个 $j,k$ ,有 $x \in U'_j \cap V'_k$ . 不妨设 $j \leq k$ . 根据 $U'_j$ 的定义,有 $x \in U_j$ . 再根据 $j \leq k$ 以及 $V'_k$ 的定义,有 $x \notin \overline{U}_j$ . 对于 $j \geq k$ ,也有类似的矛盾产生. □

**定理 2.24**

(本定理中邻域指包含某点的开集)每一个可度量化的空间是正规的. ♡

**证明** 设 $X$ 是一个度量空间,以 $d$ 为度量, $A$ 和 $B$ 是 $X$ 中的两个无交闭集. 对于 $A$ 中的任意一个点 $a$ ,选取 $\varepsilon_a$ 使得球 $B(a,\varepsilon_a)$ 与 $B$ 无交. 类似地,对于 $B$ 中的任意一个点 $b$ ,取 $\varepsilon_b$ 使得球 $B(b,\varepsilon_b)$ 与 $A$ 无交. 定义

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a,\varepsilon_a/2) \quad 和 \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b,\varepsilon_b/2),$$

于是 $U$ 和 $V$ 就是分别包含集合 $A$ 和 $B$ 的开集. 我们断言: 它们是无交的. 因为若 $z \in U \cap V$ , 则存在 $a \in A$ 和 $b \in B$ ,使得

$$z \in B(a,\varepsilon_a/2) \cap B(b,\varepsilon_b/2)$$

根据三角不等式可见 $d(a,b) < (\varepsilon_a + \varepsilon_b)/2$ . 若 $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$ ,则 $d(a,b) < \varepsilon_b$ ,从而球 $B(b,\varepsilon_b)$ 包含点 $a$ . 若 $\varepsilon_a > \varepsilon_b$ ,则 $d(a,b) < \varepsilon_a$ ,从而球 $B(a,\varepsilon_a)$ 包含点 $b$ . 但这两种情形都是不可能的. □

## 2.7 Urysohn 引理

现在我们遇到了本书中的第一个深刻的定理, 这个定理通常称为“Urysohn 引理”. 它断言: 正规空间 $X$ 上存在着某种实值连续函数. 这个定理是证明许多重要定理的一个至关重要的工具. 其中的三个, 即 Urysohn 度量化定理, Tietze 扩张定理, 以及关于流形的一个嵌入定理, 我们将在本章以后几节中给出证明.

为什么说 Urysohn 引理是一个“深刻的”定理呢? 因为它的证明包含着以前的证明中所没有的那种新颖的思想. 或许我们可以用以下方式来解释清楚我们的意思: 如果将本书所给出的证明通篇删去, 然后再把这本书交给一个没有学过拓扑学但很聪明的学生, 大体上可以设想, 这个学生应该能够通读这本书并且由他自己来完成证明 (当然要花费很多时间和精力了, 并且不能期望他解决那些棘手的例子). 然而 Urysohn 引理则完全不同, 如果不给出详尽的提示, 要想掌握这个引理的证明势必要有相当超常的创造性.[4]

**定理 2.25 (Urysohn 引理 (Urysohn lemma))**

(本定理中邻域指包含某点的开集)设 $X$ 为正规空间, $A$ 和 $B$ 是 $X$ 中两个无交的闭集. $[a,b]$ 是实直线上的一个闭区间. 则存在一个连续映射

$$f : X \to [a,b]$$

使得对于 $A$ 中的每一个 $x$ ,有 $f(x) = a$ ,并且对于 $B$ 中每一个 $x$ ,有 $f(x) = b$ . ♡

[4]这段文字节选自Munkres的拓扑学.

证明 我们只要就区间 $[0,1]$ 的情形来讨论就够了. 一般情形可以由此推出. 证明的第一步是应用正规性构造 $X$ 的开集族 $U_p$ ,其中下标是有理数. 然后利用这些集合来确定连续函数 $f$ .

**Step 1:** 设 $P$ 是区间 $[0,1]$ 中的所有有理数构成的集合, 对于每一个 $p \in P$ ,我们定义 $X$ 中的一个开集 $U_p$ ,使得当 $p < q$ 时,有

$$\overline{U}_p \subset U_q$$

这样,包含关系便是这些集合 $U_p$ 间的一个全序,这个全序与下标在实直线上通常的序关系相同.

由于 $P$ 是可数的,我们可以通过归纳原则 (确切地说是应用归纳定义原理) 来定义这些集合 $U_p$ . 以某种方式将 $P$ 中元素排列成一个无穷序列; 为了方便起见,不妨设 1 和 0 就是序列最前面的两个元素.

现在定义集合 $U_p$ 如下: 首先,令 $U_1 = X - B$ . 其次,因为 $A$ 是包含在开集 $U_1$ 中的闭集, 根据 $X$ 的正规性,可以选取一个开集 $U_0$ 使得

$$A \subset U_0 \text{ 和 } \overline{U}_0 \subset U_1.$$

一般地,令 $P_n$ 表示有理数序列中前 $n$ 项所构成的集合,假设对于所有属于 $P_n$ 的有理数 $p$ ,开集 $U_p$ 都已经定义好了,并且满足条件

$$p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q \qquad (*)$$

设 $r$ 表示有理数序列中第 $n+1$ 项,我们来定义 $U_r$ .

考虑集合 $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$ . 它是区间 $[0,1]$ 的一个有限子集,并且它有一个由实直线上通常的序关系¡给出的全序. 在一个有限的全序集中, 每一个元素 (除了最小元和最大元外) 有一个直接前元和一个直接后元. 这个全序集 $P_{n+1}$ 的最小元是 0,最大元是 1, $r$ 既不是 0 也不是 1,所以 $r$ 在 $P_{n+1}$ 中有一个直接前元 $p$ 和一个直接后元 $q$ . 集合 $U_p$ 和 $U_q$ 已有定义,并且根据归纳假设,有 $\overline{U}_p \subset U_q$ . 应用 $X$ 的正规性,我们能找到 $X$ 的一个开集 $U_r$ ,使得

$$\overline{U}_p \subset U_r \text{ 和 } \overline{U}_r \subset U_q$$

我们断言: 对于 $P_{n+1}$ 中的每一对元素,(*) 成立. 若这两个元素都属于 $P_n$ ,则由归纳假定可见 $(*)$ 成立. 若它们中有一个是 $r$ ,另一个是 $P_n$ 中的点 $s$ ,那么在 $s \leq p$ 的情况下有

$$\overline{U}_s \subset \overline{U}_p \subset U_r$$

在 $s \geq q$ 的情况下有

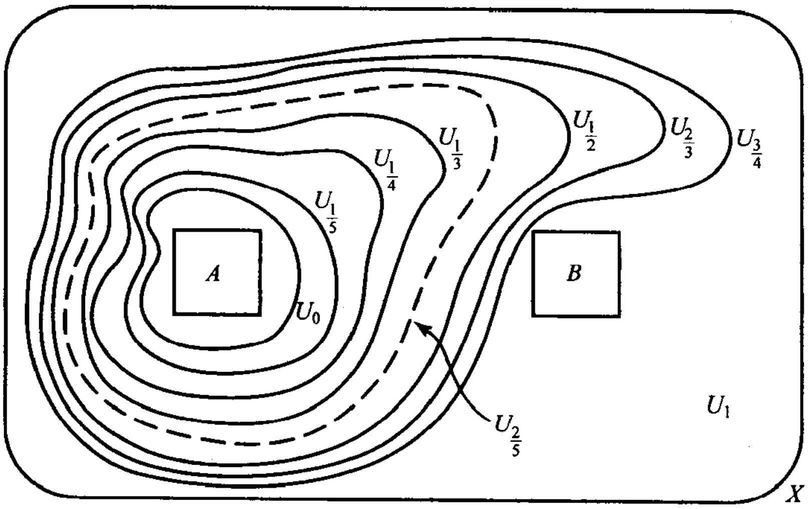
$$\overline{U}_r \subset U_q \subset U_s$$

于是,对于 $P_{n+1}$ 中每一对元素, $(*)$ 成立. 根据归纳原则,对于所有的 $p \in P, U_p$ 已有定义.

为更清楚地说明这个过程,假设我们先用标准方式将 $P$ 中的元素排成无穷序列:

$$P = \left\{1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \cdots \right\}$$

在定义 $U_0$ 和 $U_1$ 之后,我们定义 $U_{1/2}$ ,使得 $\overline{U}_0 \subset U_{1/2}$ ,且 $\overline{U}_{1/2} \subset U_1$ . 于是在 $U_0$ 与 $U_{1/2}$ 之间有相应的 $U_{1/3}$ . 在 $U_{1/2}$ 与 $U_1$ 之间有相应的 $U_{2/3}$ 等等. 下图里所描绘的就是第八步时的情况, 而第九步就是在 $U_{1/3}$ 和 $U_{1/2}$ 之间选取开集 $U_{2/5}$ . 如此等等.




**Step 2:**现在对于区间 $[0,1]$ 中每一个有理数 $p$,我们已定义了 $U_p$. 我们将上述定义扩充到 $\mathbb{R}$ 中所有的有理数 $p$ 上,方法如下:

$$U_p = \begin{cases} \varnothing & p < 0 \\ X & p > 1 \end{cases}$$

可以验证,对于任意一对有理数 $p$ 和 $q$,

$$p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q$$

仍然是正确的.

**Step 3:**给定 $X$ 的一个点 $x$,我们定义 $\mathbb{Q}(x)$ 为这样一些有理数 $p$ 的集合: $p$ 所对应的开集 $U_p$ 包含 $x$,即

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\}.$$

因为对于 $p < 0$,没有点 $x$ 属于 $U_p$,所以 $\mathbb{Q}(x)$ 不包含小于 0 的数. 又因为对于 $p > 1$,每一个 $x$ 都在 $U_p$ 中,所以 $\mathbb{Q}(x)$ 包含大于 1 的每一个数. 因此,$\mathbb{Q}(x)$ 是有下界的,并且它的下确界是区间 $[0,1]$ 中的点. 于是规定

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \{p \mid x \in U_p\}.$$

**Step 4:** 证明 $f$ 就是所求的函数. 若 $x \in A$,则对于每一个 $p \geq 0$,有 $x \in U_p$,于是 $\mathbb{Q}(x)$ 等于非负有理数集,所以 $f(x) = \inf \mathrm{Q}(x) = 0$. 类似地,若 $x \in B$,因没有 $p \leq 1$ 使得 $x \in U_p$,于是 $\mathbb{Q}(x)$ 由所有大于 1 的有理数组成. 因此 $f(x) = 1$.

所有这些都是容易的,唯一困难的部分是证明 $f$ 的连续性. 为此,我们先证明以下几个基本事实:

(1) $x \in \overline{U}_r \Rightarrow f(x) \leq r$.

(2) $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r$.

为了证明 (1),注意这样一个事实: 如果 $x \in \overline{U}_r$,则对任何 $s > r, x \in U_s$. 因此,$\mathbb{Q}(x)$ 包含

所有大于 $r$ 的有理数. 于是根据定义有

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \le r.$$

再来证明(2). 注意这样一个事实: 如果 $x \notin U_r$ ,则对于任何 $s < r, x$ 不在 $U_s$ 中. 因此, $\mathbb{Q}(x)$ 不包含小于 $r$ 的有理数,于是

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \ge r.$$

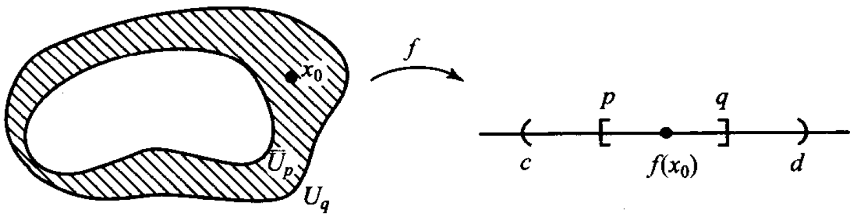
现在我们来证明 $f$ 的连续性. 给定 $X$ 的一个点 $x_0$ 和 $\mathbb{R}$ 中包含点 $f(x_0)$ 的开区间(c, d). 要找 $x_0$ 的一个邻域 $U$ ,使得 $f(U) \subset (c, d)$ . 取有理数 $p$ 和 $q$ ,使得

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

我们断言开集

$$U = U_q - \overline{U}_p$$

就是所要找的点 $x_0$ 的邻域. 如下图所示.




首先,注意 $x_0 \in U$ . 因为根据 (2) 及 $f(x_0) < q$ 可见 $x_0 \in U_q$ . 同时,再根据 (1) 及 $f(x_0) > p$ 可见 $x_0 \notin \overline{U}_p$ .

其次,我们证明 $f(U) \subset (c, d)$ . 令 $x \in U$ . 这时有 $x \in U_q \subset \overline{U}_q$ ,因此根据 (1) 可见 $f(x) \le q$ . 又由于 $x \notin \overline{U}_p$ ,所以 $x \notin U_p$ ,并且根据 (2) 有 $f(x) \ge p$ . 从而, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$ . □

**定义 2.32**

设 $A$ 和 $B$ 是拓扑空间 $X$ 的两个子集,如果存在一个连续函数 $f : X \to [0, 1]$ ,使得 $f(A) = \{0\}$ 及 $f(B) = \{1\}$ ,那么就称 $A$ 和 $B$ **能用一个连续函数分离 (can be separated by a continuous function)**. ♣

Urysohn 引理说明,如果 $X$ 中每一对无交的闭集能用无交的开集分离,那么它们也能用一个连续函数分离. 其逆是显然的. 因为若 $f : X \to [0, 1]$ 是所述的连续函数,则 $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ 和 $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ 就是分别包含 $A$ 和 $B$ 的无交的开集.

现在可能会提出这样的问题: Urysohn 引理的证明是否能推广到正则空间上. 既然在正则空间上能用无交的开集来分离点和闭集, 那么是否也能用连续函数来分离点和闭集呢?

乍看起来,似乎可以像 Urysohn 引理的证明一样,先取一点 $a$ 和一个不包含这一点的闭集 $B$ ,如前面那样,定义 $U_1 = X - B$ . 然后应用 $X$ 的正则性,选取包含点 $a$ 的一个开集 $U_0$ , 使得它的闭包含在 $U_1$ 中. 但在紧接着下一步的证明中,就遇到了困难. 设 $p$ 是序列中在 0 和 1 后面的一

个有理数,要想找到一个开集 $U_p$ ,使得 $\overline{U}_0 \subset U_p$ ,并且 $\overline{U}_p \subset U_1$ . 对于这一点,光靠正则性就不够了.

事实上, 能够用一个连续函数来分离点和闭集, 这比要求用无交的开集来分离它们的条件更强. 我们把这一条件当作一个新的分离公理:

**定义 2.33**

空间 $X$ 称为完全正则的 **(completely regular)**,如果每一个单点集是闭集,并且对于 $X$ 中的每一个点 $x_0$ 和不包含 $x_0$ 的任何一个闭集 $A$ ,存在一个连续函数 $f: X \to [0,1]$ ,使得 $f(x_0) = 1$ 和 $f(A) = \{0\}$ . ♣

根据 Urysohn 引理, 一个正规空间一定是完全正则的, 并且一个完全正则的空间一定是正则的. 这是因为,给定 $f$ ,集合 $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$ 和 $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$ 是分别包含 $A$ 和点 $x_0$ 的无交开集. 于是, 完全正则性就介于分离公理中的正则性和正规性之间. 注意, 定义中我们可以让函数 $f$ 将 $x_0$ 映射到 0,将 $A$ 映射到 $\{1\}$ . 因为函数 $g(x) = 1 - f(x)$ 就满足这一条件. 但我们的定义要方便些.

在拓扑学的早年发展中,分离公理曾根据其性质由弱到强被排序为 $T_1$ 、 $T_2$ (Hausdorff)、$T_3$ (正则性)、 $T_4$ (正规性) 和 $T_5$ (完全正规性). 字母 “T” 就是德语 “Trennungsaxiom” ,意思是 “分离公理” . 后来,当引入了完全正则的概念时,一些学者建议将其称为 “ $T_{3\frac{1}{2}}$ 公理” ,因为它介于正则性和正规性之间. 事实上, 在一些文献中就用到这一术语[5].

与正规性不同, 这个新的分离公理对于子空间和积空间而言有良好的表现.

**定理 2.26**

(免责条款)完全正则空间的子空间是完全正则的. 完全正则空间的积空间是完全正则的. ♡

**证明** 设 $X$ 是完全正则的, $Y$ 是 $X$ 的一个子空间. 令 $x_0$ 是 $Y$ 的一个点, $A$ 是 $Y$ 中的一个不包含点 $x_0$ 的闭集. 那么 $A = \overline{A} \cap Y$ ,其中 $\overline{A}$ 表示 $A$ 在 $X$ 中的闭包. 因此, $x_0 \notin \overline{A}$ . 根据 $X$ 的完全正则性,我们可以选取连续函数 $f: X \to [0,1]$ ,使得 $f(x_0) = 1$ 和 $f\left(\overline{A}\right) = \{0\}$ . 于是 $f$ 在 $Y$ 上的限制就是所要求的连续函数.

设 $X = \prod X_a$ 是完全正则空间的一个积空间. 令 $\mathbf{b} = (b_a)$ 是 $X$ 的一个点, $A$ 是 $X$ 中不包含点 $\mathbf{b}$ 的闭集. 选取一个基元素 $\prod U_\alpha$ ,使得它包含点 $\mathbf{b}$ 并且与 $A$ 无交. 于是除了有限多个 $\alpha$ 外,有 $U_a = X_a$ . 这有限多个 $\alpha$ 不妨设为 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ . 给定 $i = 1, \cdots, n$ ,选取连续函数

$$f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1],$$

使得 $f_i(b_{a_i}) = 1$ 及 $f_i(X - U_{a_i}) = \{0\}$ . 令 $\phi_i(x) = f_i(\pi_{a_i}(x))$ ,则 $\phi_i$ 连续地将 $X$ 映射到 $\mathbb{R}$ ,并且在 $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ 之外取值为零. 于是积

$$f(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \cdot \phi_2(\mathbf{x}) \cdot \cdots \cdot \phi_n(\mathbf{x})$$

就是所求的 $X$ 上的连续函数,因为在 $\mathbf{b}$ 点处取值为 1,在 $\prod U_a$ 外取值为零. □

[5]这些定义与我们前面提到的定义有所区别，请注意这些区别