第 2 章 拓扑空间与连续性

2.1 开集与闭集

回忆我们上一章中给拓扑空间下的定义：

定义 2.1 (拓扑结构)

设 $\mathcal{N}$ 是集合 X 上的基准开邻域结构. 如果 X 的子集 U 是每一个元素 $x \in U$ 的邻域,则称 U 为一个 **开集** (open set).

称 X 上所有开集构成的子集族 τ 为一个由 $\mathcal{N}$ **生成** (generate) 的 **拓扑结构** (topological structure),简称 **拓扑** (topology).

X 和 τ 合在一起,称为一个 **拓扑空间** (topological space),记做 (X, τ) .

定义 2.2 (开集)

设 X 为拓扑空间，如果 X 的子集 O 是自己每个点的邻域，则称 O 为**开集**.

命题 2.1

一个集合是开集当且仅当它是若干个基准开邻域的并集.

证明 如果 U 是开集，则任取 $x \in U$，存在一个 x 的基准开邻域 $B_x \subset U$，因此 U 是所有含于 U 的基准开邻域的并集.

反过来，如果 U 是若干基准开邻域的并集，则任取 $x \in U$，存在一个基准开邻域 B，使得 $x \in B \subset U$, 由基准开邻域的公理我们可以知道存在 x 的基准开邻域 $A_x \subset B \subset U$，从而 U 是开集. □

则按照公理："若 N 是 x 的邻域, U 为 X 的子集,它包含 N ,则 U 是 x 的邻域" 与 "x 的任何两个邻域的交集为 x 的一个邻域" 我们容易得到下面的结论：

定理 2.1

(1) 任意一组开集的并是开集.

(2) 任意有限多个开集的交是开集.

笔记 整个空间 X 与空集 $\emptyset$ 是开集；一点 x 的邻域 N 的内部是一个开集(由公理 "若 N 是 x 的邻域,并且若 N° 表示集合 $\{z \in N \mid N$ 是 z 的邻域$\}$,则 N° 是 x 的邻域" 保证).

但是上面的讨论是从基准开邻域结构出发，在实际应用中可能并不是非常方便，所以我们尝试从另一个方向着手，从开集的概念出发，对于每个点构造出一组邻域出来.

于是假定对于集合 X，给定了它的一组子集(称为开集)，使得任意多个开集的并集仍然是开集，任意有限多个开集的交是开集，整个 X 与空集也是开集. 对于 X 的点 x，我们称 X 的子集 N 为 x 的邻域，如果可以找到开集 O 使得 $x \in O \subset N$.

实际上，这样一个邻域的定义使 X 成为一个拓扑空间，容易验证满足四条公理.

此时我们会提出疑问：从一组所谓的开集出发，构造出一个拓扑空间 X，然后再来看这个空间内的开集，这两个“开” 的概念是否一致呢？回答是肯定的：因为若 O 是原来的开集，按照邻域的概念，O 是它自己每点的邻域，因此它是拓扑空间 X 内的一个开集. 反之，若 U 是拓扑空间 X 的一个开集，它是它自己每点的邻域，因此对于 $x \in U$，可以找到原来的 O_x 使得 $x \in O_x \subset U$，于是 $U = \bigcup\limits_{x \in U} O_x$ 是原来意义下的开集.

通过上面的讨论，我们有充足的根据将拓扑空间的定义以开集为出发点来重述.

定义 2.3 (拓扑与拓扑空间)

集合 X 上的一个**拓扑**是由 X 的子集所构成的一个非空组(记为 τ)，这个非空组的成员叫做开集，它们满足以下要求：

(1) 任意多个开集的并是开集;

(2) 任意有限多个开集的交是开集;

(3) X 与空集是开集.

集合配备了它上面的一个拓扑以后叫做**拓扑空间**，记为 (X, τ). ♣

我们在后面的叙述中都将采用这个定义[1].

注 每当提起 $\mathbb{E}^n$ 时，我们都认为当对任意 $x \in U$，$\exists \varepsilon > 0$ 使得 $\{y \colon |x - y| \leq \varepsilon\} \subset U$，则集合 U 是开集.

定义 2.4 (闭集)

设 F 是拓扑空间 (X, τ) 的一个子集，如果 F 的补集 $F^c = X \backslash F \in \tau$，即补集为开集，则称 F 是一个闭集. ♣

利用 De Morgan 律将开集公理转换为闭集公理是平凡的[2]：

C1 $\emptyset$ 和 X 都是闭集;

C2 如果 U_1 和 U_2 都是闭集，则 $U_1 \cup U_2$ 也是闭集;

C3 如果对任意 $\lambda \in \Lambda$，U_λ 都是闭集，则 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 也是闭集.

接下来介绍几个常见的拓扑

- **平凡拓扑**即诱导了只要在 X 上无论怎么样都算接近 x 的一个拓扑.
- 若 X 为拓扑空间，Y 为 X 的子集，Y 上的**子空间拓扑**，或者称之为**诱导拓扑**是以 X 的开集与 Y 的交集作为作为这个拓扑空间的开集而得到的.

  每当我们说起拓扑空间 X 的一个子空间 Y 时，总是理解为 Y 是 X 的子集，并配备了子空间拓扑.

[1] 1935 年，Alexandrov 和 Hopf 在他们撰写的《拓扑学(*I*)》一书中，将开集公理作为拓扑空间的定义，相较于 Hausdorff 的定义更加简洁且易于使用，因而得到了广泛的采纳，成为拓扑空间的标准定义.

[2] 在某些特定问题里，闭集公理更适用.

- 如果只令 $\{x\}$ 作为 x 的基准开邻域，换句话说，即 X 的所有子集都是开集，此时我们称之为 X 上的**离散拓扑**，有着“只有等于 x 才算和 x 充分接近”.
- 设 X 含有无穷多个元素，定义 $\tau_f=\{A\subseteq X|A=\emptyset$ 或 A^c 有限$\}$，则 τ 是个拓扑结构，称为 X 上的**余有限拓扑**.
- 设 X 含有不可数个元素，仿照上面的定义我们可以定义 X 上的**余可数拓扑**.
- 在度量空间上，我们可以利用度量生成**度量拓扑**.
- **Zariski 拓扑**：设 $X=\mathbb{C}^n$，$R=\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_n]$，即具有复系数的 n 元多项式环，定义

$$\mathscr{T}_{\text{Zariski}}=\{U\subset\mathbb{C}^n|\exists f_1,\cdots,f_m\in R\text{ 使得 }U^c\text{ 为 }f_1,\cdots,f_m\text{ 的公共零点集}\}$$

  可以说明这是一个拓扑(利用闭集公理更方便一些). 更一般的，可以在任何交换环上定义 Zariski 拓扑，该拓扑主要用于代数几何的研究.
- **Sorgenfrey 拓扑**：设 $X=\mathbb{R}$，定义

$$\mathscr{T}_{\text{Sorgenfrey}}=\{U\subset\mathbb{R}|\forall x\in U,\exists\varepsilon>0,\text{s.t.},[x,x+\varepsilon)\subset U\}$$

  可以看做一条具有方向歧性的直线.

定义 2.5 (拓扑的比较)
设 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑[a]，我们称 $\mathscr{T}_1$ **弱于** $\mathscr{T}_2$，或等价的，称 $\mathscr{T}_2$ **强于**[b] $\mathscr{T}_1$，如果有 $\mathscr{T}_1\subseteq\mathscr{T}_2$.

[a]并不是任何两个拓扑都可以比较.

[b]也有用**粗糙于**与**精细于**来替代弱于与强于的.

♣

定理 2.2 (拓扑的交仍是拓扑)
给定 X 上的任意一族拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$，则 $\bigcap\limits_\alpha\mathscr{T}_\alpha$ 是 X 上的一个拓扑.

♡

拓扑空间中的一些基本概念　接下来要介绍的概念都会从开集出发去定义，然后再利用基准开邻域说明如何去计算.

定义 2.6 (从开集出发定义的邻域)
一个子集 A 是 x 的邻域当且仅当存在开集 U，使得 $x\in U\subseteq A$.

♣

定义 2.7 (内点与内部)
如果 A 是 x 的邻域，则称 x 为 A 的**内点(interior point)**，全体内点构成的集合称为 A 的**内部(interior)**，记为 A°.

♣

定义 2.8 (聚点或极限点(Point of accumulation))
如果 x 的每个邻域中都含有 $A\backslash\{x\}$ 中的点，则称 x 为 A 的**极限点或聚点**.

♣

定义 2.9 (导集(derived set)和闭包(closure))

全体聚点构成的集合 A' 称为 A 的**导集**，$\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**.

定理 2.3

一个集合为闭集，当且仅当它包含了自己所有的极限点.

定理 2.4

A 的闭包是最小的包含 A 的闭集，换句话说，是包含 A 的一切闭集之交.

定理 2.5

一个集合为闭集，当且仅当它等于自己的闭包.

Cantor 三分集 在 $\mathbb{E}^1$ 中，任意开区间都是开集，因此 $[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 是开集，从而 $[a,b]$ 是闭集，然而闭集可以比这样简单的构造复杂的多，下面我们取 $A_0 = [0,1]$，然后让 A_k 都是有限段互不相交的闭区间的并，并且是从 A_{k-1} 的每段闭区间上去掉正中间的 $\frac{1}{3}$ 段开区间得到的，那么交集 $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ 也是一个闭集，称为 Cantor 三分集(Cantor ternary set).

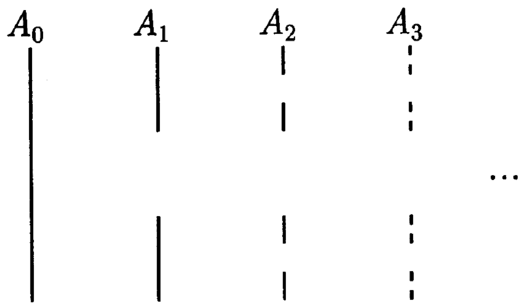

图 2.1: Cantor 集的构造

注意，A 中的点并不像看上去那么稀疏，事实上 A_n 的每一段闭区间上都含有 A 中无穷多个点.

命题 2.2

设 A 是 Cantor 三分集，则

(1) $[0,1] \backslash A$ 是 $[0,1]$ 的稠密子集.

(2) A 中的每个点都是 A 的聚点.

命题 2.3

A 为全空间 X 的子集，则 $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$.

定义 2.10 (稠密(dense)与可分(separable))

如果 $\overline{A}=X$，则称 A 在 X 中**稠密**，如果 X 由只含可数多个元素的稠密子集，则称 X **可分**.

笔记 如有理数集 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{E}^1$ 的可数子集，且 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{E}^1$，故 $\mathbb{E}^1$ 可分，同理可知 $\mathbb{E}^n$ 可分.

笔记 用 τ_f 表示 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑，则 $(\mathbb{R},\tau_f)$ 可分，$\mathbb{N}$ 就是它的可数稠密子集(Why?).

笔记 用 τ_c 表示 $\mathbb{R}$ 上的余可数拓扑，则 $(\mathbb{R},\tau_c)$ 不可分(Why?).

定义 2.11 (边界(boundary))

定义 A 的边界 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}$，即 A 的闭包与 $X-A$ 的闭包之交.

命题 2.4

我们可以有等价的定义 $\partial A=\overline{A}\backslash A^{\circ}$.

定义 2.12 (拓扑基)

设集合 X 上有一个拓扑，β 为这个拓扑的一组开集，使得每个开集可以写成 β 中成员的并集，则 β 叫做这个拓扑的一组**拓扑基**，β 的成员叫做基础开集.

笔记 注意到拓扑基和我们之前讲的基准开邻域是一个等价的概念.

定理 2.6

设 β 是由 X 的子集构成的一个非空组，若 β 内有限多个成员的交仍属于 β，并且 $\bigcup\beta=X$，则 β 是 X 上某个拓扑的拓扑基.

证明 取 β 成员中一切可能的并集作为开集结构，验证它们满足拓扑定义即可. □

注 在拓扑空间上也可以定义子列的收敛，若感兴趣可以参考拓扑空间里的收敛与连续性(王作勤)

2.2 连续映射

我们用开集的概念来称述连续性，设 X 与 Y 为拓扑空间.

定义 2.13 (连续映射(continuous map))

如果映射 $f\colon X\to Y$ 满足：任取 $f(x_0)$ 的邻域 V，有 $f^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域，则称 f 在 x_0 处**连续**. 在定义域上处处连续的映射称之为**连续映射**.

注 定义要求的条件是“邻域的原像是邻域”，而不是“邻域的像是邻域”，思考一下后者不合理的地方.

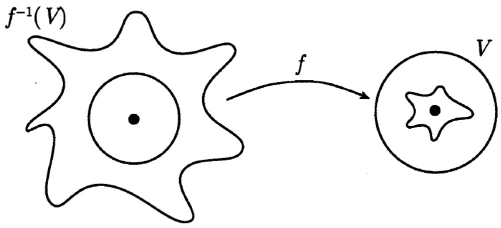

图 2.2: 定义连续性

定理 2.7

从 X 到 Y 的映射是连续的，当且仅当 Y 的每个开集在 X 中的完全原像是 X 的开集.

证明 $\Longrightarrow$ 是显然的.

$\Longleftarrow$，若 Y 的每个开集在 X 中的完全原像是开集，则任取 $f(x_0)\in Y$，取包含 $f(x_0)$ 的邻域 V，知道存在包含 $f(x_0)$ 的开集 $V_0\subseteq V$ 的完全原像 U_0 是开集，又显然 $x_0\in U$，所以我们知道 $U_0=f^{-1}(V_0)\subseteq f^{-1}(V)$，所以 V 的完全原像是 x_0 的邻域，故连续映射得证. □

定理 2.8

若 $f:X\to Y$ 在 x 点连续，$g:Y\to Z$ 在 $f(x)$ 点连续，则 $g\circ f:X\to Z$ 在 x 点连续.

证明 任取 $g\circ f(x)=g(f(x))$ 的邻域 V，则 $g^{-1}(V)$ 是 $f(x)$ 的邻域，从而 $(g\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$ 是 x 的邻域. □

注 这里利用开集来说明也是容易的，请自己尝试.

定理 2.9

设 $f:X\to Y$ 连续，并且设 $A\subseteq X$ 具有子空间拓扑，则限制映射 $f|_A:A\to Y$ 连续.

证明 设 O 为 Y 的开集，并注意

$$(f|_A)^{-1}(O)=A\cap f^{-1}(O)$$

由于 f 连续，故 $f^{-1}(O)$ 是 X 的开集，因此 $A\cap f^{-1}(O)$ 在子空间 A 内为开集，从而我们知道 $f|_A$ 连续. □

定义 2.14 (恒等映射(identity map)与含入映射(inclusion map))

从 X 到 X 把每点映射到自己的映射叫做 X 的**恒等映射**，记作 1_X，若将 1_X 限制在 X 的子空间 A 上，则得到**含入映射**:

$$i:A\to X$$

命题 2.5 (子空间的嵌入映射)

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，赋予 $A\subset X$ 子空间拓扑，则含入映射：$\iota:A\hookrightarrow X$ 是连续的，且子空间拓扑是 A 上最弱的使得 ι 连续的拓扑.

证明 映射 ι 的连续性由子空间拓扑显然得到.

假设 $\mathscr{T}$ 是 A 上的一个拓扑，使得 $\iota\colon (A,\mathscr{T}) \to (X,\mathscr{T}_X)$ 为连续映射，则对于 X 中的任意开集 $U \in \mathscr{T}_X$，其原像 $\iota^{-1}(U) = U \cap A$ 是 $\mathscr{T}$ 中的开集，于是我们知道 A 继承 X 的子空间拓扑包含于 $\mathscr{T}$ 中，从而 $\mathscr{T}$ 强于子空间拓扑. □

定理 2.10

下面各条性质是等价的：

(a) $f: X \to Y$ 是连续映射.

(b) 若 β 是 Y 的一组拓扑基，β 内每个成员的原像为 X 的开集.

(c) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$，对于 X 的任何子集 A.

(d) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$，对 Y 的任何子集 B.

(e) Y 内任何闭集的原像为 X 的闭集.

♡

证明 我们按照 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$ 的顺序验证：

$(a) \Rightarrow (b)$ 显然.

$(b) \Rightarrow (c)$：显然我们有 $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$，所以我们只需要证明若 $x \in \overline{A} - A$ 且 $f(x) \notin f(A)$，则 $f(x)$ 为 $f(A)$ 的极限点. 取 N 为 $f(x)$ 在 Y 中的邻域，我们可以找到 β 内的开集 B 使得 $f(x) \in B \subseteq N$，则我们知道 $f^{-1}(B)$ 为 X 的开集，从而为 X 的一个邻域，而 x 为 A 的极限点，则 $f^{-1}(B)$ 中必含有 A 中的点，因此 B 含有 $f(A)$ 的点，从而 N 含有 $f(A)$ 的点，得证.

$(c) \Rightarrow (d)$：取 $A = f^{-1}(B) \in X$，则知道 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B}$，所以我们有

$$\overline{f^{-1}(B)} = \overline{A} = f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

$(d) \Rightarrow (e)$：注意若 B 是 Y 中的闭集，则 $\overline{B} = B$，从而

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$$

所以 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集.

$(e) \Rightarrow (a)$：注意到一个有趣的事实：

$$f^{-1}(U)^c = f^{-1}(U^c)$$

从而取 U 为开集，$f^{-1}(U)$ 为开集当且仅当 $f^{-1}(U^c)$ 为闭集，而这个由假设已经得到，所以得证开集的原像是开集，故由定理 2.7 我们知道 f 为连续映射. □

注 在连续映射下，开集的原像是开集，闭集的原像都是闭集，但一般来说，很容易找到例子表明：

- 开集在连续映射下的像不一定是开集;
- 闭集在连续映射下的像不一定是闭集.

定义 2.15 (开映射与闭映射)

对于拓扑空间之间的映射 $f\colon (X,\mathscr{T}_X) \to (Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果 X 中的任意开集 U 的像 $f(U)$ 在 Y 中是开集，则称 f 为**开映射**.

(2) 如果 X 中的任意闭集 F 的像 $f(F)$ 在 Y 中是闭集，则称 f 为**闭映射**.

♣

笔记 虽然开闭映射更加自然，但是他们在拓扑中没有我们所定义的连续映射方便，原因在

于：相比于“求映射的像”，“取映射的原像”这一操作可以更好地保持集合的交并补运算，具体来说，我们总是有

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha} B_\alpha)=\bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha),\quad f^{-1}(\bigcap_{\alpha} B_\alpha)=\bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha),\quad f^{-1}(Y\backslash B)=X\backslash f^{-1}(B)$$

但是一般来说，我们只有

$$f(\bigcup_{\alpha} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha} f(A_\alpha),\quad f(\bigcap_{\alpha} A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha} f(A_\alpha),\quad f(X\backslash A)\supset f(X)\backslash f(A)$$

但是，开闭映射确实出现在其他一些数学分支之中，并且起到了非常重要的作用：

- 泛函分析中最重要的定理之一，开映射定理，断言 Banach 空间之间的连续满射线性算子都是开映射.
- 在复分析中也有一个开映射定理，指出在复平面的连通开子集上定义的任何非常值全纯函数都是开映射.
- 拓扑学中的 Brouwer 区域不变性定理：如果 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，那么任何单射连续映射 $f\colon U\to\mathbb{R}^n$ 是一个开映射.

定义 2.16 (同胚(homeomorphism))

如果 $h:X\to Y$ 是一个双射，并且 h 和 h^{-1} 都连续，则称 h 为**同胚**，并称 X 与 Y **同胚(homeomorphic)** 或 **拓扑等价(topological equivalent)**，记为 $X\cong Y$. ♣

笔记 同胚的空间本质上具有一样的连续性，但是需要注意，严格的数学定义和“橡皮泥变形”的通俗说法还是有区别，它并不是一个缓慢地，渐渐变形的过程，而是一个一步到位的映射.

渐渐变形的过程对应拓扑学的另外一个概念(同时也是代数拓扑的核心概念之一)：同伦.

定理 2.11

同胚是拓扑空间之间的等价关系. ♡

证明 我们有：

- $X\cong X$：因为 $\mathrm{Id}\colon(X,\mathscr{T}_X)\to(X,\mathscr{T}_X)$ 是同胚.
- $X\cong Y\Rightarrow Y\cong X$：如果 $f\colon X\to Y$ 是同胚，那么 $f^{-1}\colon Y\to X$ 是同胚.
- $X\cong Y, Y\cong Z\Rightarrow X\cong Z$：如果 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to Z$ 是同胚，那么 $g\circ f\colon X\to Z$ 是双射，且我们知道 $g\circ f$ 与 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 都连续，从而同胚.

□

命题 2.6 (同胚与开/闭映射)

设 $f\colon X\to Y$ 是一个连续双射，则 f 是同胚当且仅当 f 是开映射或者闭映射. ♠

证明 我们注意到 f^{-1} 是连续的当且仅当 f 是开映射或者闭映射. □

S^n 除去任意一点后同胚于 $\mathbb{E}^n$ 设 S^n 为 n 维球面，由 $\mathbb{E}^{n+1}$ 中到原点距离为 1 的点构成，并采取子空间拓扑. 我们下断言：从 S^n 上扣掉一个单独的点所得到的空间同胚于 $\mathbb{E}^n$. 至于除去

哪一点是无所谓的，因为可以通过旋转归结于同样的情况，为了下面的叙述方便，我们不妨设除去的点为 $p=(0,0,\cdots,0,1)$，而 $\mathbb{E}^{n+1}$ 中最后一个坐标为 0 的所有点构成的子集，在子空间拓扑之上显然同胚于 $\mathbb{E}^n$. 我们按照下面方式定义**球极平面投影**

$$h\colon S^n-\{p\}\to\mathbb{E}^n$$

若 $x\in S^n-\{p\}$，则过 x 与 p 的直线与 $\mathbb{E}^n$ 的交点定义为 $h(x)$，显然 h 是双射，且容易验证 h 与 h^{-1} 的连续性，因此 h 是同胚.

定义 2.17 (圆盘)

圆盘是指同胚于 $\mathbb{E}^2$ 内单位闭圆盘 D 的任何拓扑空间. ♣

定义 2.18 (圆盘的边界)

若 A 为圆盘，$h\colon A\to D$ 为同胚，则 $h^{-1}(C)$ 称为 A 的边界(其中 C 为单位圆周). ♣

引理 2.1

圆盘边界到自身的任何同胚可以扩张成圆盘自身的同胚. ♡

证明 设 A 为圆盘，C 为单位圆周，并选定同胚 $h:A\to D$，对于给定的同胚 $g:\partial A\to\partial A$，不难按照下述方式将 $hgh^{-1}:C\to C$ 扩张为整个 D 的自同胚：

(1) 将 0 映为 0；

(2) 对于 $x\in D-\{0\}$，将 x 映为点 $\|x\|\,hgh^{-1}(\frac{x}{\|x\|})$.

即作辐式的扩张，把这个扩张叫做 f，则 $h^{-1}fh$ 是同胚 g 在整个 A 上的扩张. □

引理 2.2

设 A 与 B 为沿着边界弧而相交的两个圆盘，则 $A\cup B$ 为圆盘. ♡

证明 设 γ 为弧 $A\cap B$，用 α 与 β 来记 A 与 B 边界上除去 γ 后分别余下的部分.

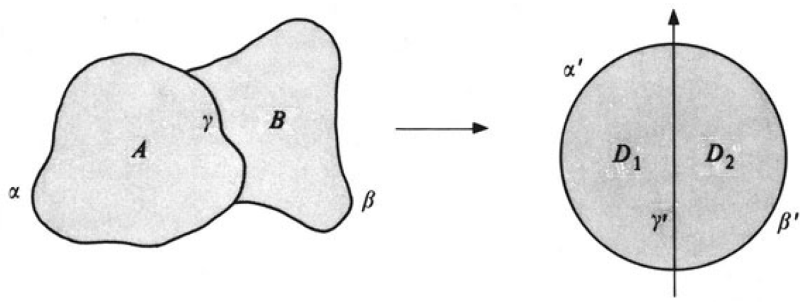

图 2.3: 圆盘的并

利用上面的引理，按下述方式构造一个一个从 $A\cup B$ 到 D 的同胚. 平面上的 y 轴将 D 分割为两个圆盘 D_1 与 D_2 的并集.

按照上图右边将 D_1,D_2 的边界的三个弧记为 α',β',γ'.

其中 α 和 α' 都同胚于闭区间 $[0,1]$，因此，有从 α 到 α' 的同胚. 先将这个同胚扩张到 γ 上，给出从 $\alpha\cup\gamma$ 到 $\alpha'\cup\gamma'$ 的一个同胚(这非常容易做到).