

Chapter 1

陈氏定理

1.1 2024 年 9 月 26 日

1.1.1 陈氏定理证明的第一步

我们给出以下约定：

- 令 \mathcal{C} 为一列正整数(可重复).
- 令 $P_N(z) = \prod_{\substack{p < z \\ p \nmid N}} p$, 其中 p 为素数.
- q 满足 $(q, NP_N(z)) = 1$.
- $S_N(\mathcal{C}, q, z) = \{n: n \in \mathcal{C}, q \mid n, (n, P_N(z)) = 1\}$.

我们从一个例子去理解：

Example 1.1.1. 令 $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, n\}$, 其中 $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$, 再令 $N = 1, q = 1, z = \sqrt{n}$.

Solution. 我们来研究一下此时的 $S_N(\mathcal{C}, q, z)$: 此时 $P_1\sqrt{n} = \prod_{p < \sqrt{n}, p \nmid 1} p = \prod_{p < \sqrt{n}} p$, 则

$$S_1(\{1, 2, \dots, n\}, 1, \sqrt{n}) = \left\{ m \in \mathbb{Z}: 1 \leq m \leq n, (m, \prod_{p < \sqrt{n}} p) = 1 \right\}$$

也就是 m 的素因子都大于 \sqrt{n} , 再考虑到 $m < n$, 从而我们知道 m 为素数, 所以此刻的集合即

$$S_1(\{1, 2, \dots, n\}, 1, \sqrt{n}) = \{m: \sqrt{n} < m \leq n, m \text{ 为素数}\}$$

Eratosthenis 筛：找到 $1 \sim \sqrt{n}$ 中所有的素数，并在 $1 \sim n$ 中划去他们的倍数，剩下的就是 $1 \sim n$ 中所有的素数.

□

回到定理的第一步：令 N 为大偶数， $\mathcal{A} = \{N - p : p \nmid N\}$ ，再令 $q = 1$ ， $z = N^{\frac{1}{10}}$ ，则

$$P_q(z) = P_1(N^{\frac{1}{10}}) = \prod_{p < N^{\frac{1}{10}}, p \nmid N} p$$

有

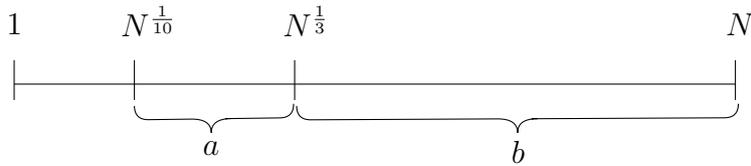
$$S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}}) = \left\{ m \in \mathcal{A} : m = N - p, (m, P_1(N^{\frac{1}{10}})) = 1 \right\}$$

而 $(N - p', \prod_{p < N^{\frac{1}{10}}, p \nmid N} p) = 1$ 说明 $N - p'$ 的素因子大于等于 $N^{\frac{1}{10}}$ 或者整除 N ，但是我们考虑到

- 若存在 $N - p'$ 的素因子 $p'' \mid N$ ，有 $p'' \mid N - p'$ ，则 $p'' \mid p'$ ，告诉我们 $p' = p'' \mid N$ ，矛盾。
- 若存在 $N - p'$ 的素因子 $p'' = N^{\frac{1}{10}} \mid N - p'$ ，则有 $p'' \mid p'$ ，告诉我们 $p' = p'' \mid N$ ，矛盾。

所以我们知道 $N - p'$ 的素因子都大于 $N^{\frac{1}{10}}$ ，那么我们知道：这样的 $N - p$ 至多有 9 个素因子。这是因为若有超过 9 个素因子，那么由于每一个素因子都大于 $N^{\frac{1}{10}}$ ，则有 $N - p > (N^{\frac{1}{10}})^{10} = n$ ，从而导致矛盾。

我们下面从 $S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}})$ 中筛掉有 3 ~ 9 个素因子的数¹。



设 $S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}})$ 中的某个 $N - p$ 在 $(N^{\frac{1}{10}}, N^{\frac{1}{3}})$ 中有 a 个素因子，在 $(N^{\frac{1}{3}}, N)$ 中有 b 个素因子，我们讨论 (a, b) 可能的取值：

显然我们有 $b < 3$ ，否则我们知道 $N - p > N$ 矛盾，故 $b = 0, 1, 2$ ，我们按照 b 的取值分类：

- $b = 0$: $(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (7, 0), (8, 0), (9, 0)$
- $b = 1$: $(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$
- $b = 2$: $(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)$

我们要排除 $a + b \geq 3$ 的数，则

$$R_{1,2}(N) > S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}}) - CN^{0.91} - \frac{1}{2} \sum_{N^{\frac{1}{10}} < p < N^{\frac{1}{3}}} S_N(\mathcal{A}, p, N^{\frac{1}{10}}) - \frac{1}{2} S_N(\mathcal{B}, 1, N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B})$$

将 $a + b \geq 3$ 的所有情况分为两部分，第一部分为 $a \geq 2$ 的所有情况，第二部分为 $(a, b) = (1, 2)$ ，下面我们依次解释这些项：

- 我们在这里将 $S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}})$ 看成是 $|S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}})|$ 。

¹注：对于陈氏定理，这里浪费了一些：只数了 $N - p$ 的素因子均大于 $N^{\frac{1}{10}}$ 的数这一部分。

- $CN^{0.91}$ 为有重复素因子的 $S_N(\mathcal{A}, 1, N^{\frac{1}{10}})$ 中的数的个数的上界(由素数定理), 从而剩下的 $N-p$ 中无平方因子(square-free).

- 由

$$S_N(\mathcal{A}, p, N^{\frac{1}{10}}) = \left\{ N - p' : p' \nmid N, p \mid N - p', N - p' \text{ 的素因子严格大于 } N^{\frac{1}{10}} \right\}$$

这告诉我们若 $N - p'$ 无平方因子, 且在第一部分中, 即 $a \geq 2$, 则 $N - p'$ 至少有两个素因子落在 $(N^{\frac{1}{10}}, N^{\frac{1}{3}})$ 上, 则

$$N - p' = p_1 p_2 \cdots p_s$$

其中 $N^{\frac{1}{10}} < p_1, p_2 < N^{\frac{1}{3}}$, 这告诉我们 $N - p'$ 落在 $S_N(\mathcal{A}, p_1, N^{\frac{1}{10}})$ 与 $S_N(\mathcal{A}, p_2, N^{\frac{1}{10}})$ 中, 故当 p 走遍 $N^{\frac{1}{10}} \sim N^{\frac{1}{3}}$ 时, 第一部分中的每个数至少被算了两遍², 所以我们减去

$$\frac{1}{2} \sum_{N^{\frac{1}{10}} < p < N^{\frac{1}{3}}} S_N(\mathcal{A}, p, N^{\frac{1}{10}})$$

也就至少把第一部分中的数全部筛去.

对于第二部分中的数 $N - p = p_1 p_2 p_3$, 其中 $N^{\frac{1}{10}} < p_1 < N^{\frac{1}{3}}$, 告诉我们 $N - p \in S_N(\mathcal{A}, p_1, N^{\frac{1}{10}})$, 也就是说在减去第一部分的时候, 第二部分也被减去了 $\frac{1}{2}$.

- 我们令

$$\mathcal{B} = \left\{ N - p_1 p_2 p_3 \left| \begin{array}{l} p_1, p_2, p_3 \nmid N \\ N^{\frac{1}{10}} < p_1 < N^{\frac{1}{3}} \\ N^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_3 < \frac{N}{p_1 p_2} \end{array} \right. \right\}$$

则有

$$S_N(\mathcal{B}, 1, N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-c}) = \left\{ m = N - p_1 p_2 p_3 \in \mathcal{B} : (m, \prod_{p < N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-c}, p \nmid N} p) = 1 \right\}$$

包含了大部分 p 使得 $N - p$ 在第二部分中, 而余项可以被前面的 $CN^{0.91}$ 控制.

²注意到有很多数被算了很多遍, 这是一个可以改进的地方.