
类域论

Class Field Theory

慕可

Updated: 2026 年 10 月 4 日

目录

第一章 群上同调	1
1.1 群同调与群上同调	1
1.2 Bar 消解	4
1.3 低阶上同调群	7
1.4 Tate 上同调	11
1.5 Shapiro 引理与换群	21
1.6 维数移动	23
1.7 Inflation、Tate 限制与余限制	27
1.8 杯积	35
1.9 循环群的上同调	41
1.10 Tate 定理	48
第二章 局部类域论	52
2.1 Profinite 群	52
2.2 无穷 Galois 理论	54
2.3 抽象类域论	56

CHAPTER 1

群上同调

群的同调理论主要研究 $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$ 到自身的两个函子 $-^G$ 与 $-_G$. 本章建立一个相对系统的群的同调理论.

群同调与群上同调 SECTION 1.1

定义 1.1.1 (群同调和群上同调): 对于一个 $\mathbb{Z}[G]$ -模 M , 我们定义模的**不变量**与**余不变量**为

$$M^G = \{x \in M : gx = x \ \forall g \in G\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

$$M_G = M / \mathrm{span}_{\mathbb{Z}[G]} \{gx - x : x \in M, g \in G\} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$$

其中 $\mathbb{Z}$ 视为平凡 $\mathbb{Z}[G]$ -模. 可见 M^G 为 M 的最大平凡子模, M_G 为 M 的最大平凡商模. 易见这两个函子为伴随关系, 因为

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A_G, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A, B^G)$$

因此 $-_G$ 是左伴随故右正合, $-^G$ 是右伴随故左正合, 并且模范畴有足够的投射对象和内射对象, 我们记对应的导出函子为

$$H^n(G; A) = R^n(-^G)(A), \quad H_n(G; A) = L_n(-_G)(A)$$

分别称为**群上同调函子**和**群同调函子**.

或者我们也可以立刻得到

$$H_n(G; A) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A), \quad H^n(G; A) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$$

定义 1.1.2 (增广理想): 对群 G , 定义同态

$$\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum_{g \in G} n_g g \mapsto \sum_{g \in G} n_g$$

令 $I_G = \mathrm{Ker} \varepsilon$, 称为 G 的**增广理想**. 对有限群 G , 称 $N = \sum_{g \in G} g$ 为 $\mathbb{Z}[G]$ 的**范数元素**, 不难检查有 $gN = N = Ng$, 并且有 $\mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z}[G] \cdot N$. 对无限群 G 而言, $\mathbb{Z}[G]^G = 0$.

显然可以看出

$$I_G = \bigoplus_{g \in G \setminus \{1\}} \mathbb{Z}(g - 1)$$

为自由 $\mathbb{Z}$ -模，且有正合列

$$0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

由于正合列分裂，可见

$$\mathbb{Z}[G] \cong I_G \oplus \mathbb{Z}$$

可以发现 I_G 衡量的是与平凡作用的差，有

$$I_G M = \langle gm - m \rangle$$

于是我们立刻可以看到

$$M_G = H_0(G, M) = M/I_G M, \quad M^G = H^0(G, M) = \{x \in M : I_G x = 0\}$$

定义 1.1.3: 我们还可以定义 **余增广映射**

$$\mu: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G], \quad n \mapsto n \cdot N_G$$

其中 $N_G = \sum_{g \in G} g$ 为范数元素.

同样我们可以得到正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow J_G \rightarrow 0$$

其中 $J_G = \text{Coker } \mu = \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z} \cdot N_G$. 同样可见

$$J_G = \bigoplus_{\sigma \neq 1} [\sigma]$$

为自由 $\mathbb{Z}$ -模，所以由自由模的投射性可见对于 Abel 群而言有

$$\mathbb{Z}[G] \cong J_G \oplus \mathbb{Z}$$

定理 1.1.4: 对群 G 与 G -模 M ，有同调情况下的

$$H_1(G, M) = \text{Ker} (I_G \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow M)$$

与上同调情况下的

$$H^1(G, M) = \text{Coker} (M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_G, M))$$

证明: 考虑正合列

$$0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

拉出 Tor 的长正合列:

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], M) \rightarrow \underbrace{\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)}_{=H_1(G, M)} \rightarrow I_G \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M}_{=M} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow 0$$

由于 $\mathbb{Z}[G]$ 是自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 所以投射, 故 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], M) = 0$, 故上面正合列实际为

$$0 \rightarrow H_1(G, M) \rightarrow I_G \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow 0$$

所以得到同调情况, 同理拉出 Ext 的长正合列

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \rightarrow M \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_G, M) \rightarrow H^1(G, M) \rightarrow 0$$

得到上同调情况. $\square$

引理 1.1.5 (交换化): 对群 G , 我们有同构 $I_G/I_G^2 \cong G/[G, G]$.

证明: 你会发现左边是线性化的操作, 右边是交换化的操作, 本质上都是在做交换化, 右边的交换化自不必说, 左边的交换化可以看成如下:

$$\overline{gh - 1} = \overline{(g - 1) + (h - 1) + (g - 1)(h - 1)} = \overline{g - 1} + \overline{h - 1} = \overline{hg - 1}$$

线性化将乘法变成了加法, 从而自然达成了交换化的成就, 具体的构造我们只需要注意

$$\varphi: I_G/I_G^2 \rightarrow G/[G, G], \quad \overline{x - 1} \mapsto \bar{x}$$

容易验证这是交换群的同态, 并且单射满射都容易验证. $\square$

命题 1.1.6: 作为 $\mathbb{Z}[G]$ -模有同构 $H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G \cong G/[G, G]$ 为 G 的交换化.

证明: 仍然是考虑正合列

$$0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

导出长正合列得到

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) = H_1(G, \mathbb{Z}[G]) \rightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

由于 $\mathbb{Z}[G]$ 是投射模, 所以最左边为 0, 故得到正合列

$$0 \rightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

由于 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 是同构, 所以由正合可以得到

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G = I_G / \mathrm{span}_{\mathbb{Z}[G]} \{(g - 1)x : x \in I_G\} = I_G/I_G^2 = G/[G, G]$$

故得证. $\square$

所以我们可以看到群的交换化自然地作为群同调的一环出现.

推论 1.1.7 (万有系数定理在群同调的应用): 若 A 是平凡 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 则 $H_0(G, A) = A$, 对 $n \geq 1$ 有非典范的同构:

$$H_n(G, A) \cong (H_n(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G, \mathbb{Z}), A)$$

对上同调而言, $H^0(G, A) \cong A$, 对 $n \geq 1$ 有非典范的同构:

$$H^n(G, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(G, \mathbb{Z}), A) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(G, \mathbb{Z}), A)$$

证明： 由于平凡 G -模可以看成是 $\mathbb{Z}$ -模，于是两个平凡 $\mathbb{Z}[G]$ -模的同态和张量本质上就是两个 $\mathbb{Z}$ -模的同态和张量，于是可以都看做在 $\mathbb{Z}$ -模上. 由于

$$H_n(G, A) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$$

考虑 $\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}[G]$ -模投射消解 $P_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}$ ，我们知道

$$H_n(G, A) = H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A)$$

注意到

$$P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong (P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

令 $C_\bullet = P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$ ，很明显有

$$H_n(G, \mathbb{Z}) = H_n(C_\bullet)$$

而 $C_\bullet$ 作为 $\mathbb{Z}$ -模是自由 $\mathbb{Z}$ -模构成的复形，所以满足万有系数定理的条件，故

$$H_n(G, A) = H_n(C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} A) = (H_n(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} A) \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A)$$

于是得到同调情况，上同调情况同理. □

推论 1.1.8： 若 A 是平凡 G -模，则

$$H_1(G, A) \cong G/[G, G] \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad H^1(G, A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/[G, G], A)$$

或者可以写成

$$H_1(G, A) \cong I_G \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A, \quad H^1(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_G, A)$$

证明： 只需要注意到

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_0(G, \mathbb{Z}), A) = \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) = 0$$

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_0(G, \mathbb{Z}), A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, A) = 0$$

于是立刻得到前两个等式，后两个等式注意命题 1.1.6 即可. □

Bar 消解 SECTION 1.2

一个紧要的问题就是为 $\mathbb{Z}$ 寻找一个方便计算的 $\mathbb{Z}[G]$ -模的消解.

定义 1.2.1 (Bar 消解的模)： 设 G 为一个群， $\mathbb{Z}G$ 为其群环. 第 n 阶自由 $\mathbb{Z}G$ -模 B_n 定义为由 G 中元素的 n 元组 $[g_1|g_2|\dots|g_n]$ 生成的自由模. 特别地， F_0 是由空符号 $[]$ 生成的自由模.

定义 1.2.2 (边缘算子)： 定义边缘映射 $\partial_n : B_n \rightarrow B_{n-1}$ 为如下交错和：

$$\partial_n([g_1|g_2|\dots|g_n]) = g_1[g_2|\dots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1|\dots|g_i g_{i+1}|\dots|g_n] + (-1)^n [g_1|\dots|g_{n-1}]$$

特别地，对于低阶映射展开如下：

- 增广映射 $\varepsilon(g[]) = 1$
- $\partial_1([g]) = g[] - []$
- $\partial_2([g_1|g_2]) = g_1[g_2] - [g_1g_2] + [g_1]$
- $\partial_3([g_1|g_2|g_3]) = g_1[g_2|g_3] - [g_1g_2|g_3] + [g_1|g_2g_3] - [g_1|g_2]$

这里定义的道理是把单纯形代数化, 我们可以考虑 $K_n = G^{n+1}$, 其中一个 n -单形由

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

表示, 其边界就是单纯形的边缘映射

$$\partial(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$$

同时 G 在其上有对角作用

$$g(x_0, \dots, x_n) = (gx_0, \dots, gx_n)$$

于是通过这个作用我们可以把每个单形标准化成为

$$g(1, x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2 \cdots x_n)$$

我们记

$$[x_1 | \cdots | x_n] = (1, x_1, x_1x_2, \dots, x_1 \cdots x_n)$$

如此我们就可以通过单纯形删去顶点的方式得到 bar 消解的边缘映射. 单纯消解概念上更自然, bar 消解计算上更方便.

定理 1.2.3 (Bar 消解): 由上述 B_n 和 ∂_n 构成的序列:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} B_2 \xrightarrow{\partial_2} B_1 \xrightarrow{\partial_1} B_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

是一个链复形, 且它是平凡 $\mathbb{Z}G$ -模 $\mathbb{Z}$ 的一个显式标准自由消解, 称为 **Bar 消解**.

证明: 通过直接代数计算可以验证 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, 这保证了序列构成一个链复形. 可以构造同伦如下:

$$s_{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow B_0, \quad 1 \mapsto []$$

与

$$s_n: B_n \rightarrow B_{n+1}, \quad g_0[g_1 | \cdots | g_n] \mapsto [g_0|g_1 | \cdots | g_n]$$

可以验证

$$\text{id} = ds + sd$$

所以正合. □

现在由于

$$B_n = \bigoplus_{G^n} \mathbb{Z}[G]$$

所以有一个 G -线性映射

$$f: B_n \rightarrow M$$

完全由其在自由基 $[g_1 | \cdots | g_n]$ 决定, 因此可见可以定义一个复形

$$C^n(G, M) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(B_n, M) \cong \text{Map}(G^n, M)$$

定义 1.2.4 (群上同调与上边缘算子): 对 Bar 消解应用 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ 函子, 得到上复形 $C^n(G, M)$, 这等价于所有从 G^n 映射到 M 的函数 $f: G^n \rightarrow M$ 的集合. 上边缘算子 $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$ 被诱导为:

$$\begin{aligned} (d^n f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

第 n 阶 **群上同调群** 定义为:

$$H^n(G, M) = H^n(C^\bullet(G, M)) \cong \text{Ker}(d^n) / \text{im}(d^{n-1})$$

如果把 $[g_1 | \cdots | g_{n+1}]$ 认同为 $(g_1, \dots, g_{n+1})$, 则我们可见

$$(d^n f)(-) = f(\partial_n -)$$

如此即可通过对偶的方式来得到上同调的微分映射.

定理 1.2.5 (低阶群上同调的代数意义): 群上同调 $H^n(G, M)$ 在低阶时具有以下经典代数解释:

- (1) $H^1(G, M)$ 中的 1-cocycle 等价于 **交叉 (crossed) 同态**.
- (2) $H^2(G, M)$ 中的 2-cocycle 条件给出了群扩张的结合律条件.

证明: 对于 $n = 1$, 1-cocycle 要求 $d^1 f = 0$, 即:

$$d^1 f(g_1, g_2) = f(g[h] - [gh] + [g]) = 0 \implies f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)$$

此等式正是交叉同态的定义. 对于 $n = 2$, 2-cocycle 要求 $d^2 f = 0$, 展开即为:

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) = 0$$

移项后此等式对应于利用因子集构造群扩张时所必须满足的结合律条件. □

命题 1.2.6 (乘法 Hilbert 90): 有限 Galois 扩张 $L|K$, $G = \text{Gal}(L|K)$, 则 $H^1(G, L^\times) = 1$.

证明： 设 $\varphi \in Z^1$ ，则满足 $\varphi(hg) = (h\varphi(g))\varphi(h)$ ，对 $x \in L$ ，记

$$a_x = \sum_{g \in G} \varphi(g)^{-1} \cdot g(x)$$

则

$$h(a_x) = \sum_{g \in G} h(\varphi(g))^{-1} \cdot (hg)(x) = \varphi(h) \sum_{g \in G} \varphi(hg)^{-1} \cdot (hg)(x) = \varphi(h) \cdot a_x$$

因此若 $a_x \neq 0$ ，则 $\varphi(h) = h(a_x)/a_x \in B^1$ ，从而命题得证. 而 Dedekind-Artin 线性无关告诉我们 $\sum \varphi(g)^{-1} \cdot g: L \rightarrow L$ 不是零映射，所以总能找到合适的 x 使得 $a_x \neq 0$. $\square$

低阶上同调群 SECTION 1.3

$H^1(G, A)$ 的具体解释.

我们可以直接计算得到

$$Z_1(G, A) = \{f: G \rightarrow A: f(\sigma\tau) = \sigma f(\tau) + f(\sigma)\}$$

而 1-coboundary 为某个 0-chain 通过边缘映射得到，考虑 $a \in A$ ，则 1-coboundary 为

$$f_a(g) = (d^0 a)(g) = a(\partial_1 g) = a(g[] - []) = ga - a$$

所以可见

$$B_1(Z, A) = \{f_a: G \rightarrow A: f_a(g) = ga - a, \forall g \in G, a \in A\}$$

现在可以考虑 G -模的短正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

作用不变量函子 $-^G$ 之后得到正合列

$$0 \rightarrow A^G \rightarrow B^G \rightarrow C^G$$

其中 $j^G: B^G \rightarrow C^G$ 不一定是满射，这里由 H^1 衡量，考虑 $c \in C^G$ ，由于 j 是满射，所以存在 $b \in B$ 使得 $j(b) = c$ ，问题就在于能否使得这个 b 是一个不变量. 考虑

$$c = \sigma c \implies j(b) = \sigma j(b) \implies \sigma b - b \in \text{Ker } j = \text{Im } i$$

所以存在 $a_\sigma \in A$ 使得

$$\sigma b - b = i(a_\sigma)$$

此时对 $\tau \in G$ 立刻发现

$$i(a_{\sigma\tau}) = \sigma\tau b - b = i(\sigma a_\tau + a_\sigma)$$

由于 i 是单射，所以得到

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma + \sigma a_\tau$$

可见 $c \in C^G$ 可以得到 $\sigma \mapsto a_\sigma \in Z_1(G, A)$. 但是 b 未必唯一, 对另外一个 b' 满足 $j(b') = c$, 可见

$$b' - b \in \text{Ker } j = \text{Im } i \implies b' - b = i(a)$$

立刻得到

$$i(a'_\sigma) = \sigma b' - b' = \sigma b - b + i(\sigma a - a) = i(a_\sigma + \sigma a - a)$$

所以

$$a'_\sigma - a_\sigma = \sigma a - a \in B_1(G, A)$$

所以可见

$$[a'_\bullet] = [a_\bullet] \in H^1(G, A)$$

于是得到了自然的

$$C^G \rightarrow H^1(G, A)$$

这正是长正合列的第一个 δ ,

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \longrightarrow H^1(G, A)$$

所以可见

$H^1(G, A)$ 衡量的的是一个普通 lift 能否修正为一个 G -不变 lift 的障碍.

其障碍是 $\sigma b - b$, 而改变 b 只改变 coboundary 而不改变同调类, 所以同调模衡量的就是提升障碍.

$H^2(G, A)$ 的具体解释.

回忆我们已经得到

$$Z^2(G, A) = \{f: G^2 \rightarrow A: gf(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h) = 0\}$$

同理计算可以得到

$$B^2(G, A) = \{f: G^2 \rightarrow A: f(g, h) = gt(h) - t(gh) + t(g), t \in C^1(G, A)\}$$

现在给定群 G 与 Abel 群 A , 考虑群扩张

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

由于 $A \triangleleft E$, 可以在 A 上定义 G 的共轭作用, 从而使 A 成为一个 G -模, 若存在群同态 $s: G \rightarrow E$, 则称此扩张分裂. 其在 A 上的作用如下给出, 对 $g \in G$, 选定 g 在 E 中的一个提升 $\tilde{g}$, 定义

$$g \cdot a := \tilde{g}a\tilde{g}^{-1}$$

容易验证这个作用与 lift 无关. 我们称过 A 到 G 的两个扩张 E, E' 是**等价**的, 如果存在群同态 $f: E \rightarrow E'$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & E & & & \\
 & & \nearrow i & \downarrow f & \searrow \pi & & \\
 0 & \longrightarrow & A & & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \searrow j & \downarrow \rho & \nearrow & & \\
 & & & E' & & &
 \end{array}$$

容易验证在这种情况下 f 是同构: 单射是因为如果 $f(g) = 1$, 则 $g \in \text{Ker } \pi = \text{Im } i$, 故可见 $g = i(a)$, 而有 $j(a) = f(i(a)) = e$, 结合 j 是单射, 所以 $a = 1$, 所以 $g = 1$. 满射是因为对任意的 $g_0 \in E$, 由于 ρ 是满射, 所以存在 $g \in E$ 使得 $\rho(f(g)) = \pi(g) = \rho(g_0)$, 于是可见

$$f(g) \cdot g_0^{-1} \in \text{Ker } \rho = \text{Im } j$$

可见

$$f(g) \cdot g_0^{-1} = j(a) = f(i(a)) \implies g_0 = f(g \cdot i(a)^{-1})$$

所以满射.

下面定义群的**半直积**, 如果 A 是 G -模, 则可以在 $A \times G$ 上定义群结构

$$(a, g) \cdot (b, h) = (a + gb, gh)$$

或者记为

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ a & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ b & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ a + gb & h \end{pmatrix}$$

这种群结构记为 $A \rtimes G$.

定理 1.3.1: 群扩张

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$$

分裂当且仅当与扩张

$$0 \rightarrow A \rightarrow A \rtimes G \rightarrow G \rightarrow 1$$

等价.

证明: 考虑群同态

$$\varphi: A \rtimes G \rightarrow E, \quad (a, g) \mapsto as(g)$$

容易验证一切. □

所以我们可见分裂扩张等价于半直积, 现在的问题是一个一般的扩张与分裂扩张之间的阻碍应该如何衡量, 现在假设扩张不分裂, 但是 $\pi: E \rightarrow G$ 仍旧是满射, 作为集合映射而言总是存在截面

$$s: G \rightarrow E, \quad \pi \circ s = \text{id}$$

注意这里的 s 不一定是群同态，在理想状况下我们希望

$$s(g)s(h) = s(gh)$$

但是他们实际上只是在 $E/A \cong G$ 中相等，也就是说

$$\pi(s(g)s(h)s(gh)^{-1}) = gh(gh)^{-1} = e \implies s(g)s(h)s(gh)^{-1} \in A$$

现在定义

$$f(g, h) = s(g)s(h)s(gh)^{-1} \in A$$

称为截面 s 所对应的因子，于是有

$$s(g)s(h) = f(g, h)s(gh)$$

如果 $f(g, h) = 0$ ，则 s 为同态，扩张分裂。现在因为 E 是群，所以满足结合律，则可见

$$(s(g)s(h))s(k) = s(g)(s(h)s(k))$$

代入因子可见

$$LHS = f(g, h)f(gh, k)s(ghk)$$

而回忆 G 在 A 上的作用，有

$$s(g)a = (g \cdot a)s(g)$$

从而可见

$$RHS = (g \cdot f(h, k))f(g, hk)s(ghk)$$

最后改写为群加法运算就得到

$$gf(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h) = 0$$

这恰好就是 2-cocycle 的要求，所以因子自动落在 $Z^2(G, A)$ 中。反过来，任给一个 2-cocycle $f: G^2 \rightarrow A$ ，我们定义 $A \times G$ 上的乘法

$$(a, g)(b, h) = (a + gb + f(g, h), gh)$$

可以验证结合约束

$$((a, g)(b, h))(c, k) = (a, g)((b, h)(c, k))$$

恰好就是 2-cocycle 的等式条件，得到的群记为 $A \rtimes_f G$ 。这个神秘的乘法可以如下得到：扩张 E 中的元素可以唯一写成 $as(g)$ ，于是用 (a, g) 来表示 $as(g)$ ，现在可见 $(a, g)(b, h)$ 对应的是 $as(g)bs(h)$ ，现在注意到 g 在 b 上的作用为

$$gb = s(g)bs(g)^{-1}$$

于是

$$s(g)b = (gb)s(g)$$

所以可见

$$as(g)bs(h) = a(gb)s(g)s(h) = a(gb)f(g, h)s(gh)$$

对应的就是 $(a + gb + f(gh), gh)$. 最后我们注意到截面 $s: G \rightarrow E$ 不是唯一的, 假设换成另外一个截面 $s': G \rightarrow E$, 由于 $s(g)$ 与 $s'(g)$ 投影到同一个 g , 所以存在 $c(g) \in A$ 使得

$$s'(g) = c(g)s(g)$$

于是可以得到

$$s'(g)s'(h) = c(g)s(g)c(h)s(h) = c(g)(gc(h))s(g)s(h)$$

于是得到

$$f'(g, h) = f(g, h) + gc(h) - c(gh) + c(g) \implies f' - f = dc$$

所以同一个扩张选择不同的截面, 会得到不同的 2-cocycle, 但是他们只相差一个 2-coboundary, 从而可见分类扩张的是 $H^2(G, A)$.

定理 1.3.2 (Schreier): 对群 G 与 G -模 A , 存在双射

$$E(G, A)/\sim \longleftrightarrow H^2(G, A)$$

其中 $E(G, A)$ 为 G 过 A 的所有扩张集合, 等价关系为扩张的等价. 且同调零元对应分裂扩张.

Tate 上同调 SECTION 1.4

回忆, 对有限群 G 而言, 我们有范数元素 $N_G = \sum_{g \in G} g$. 于是对 G -模 M , 我们定义了一个同态

$$N_G: M \rightarrow M, \quad x \mapsto N_G x$$

引理 1.4.1: 对有限群 G , $N_G \in \mathbb{Z}[G]$, 则

$$I_G = \text{Ker} \left(\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N_G} \mathbb{Z}[G] \right)$$

证明: 设 $x = \sum_{g \in G} n_g g$, 注意到 $N_G x = 0$ 当且仅当

$$\sum_{g \in G} n_g N = 0 \implies \sum_{g \in G} n_g = 0$$

得证. □

现在对任意的 $h \in G$, 都有

$$h \cdot N_G x = N_G x$$

可见实际上映射为

$$N_G: M \rightarrow M^G$$

而对 $x \in I_G M$, 有 $N_G x = \sum N_G(1 - g)m = 0$, 所以可见定义域也可以下降为 $M_G = M/I_G M$, 因此得到态射

$$\widehat{N}_G: M_G \rightarrow M^G$$

定义 1.4.2 (Tate 上同调): 对于有限群 G , G -模 A , 定义 **Tate 上同调** 为

$$\widehat{H}^n(G, A) = \begin{cases} H^n(G, A), & n \geq 1 \\ \text{Coker } \widehat{N}_G = A^G / N_G A, & n = 0 \\ \text{Ker } \widehat{N}_G = \{x \in A: N_G x = 0\} / I_G A, & n = -1 \\ H_{-1-n}(G, A), & n \leq -2 \end{cases}$$

定理 1.4.3 (Tate 上同调诱导长正合列): 对于有限群 G , G -模的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 诱导长正合序列

$$\cdots \rightarrow \widehat{H}^{n-1}(G, C) \rightarrow \widehat{H}^n(G, A) \rightarrow \widehat{H}^n(G, B) \rightarrow \widehat{H}^n(G, C) \rightarrow \widehat{H}^{n+1}(G, A) \rightarrow \cdots$$

证明: 将 Tor 和 Ext 的长正合列通过蛇引理连接起来即可:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \widehat{H}^{-1}(G, A) & \rightarrow & \widehat{H}^{-1}(G, B) & \rightarrow & \widehat{H}^{-1}(G, C) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots \rightarrow & H_1(G, C) & \xrightarrow{\partial_0} & A_G & \xrightarrow{f_G} & B_G & \xrightarrow{g_G} & C_G & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow N_G^A & & \downarrow N_G^B & & \downarrow N_G^C & & \\ & 0 & \rightarrow & A^G & \xrightarrow{f^G} & B^G & \xrightarrow{g^G} & C^G & \xrightarrow{\partial^0} & H^1(G, A) \rightarrow \cdots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & \widehat{H}^0(G, A) & \rightarrow & \widehat{H}^0(G, B) & \rightarrow & \widehat{H}^0(G, C) & & \end{array}$$

(Note: In the original image, there are dashed arrows from $H_1(G, C)$ to $\widehat{H}^{-1}(G, A)$ and from $\widehat{H}^0(G, C)$ to $H^1(G, A)$, and a red arrow from A^G to $\widehat{H}^{-1}(G, B)$.)

由于 $\text{Im } \partial_0 = \text{Ker } f_G$, 对 $x \in \text{Im } \partial_0$, 有

$$f^G(N_G^A(x)) = N_G^B(f_G(x)) = 0$$

由于 f^G 是单射, 所以 $N_G^A(x) = 0$, 所以可见

$$\text{Im } \partial_0 \subseteq \text{Ker } N_G^A = \widehat{N}^{-1}(G, A)$$

所以得到了左上角的虚线映射

$$H_1(G, C) \rightarrow \widehat{H}^{-1}(G, A)$$

其正合也容易验证, 现在注意右下角的虚线映射, 只需要说明 $\text{Im } N_G^C \subseteq \text{Ker } \partial^0$ 即可, 由于 g_G 是满射, 所以任意的 $c \in C_G$ 都存在 $b \in B_G$ 使得 $c = g_G(b)$, 所以得到

$$\partial^0(N_G^C(c)) = \partial^0(N_G^C(g_G(b))) = \partial^0 \circ g^G \circ N_G^B(b) = 0$$

故得证, 得到长正合列. □

Complete Resolution

我们现在尝试建立一个自由消解来直接得到完整的 Tate 上同调.

定义 1.4.4: G 是有限群, 则平凡 G -模 $\mathbb{Z}$ 的一个 **complete free resolution** 是一个复形

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{d^0} & X_{-1} \longrightarrow X_{-2} \longrightarrow \cdots \\ & & & & \searrow \varepsilon & & \nearrow \mu \\ & & & & & \mathbb{Z} & \\ & & & & \nearrow & \searrow & \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

满足 X_q 均为有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 并且 $d_0 = \mu_0 \varepsilon$, 且在每一点正合.

现在我们已经有了 $\mathbb{Z}$ 的 bar 消解

$$\cdots \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

现在我们想得到另一边的消解, 方法是取对偶, 我们定义 $\mathbb{Z}[G]$ -模 X 的**对偶**为

$$X^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z})$$

并在其上定义 G -作用如下

$$(gf)(x) = gf(g^{-1}x) = f(g^{-1}x)$$

第二个等式来自于 $\mathbb{Z}$ 上的平凡作用, 于是我们得到复形

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B_0, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B_1, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

即

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow B_0^* \rightarrow B_1^* \rightarrow \cdots$$

现在的目标是要说明这个复形的每一项都自由且是正合的, 如此便得到消解.

引理 1.4.5: 对有限群 G 而言, 有 $\mathbb{Z}[G]$ -模同构 $\mathbb{Z}[G]^* \cong \mathbb{Z}[G]$.

证明: 设 δ_h 定义对偶基

$$\delta_h(k) = \begin{cases} 1, & k = h \\ 0, & k \neq h \end{cases}$$

并且有

$$(g\delta_h)(k) = \delta_h(g^{-1}k) = \delta_{gh}(k)$$

可见

$$g\delta_h = \delta_{gh}$$

因此可见

$$h \mapsto \delta_h$$

是 $\mathbb{Z}[G]$ -模同构. □

于是由引理立刻得到如果 X 是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 就得到了

$$X^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[G] \cong X$$

于是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模的对偶也是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模. 最后要说明正合.

引理 1.4.6: 给定自由 $\mathbb{Z}$ -模的正合列

$$\cdots \longleftarrow X_{q-1} \xleftarrow{d_q} X_q \xleftarrow{d_{q+1}} X_{q+1} \longleftarrow \cdots$$

则对任意的 $\mathbb{Z}$ -模 D , 下面的复形都正合

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q-1}, D) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, D) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q+1}, D) \longrightarrow \cdots$$

证明: 由于原复形正合, 所以设

$$Z_q = \text{Ker } d_q = \text{Im } d_{q+1}$$

所以可以拆出短正合列

$$0 \rightarrow Z_q \rightarrow X_q \rightarrow Z_{q-1} \rightarrow 0$$

由于 $\mathbb{Z}$ 是 PID, 所以其上自由模的子模仍旧自由, 故 Z_q 都是自由模, 从而都是投射 $\mathbb{Z}$ -模, 计算这个短正合列关于 Ext 的长正合列, 得到

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_{q-1}, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_q, D) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(Z_{q-1}, D)$$

由于 Z_{q-1} 投射, 所以 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(Z_{q-1}, D) = 0$, 于是可见

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q-1}, D) & \\ & \swarrow & \downarrow d_q^* \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_{q-1}, D) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, D) \\ & \swarrow & \downarrow d_{q+1}^* \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_q, D) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q+1}, D) \end{array}$$

可见

$$\text{Im } d_q^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_{q-1}, D) = \text{Ker } d_{q+1}^*$$

综上得证. □

现在我们把 $\mathbb{Z}[G]$ -模的 G 作用遗忘掉, 其复形正合与否无关于 G 的作用, 而自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模很显然也是自由 $\mathbb{Z}$ -模, 于是由引理立刻得到自由消解的对偶仍旧是正合的. 现在任给两个 $\mathbb{Z}$ 的自由消解

$$P_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}, \quad Q_{\bullet} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$$

对第二个消解取 dual, 得到正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi^*} Q_0^* \rightarrow Q_1^* \rightarrow \cdots$$

把两个东西在 $\mathbb{Z}$ 处粘起来得到

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{d^0} & Q_0^* \longrightarrow Q_1^* \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \searrow \varepsilon & & \nearrow \varphi^* \\
 & & & & \mathbb{Z} & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 0 & & & & & & 0
 \end{array}$$

很显然有

$$\text{Ker } d^0 = \text{Ker}(\varphi^* \circ \varepsilon) = \text{Ker } \varepsilon = \text{Im}(P_1 \rightarrow P_0)$$

所以在 P_0 处正合，同理注意到

$$\text{Im } d^0 = \text{Im}(\varphi^* \circ \varepsilon) = \text{Im } \varphi^* = \text{Ker}(Q_0^* \rightarrow Q_1^*)$$

所以在 Q_0^* 处正合，现在令

$$X_n = \begin{cases} P_n, & n \geq 0 \\ Q_{-n-1}^*, & n < 0 \end{cases}$$

则得到 $\mathbb{Z}$ 的自由消解

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{d^0} & X_{-1} \longrightarrow X_{-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \searrow \varepsilon & & \nearrow \mu \\
 & & & & \mathbb{Z} & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 0 & & & & & & 0
 \end{array}$$

我们可以考虑标准的 bar 消解，令

$$X_n = \begin{cases} B_n, & n \geq 0 \\ B_{-n-1}^* \cong B_{-n-1}, & n \leq -1 \end{cases}$$

于是有

$$X_0 = X_{-1} = \mathbb{Z}[G]$$

且其中

$$\varepsilon: X_0 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \mu: \mathbb{Z} \rightarrow X_{-1}$$

就是增广和余增广映射，于是

$$d^0 = \mu \circ \varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G], \quad \sum n_\sigma \sigma \mapsto \left(\sum n_\sigma \right) N_G$$

实际上就是

$$\widehat{N}_G: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G], \quad x \mapsto xN_G$$

若 A 是左 $\mathbb{Z}[G]$ -模，在写

$$A \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$$

时, 我们按照约定将 A 看作右 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 其中

$$a \cdot g := g^{-1} \cdot a$$

于是

$$A \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong (A \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G$$

引理 1.4.7: F 是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, M 为任意 G -模, 则 norm map

$$\hat{N}: (F \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G \rightarrow (F \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G$$

是同构.

证明: 因为 $F \cong \mathbb{Z}[G]^r$, 且 invariants、coinvariants 以及 norm map 均与有限直和相容, 只需证明 $F = \mathbb{Z}[G]$ 的情形. 记 M_{triv} 为与 M 具有相同底层 $\mathbb{Z}$ -模, 但 G -作用平凡的模. 映射

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M_{\text{triv}}, \quad g \otimes m \longmapsto g \otimes g^{-1}m$$

是 $\mathbb{Z}[G]$ -模同构, 因此只需考虑

$$P := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M_{\text{triv}} = \text{Ind}_{\{1\}}^G(M_{\text{triv}})$$

由于

$$[g \otimes m] = [1 \otimes m]$$

在 P_G 中成立, 有自然同构

$$P_G \xrightarrow{\sim} M, \quad [1 \otimes m] \longmapsto m$$

另一方面,

$$P^G = \{N_G \otimes m : m \in M\}$$

故亦有自然同构

$$P^G \xrightarrow{\sim} M, \quad N_G \otimes m \longmapsto m$$

在这两个同构下,

$$\hat{N}([1 \otimes m]) = \sum_{g \in G} g \otimes m = N_G \otimes m$$

故 $\hat{N}$ 对应于 id_M . 因此

$$\hat{N}: P_G \xrightarrow{\sim} P^G$$

□

引理 1.4.8: F 是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 则对任意 $\mathbb{Z}[G]$ -模 M , 有

$$\text{Hom}_G(F, M) \cong F^* \otimes_G M$$

证明：考察态射

$$\Theta: \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, M)$$

定义为

$$\Theta(f \otimes m)(x) = f(x)m$$

是一个 $\mathbb{Z}$ -模同构. 这里左右两边都有自然的 G -作用, 并且 Θ 是 G -等变的. 因而取 G -不动点得到

$$(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, M)^G = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X, M)$$

另一方面, 根据我们的右模约定,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong (\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G$$

所以只需要证明

$$(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G \cong (\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G$$

由于

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z})$$

仍然是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 这归结为上面的 norm map 引理. □

定理 1.4.9: 给定 $\mathbb{Z}[G]$ -模 $\mathbb{Z}$ 的一个完备自由消解 $X_{\bullet}$, 则有

$$\hat{H}^n(G, M) = H^n(\operatorname{Hom}_G(X_{\bullet}, M))$$

证明：注意, 正半边就是 $\mathbb{Z}$ 的自由消解, 所以对 $n \geq 1$, 有

$$H^n(\operatorname{Hom}_G(X_{\bullet}, M)) = H^n(G, M) = \hat{H}^n(G, M)$$

而负半边的对偶也是 $\mathbb{Z}$ 的自由消解, 而对有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模 F , 有典范同构

$$\operatorname{Hom}_G(F, M) \cong F^* \otimes_G M$$

于是实际上有

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & \operatorname{Hom}_G(X_{-3}, M) & \rightarrow & \operatorname{Hom}_G(X_{-2}, M) & \rightarrow & \operatorname{Hom}_G(X_{-1}, M) \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \cdots & \longrightarrow & X_{-3}^* \otimes M & \longrightarrow & X_{-2}^* \otimes M & \longrightarrow & X_{-1}^* \otimes M \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \operatorname{Hom}_G(X_0, M)$$

而对有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模而言有

$$X_{-n}^* \cong X_{-n}$$

仍然是有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 所以对 $n \leq -2$, 立刻得到

$$H^n(\operatorname{Hom}_G(X_{\bullet}, M)) = H_{-n-1}(X_{\bullet} \otimes_G M) = H_{-n-1}(G, M) = \hat{H}^n(G, M)$$

现在考虑 $n = -1, 0$ 的情况, 令

$$X^{-1} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{-1}, \mathbb{Z})$$

我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} X^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M & \xrightarrow{\hat{N}} & (X^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{-1}, M) \\ \mu^* \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \text{id}_M \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \mapsto f \circ \mu \\ \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M & \xrightarrow{\hat{N}} & (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M). \end{array}$$

其中竖直映射来自与

$$\mu: \mathbb{Z} \longrightarrow X_{-1}$$

的预复合, 而两个右侧横向同构来自

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, M)$$

注意, 上面所有横向映射都是同构, 唯一的例外是下方的 norm map

$$\hat{N}: \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \longrightarrow (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G,$$

因为 $\mathbb{Z}$ 一般不是自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模. 另一方面, 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{-1}, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_0, M) \\ f \mapsto f \circ \mu \downarrow & \nearrow \psi = \varepsilon^* & \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) & & \end{array}$$

将前一个交换方块右侧替换为这个交换三角形的右侧, 得到交换图

$$\begin{array}{ccc} X^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_0, M) \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \psi \\ \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M & \xrightarrow{\hat{N}} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \end{array}$$

其中

$$\varphi := \mu^* \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \text{id}_M$$

因此, 复形

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)$$

中从次数 -1 到次数 0 的微分, 在上述同构下可以分解为

$$X^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\hat{N}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\psi} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_0, M)$$

而

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong M_G$$

并且

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \cong M^G$$

在这两个同构下, 中间的

$$\hat{N}$$

正是第一种 Tate 上同调定义中使用的 norm map

$$\hat{N}: M_G \longrightarrow M^G, \quad [m] \longmapsto \sum_{g \in G} g \cdot m$$

最后计算次数 -1 与 0 的上同调. 由于

$$X_1 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

正合, 并且 X_0, X_1 是自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 所以

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\psi=\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_0, M) \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_1, M)$$

正合. 另一方面,

$$X^{-2} \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{\mu^*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

是自由 $\mathbb{Z}[G]$ -模消解的一部分, 因此张量

$$- \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$$

以后有正合列

$$X^{-2} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\partial^{-2}} X^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\varphi=\mu^* \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathrm{id}_M} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \longrightarrow 0$$

所以

$$\mathrm{im} \partial^{-2} = \mathrm{Ker} \varphi$$

且

$$\mathrm{Ker} \partial^0 = \mathrm{im} \psi$$

于是

$$H^{-1}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)) = \frac{\mathrm{Ker}(\psi \hat{N} \varphi)}{\mathrm{im} \partial^{-2}} = \frac{\mathrm{Ker}(\psi \hat{N} \varphi)}{\mathrm{Ker} \varphi}.$$

由于 ψ 单射,

$$\mathrm{Ker}(\psi \hat{N} \varphi) = \mathrm{Ker}(\hat{N} \varphi)$$

故

$$H^{-1}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)) = \frac{\mathrm{Ker}(\hat{N} \varphi)}{\mathrm{Ker} \varphi}$$

又因为 φ 满射, 把 φ 限制在 $\varphi: \text{Ker}(\widehat{N}\varphi) \rightarrow \text{Ker } \widehat{N}$ 上, 由第一同构定理得到

$$\frac{\text{Ker}(\widehat{N}\varphi)}{\text{Ker } \varphi} \cong \text{Ker } \widehat{N}$$

因此

$$H^{-1}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)) \cong \text{Ker} \left(\widehat{N}: M_G \longrightarrow M^G \right)$$

类似地,

$$H^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)) = \frac{\text{Ker } \partial^0}{\text{im}(\psi \widehat{N}\varphi)} = \frac{\text{im } \psi}{\text{im}(\psi \widehat{N}\varphi)}.$$

由于 φ 满射,

$$\text{im}(\psi \widehat{N}\varphi) = \text{im}(\psi \widehat{N}),$$

所以

$$H^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)) = \frac{\text{im } \psi}{\text{im}(\psi \widehat{N})}.$$

由于 ψ 单射,

$$\frac{\text{im } \psi}{\text{im}(\psi \widehat{N})} \cong \text{coker } \widehat{N}.$$

因此

$$H^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)) \cong \text{coker} \left(\widehat{N}: M_G \longrightarrow M^G \right).$$

综上得证. □

虽然利用 complete resolution 定义 Tate 上同调乍看之下比原先的分段定义更加抽象, 但它有一个非常重要的优点: 所有次数的 Tate 上同调现在统一地写成一个上链复形的上同调

$$\widehat{H}^n(G, M) = H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M)).$$

例如, 若

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

是 $\mathbb{Z}[G]$ -模短正合列, 因为每个 X_n 都是自由、从而是投射 $\mathbb{Z}[G]$ -模, 所以

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_n, -)$$

是正合函子. 因而得到上链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, L) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X_{\bullet}, N) \longrightarrow 0.$$

于是 Tate 上同调的长正合列

$$\cdots \longrightarrow \widehat{H}^n(G, L) \longrightarrow \widehat{H}^n(G, M) \longrightarrow \widehat{H}^n(G, N) \longrightarrow \widehat{H}^{n+1}(G, L) \longrightarrow \cdots$$

直接由上链复形的长正合上同调列得到, 而不再需要像第一种定义中那样单独检查 $n = -1, 0$ 附近的连接映射.

Shapiro 引理与换群 SECTION 1.5

设 $H \subset G$ 为子群, 则 $\mathbb{Z}[G]$ 是自由 $\mathbb{Z}[H]$ -模, 一组基由陪集代表元给出, 如此一来可见函子

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} -: \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[H]} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$$

是正合函子, 记为 Ind_H^G , 称作**诱导**函子. 同理, 函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], -): \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[H]} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$$

也是正合的, 记为 Coind_H^G , 称作**余诱导**函子. 表示论中的 Frobenius 互反律告诉我们

$$\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_H^G \dashv \mathrm{Coind}_H^G$$

定理 1.5.1 (Shapiro): $H \subset G$ 为子群, H -模 M , 有

$$H_n(G, \mathrm{Ind}_H^G M) \cong H_n(H, M), \quad H^n(G, \mathrm{Coind}_H^G M) \cong H^n(H, M), \quad \forall n \geq 0$$

证明: 设 $P_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}$ 是 G -自由消解, 从而作为 H -模而言也是自由的, 注意到

$$P_\bullet \otimes_G \mathrm{Ind}_H^G M = P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}[G] \otimes_H M \cong P_\bullet \otimes_H M$$

于是得到

$$H_\bullet(G, \mathrm{Ind}_H^G M) \cong H_\bullet(H, M)$$

同理利用

$$\mathrm{Hom}_G(P_\bullet, \mathrm{Coind}_H^G M) = \mathrm{Hom}_G(P_\bullet, \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], M)) \cong \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G P_\bullet, M) = \mathrm{Hom}_H(P_\bullet, M)$$

所以有

$$H^n(G, \mathrm{Coind}_H^G M) \cong H^n(H, M)$$

综上所述得证. □

命题 1.5.2: 当 $[G : H]$ 有限时, 有 $\mathrm{Ind}_H^G M \cong \mathrm{Coind}_H^G M$.

证明: 注意到

$$\mathrm{Ind}_H^G M \cong \bigoplus_{g \in G/H} M$$

而

$$\mathrm{Coind}_H^G M = \{f: \mathbb{Z}[G] \rightarrow M \mid f(hg) = hf(g)\}$$

因此完全由右陪集上的取值决定, 因此也有

$$\mathrm{Coind}_H^G M \cong \prod_{g \in H \backslash G} M$$

由于指数有限, 从而得证. □

推论 1.5.3: 当 G 是有限群的时候, 由于诱导与余诱导同构, 故有

$$H^n(G, \text{Ind}_H^G M) \cong H^n(H, M), \quad \forall n \geq 0$$

如果 H 是平凡群, 也可以得到一些重要结论.

命题 1.5.4 (加法 Hilbert 90): $L|K$ 是有限 Galois 扩张, $G = \text{Gal}(L|K)$, 则有 $L^G \cong L_G \cong K$, 并且

$$H^n(G, L) \cong H_n(G, L) \cong \begin{cases} K, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

证明: 正规基定理告诉我们存在 $x \in L$ 使得 $\{\sigma x: \sigma \in G\}$ 构成 $L|K$ 的线性空间基, 可见在这个意义下

$$L \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

因此可见

$$L_G \cong L^G \cong K$$

然后使用 H 为平凡群的 Shapiro 引理, 可见对 $n \geq 0$, 有

$$H^n(G, L) = H^n(\{e\}, K), \quad H_n(G, L) = H_n(\{e\}, K)$$

结合平凡群的 $-^H$ 与 $-_H$ 函子都是恒等函子, 恒等函子都是正合函子, 从而其高阶导出为 0, 可见正次数同调和上同调都是 0. $\square$

对有限群而言, 还可以推广到 Tate 上同调的情况.

定理 1.5.5 (Tate 上同调的 Shapiro 引理): G 是有限群, $H < G$, 设 D 是一个 H -模, 令

$$A = \text{Coind}_H^G D \cong \text{Ind}_H^G D \cong \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma D$$

有

$$\hat{H}^q(G, A) \cong \hat{H}^q(H, D), \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

证明: 给定 G -模 $\mathbb{Z}$ 的一个完备自由消解 $X_\bullet$, 将其限制到 H 上得到 $\text{Res}_H^G X_\bullet$, 可见也是 H -模 $\mathbb{Z}$ 的完备自由消解, 结合 $\text{Res}_H^G \dashv \text{Coind}_H^G$, 立刻得到有自然同构

$$\text{Hom}_G(X_\bullet, \text{Coind}_H^G D) \cong \text{Hom}_H(\text{Res}_H^G X_\bullet, D)$$

从而对两边取同调就得到

$$\hat{H}^q(G, A) \cong \hat{H}^q(H, D)$$

得证. $\square$

定义 1.5.6: H 是 G 的子群, 对含入同态 $\rho: H \rightarrow G$, 考虑遗忘函子 $\rho^\#: \mathbf{Mod}_G \rightarrow \mathbf{Mod}_H$, 显然这是一个正合函子, 从而对 G -模 M 而言存在自然的满射

$$(\rho^\# M)_H \twoheadrightarrow M_G$$

与自然的单射

$$M^G \hookrightarrow (\rho^\# M)^H$$

他们诱导了 δ -函子之间的态射，分别称为**余限制**与**限制**映射：

$$\text{Cores}_H^G: H_\bullet(H, \rho^\# M) \rightarrow H_\bullet(G, M), \quad \text{Res}_H^G: H^\bullet(G, M) \rightarrow H^\bullet(H, \rho^\# M)$$

注 1.5.7: 两个映射是因为 $H_\bullet(G, -)$ 与 $H^\bullet(G, -)$ 是导出函子，从而是万有 δ -函子，而 $H_\bullet(H, \rho^\# -)$ 与 $H^\bullet(H, \rho^\# -)$ 是 δ -函子，于是自然得到态射. $\diamond$

引理 1.5.8: $H \subset G$, M 是 G -模，则 G -map

$$\iota: M \rightarrow \text{Coind}_H^G \rho^\# M, \quad \kappa: \text{Ind}_H^G \rho^\# M \rightarrow M$$

诱导了

$$\text{Res}_H^G: H^n(G, M) \rightarrow H^n(G, \text{Coind}_H^G \rho^\# M) \cong H^n(H, \rho^\# M)$$

$$\text{Cores}_H^G: H_n(H, \rho^\# M) \cong H_n(G, \text{Ind}_H^G \rho^\# M) \rightarrow H_n(G, M)$$

证明: 可见 ι 与 κ 诱导了 δ -函子的第 0 阶态射，从而完整地诱导了 δ -函子的态射，并且可以注意到由 Shapiro 引理有

$$H^0(G, \text{Coind}_H^G \rho^\# M) \cong H^0(H, \rho^\# M) \iff (\text{Coind}_H^G \rho^\# M)^G \cong (\rho^\# M)^H$$

同理有

$$(\text{Ind}_H^G \rho^\# M)_G \cong (\rho^\# M)_H$$

于是可见 0 阶态射就是

$$M^G \rightarrow (\text{Coind}_H^G \rho^\# M)^G \rightarrow (\rho^\# M)^H, \quad (\rho^\# M)_H \rightarrow (\text{Ind}_H^G \rho^\# M)_G \rightarrow M_G$$

于是就得到我们所需要的 δ -函子. $\square$

当 $[G: H]$ 有限时，回忆有 $\text{Coind}_H^G \cong \text{Ind}_H^G$ ，于是也有

$$\text{Cores}_H^G: H^n(H, \rho^\# M) \cong H^n(G, \text{Coind}_H^G \rho^\# M) \rightarrow H^n(G, M)$$

维数移动 SECTION 1.6

本节中 G 均为有限群.

定义 1.6.1: 我们称 G -模 A 有**平凡上同调**，如果对所有子群 $g < G$ ，都有 $\widehat{H}^q(g, A) = 0$ ，对任意的 $q \in \mathbb{Z}$.

定理 1.6.2: G -模 $A = \text{Ind}_1^G D$ 有平凡上同调.

证明： 对子群 $g < G$ ，有

$$\mathbb{Z}[G] \cong \bigoplus_{\tau \in g \backslash G} \mathbb{Z}[g]\tau$$

因此可见

$$\text{Res}_g^G A \cong \bigoplus_{\tau \in g \backslash G} \text{Ind}_1^g D$$

由 Shapiro 引理可见

$$\widehat{H}^q(g, \text{Ind}_1^g D) \cong \widehat{H}^q(1, D) = 0$$

因此可见

$$\widehat{H}^q(g, A) = \widehat{H}^q\left(g, \bigoplus_{\tau \in g \backslash G} \text{Ind}_1^g D\right) \cong \bigoplus_{\tau \in g \backslash G} \widehat{H}^q(g, \text{Ind}_1^g D) = 0$$

綜上得证. □

回忆我们有两个基本的正合列

$$0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

与

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow J_G \rightarrow 0$$

因为这些都是 $\mathbb{Z}$ -自由的，因此 $\mathbb{Z}$ -系数张量 G -模 A 之后仍然正合，从而得到

$$0 \rightarrow I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow A \rightarrow 0$$

与

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow J_G \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow 0$$

由于 $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A = \text{Ind}_1^G A$ ，从而可见其上同调平凡，对任意的 $g < G$ ，拉出 Tate 上同调的长正合列得到

$$\widehat{H}^{q-1}(g, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A) \rightarrow \widehat{H}^{q-1}(g, J_G \otimes_{\mathbb{Z}} A) \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^q(g, A) \rightarrow \widehat{H}^q(g, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A)$$

由于前后都是 0，因此可见

$$\delta: \widehat{H}^{q-1}(g, J_G \otimes_{\mathbb{Z}} A) \cong \widehat{H}^q(g, A)$$

现在令 $A_1 = J_G \otimes A$ ，就得到

$$\widehat{H}^q(g, A) = \widehat{H}^{q-1}(g, A_1)$$

如此便把维数降低一维，反过来有

$$0 \rightarrow I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow A \rightarrow 0$$

得到

$$\widehat{H}^q(g, A) \cong \widehat{H}^{q+1}(g, I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A)$$

现在我们定义

$$A_m = J_G^{\otimes m} \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad A^m = I_G^{\otimes m} \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

则有

定理 1.6.3 (维数移动): 符号同上, 对整数 $m \geq 0, q \in \mathbb{Z}$ 有

$$\delta^m: \hat{H}^{q-m}(g, A_m) \cong \hat{H}^q(g, A), \quad \delta^m: \hat{H}^q(g, A) \cong \hat{H}^{q+m}(g, A^m)$$

为了统一符号, 我们令

$$A^m = \begin{cases} J_G^{\otimes m} \otimes_{\mathbb{Z}} A, & m \geq 0 \\ I_G^{\otimes m} \otimes_{\mathbb{Z}} A, & m \leq 0 \end{cases}$$

于是对任意的 $m \in \mathbb{Z}$, 总有

$$\delta^m: \hat{H}^{q-m}(g, A^m) \cong \hat{H}^q(g, A)$$

特别地, 如果取 $m = q$ 就得到

$$\hat{H}^q(G, A) \cong \hat{H}^0(G, A_q)$$

于是所有维数的 Tate 上同调都可以搬到 0 维.

定理 1.6.4: A 是 G -模, 令 $n = |G|$, 则 $\hat{H}^q(G, A)$ 是挠群, 并且有

$$n \cdot \hat{H}^q(G, A) = 0$$

证明: 首先注意到

$$\hat{H}^q(G, A) \cong \hat{H}^0(G, A_q) = A_q^G / N_G A_q$$

注意到对于任意的 $a \in A_q^G$, 都有

$$na = N_G a$$

因此可见

$$n \cdot \hat{H}^q(G, A) \cong n \cdot \hat{H}^0(G, A_q) = 0$$

得证. □

推论 1.6.5: 若 A 是 **uniquely divisible**¹ G -模, 则 A Tate 上同调平凡.

证明: 令 $n = |G|$, 由于有同构 $n: A \rightarrow A$, 从而得到同构

$$n: \hat{H}^q(g, A) \rightarrow \hat{H}^q(g, A)$$

因此可见

$$\hat{H}^q(g, A) \cong n \cdot \hat{H}^q(g, A) = 0$$

得证. □

¹唯一可除的意思就是对任意 $n > 0$, $n: A \rightarrow A, a \mapsto na$ 是同构.

特别地，由于 $\mathbb{Q}$ 是唯一可除模，故有

$$\boxed{\hat{H}^q(G, \mathbb{Q}) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z}}$$

考虑正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

由于 $\mathbb{Q}$ 的上同调消失，拉出长正合列得到

$$\hat{H}^2(G, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

而 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 上 G 的作用是平凡的，因此 cocycle 条件就变成了群同态，而边界就变成了 0，故

$$\hat{H}^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \frac{Z^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{B^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \cong \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

我们记

$$\chi(G) = \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

为 G 的**特征群**²，并且可见

$$\chi(G) = \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G^{\text{ab}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

而对

$$0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

拉长正合列得到

$$\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^{-1}(G, I_G) = \frac{\text{Ker } N_G: I_G \rightarrow I_G}{I_G^2} = I_G/I_G^2 \cong G^{\text{ab}}$$

最后再注意到

$$\hat{H}^1(G, \mathbb{Z}) = H^1(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mathbb{Z})$$

而 G 是有限群，对任意的 $\sigma \in G$ ，有

$$f(1) = f(1^2) = 2f(1) \implies f(1) = 0$$

存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\sigma^m = 1$ ，故

$$0 = f(1) = f(\sigma^m) = mf(\sigma) \implies f(\sigma) = 0$$

因此 $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mathbb{Z}) = 0$ 。综上若令 $n = |G|$ ，可以得到下表

$\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z})$	$\hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Z})$	$\hat{H}^0(G, \mathbb{Z})$	$\hat{H}^1(G, \mathbb{Z})$	$\hat{H}^2(G, \mathbb{Z})$
G^{ab}	0	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	0	$\chi(G)$

²道理在于对有限群 G 而言，有 $\text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ ，因为有限群的特征都是单位根，对 $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ，可以定义 $g \mapsto e^{2\pi i \chi(g)}$ ，反之同理可定义其逆。

Inflation、Tate 限制与余限制 SECTION 1.7

前面我们讨论了当系数模发生变化时上同调群之间的关系，现在考虑当群发生变化时上同调群之间的关系。

设 $H \subset G$ 是子群， A 是一个 G -模，则 A 当然也是一个 H -模；如果进一步 $H \triangleleft G$ ，那么 A^H 自然成为一个 G/H -模。因而自然会考虑

$$H^q(G/H, A^H), \quad H^q(G, A), \quad H^q(H, A)$$

之间的关系。

定义 1.7.1 (Inflation): 设 $H \triangleleft G$ ， A 是一个 G -模。对 $q \geq 1$ ，给定一个 q -上链

$$x: (G/H)^q \rightarrow A^H$$

定义

$$\text{Inf } x: G^q \rightarrow A$$

为

$$(\text{Inf } x)(\sigma_1, \dots, \sigma_q) = x(\sigma_1 H, \dots, \sigma_q H)$$

由于

$$\partial \circ \text{Inf} = \text{Inf} \circ \partial,$$

从而 Inf 将上循环映到上循环，将上边缘映到上边缘，因此诱导同态

$$\text{Inf}_H^G: H^q(G/H, A^H) \rightarrow H^q(G, A)$$

称为 **膨胀映射**。

注 1.7.2: 与限制映射不同，膨胀映射的定义要求 $H \triangleleft G$ ，因为只有此时 G/H 才是群，并且 A^H 才自然成为一个 G/H -模。 $\diamond$

命题 1.7.3: 设 $H \triangleleft G$ ， $f: A \rightarrow B$ 是 G -模同态，则膨胀映射与 f 诱导的上同调映射交换，即有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^q(G/H, A^H) & \xrightarrow{\text{Inf}} & H^q(G, A) \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ H^q(G/H, B^H) & \xrightarrow{\text{Inf}} & H^q(G, B) \end{array}$$

同理，限制映射也与 G -模同态诱导的上同调映射交换。

命题 1.7.4: 设

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

是 G -模短正合列， $H \subset G$ ， $H \triangleleft G$ ，并且

$$0 \rightarrow A^H \rightarrow B^H \rightarrow C^H \rightarrow 0$$

仍然正合，则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} H^q(G/H, C^H) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G/H, A^H) \\ \text{Inf}_q \downarrow & & \downarrow \text{Inf}_{q+1} \\ H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) \end{array}$$

定理 1.7.5 (Inflation–Restriction): 设 $H \triangleleft G$, A 是一个 G -模, 则有正合列

$$0 \rightarrow H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{Inf}_H^G} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{Res}_H^G} H^1(H, A)$$

证明: 我们首先证明 Inf_H^G 是单射. 设

$$x: G/H \rightarrow A^H$$

是一个 1-上循环, 并且 $\text{Inf } x$ 是 G -模 A 的一个 1-上边缘, 于是存在 $a \in A$ 使得

$$x(\sigma H) = \sigma a - a.$$

对任意 $\tau \in H$, 由于

$$\sigma H = \sigma \tau H,$$

可见

$$\sigma a - a = \sigma \tau a - a,$$

从而

$$\tau a = a.$$

因此 $a \in A^H$, 所以

$$x(\sigma H) = (\sigma H)a - a$$

本身就是 G/H -模 A^H 的一个 1-上边缘, 从而 Inf_H^G 是单射.

下面证明

$$\text{Im } \text{Inf}_H^G = \text{Ker } \text{Res}_H^G.$$

对一个 1-上循环

$$x: G/H \rightarrow A^H,$$

若 $\tau \in H$, 则

$$(\text{Res} \circ \text{Inf } x)(\tau) = x(H) = x(1).$$

由

$$x(1) = x(1 \cdot 1) = x(1) + x(1)$$

可知 $x(1) = 0$, 所以

$$\text{Res} \circ \text{Inf} = 0.$$

因此

$$\text{Im } \text{Inf}_H^G \subseteq \text{Ker } \text{Res}_H^G.$$

反之, 设 $x: G \rightarrow A$ 是一个 1-上循环, 并且

$$[x] \in \text{Ker Res}_H^G.$$

于是存在 $a \in A$ 使得

$$x(\tau) = \tau a - a, \quad \forall \tau \in H.$$

令

$$\rho(\sigma) = \sigma a - a,$$

则 ρ 是 G -模 A 的一个 1-上边缘. 令

$$x' = x - \rho,$$

则 $[x'] = [x]$, 并且

$$x'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in H.$$

对任意 $\sigma \in G, \tau \in H$, 由上循环条件得到

$$x'(\sigma\tau) = x'(\sigma) + \sigma x'(\tau) = x'(\sigma).$$

因此 $x'(\sigma)$ 只依赖于陪集 σH .

另一方面, 由于 $H \triangleleft G$, 对任意 $\tau \in H$ 有

$$\tau\sigma H = \sigma H.$$

而

$$x'(\tau\sigma) = x'(\tau) + \tau x'(\sigma) = \tau x'(\sigma),$$

所以

$$\tau x'(\sigma) = x'(\sigma).$$

因此

$$x'(\sigma) \in A^H.$$

于是可以定义

$$y: G/H \rightarrow A^H, \quad y(\sigma H) = x'(\sigma).$$

容易验证 y 是一个 1-上循环, 并且

$$\text{Inf } y = x'.$$

因而

$$[x] \in \text{Im Inf}_H^G.$$

综上得证. □

高维也有类似的结论, 但是需要假设低维上同调消失.

定理 1.7.6: 设 $H \triangleleft G$, A 是一个 G -模, $q \geq 1$. 如果

$$H^i(H, A) = 0, \quad i = 1, \dots, q-1,$$

则有正合列

$$0 \rightarrow H^q(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{Inf}_H^G} H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}_H^G} H^q(H, A).$$

证明: 对 q 归纳. 当 $q = 1$ 时就是上面的 Inflation–Restriction 定理. 考虑上一节的短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow J_G \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow 0$$

令

$$B = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad C = J_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

由于 B 是 G -诱导模, 限制到 H 上仍然是 H -诱导模, 从而上同调消失

$$H^i(G, B) = H^i(H, B) = 0, \quad i > 0$$

因此连接同态给出维数平移同构

$$H^i(G, C) \cong H^{i+1}(G, A), \quad H^i(H, C) \cong H^{i+1}(H, A)$$

又由假设

$$H^i(H, A) = 0, \quad 1 \leq i \leq q-1$$

可见

$$H^i(H, C) = 0, \quad 1 \leq i \leq q-2$$

于是对 C 使用归纳假设, 再结合膨胀、限制与连接同态的相容性, 经过维数平移即可得到 A 在第 q 维的结论. $\square$

下面把限制映射推广到所有 Tate 上同调维数.

定义 1.7.7 (Tate 限制映射): 设 $H \subset G$, A 是一个 G -模. 在第 0 维定义

$$\text{Res}_H^G: \hat{H}^0(G, A) \rightarrow \hat{H}^0(H, A)$$

为

$$a + N_G A \mapsto a + N_H A, \quad a \in A^G \subseteq A^H.$$

对任意 $q \in \mathbb{Z}$, 定义

$$\text{Res}_H^G: \hat{H}^q(G, A) \rightarrow \hat{H}^q(H, A)$$

为唯一满足以下两个条件的一族同态:

(1) 在 $q = 0$ 时由上面的公式给出;

(2) 对任意 G -模短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

限制映射与连接同态交换, 即

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}^q(G, C) & \xrightarrow{\delta_G} & \widehat{H}^{q+1}(G, A) \\ \text{Res}_H^G \downarrow & & \downarrow \text{Res}_H^G \\ \widehat{H}^q(H, C) & \xrightarrow{\delta_H} & \widehat{H}^{q+1}(H, A) \end{array}$$

注 1.7.8: 沿用上一节维数平移的记号, 设

$$\delta^q: \widehat{H}^0(G, A_q) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^q(G, A)$$

以及

$$\delta^q: \widehat{H}^0(H, A_q) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^q(H, A).$$

则实际上

$$\text{Res}_H^{G,q} = \delta^q \circ \text{Res}_H^{G,0} \circ (\delta^q)^{-1}.$$

因而第 0 维的限制映射以及与 δ 的相容性唯一决定了所有维数的限制映射. 特别地, 在正维数上这个定义与前面通过限制上链所得的限制映射一致. $\diamond$

注 1.7.9: 膨胀映射没有完全类似的所有维数定义. 这是因为对于短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

取 H -不变量之后

$$0 \rightarrow A^H \rightarrow B^H \rightarrow C^H \rightarrow 0$$

一般不再正合, 因此无法像限制映射一样无条件地利用连接同态进行维数平移. $\diamond$

由

$$\widehat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}, \quad \widehat{H}^{-2}(H, \mathbb{Z}) \cong H^{\text{ab}},$$

第 -2 维限制映射给出了一个重要的群论同态.

定义 1.7.10 (Transfer): 设 $H \subset G$, 定义

$$\text{Ver}_H^G: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$$

为同构

$$G^{\text{ab}} \cong \widehat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}), \quad H^{\text{ab}} \cong \widehat{H}^{-2}(H, \mathbb{Z})$$

下由

$$\text{Res}_H^G: \widehat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \widehat{H}^{-2}(H, \mathbb{Z})$$

所诱导的同态, 称为**转移映射**, 也称作**Verlagerung**.

下面定义 Tate 上同调所有维数的余限制映射.

定义 1.7.11 (Tate 余限制映射): 设 $H \subset G$, A 是一个 G -模. 在第 -1 维定义

$$\text{Cores}_H^G: \widehat{H}^{-1}(H, A) \rightarrow \widehat{H}^{-1}(G, A)$$

为

$$a + I_H A \mapsto a + I_G A, \quad a \in \text{Ker } N_H.$$

在第 0 维, 若

$$G = \coprod_{\sigma \in G/H} \sigma H$$

是左陪集分解, 则对 $a \in A^H$ 定义相对范

$$N_{G/H}a = \sum_{\sigma \in G/H} \sigma a.$$

由于 $a \in A^H$, 这个定义与陪集代表元的选择无关, 并且

$$N_{G/H}a \in A^G.$$

定义

$$\text{Cores}_H^G: \widehat{H}^0(H, A) \rightarrow \widehat{H}^0(G, A)$$

为

$$a + N_H A \mapsto N_{G/H}a + N_G A.$$

对任意 $q \in \mathbb{Z}$, 定义

$$\text{Cores}_H^G: \widehat{H}^q(H, A) \rightarrow \widehat{H}^q(G, A)$$

为唯一满足以下两个条件的一族同态:

- (1) 在 $q = 0$ 时由上面的相对范给出;
- (2) 对任意 G -模短正合列, 余限制映射与连接同态交换:

$$\text{Cores}_H^G \circ \delta = \delta \circ \text{Cores}_H^G.$$

注 1.7.12: 与限制映射完全类似, 由维数平移可见所有维数的余限制都由第 0 维的余限制唯一决定. 特别地, 上面的定义在第 -1 维恢复出

$$a + I_H A \mapsto a + I_G A.$$

此外还要注意到定义的良好性由 $N_{G/H} \circ N_H = N_G$ 给出. ◇

命题 1.7.13: 在同构

$$\widehat{H}^{-2}(H, \mathbb{Z}) \cong H^{\text{ab}}, \quad \widehat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}$$

下, 第 -2 维余限制映射

$$\text{Cores}_H^G: \widehat{H}^{-2}(H, \mathbb{Z}) \rightarrow \widehat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z})$$

正好对应包含同态 $H \hookrightarrow G$ 在阿贝尔化上诱导的自然同态

$$H^{\text{ab}} \rightarrow G^{\text{ab}}, \quad \sigma H' \mapsto \sigma G'.$$

因此在第 -2 维有两个方向相反的自然同态

$$G^{\text{ab}} \xrightarrow{\text{Ver}_H^G} H^{\text{ab}}, \quad H^{\text{ab}} \xrightarrow{\text{Cores}_H^G} G^{\text{ab}},$$

其中前者来自限制，后者来自余限制。

定理 1.7.14: 设 $H \subset G$, A 是一个 G -模，则对任意 $q \in \mathbb{Z}$ 都有

$$\text{Cores}_H^G \circ \text{Res}_H^G = [G : H] \cdot \text{id}_{\widehat{H}^q(G, A)}.$$

证明: 先考虑 $q = 0$. 设

$$\bar{a} = a + N_G A \in \widehat{H}^0(G, A), \quad a \in A^G.$$

则

$$\text{Res}_H^G(\bar{a}) = a + N_H A,$$

从而

$$\text{Cores}_H^G \text{Res}_H^G(\bar{a}) = N_{G/H} a + N_G A.$$

由于 $a \in A^G$ ，所以对每一个陪集代表元 σ 都有

$$\sigma a = a,$$

因而

$$N_{G/H} a = \sum_{\sigma \in G/H} \sigma a = [G : H] a.$$

所以

$$\text{Cores}_H^G \circ \text{Res}_H^G = [G : H] \cdot \text{id}$$

在第 0 维成立. 一般的 $q \in \mathbb{Z}$ 由限制、余限制与连接同态的相容性，再利用维数平移立即得到. $\square$

命题 1.7.15: 设 $f: A \rightarrow B$ 是 G -模同态，则对任意 $q \in \mathbb{Z}$ ，限制与余限制均与 f 诱导的 Tate 上调映射交换：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}^q(G, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & \widehat{H}^q(G, B) \\ \text{Res}_H^G \downarrow & & \downarrow \text{Res}_H^G \\ \widehat{H}^q(H, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & \widehat{H}^q(H, B) \end{array}$$

以及

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}^q(H, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & \widehat{H}^q(H, B) \\ \text{Cores}_H^G \downarrow & & \downarrow \text{Cores}_H^G \\ \widehat{H}^q(G, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & \widehat{H}^q(G, B). \end{array}$$

证明：考虑 $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$ 上的两个 δ -函子

$$T_G^q(A) = \hat{H}^q(G, A), \quad T_H^q(A) = \hat{H}^q(H, \text{Res}_H^G A).$$

前面定义的限制与余限制分别给出 δ -函子之间的态射

$$\text{Res}_H^G: T_G^\bullet \rightarrow T_H^\bullet, \quad \text{Cores}_H^G: T_H^\bullet \rightarrow T_G^\bullet.$$

由于 δ -函子态射在每一维都是自然变换，因此对任意 G -模同态 $f: A \rightarrow B$ ，相应交换图自动交换. $\square$

由于有限群的 Tate 上同调都是挠群，我们记

$$\hat{H}^q(G, A)_p$$

为其中所有 p -幂阶元素组成的 p -primary part.

定理 1.7.16 (Sylow 子群上的限制与余限制): 设 G_p 是 G 的一个 p -Sylow 子群，则

$$\text{Res}_{G_p}^G: \hat{H}^q(G, A)_p \rightarrow \hat{H}^q(G_p, A)$$

是单射，并且

$$\text{Cores}_{G_p}^G: \hat{H}^q(G_p, A) \rightarrow \hat{H}^q(G, A)_p$$

是满射.

证明：由上面的定理有

$$\text{Cores}_{G_p}^G \circ \text{Res}_{G_p}^G = [G : G_p] \cdot \text{id}.$$

由于

$$\gcd([G : G_p], p) = 1,$$

所以乘以 $[G : G_p]$ 在 p -primary 群

$$\hat{H}^q(G, A)_p$$

上是一个自同构.

因此若

$$x \in \hat{H}^q(G, A)_p$$

满足

$$\text{Res}_{G_p}^G(x) = 0,$$

则

$$[G : G_p]x = \text{Cores}_{G_p}^G \text{Res}_{G_p}^G(x) = 0.$$

由于乘以 $[G : G_p]$ 是自同构，所以 $x = 0$ ，从而限制映射是单射.

另一方面，由于

$$|G_p| \cdot \hat{H}^q(G_p, A) = 0,$$

所以 $\hat{H}^q(G_p, A)$ 中所有元素的阶都是 p -幂, 从而

$$\text{Cores}_{G_p}^G(\hat{H}^q(G_p, A)) \subseteq \hat{H}^q(G, A)_p.$$

又因为

$$\text{Cores}_{G_p}^G \circ \text{Res}_{G_p}^G$$

在 $\hat{H}^q(G, A)_p$ 上是自同构, 所以

$$\hat{H}^q(G, A)_p \subseteq \text{Im } \text{Cores}_{G_p}^G.$$

因而余限制映射满射. □

推论 1.7.17: 设对每个素数 p , G_p 是 G 的一个 p -Sylow 子群. 如果

$$\hat{H}^q(G_p, A) = 0$$

对所有 p 都成立, 则

$$\hat{H}^q(G, A) = 0.$$

证明: 由于

$$\text{Res}_{G_p}^G: \hat{H}^q(G, A)_p \hookrightarrow \hat{H}^q(G_p, A)$$

是单射, 而右边为 0, 所以

$$\hat{H}^q(G, A)_p = 0$$

对所有素数 p 都成立. 又因为 $\hat{H}^q(G, A)$ 是挠群, 并且

$$\hat{H}^q(G, A) = \bigoplus_p \hat{H}^q(G, A)_p,$$

因而

$$\hat{H}^q(G, A) = 0.$$

□

杯积 SECTION 1.8

给定两个 G -模 A 与 B , 我们希望把一个 A -系数的 p -阶上同调与 B -系数的 q -阶上同调相乘, 即选择

$$a \in \hat{H}^p(G, A), \quad b \in \hat{H}^q(G, B)$$

得到一个

$$a \smile b \in \hat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

即希望得到一个双线性的映射, 即**杯积**

$$\smile: \hat{H}^p(G, A) \times \hat{H}^q(G, B) \rightarrow \hat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

现在考虑零维的情况，考虑

$$\hat{H}^0(G, A) = \frac{A^G}{N_G A}, \quad \hat{H}^0(G, B) = \frac{B^G}{N_G B}$$

对 $a \in A^G$, $b \in B^G$, 可以看出

$$a \otimes_{\mathbb{Z}} b \in (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G$$

中，因此可以在零维时自然定义

$$a \smile b := a \otimes_{\mathbb{Z}} b$$

容易注意到对 $b \in B^G$, 有

$$N_G x \otimes_{\mathbb{Z}} b = \sum_{\sigma \in G} \sigma x \otimes_{\mathbb{Z}} b = \sum_{\sigma \in G} \sigma x \otimes_{\mathbb{Z}} \sigma b = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x \otimes_{\mathbb{Z}} b) = N_G(x \otimes_{\mathbb{Z}} b)$$

因此在同调群上是良定义的，即得到

$$\bar{a} \smile \bar{b} := \overline{a \otimes_{\mathbb{Z}} b}$$

现在考虑定义高维情况，给定 G -模正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

如果张量 B 之后仍然是正合列

$$0 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow A' \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow A'' \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow 0$$

现在取 $a'' \in \hat{H}^q(G, A'')$, $b \in \hat{H}^q(G, B)$, 则要求

$$\delta(a'' \smile b) = (\delta a'') \smile b$$

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^p(G, A'') & \times & \hat{H}^q(G, B) & \xrightarrow{\smile} & \hat{H}^{p+q}(G, A'' \otimes_{\mathbb{Z}} B) \\ \delta \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow \delta \\ \hat{H}^{p+1}(G, A) & \times & \hat{H}^q(G, B) & \xrightarrow{\smile} & \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \end{array}$$

对 G -模短正合列

$$0 \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow B'' \rightarrow 0$$

如果张量 A 之后仍然正合

$$0 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B' \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B'' \rightarrow 0$$

则对 $a \in \hat{H}^p(G, A)$, $b'' \in \hat{H}^q(G, B'')$, 有

$$\delta(a \smile b'') = (-1)^p a \smile \delta b''$$

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{H}^p(G, A) & \times & \widehat{H}^q(G, B'') & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B'') \\
\downarrow \text{id} & & \downarrow \delta & & \downarrow (-1)^p \delta \\
\widehat{H}^p(G, A) & \times & \widehat{H}^{q+1}(G, B) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)
\end{array}$$

现在我们要说明这些条件唯一决定 cup product, 回忆我们有统一符号

$$A^m = \begin{cases} J_G^{\otimes m} \otimes_{\mathbb{Z}} A, & m \geq 0 \\ I_G^{\otimes m} \otimes_{\mathbb{Z}} A, & m \leq 0 \end{cases}$$

考虑我们有正合列

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow A' \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow A'' \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow 0
\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow B'' \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B' \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B'' \rightarrow 0
\end{aligned}$$

由于 I_G 与 J_G 都是自由 $\mathbb{Z}$ -模, 从而平坦, 故可以得到正合列

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow A^q \rightarrow (A')^q \rightarrow (A'')^q \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q \rightarrow (A' \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q \rightarrow (A'' \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q \rightarrow 0
\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow B^p \rightarrow (B')^p \rightarrow (B'')^p \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^p \rightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} B')^p \rightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} B'')^p \rightarrow 0
\end{aligned}$$

考虑我们有同构

$$\begin{aligned}
\delta^p: \widehat{H}^0(G, A^p) &\cong \widehat{H}^p(G, A) \\
\delta^q: \widehat{H}^0(G, B^q) &\cong \widehat{H}^q(G, B)
\end{aligned}$$

于是有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{H}^0(G, A^p) \times \widehat{H}^0(G, B^q) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H}^0(G, A^p \otimes_{\mathbb{Z}} B^q) & \xrightarrow{=} & \widehat{H}^0(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B^q)^p) \\
(\delta^p, 1) \downarrow & & \delta^p \downarrow & \swarrow \delta^p & \\
\widehat{H}^p(G, A) \times \widehat{H}^0(G, B^q) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H}^p(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B^q) & \xrightarrow{=} & \widehat{H}^p(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q) \\
(1, \delta^q) \downarrow & & (-1)^{p \cdot q} \delta^q \downarrow & & (-1)^{p \cdot q} \delta^q \\
\widehat{H}^p(G, A) \times \widehat{H}^q(G, B) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) & &
\end{array}$$

因此设

$$\alpha = \delta^p \alpha_0 \in \widehat{H}^p(G, A), \quad \beta = \delta^q \beta_0 \in \widehat{H}^q(G, B)$$

定义

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq} \delta_B^q \delta_A^p (\alpha_0 \smile \beta_0)$$

命题 1.8.1: 令 a_p 为 A 的 p -cocycles, b_q 为 B 的 q -cocycles, 则有

$$\overline{a_0} \smile \overline{b_q} = \overline{a_0 \otimes_{\mathbb{Z}} b_q}, \quad \overline{a_p} \smile \overline{b_0} = \overline{a_p \otimes_{\mathbb{Z}} b_0}$$

证明: $\overline{a_0} \in \hat{H}^0(G, A) = \frac{A^G}{N_G A}$, 可见 $a_0 \in A^G$, 于是可以定义

$$\varphi_{a_0}: B \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B, \quad b \mapsto a_0 \otimes_{\mathbb{Z}} b$$

这个映射是 G -线性的, 因为

$$g(a_0 \otimes_{\mathbb{Z}} b) = ga_0 \otimes_{\mathbb{Z}} gb = a_0 \otimes_{\mathbb{Z}} gb$$

因此诱导上同调映射

$$\hat{H}^q(G, B) \rightarrow \hat{H}^q(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B), \quad \overline{b_q} \mapsto \overline{a_0 \otimes_{\mathbb{Z}} b_q}$$

现在我们要说明这个映射就是 $\overline{a_0} \smile -$, 这只需要在 $q = 0$ 的时候注意到二者相等, 而他们都满足 cup product 的公理, 因此维数移动告诉我们二者在任意次数相等. $\square$

而在这个意义下, 我们可以验证一般意义下的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^p(G, A'') \times \hat{H}^0(G, B^q) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & \hat{H}^p(G, (A'' \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q) & \xrightarrow{\quad \delta \quad} & \hat{H}^{p+1}(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q) \\ \downarrow (1, \delta^q) & \searrow (\delta, 1) & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \hat{H}^{p+1}(G, A) \times \hat{H}^0(G, B^q) & \xrightarrow{(-1)^{pq} \delta^q} & \hat{H}^{p+1}(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^q) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow (-1)^{(p+1)q} \delta^q \\ \hat{H}^p(G, A'') \times \hat{H}^q(G, B) & \xrightarrow{(1, \delta^q)} & \hat{H}^{p+q}(G, (A'' \otimes_{\mathbb{Z}} B)) & \xrightarrow{\quad \delta \quad} & \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \\ \downarrow (\delta, 1) & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \hat{H}^{p+1}(G, A) \times \hat{H}^q(G, B) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) & & \end{array}$$

与

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^0(G, A^p) \times \hat{H}^q(G, B'') & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & \hat{H}^q(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B'')^p) & \xrightarrow{(-1)^0 \delta = \delta} & \hat{H}^{q+1}(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^p) \\ \downarrow (\delta^p, 1) & \searrow (1, \delta) & \downarrow \delta^p & \searrow & \downarrow \delta^p \\ \hat{H}^0(G, A^p) \times \hat{H}^{q+1}(G, B) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & \hat{H}^{q+1}(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^p) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{H}^p(G, A) \times \hat{H}^q(G, B'') & \xrightarrow{(\delta^p, 1)} & \hat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B'') & \xrightarrow{\quad \delta \quad} & \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \\ \downarrow (1, \delta) & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \hat{H}^{p+1}(G, A) \times \hat{H}^{q+1}(G, B) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) & & \end{array}$$

命题 1.8.2: 给定 G -同态 $f: A \rightarrow A', B \rightarrow B'$, 则有

$$\overline{f}(a) \smile \overline{g}(b) = \overline{f \otimes_{\mathbb{Z}} g}(a \smile b)$$

即杯积是对两个系数变量都自然的双自然变换.

证明：这对 $p = q = 0$ 是显然的，然后其他维数通过维数移动即得。 $\square$

命题 1.8.3： A, B 是 G -模，令 $g < G$ 为子群，对 $\bar{a} \in \hat{H}^p(G, A), \bar{b} \in \hat{H}^q(G, B)$ ，有

$$\text{Res}_g^G(\bar{a} \smile \bar{b}) = \text{Res}_g^G \bar{a} \smile \text{Res}_g^G \bar{b} \in \hat{H}^{p+q}(g, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

对 $\bar{a} \in \hat{H}^p(G, A)$ 与 $\bar{b} \in \hat{H}^q(g, B)$ 有

$$\text{Cores}_g^G(\text{Res}_g^G \bar{a} \smile \bar{b}) = \bar{a} \smile \text{Cores}_g^G \bar{b} \in \hat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

证明：先考虑零维的情况，对 $a \in A^G, b \in B^g$ ，有

$$\text{Cores}_g^G(a \otimes b) = \sum_{\sigma \in G/g} \sigma(a \otimes b) = a \otimes \left(\sum_{\sigma \in G/g} \sigma b \right) = a \otimes N_{G/g} b$$

右边即 $\bar{a} \smile \text{Cores}_g^G \bar{b}$ ，所以在零维情况下成立。再维数移动到其他情况即可。 $\square$

定理 1.8.4： 对 $\bar{a} \in \hat{H}^p(G, A), \bar{b} \in \hat{H}^q(G, B)$ 与 $\bar{c} \in \hat{H}^r(G, C)$ ，有反交换律

$$\bar{a} \smile \bar{b} = (-1)^{p \cdot q} (\bar{b} \smile \bar{a})$$

与结合律

$$(\bar{a} \smile \bar{b}) \smile \bar{c} = \bar{a} \smile (\bar{b} \smile \bar{c})$$

等号在典范同构 $\hat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \cong \hat{H}^{p+q}(G, B \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ 与 $\hat{H}^{p+q+r}(G, (A \otimes B) \otimes C) \cong \hat{H}^{p+q+r}(G, A \otimes (B \otimes C))$ 意义下成立。

证明：仍旧 $p = q = 0$ 显然，剩下的维数移动即可。 $\square$

现在我们来计算一些显式结果。下面令 a_p 为 A 的 p -cocycles, b_q 为 B 的 q -cocycles, 令 $\bar{a}_p$ 与 $\bar{b}_q$ 代表其对应同调类。

引理 1.8.5： 有 $\bar{a}_1 \smile \bar{b}_{-1} = \bar{x}_0 \in \hat{H}^0(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ ，并且有

$$x_0 = \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1}$$

证明：取 $A' = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A$ ，故其上同调平凡，从而有 $\hat{H}^1(G, A') = 0$ ，通过短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

可以把 A 嵌入 A' ，而 $a_1 \in Z^1(G, A)$ 也可以嵌入进 $Z^1(G, A')$ ，而 $\hat{H}^1(G, A') = 0$ ，我们知道 $a_1 \in B^1(G, A')$ ，即存在一个 $a'_0 \in A'$ 使得

$$a_1 = \partial a'_0 \implies a_1(\tau) = \tau a'_0 - a'_0$$

再把 a'_0 投影到商模 $A'' = A'/A$ 中，记其像为 a''_0 ，由于对任意的 $\tau \in G$ ，都有

$$\tau a'_0 - a'_0 = a_1(\tau) \in A \implies \tau a''_0 = a''_0 \implies a''_0 \in (A'')^G$$

于是由连接映射的定义可见

$$\overline{a_1} = \delta(\overline{a_0''})$$

因此可见

$$\begin{aligned} \overline{a_1} \smile \overline{b_{-1}} &= \delta(\overline{a_0''}) \smile \overline{b_{-1}} = \delta(\overline{a_0''} \smile \overline{b_{-1}}) = \delta(\overline{a_0'' \otimes_{\mathbb{Z}} b_{-1}}) = \overline{\partial(a_0' \otimes_{\mathbb{Z}} b_{-1})} \\ &= \overline{N_G(a_0' \otimes_{\mathbb{Z}} b_{-1})} = \overline{\sum_{\tau \in G} \tau a_0' \otimes_{\mathbb{Z}} \tau b_{-1}} = \overline{\sum_{\tau \in G} (a_1(\tau) + a_0') \otimes_{\mathbb{Z}} \tau b_{-1}} \\ &= \overline{\sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \tau b_{-1} + a_0' \otimes_{\mathbb{Z}} N_G b_{-1}} \\ &= \overline{\sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \tau b_{-1}} \end{aligned}$$

最后一个等式是因为 $N_G b_{-1} = 0$. □

现在特别取 $B = \mathbb{Z}$, 由于

$$\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}$$

对 $\sigma \in G$, 记其在 $G^{\text{ab}} \cong \hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z})$ 中的对应元素为 $\bar{\sigma}$, 则有:

引理 1.8.6: $\overline{a_1} \smile \bar{\sigma} = \overline{a_1(\sigma)} \in \hat{H}^{-1}(G, A)$.

证明: 考虑正合列

$$0 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} I_G \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \rightarrow A \rightarrow 0$$

得到同构 $\delta: \hat{H}^{-1}(G, A) \rightarrow \hat{H}^0(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} I_G)$, 因此只需要检查

$$\delta(\overline{a_1} \smile \bar{\sigma}) = \delta(\overline{a_1(\sigma)})$$

即可, 注意到

$$\delta(\overline{a_1(\sigma)}) = \overline{x_0}, \quad x_0 = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \tau$$

另一方面, 同构 $\delta: \hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^{-1}(G, I_G)$ 给出 $\delta \bar{\sigma} = \overline{\sigma - 1}$, 因此有

$$\delta(\overline{a_1} \smile \bar{\sigma}) = -(\overline{a_1} \smile \delta \bar{\sigma}) = -\overline{a_1} \smile \overline{\sigma - 1} = \overline{y_0}$$

由上面的引理得到

$$y_0 = - \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \tau(\sigma - 1) = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \tau \sigma$$

等式由 $a_1(\tau \sigma) = \tau a_1(\sigma) + a_1(\tau)$ 给出, 于是可以注意到

$$y_0 - x_0 = N_G(a_1(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} (\sigma - 1))$$

因此可见 $\overline{x_0} = \overline{y_0}$, 故得证. □

命题 1.8.7: $\overline{a_2} \smile \bar{\sigma} = \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)} \in \hat{H}^0(G, A)$.

证明：我们再次考虑 G -模

$$A' = \mathbb{Z}[G] \otimes A$$

以及短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0, \quad A'' = J_G \otimes A.$$

由于

$$H^2(G, A') = 0,$$

存在一个 1-上链

$$a'_1 \in A'_1$$

使得

$$a_2 = \partial a'_1,$$

即

$$a_2(\tau, \sigma) = \tau a'_1(\sigma) - a'_1(\tau\sigma) + a'_1(\tau). \quad (*)$$

设 a''_1 为 a'_1 在 A'' 中的像, 则 a''_1 是 A'' 的一个 1-上循环, 并且

$$\overline{a_2} = \delta(\overline{a''_1}).$$

因此

$$\begin{aligned} \overline{a_2} \smile \overline{\sigma} &= \delta(\overline{a''_1}) \smile \overline{\sigma} \stackrel{(5.1)}{=} \delta(\overline{a''_1} \smile \overline{\sigma}) \\ &\stackrel{(5.7)}{=} \delta(\overline{a''_1(\sigma)}) = \overline{\partial(a''_1(\sigma))} = \overline{\sum_{\tau \in G} \tau a'_1(\sigma)}. \end{aligned}$$

再由 (*) 可得

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{\tau \in G} \tau a'_1(\sigma)} &= \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma) + \sum_{\tau \in G} a'_1(\tau\sigma) - \sum_{\tau \in G} a'_1(\tau)} \\ &= \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)}, \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{\overline{a_2} \smile \overline{\sigma} = \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)}}$$

□

循环群的上同调 SECTION 1.9

令 G 是一个有限循环群, 生成元为 σ , 阶为 n , 则有

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\sigma^i, \quad N_G = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-1}$$

由于

$$\sigma^k - 1 = (\sigma - 1)(\sigma^{k-1} + \cdots + 1)$$

因此可见 I_G 是主理想, 由 $\sigma - 1$ 生成, 即

$$I_G = \mathbb{Z}[G] \cdot (\sigma - 1)$$

定理 1.9.1 (循环群 Tate 上同调周期 2): G 是循环群, A 是 G -模, 则

$$\hat{H}^q(G, A) \cong \hat{H}^{q+2}(G, A), \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

证明: 我们先证明 -1 次与 1 次同构, 再使用维数移动. 对 $x \in Z^1(G, A)$, 满足

$$x(gh) = x(g) + gx(h)$$

容易推出 $x(1) = 0$, 现在令 $a = x(\sigma)$, 则有

$$x(\sigma^k) = a + \sigma a + \cdots + \sigma^{k-1}a$$

由于 $\sigma^n = 1$, 所以必须有

$$0 = x(1) = x(\sigma^n) = N_G a$$

可见 $a \in \text{Ker } N_G$. 反之对 $a \in \text{Ker } N_G$, 可以定义

$$x(\sigma^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i a, \quad x(1) = 0$$

容易验证这满足上闭链条件, 即 $x \in Z^1(G, A)$, 从而我们可以给出同构

$$Z^1(G, A) \rightarrow \text{Ker } N, \quad x \mapsto x(\sigma)$$

此时再注意上边缘 $x \in B^1(G, A)$ 满足存在 $b \in A$

$$x(g) = gb - b$$

于是有

$$x(\sigma) = (\sigma - 1)b \in I_G A$$

因此有同构

$$B^1(G, A) \rightarrow I_G A, \quad x \mapsto x(\sigma)$$

综上, 上面的同构给出

$$\hat{H}^1(G, A) \cong \frac{\text{Ker } N_G}{I_G A} \cong \hat{H}^{-1}(G, A), \quad [x] \mapsto [x(\sigma)]$$

最后对任意的 $q \in \mathbb{Z}$, 由维数移动有

$$\hat{H}^q(G, A) \cong \hat{H}^{-1}(G, A^{q+1}) \cong \hat{H}^1(G, A^{q+1}) \cong \hat{H}^{q+2}(G, A)$$

特别地, 对 $q \in \mathbb{Z}$, 有

$$\hat{H}^{2q}(G, A) \cong A^G / N_G A, \quad \hat{H}^{2q+1}(G, A) \cong \text{Ker } N_G / I_G A$$

□

注 1.9.2: 2-周期性也有更直接的解释, 即循环群的可以给出周期为 2 的完备自由消解, 令

$$D: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G], \quad g \mapsto (\sigma - 1)g$$

可见

$$ND = DN = \sigma^n - 1 = 0$$

容易得到正合列

$$\cdots \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \cdots$$

作用 $\text{Hom}_G(-, A)$ 之后即得到

$$\cdots \xrightarrow{D} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{D} A \xrightarrow{N} \cdots$$

于是立刻得到 2-周期性. ◇

现在给定短正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

利用周期-2 的特性, 可以得到:

$$\hat{H}^{-1}(G, A) \rightarrow \hat{H}^{-1}(G, B) \rightarrow \hat{H}^{-1}(G, C) \rightarrow \hat{H}^0(G, A) \rightarrow \hat{H}^0(G, B) \rightarrow \hat{H}^0(G, C) \rightarrow \hat{H}(G, A)$$

而

$$\hat{H}^{-1}(G, A) \cong \hat{H}^1(G, A)$$

于是有

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{H}^{-1}(G, A) & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G, B) & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \hat{H}^0(G, C) & & & & \hat{H}^{-1}(G, C) \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & \hat{H}^0(G, B) & \longleftarrow & \hat{H}^0(G, A) & \end{array}$$

在每一处都正合.

定义 1.9.3: A 是 Abel 群, f, g 为其自同态, 满足

$$f \circ g = g \circ f = 0 \implies \text{Im } f \subset \text{Ker } g, \quad \text{Im } g \subset \text{Ker } f$$

则若指数都有限, 则我们可以定义其 **Herbrand quotient**

$$q_{f,g}(A) = \frac{(\text{Ker } f : \text{Im } g)}{(\text{Ker } g : \text{Im } f)}$$

回忆我们有

$$D \circ N = N \circ D = 0$$

而

$$\text{Ker } D = A^G, \quad \text{Im } N = N_G A, \quad \text{Im } D = I_G A$$

所以可见如果同调群 $\hat{H}^0(G, A)$ 与 $\hat{H}^{-1}(G, A)$ 都是有限群, 则可以定义

$$q_{D,N}(A) = \frac{|\hat{H}^0(G, A)|}{|\hat{H}^{-1}(G, A)|} = \frac{|\hat{H}^2(G, A)|}{|\hat{H}^1(G, A)|}$$

我们称这使得两个同调群都有限的 G -模 A 为 **Herbrand module**.

定义 1.9.4: G 是循环群, A 是 G -模, 则定义

$$h(A) = \frac{|\hat{H}^0(G, A)|}{|\hat{H}^{-1}(G, A)|} = \frac{|\hat{H}^2(G, A)|}{|\hat{H}^1(G, A)|}$$

定理 1.9.5 (h 是乘性的): G 是循环群, 给定 G -模正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

则在任意两个有定义的情况下, 第三个都有定义, 并且满足

$$h(B) = h(A) \cdot h(C)$$

证明: 考虑正合图

$$\begin{array}{ccccc}
 & \hat{H}^{-1}(G, A) & \xrightarrow{f_1} & \hat{H}^{-1}(G, B) & \\
 f_6 \nearrow & & & & \searrow f_2 \\
 \hat{H}^0(G, C) & & & & \hat{H}^{-1}(G, C) \\
 & \nwarrow f_5 & & \swarrow f_3 & \\
 & \hat{H}^0(G, B) & \xleftarrow{f_4} & \hat{H}^0(G, A) &
 \end{array}$$

若三个模中有两个是 Herbrand 模, 则剩下的那个两边都是有限的, 由正合性可见其有限, 现在我们令 F_i 表示 f_i 的像的阶, 正合性给出

$$|\hat{H}^{-1}(G, A)| = F_6 F_1, \quad |\hat{H}^{-1}(G, B)| = F_1 F_2, \quad |\hat{H}^{-1}(G, C)| = F_2 F_3$$

$$|\hat{H}^0(G, A)| = F_3 F_4, \quad |\hat{H}^0(G, B)| = F_4 F_5, \quad |\hat{H}^0(G, C)| = F_5 F_6$$

因此可见 $h(B) = h(A)h(C)$. □

现在对 Abel 群 A , 取 $f = 0, g = n$, 令

$${}_n A = \{a \in A: na = 0\}$$

则有

$$q_{0,n}(A) = \frac{|A/nA|}{|{}_n A|}$$

命题 1.9.6: n 阶循环群 G 在 A 上有平凡作用, 则

$$h(A) = q_{0,n}(A)$$

特别地, Herbrand 商 $q_{0,n}$ 是乘性的.

证明: 原因在于平凡作用下 $D = 0, N = n$. □

命题 1.9.7: 若

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

是 Abel 群的短正合列, 则任意两个商有定义的情况下, 第三个都有定义, 且满足

$$q_{0,n}(B) = q_{0,n}(A)q_{0,n}(C)$$

命题 1.9.8: A 是有限群, 则总有 $q_{f,g}(A) = 1$.

证明: 注意到

$$\text{Im } f \cong A / \text{Ker } f, \quad \text{Im } g \cong A / \text{Ker } g$$

因此可见

$$|A| = |\text{Im } f| \cdot |\text{Ker } f| = |\text{Im } g| \cdot |\text{Ker } g|$$

综上所述得证. □

特别地, 一个有限 G -模 A 始终有 $h(A) = 1$. 从而如果 A 是 G -模 B 的一个有限指数子模, 则考虑

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$$

可见

$$h(B) = h(A)h(B/A) = h(A)$$

引理 1.9.9: f, g 是 Abel 群 A 的可交换自同态, 即 $fg = gf$, 则

$$q_{0,gf}(A) = q_{0,g}(A)q_{0,f}(A)$$

任两个存在, 第三个存在.

证明: 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g(A) \cap \text{Ker } f & \longrightarrow & g(A) & \xrightarrow{f} & fg(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & f(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

从而由蛇引理得到

$$0 \rightarrow \text{Ker } f / (g(A) \cap \text{Ker } f) \rightarrow A / g(A) \rightarrow f(A) / fg(A) \rightarrow 0$$

因此可见

$$\frac{[A : fg(A)]}{[A : f(A)]} = \frac{[A : g(A)] \cdot |g(A) \cap \text{Ker } f|}{|\text{Ker } f|}$$

注意到

$$g : \text{Ker}(fg) \rightarrow g(A) \cap \text{Ker } f$$

是满射, 其核为 $\text{Ker } g$, 可见

$$\frac{\text{Ker}(fg)}{\text{Ker } g} \cong g(A) \cap \text{Ker } f$$

因此可见

$$|\text{Ker}(fg)| = |\text{Ker } g| \cdot |g(A) \cap \text{Ker } f|$$

综上可得上面所需等式. □

定理 1.9.10: p 是素数, G 是 p -阶循环群, A 是 G -模, 若 $q_{0,p}(A)$ 有定义, 则 $q_{0,p}(A^G)$ 与 $h(A)$ 也有定义, 并且满足

$$h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^p / q_{0,p}(A)$$

证明: 记 $M = I_G A = DA$, 有短正合列

$$0 \rightarrow A^G \rightarrow A \xrightarrow{D} M \rightarrow 0$$

这里可见

$$\text{Ker } D = A^G, \quad \text{Im } D = M$$

由于 $M \subset A$, 从而有

$${}_p M \subseteq {}_p A$$

因此 ${}_p M$ 有限, 再由于 M 还是 A 的商群, 从而有满射

$$A/pA \rightarrow M/pM$$

因此 M/pM 也有限, 因此 $q_{0,p}(M)$ 有定义, 从而正合列中两个都有定义, 剩下的 $q_{0,p}(A^G)$ 也有定义, 并且满足

$$q_{0,p}(A) = q_{0,p}(A^G)q_{0,p}(M)$$

因为 G 平凡作用在 A^G 上, 所以

$$h(A^G) = q_{0,p}(A^G)$$

现在, 注意到 $ND = 0$, 因此 $NM = ND(A) = 0$, 因此 $\mathbb{Z}[G]$ 在 M 上的作用可以下降到 $\mathbb{Z}[G]/N\mathbb{Z}[G]$ 的作用, 设 ζ 为 p -次本原单位根, 注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[G]/N\mathbb{Z}[G] &\cong \mathbb{Z}[X]/(X^p - 1, 1 + X + \cdots + X^{p-1}) \\ &\cong \mathbb{Z}[X]/(1 + X + \cdots + X^{p-1}) \\ &\cong \mathbb{Z}[\zeta] \end{aligned}$$

在这个同构之下，有

$$\sigma \mapsto \zeta, \quad D = \sigma - 1 \mapsto \zeta - 1$$

而在 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中，有

$$\Phi_p(X) = \prod_{i=1}^{p-1} (X - \zeta^i)$$

取 $X = 1$ 得到

$$p = \prod_{i=1}^{p-1} (1 - \zeta^i)$$

取 $u_i = (1 - \zeta^i)/(1 - \zeta)$ ，选 $ij \equiv 1 \pmod{p}$ ，有

$$1 - \zeta = 1 - (\zeta^i)^j = (1 - \zeta^i)(1 + \zeta^i + \cdots + (\zeta^i)^{j-1})$$

因此

$$u_i^{-1} = 1 + \zeta^i + \cdots + (\zeta^i)^{j-1} \in \mathbb{Z}[\zeta]$$

所以可见 $u_i \in \mathbb{Z}[\zeta]^\times$ ，所以可得分解

$$p = (1 - \zeta)^{p-1} \prod_{i=1}^{i-1} u_i = D^{p-1} e, \quad e \in \mathbb{Z}[\zeta]^\times$$

其中 e 是一个同构，从而可见

$$\text{Ker } D \subset {}_p M, \quad pM \subset DM$$

因此 $\text{Ker } D$ 有限，而 M/DM 是有限群 M/pM 的商，也有限，所以 $q_{0,D}(M)$ 有定义，由于自同构的核与余核都是零，故可见 $q_{0,e}(M) = 1$ ，从而可见

$$q_{0,p}(M) = q_{0,D}(M)^{p-1}$$

但是 $N = 0$ 在 M 上成立，故有

$$h(M) = q_{D,0}(M) = \frac{|\text{Ker } D|}{|M/DM|} = \frac{1}{q_{0,D}(M)} \implies q_{0,p}(M) = h(M)^{-(p-1)}$$

现在由

$$q_{0,p}(A) = q_{0,p}(A^G) q_{0,p}(M) = q_{0,p}(A^G) h(M)^{-(p-1)}$$

所以可见

$$h(M)^{p-1} = \frac{q_{0,p}(A^G)}{q_{0,p}(A)}$$

最后再由于 A^G 与 M 都已经是 Herbrand 模，所以 A 也是，故

$$h(A) = h(A^G) h(M)$$

得到

$$h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^{p-1} h(M)^{p-1} = \frac{q_{0,p}(A^G)^p}{q_{0,p}(A)}$$

□

定理 1.9.11 (Chevalley): 令 A 是有限生成 G -模, 其中 G 是素数 p -阶循环群, 若 α 是 A 作为 Abel 群的 rank, β 是 A^G 作为 Abel 群的 rank, 则 Herbrand 商由下式给出

$$h(A) = p^{(p\beta - \alpha)/(p-1)}$$

证明: 由于 G 有限, 所以有限生成 G -模也是有限秩 Abel 群, 设 L 为 rank r 的有限生成 Abel 群, 则可以写成

$$L \cong \mathbb{Z}^r \oplus_{\mathbb{Z}} T$$

其中 T 有限, 可见

$$q_{0,p}(L) = q_{0,p}(\mathbb{Z}^r)q_{0,p}(T) = p^r$$

因此可见

$$q_{0,p}(A) = p^\alpha, \quad q_{0,p}(A^G) = p^\beta$$

从而立刻得到

$$h(A) = p^{-1} \sqrt[p]{\frac{(p^\beta)^p}{p^\alpha}} = p^{(p\beta - \alpha)/(p-1)}$$

□

Tate 定理 SECTION 1.10

定理 1.10.1: A 是 G -模, 若存在 q_0 使得

$$\hat{H}^{q_0}(g, A) = \hat{H}^{q_0+1}(g, A) = 0$$

对所有子群 $g < G$ 成立, 则 A 有平凡上同调.

证明: 我们只需要证明

$$\hat{H}^{q_0}(g, A) = \hat{H}^{q_0+1}(g, A) = 0$$

可以推出

$$\hat{H}^{q_0-1}(g, A) = \hat{H}^{q_0+2}(g, A) = 0$$

即可, 这样就可以往两边无限延伸. 再利用维数移动, 我们立刻只需要证明

$$\hat{H}^1(g, A) = \hat{H}^2(g, A) = 0 \implies \hat{H}^0(g, A) = \hat{H}^3(g, A) = 0$$

现在假设有

$$\hat{H}^1(g, A) = \hat{H}^2(g, A) = 0, \quad \forall g < G$$

我们对 $|G|$ 归纳, 平凡群的所有 Tate 上同调都是零, 所以奠基成立. 现在对每个真子群 $g < G$, 由归纳假设都有

$$\hat{H}^0(g, A) = \hat{H}^3(g, A) = 0$$

现在要说明对 G 成立, 如果 G 不是 p -群, 则每个 Sylow 子群 P 都是真子群, 因此有

$$\hat{H}^0(P, A) = \hat{H}^3(P, A) = 0$$

由推论 1.7.17 得到

$$\hat{H}^0(G, A) = \hat{H}^3(G, A) = 0$$

所以只需要对 p -群证明, 现在设 G 是非平凡 p -群, 其存在指数为 p 的正规子群 H , 有 $Q = G/H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 由于 H 是真子群, 所以归纳假设给出 $\hat{H}^i(H, A) = 0, i = 0, 1, 2, 3$, 回忆我们有定理 1.7.5, 故对 $q = 1, 2, 3$ 有正合列

$$0 \rightarrow \hat{H}^q(Q, A^H) \rightarrow \hat{H}^q(G, A) \rightarrow \hat{H}^q(H, A)$$

因此有同构

$$\text{Inf}: \hat{H}^q(Q, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^q(G, A)$$

由于 $\hat{H}^1(G, A) = 0$, 然后同构到 $\hat{H}^1(Q, A)$, 再由于 Q 是循环群, 从而 2-周期, 于是得到三次消失: $\hat{H}^3(Q, A^H) = 0$, 再通过同构回到 G 得到 $\hat{H}^3(G, A) = 0$.

同理, G 的二次消失可以得到 Q 的二次消失从而零次消失, 注意到

$$\hat{H}^0(Q, A^H) = \frac{(A^H)^Q}{N_Q(A^H)} = \frac{A^G}{N_Q(A^H)}$$

因此可见 $A^G = N_Q(A^H)$, 但是归纳假设告诉我们 $\hat{H}^0(H, A) = 0$, 从而可见 $A^H = N_H A$, 所以可见

$$A^G = N_Q(A^H) = N_Q N_H A = N_G A \implies \hat{H}^0(G, A) = 0$$

□

若 A 与 B 都是 G -模, 考虑其杯积

$$\smile: \hat{H}^p(G, A) \times \hat{H}^q(G, B) \rightarrow \hat{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

固定 $a \in \hat{H}^p(G, A)$, 则映射 $a \smile -$ 给出一族映射.

定理 1.10.2: A 是 G 模, 满足对任意子群 $g < G$, 都有

- (1) $\hat{H}^{-1}(g, A) = 0$.
- (2) $\hat{H}^0(g, A)$ 为 $|g|$ -阶循环群.

若 a 为 $\hat{H}^0(G, A)$ 的生成元, 则映射

$$a \smile -: \hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^q(G, A), \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

给出了同构.

证明：其道理在于把所需的杯积实现为一个单射 $\mathbb{Z} \rightarrow B$ 诱导的映射，再证明余核上同调平凡. 首先把杯积实现为一个系数模同态，取代表元

$$a_0 \in A^G, \quad a = a_0 + N_G A$$

因为 a_0 是 G -不变的，所以

$$f_0: \mathbb{Z} \rightarrow A, \quad n \mapsto na_0$$

是 G -map，其中 $\mathbb{Z}$ 是平凡作用. 其在 Tate 上同调上诱导的映射就是

$$(f_0)_* = a \smile -$$

在零次是就是 $[n] \mapsto [na_0]$. 现在令

$$B = A \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$$

定义

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow B, \quad n \mapsto (na_0, nN_G)$$

这是 G -map，并且是单射，且注意对任意 $H \leq G$ ， $\mathbb{Z}[G]$ 限制到 H 后是若干个 $\mathbb{Z}[H]$ 的直和，故其 Tate 上同调在所有次数均为零. 因而自然嵌入 $i: A \rightarrow B$ 在每个子群的所有次数上都诱导同构. 又因为 f 的第二分量在上同调上诱导零映射，所以 $f_* = i_* \circ (a \smile -)$ ，只需证明 f_* 在所有次数均为同构.

令 $C = \text{coker } f$ ，得到短正合列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0$. 对任意 $H \leq G$ ，由假设有 $\hat{H}^{-1}(H, B) = 0$ ；又因为 H 有限， $\hat{H}^1(H, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H, \mathbb{Z}) = 0$. 因此长正合列给出

$$0 \longrightarrow \hat{H}^{-1}(H, C) \longrightarrow \hat{H}^0(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} \hat{H}^0(H, B) \longrightarrow \hat{H}^0(H, C) \longrightarrow 0$$

我们证明其中的 f_* 是同构. 在 $\hat{H}^0(H, B) \cong \hat{H}^0(H, A)$ 的识别下， f_* 将 $\hat{H}^0(H, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|H|\mathbb{Z}$ 的生成元 $[1]$ 映到 $\text{res}_H^G a$. 记 $n = |G|$ ， $m = |H|$ ， $d = [G : H]$ ，则 $n = dm$ ，且 $\text{cor}_H^G \text{res}_H^G a = da$. 因为 a 的阶为 n ， da 的阶为 m ，所以 m 整除 $\text{res}_H^G a$ 的阶. 另一方面， $\hat{H}^0(H, A)$ 的阶为 m ，故 $\text{res}_H^G a$ 的阶恰为 m ，从而它是生成元. 因此 f_* 是同构.

由上述正合列， $\hat{H}^{-1}(H, C) = \hat{H}^0(H, C) = 0$ 对所有 $H \leq G$ 成立. 应用上同调平凡性判据可知 C 上同调平凡. 再由短正合列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 的长正合列，得到 $f_*: \hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^q(G, B)$ 对所有 $q \in \mathbb{Z}$ 均为同构. 结合 $f_* = i_* \circ (a \smile -)$ 及 i_* 为同构，即得结论. $\square$

定理 1.10.3 (Tate): A 是 G -模，且对任意子群 $g < G$ ，都满足

$$(1) \quad \hat{H}^1(g, A) = 0.$$

$$(2) \quad \hat{H}^2(g, A) \text{ 是阶为 } |g| \text{ 的循环群.}$$

则多 $a \in \hat{H}^2(G, A)$ 是生成元，则杯积给出同构

$$a \smile -: \hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^{q+2}(G, A), \quad q \in \mathbb{Z}$$

证明: 取二次移维模 $A^2 = J_G \otimes_{\mathbb{Z}} J_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$. 两次连接同态的复合给出同构 $\delta^2: \hat{H}^q(H, A^2) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{q+2}(H, A)$, 对所有 $H \leq G$ 和 $q \in \mathbb{Z}$ 成立. 特别地, $\hat{H}^{-1}(H, A^2) \cong \hat{H}^1(H, A) = 0$, 且 $\hat{H}^0(H, A^2) \cong \hat{H}^2(H, A)$ 是阶为 $|H|$ 的循环群.

令 $\tilde{a} = (\delta^2)^{-1}(a)$, 则 $\tilde{a}$ 是 $\hat{H}^0(G, A^2)$ 的生成元. 由定理 1.10.2, $\tilde{a} \smile -: \hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^q(G, A^2)$ 对所有 q 均为同构.

Cup product 与第一个变量的连接同态相容, 即 $\delta(u \smile v) = (\delta u) \smile v$. 此处第二个系数模为 $\mathbb{Z}$, 张量 $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ 保持正合, 故可以连续使用两次该相容性. 因而对任意 $x \in \hat{H}^q(G, \mathbb{Z})$, 有

$$\delta^2(\tilde{a} \smile x) = (\delta^2 \tilde{a}) \smile x = a \smile x$$

因此 $a \smile - = \delta^2 \circ (\tilde{a} \smile -)$ 是两个同构的复合, 故亦为同构. $\square$

定理 1.10.4 (Tate 定理的补充): 在定理 1.10.3 的假设下, 对任意子群 $H \leq G$, $\text{res}_H^G a$ 是 $\hat{H}^2(H, A)$ 的生成元. 因而对任意 $q \in \mathbb{Z}$, 有同构

$$(\text{res}_H^G a) \smile -: \hat{H}^q(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{q+2}(H, A)$$

证明: 记 $n = |G|$, $m = |H|$, $d = [G : H]$, 则 $n = dm$, 且 $\text{cor}_H^G \text{res}_H^G a = da$. 因为 a 的阶为 n , 所以 da 的阶为 m . 因此 m 整除 $\text{res}_H^G a$ 的阶. 又因为 $\hat{H}^2(H, A)$ 的阶恰为 m , 故 $\text{res}_H^G a$ 的阶为 m , 从而它生成该群.

对每个子群 $K \leq H$, Tate 定理的两个假设仍然成立. 因此对群 H 及生成元 $\text{res}_H^G a$ 应用 Tate 定理, 即得所述同构. $\square$

注 1.10.5: 取 $q = -2$, 由 $\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}$ 及 $\hat{H}^0(G, A) = A^G / N_G A$, Tate 定理给出同构

$$G^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} A^G / N_G A$$

这一同构相对于所选生成元 a 确定. 若改取生成元 $a' = ua$, 其中 $\gcd(u, |G|) = 1$, 则由 cup product 的双线性, 有 $a' \smile x = u(a \smile x)$. 因此若要消除生成元选择所带来的不确定性, 还需相应的规范化. $\diamond$

局部类域论

从本章开始，我们直接使用 $H^q(G, A)$ 来表示 Tate 上同调 $\hat{H}_q(G, A)$.

Profinite 群 SECTION 2.1

对小范畴 I 而言，若有函子

$$G: I^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$$

有

$$\varprojlim_I G_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i : \forall s: i \rightarrow j, G(s)(x_j) = x_i \right\}$$

以下假设 I 由滤过偏序集 $(I, \leq)$ 给出，从而只需考虑逆向极限而非一般的极限。

现在假设每个 $G_i = G(i)$ 都是拓扑群，且对每个 $i \leq j$ ，都有连续同态 $G_j \rightarrow G_i$ ，赋予 $\prod_{i \in I} G_i$ 乘积拓扑，其子群 $\varprojlim_I G_i$ 继承了自然的子空间拓扑。

引理 2.1.1: 拓扑群 $\varprojlim_I G_i$ 在 1 处有一组形如

$$\mathcal{U}_{I_0} = \bigcap_{i \in I_0} p_i^{-1}(U_i), \quad I_0 \subset I \text{ finite subset}, \quad 1 \in U_i \in \text{Open}(G_i)$$

的邻域基。若每个 G_i 都是 Hausdorff 空间，则 $\varprojlim_I G_i$ 也是；如果进一步，每个 G_i 都是紧空间，则 $\varprojlim_I G_i$ 是紧 Hausdorff 空间。

证明: 邻域基的结论就是乘积拓扑的定义。若 G_i 均 Hausdorff，则乘积空间也是 Hausdorff，乘积空间的子空间仍然 Hausdorff。最后，如果 G_i 皆紧，Tychonoff 定理告诉我们乘积空间也是紧的，而 Hausdorff 性质告诉我们 $\varprojlim_I G_i$ 是 $\prod_{i \in I} G_i$ 的闭子群，道理在于 G_i 紧，从而 $\{1\} \subset G_i$ 是闭子群，故若 $f_{ij}: i \rightarrow j$ ，则

$$h_{ij}: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i, \quad (x_i) \mapsto G(f_{ij})(g_j)g_i^{-1}$$

从而

$$E_{ij} := \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} G_i : G(f_{ij})(x_j) = x_i \right\} = h_{ij}^{-1}(\{1\})$$

是闭的, 故

$$\varprojlim_I G_i = \bigcap_{i,j \in I} E_{ij}$$

闭, 从而是紧 Hausdorff 空间. □

而我们在代数和数论中常用的是所有 G_i 均为有限群的情况, 此时赋予其离散拓扑, 故为紧 Hausdorff 的.

定义 2.1.2: 同构意义下形如 $\varprojlim_i G_i$, 其中 $(I, \leq)$ 滤过, 并且 G_i 均有限的拓扑群称作 **profinite group**.

推论 2.1.3: 引理告诉我们投射有限群都是 Hausdorff 紧群.

实际上我们有更强的结论:

定理 2.1.4: 拓扑群 G 是投射有限群当且仅当它是 Hausdorff 紧群, 并且 1 处有一组由正规子群构成的邻域基.

证明: $\Rightarrow$: 我们已经说明了是 Hausdorff 紧群, 可以取引理中的 $U_i = \{1\}$, 从而得到正规子群构成的邻域基.

$\Leftarrow$: 设 G 是紧 Hausdorff 拓扑群, 且单位元处有一组由正规子群构成的邻域基. 首先一个子群只要是单位元的邻域, 就必为开子群. 事实上, 若子群 N 包含单位元的某个开邻域 U , 则

$$N = \bigcup_{n \in N} nU$$

所以 N 是开集. 因此, 假设中的邻域基可视为由开正规子群构成. 令

$$\mathcal{N} = \{N \trianglelefteq G : N \text{ 是开子群}\}$$

第一步: 构造有限商群的逆向系统. 对每个 $N \in \mathcal{N}$, 由于 N 开, 商群 G/N 带商拓扑是离散空间. 另一方面, G/N 是紧空间 G 的连续像, 因而紧. 紧离散空间必为有限集, 所以 G/N 是有限离散群. 在 $\mathcal{N}$ 上按反包含关系定义偏序:

$$N \leq M \iff M \subseteq N$$

由于有限个开正规子群的交仍是开正规子群, $\mathcal{N}$ 是滤过偏序集. 当 $M \subseteq N$ 时, 定义过渡同态

$$\pi_{MN} : G/M \longrightarrow G/N, \quad gM \longmapsto gN$$

这些映射构成一个逆向系统.

第二步: 证明 Φ 是拓扑群同构. 定义自然同态

$$\Phi : G \longrightarrow \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N, \quad g \longmapsto (gN)_{N \in \mathcal{N}}$$

由于各个商映射 $G \rightarrow G/N$ 连续, Φ 连续. 注意到

$$\text{Ker } \Phi = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

若 $g \neq 1$, 由 Hausdorff 性, 存在单位元的开邻域 U , 使得 $g \notin U$. 由邻域基假设, 存在 $N \in \mathcal{N}$ 满足 $N \subseteq U$, 从而 $g \notin N$. 因此

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \{1\}$$

故 Φ 单射. 任取

$$x = (x_N)_{N \in \mathcal{N}} \in \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

对每个 $N \in \mathcal{N}$, 令

$$C_N = \{g \in G : gN = x_N\}$$

每个 C_N 都是 N 的一个陪集, 因而非空. 又因为开子群也是闭子群, 所以每个 C_N 都是闭集. 我们验证闭集族 $\{C_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ 具有有限交性质. 任取 $N_1, \dots, N_r \in \mathcal{N}$, 令

$$M = N_1 \cap \dots \cap N_r \in \mathcal{N}$$

由 x 的相容性, 对每个 j 都有

$$\pi_{MN_j}(x_M) = x_{N_j}$$

因此

$$\emptyset \neq C_M \subseteq \bigcap_{j=1}^r C_{N_j}$$

有限交性质成立. 由 G 的紧性,

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} C_N \neq \emptyset$$

取 g 属于此交集, 则对所有 $N \in \mathcal{N}$ 都有 $gN = x_N$, 即 $\Phi(g) = x$. 故 Φ 满射.

Φ 是从紧空间 G 到 Hausdorff 空间 $\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ 的连续双射, 因此是同胚. 于是得到拓扑群同构

$$\boxed{G \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N}$$

由于每个 G/N 都是有限离散群, G 是投射有限群. □

无穷 Galois 理论 SECTION 2.2

我们称正规可分扩张 $E|F$ 为 Galois 扩张, 记 $\text{Gal}(E|F) = \text{Aut}_F(E)$.

定义 2.2.1 (Krull 拓扑): 对 Galois 扩张 $E|F$, 赋予 $\text{Gal}(E|F)$ 拓扑结构, 使得 $\sigma \in \text{Gal}(E|F)$ 处的拓扑基为

$$\sigma \text{Gal}(E|K), \quad K|F \text{ 为有限 Galois 子扩张}$$

称此拓扑为 **Krull 拓扑**.

注 2.2.2: 此拓扑的直观在于有越大的有限 Galois 扩张 $K|F$ 使得 $\sigma|_K = \tau|_K$, 则它们越接近. 并且可以注意到 $\text{Gal}(E|K)$ 是正规子群, 从而定义也可以用 $\text{Gal}(E|K)\sigma$ 来叙述. 邻域基需要对有限交封闭, 这可以由

$$\text{Gal}(E|K) \cap \text{Gal}(E|K') = \text{Gal}(E|KK')$$

保证, 因为 $KK'|F$ 仍然是有限 Galois 扩张. $\diamond$

命题 2.2.3: 对任意 Galois 扩张 $E|F$, 有拓扑群的同构

$$\text{Gal}(E|F) = \varprojlim_{K|F \text{ finite Galois}} \text{Gal}(K|F)$$

证明: 由定理 2.1.4 的证明过程, 可以立刻看到. $\square$

引理 2.2.4: 拓扑群 $G := \text{Gal}(E|F)$ 满足以下性质:

- (1) G 是 Hausdorff 紧群, $E|F$ 有限时带离散拓扑.
- (2) 对任意有限子扩张 $L|F$, 子群 $\text{Gal}(E|L)$ 为开集.
- (3) 任意开子群 H 是闭的, 并且 $[G : H] < \infty$.
- (4) 对任意子扩张 $L|F$, 子群 $\text{Gal}(E|L)$ 为闭集.
- (5) 若赋予 E 离散拓扑, 则作用映射 $\text{Gal}(E|F) \times E \rightarrow E$ 是连续的.

定理 2.2.5 (无穷 Galois 对应): 设 $E|F$ 是 Galois 扩张, 则有互逆的双射

$$\begin{aligned} \{\text{中间域 } K\} &\longleftrightarrow \{\text{闭子群 } H \subset \text{Gal}(E|F)\} \\ K|F &\mapsto \text{Gal}(E|K) \\ E^H|F &\longleftarrow H \end{aligned}$$

并且满足以下性质:

- (1) $H_1 \subset H_2 \iff E^{H_1} \supset E^{H_2}$ 且 $K_1 \subset K_2 \iff \text{Aut}_{K_1}(E) \supset \text{Aut}_{K_2}(E)$.
- (2) 双射对于 $\text{Gal}(E|F)$ 在两边的左作用是等变的, 并且给出正规闭子群 $H \triangleleft \text{Gal}(E|F)$ 与 Galois 子扩张 $K|F$ 的一一对应.
- (3) 对任意中间域 K 都有双射

$$\begin{aligned} \text{Gal}(E|F) / \text{Gal}(E|K) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_F(K, E) \\ \sigma \cdot \text{Gal}(E|K) &\mapsto \sigma|_K \end{aligned}$$

当 $K|F$ 是 Galois 扩张时, 上式导出拓扑群的同构

$$\text{Gal}(E|F) / \text{Gal}(E|K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(K|F)$$

- (4) 开子群对应到有限子扩张.

现在我们给出一些神秘小语言. 取一个投射有限群 G , 将其所有开子群(即有限指数闭子群) 记为

$$\{G_K: K \in X\}$$

我们把下标 K 称为域, 我们称域 $K_0 \in X$ 使得 $G_{K_0} = G$ 为基域. 如果 $G_L \subset G_K$, 我们形式化地记 $K \subset L$, 并且定义扩张 $L|K$ 为

$$[L:K] = [G_K:G_L]$$

扩张 $L|K$ 称为正规, 如果 G_L 是 G_K 的正规子群. 若 $L|K$ 是正规的, 则我们定义扩张 $L|K$ 的 **Galois 群**为

$$G_{L|K} = G_K/G_L$$

扩张 $L|K$ 的性质由其 Galois 群定义, 比如循环, Abel, 可解等等. 我们定义这些域的交域与合成为

$$K = \bigcap_{i=1}^n K_i, \quad \text{若 } G_K \text{ 由 } G_{K_i} \text{ 拓扑生成}$$

$$K = \prod_{i=1}^n K_i, \quad \text{若 } G_K = \bigcap_{i=1}^n G_{K_i}$$

如果 $G_{L'} = \sigma G_L \sigma^{-1}$, 则我们称 $L' = \sigma L$, 我们称两个扩张 $L|K$ 与 $L'|K$ 共轭, 如果 $L' = \sigma L$ 对某些 $\sigma \in G_K$ 成立. 以上的记号给出了关于投射有限群的形式 Galois 理论.

下面我们讨论 A 是 profinite 群 G -模, 下列条件等价:

- (1) 映射 $G \times A \rightarrow A, (\sigma, a) \mapsto \sigma a$ 是连续的.
- (2) 对每一个 $a \in A$, 都有 $\{\sigma \in G: \sigma a = a\}$ 在 G 中是开集.
- (3) 有 $A = \bigcup_U A^U$, 其中 U 为 G 的所有开子群.

定义 2.3.1: G 是 profinite 群, A 是 G -模, 满足上面的等价条件, 则称 (G, A) 为一个 **formation**.

现在考虑 (G, A) 是一个 formation, 接下来我们考虑 A 是乘性的 Abel 群. 令 $\{G_K: K \in X\}$ 为 G 的开子群族, 由一族域 X 参数化. 我们定义

$$A_K = A^{G_K} = \{a \in A: \sigma a = a, \forall \sigma \in G_K\}$$

可见

$$K \subset L \implies A_K \subset A_L$$

如果 $L|K$ 是正规扩张, 则可见 A_L 是一个 $G_{L|K}$ -模.

现在我们考虑对每一个正规扩张 $L|K$ 配上一个上同调群, 我们记

$$H^q(L|K) = H^q(G_{L|K}, A_L)$$

若 $N \supseteq L \supseteq K$ 为 K 的正规扩张塔, 我们有包含关系

$$G_N \subseteq G_L \subseteq G_K$$

并且 G_N 与 G_L 都是 G_K 的正规子群, 群上同调理论告诉我们有同态

$$H^q(G_{L|K}, A_L) = H^q(G_{L|K}, A_N^{G_{N|L}}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^q(G_{N|K}, A_N)$$

换言之, 对 $q \geq 1$, 有

$$\text{Inf}_N: H^q(L|K) \rightarrow H^q(N|K)$$

同理我们有限制与余限制的同态

$$\text{Res}: H^q(G_{N|K}, A_N) \rightarrow H^q(G_{N|L}, A_N), \quad \text{Cores}: H^q(G_{N|L}, A_N) \rightarrow H^q(G_{N|K}, A_N)$$

注意上面的限制和余限制只需要 $N|K$ 是正规的即可, 对 L 没有要求. 如果 $L|K$ 也是正规的, 则由定理 1.7.6 我们可见有正合列

$$1 \rightarrow H^1(L|K) \xrightarrow{\text{Inf}_N} H^1(N|K) \xrightarrow{\text{Res}_L} H^1(N|L)$$

如果额外还有 $H^i(N|L) = 1$ 对 $i = 1, \dots, q-1$ 成立, 则有正合列

$$1 \rightarrow H^q(L|K) \xrightarrow{\text{Inf}_N} H^q(N|K) \xrightarrow{\text{Res}_L} H^q(N|L)$$

如果 $L|K$ 正规, $\sigma \in G$, 则

$$\tau G_L \mapsto \sigma \tau \sigma^{-1} G_{\sigma L}$$

给出了 $G_{L|K}$ 与 $G_{\sigma L|\sigma K}$ 之间的同构, 而

$$a \mapsto \sigma a$$

给出了 A_L 与 $A_{\sigma L}$ 之间的同构. 由于

$$(\sigma \tau \sigma^{-1} G_{\sigma L}) \sigma a = \sigma (\tau G_L) a$$

可见其上的同构是相容的, 从而得到 $G_{L|K}$ -模 A_L 与 $G_{\sigma L|\sigma K}$ -模 $A_{\sigma L}$, 于是任意的 $\sigma \in G$ 给出了同构

$$\sigma^*: H^q(L|K) \xrightarrow{\sim} H^q(\sigma L|\sigma K)$$

可以验证这个同构与 inflation, restriction 和 corestriction 都交换.

定义 2.3.2: 我们称一个 formation (G, A) 为 **field formation**, 如果对任意的正规扩张 $L|K$, 其一阶上同调群都消失, 即

$$H^1(L|K) = 1$$

对一个 field formation, 由定理 1.7.6 可见总是有正合列

$$1 \rightarrow H^2(L|K) \xrightarrow{\text{Inf}_N} H^2(N|K) \xrightarrow{\text{Res}_L} H^2(N|L)$$

若 $N \supseteq L \supseteq K$ 为 K 的正规扩张塔. 从而因为 Inf_N 是单射, 我们可以将 $H^2(L|K)$ 视为 $H^2(N|K)$ 的子群.

现在, 若 L 取遍 K 的所有正规扩张, 其在上述意义下构成一个滤过集, 滤过态射为 Inflation, 从而我们可以通过取正向极限得到一个群

$$H^2(\quad|K) := \varinjlim_L H^2(L|K)$$

由于每一个 inflation 都是单射, 所以每个 $H^2(L|K)$ 实际上都嵌入 $H^2(\quad|K)$, 我们将其等同为其嵌入像, 即将 $H^2(L|K)$ 视为 $H^2(\quad|K)$ 的子群, 则有

$$H^2(\quad|K) = \bigcup_L H^2(L|K)$$

特别地, 如果 $N \supset L \supset K$ 是 K 的正规域扩张塔, 则我们有

$$H^2(L|K) \subset H^2(N|K) \subset H^2(\quad|K)$$

注 2.3.3: 现在注意到 G_K 是投射有限群, A 是 G_K -模, 对有限群的上同调而言我们一般考虑 $H^q(G, A)$ 是函数 $G^q \rightarrow A$, 但是对于投射有限群, 在赋予 A 离散拓扑后我们要考虑其连续上链

$$C_{\text{cts}}^q(G_K, A) = \{f: G_K^q \rightarrow A: f \text{ is continuous}\}$$

从而我们有神秘的同构

$$H_{\text{cts}}^q(G_K, A) \simeq \varinjlim_L H^q(L|K) \simeq H^q(\quad|K), \quad q \geq 1$$

◇

现在给定任意扩张 $K'|K$, 对任意的 $c \in H^2(\quad|K)$, 按照正向极限的构造, 存在一个正规扩张 $L_0|K$ 使得 $c \in H^2(L_0|K)$, 现在取一个正规扩张 $L|K$ 使其同时包含 L_0 和 K' , 这是总能做到的, 令

$$H = G_{K'} \cap G_{L_0}$$

因为 $G_{L_0} \triangleleft G_K$, $G_{K'} < G_K$, 且都是开的, 从而可见 H 是 G_K 的开子群, 于是也是有限指数的, 因此我们可以定义

$$G_L = \bigcap_{g \in G_K} gHg^{-1} \triangleleft G_K$$

从而得到我们所需的 L . 因此我们可见 $L|K$ 与 $L|K'$ 都是正规扩张, 并且 $c \in H^2(L_0|K) \subset H^2(L|K)$, 此时考虑有限制映射

$$\text{Res}_{K'}: H^2(L|K) \rightarrow H^2(L|K')$$

会将 c 送入 $H^2(L|K') \subset H^2(\quad|K')$, 然后实际上由限制映射与 inflation 交换得到在余极限上的限制映射

$$\text{Res}_{K'}: H^2(\quad|K) \rightarrow H^2(\quad|K')$$

命题 2.3.4: (G, A) 为一个 field formation, 若 $K'|K$ 正规, 则有正合列

$$1 \rightarrow H^2(K'|K) \hookrightarrow H^2(\quad|K) \xrightarrow{\text{Res}_{K'}} H^2(\quad|K')$$

证明: 由于是域构型¹, 所以我们之前已经看见它在有限情况下的正合列, 对 $L \supset K' \supset K$ 都是 K 的正规扩张, 我们有

$$1 \rightarrow H^2(K'|K) \rightarrow H^2(L|K) \rightarrow H^2(L|K')$$

对所有包含 K' 的 K 的正规扩张 L 取滤过余极限, 由于滤过余极限在 Abel 群范畴保持正合, 由于他们的滤过集是共尾的, 所以得到

$$1 \rightarrow H^2(K'|K) \rightarrow H^2(\quad|K) \rightarrow H^2(\quad|K')$$

□

类域论的核心断言是所谓的互反律

$$G_{L|K}^{\text{ab}} \simeq A_K / N_{L|K} A_L$$

对所有的正规扩张 $L|K$ 成立, 其中 $N_{L|K} A_L = N_{G_{L|K}} A_L$ 为 A_L 的范数群. 由 Tate 定理 1.10.3 可知这只需要给出以下要求: 若 $L|K$ 是任意正规扩张, 都有

$$\text{I. } H^1(L|K) = 1, \quad \text{II. } H^2(L|K) \text{ is cyclic group of order } [L : K]$$

若满足这个条件, 则 $H^2(L|K)$ 的生成元杯积给出了同构

$$G_{L|K}^{\text{ab}} \simeq A_K / N_{L|K} A_L$$

但是这个同构是不典范的, 比如依赖于生成元的选择. 为了达成典范的互反映射, 我们想要给定一个同构

$$\text{inv}_{L|K}: H^2(L|K) \rightarrow \frac{1}{n} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}, \quad n = [L : K]$$

则可以考虑 $u_{L|K} = \text{inv}_{L|K}^{-1}(1/n + \mathbb{Z})$, 当然这对这个同构映射要有要求, 使得其选择的 $u_{L|K}$ 总是相容且正确的.

定义 2.3.5: 一个构型 (G, A) 称为 **class formation**, 如果满足下设公理

I $H^1(L|K) = 1$, 对任意的正规扩张 $L|K$ 成立 (注意此即域构型).

II 对于任意的正规扩张 $L|K$, 都存在一个 **invariant map**

$$\text{inv}_{L|K}: H^2(L|K) \rightarrow \frac{1}{[L : K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

满足:

¹formation 并没有一个统一的中文翻译, 这里我将其翻译为构型.

(a) 对 $N \supset L \supset K$ 为 K 的正规扩张塔，则有

$$\text{inv}_{L|K} = \text{inv}_{N|K} |_{H^2(L|K)}$$

(b) 若 $N \supset L \supset K$ 为 K 的扩张塔，满足 $N|K$ 是正规的，则

$$\text{inv}_{N|L} \circ \text{Res}_L = [L : K] \cdot \text{inv}_{N|K}$$

注 2.3.6: 注意，**II**(b) 实际上就是在要求

$$\begin{array}{ccc} H^2(N|K) & \xrightarrow{\text{inv}_{N|K}} & \frac{1}{[N : K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\ \text{Res}_L \downarrow & & \downarrow \cdot [L : K] \\ H^2(N|L) & \xrightarrow{\text{inv}_{N|L}} & \frac{1}{[N : L]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \end{array}$$

这个要求再自然不过，而 (a) 是在要求如果 $H^2(\quad|K) = \bigcup_L H^2(L|K)$ ，则存在一个单同态

$$\text{inv}_K : H^2(\quad|K) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

使得

$$\text{inv}_K |_{H^2(L|K)} = \text{inv}_{L|K}$$

即下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^2(L|K) & \xrightarrow{\text{inv}_{L|K}} & \frac{1}{[L : K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\quad|K) & \xrightarrow{\text{inv}_K} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

◇

现在若 $L|K$ 是任意扩张，则对 **II**(b) 的图表取余极限，就有

$$\begin{array}{ccc} H^2(\quad|K) & \xrightarrow{\text{inv}_K} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \text{Res}_L \downarrow & & \downarrow \cdot [L : K] \\ H^2(\quad|L) & \xrightarrow{\text{inv}_L} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

我们同时也能通过这张图表得到 **II**(b) 的图表，因为实际上限制一下就得到了。

命题 2.3.7: 若 $N \supset L \supset K$ 为域扩张， $N|K$ 正规，则有

(1) 若 $L|K$ 正规，对 $c \in H^2(L|K) \subset H^2(N|K)$ ，有 $\text{inv}_{N|K} c = \text{inv}_{L|K} c$ 。

(2) 对 $c \in H^2(N|K)$, 有 $\text{inv}_{N|L}(\text{Res}_L c) = [L : K] \cdot \text{inv}_{N|K}(c)$.

(3) 对 $c \in H^2(N|L)$, 有 $\text{inv}_{N|K}(\text{Cores}_K c) = \text{inv}_{N|L} c$.

(4) 对 $c \in H^2(N|K)$ 与 $\sigma \in G$, 有 $\text{inv}_{\sigma N|\sigma K}(\sigma^* c) = \text{inv}_{N|K} c$.

证明: (1)(2) 是显然的, 就是上面类构型公理 **II** 的重写. (3) 注意到 $\text{inv}_{N|L}$ 与 $\text{inv}_{N|K}$ 都是同构, 所以由 $\cdot[L : K]$ 是满射立刻得到 Res_L 是满射, 因此可见对任意的 $c \in H^2(N|L)$, 都存在 $\tilde{c} \in H^2(N|K)$ 使得 $c = \text{Res}_L(\tilde{c})$, 因此有

$$\text{Cores}_K(c) = \text{Cores}_K(\text{Res}_L(\tilde{c})) = \tilde{c}^{[L:K]}$$

因此由 (2) 可见

$$\text{inv}_{N|K}(\text{Cores}_K c) = [L : K] \text{inv}_{N|K}(\tilde{c}) = \text{inv}_{N|L}(\text{Res}_L(\tilde{c})) = \text{inv}_{N|L}(c)$$

(4) 考虑 K_0 为 G 的基域, 令 $\tilde{N}$ 为包含 N 的 K_0 的正规扩张, 存在性之前已经通过考虑群的正规核证明过. 如此可以注意到 $\sigma\tilde{N} = \tilde{N}$, 从而可见 $\tilde{N}$ 也包含 σN . 群上同调的基本结果告诉我们对 $G_{\tilde{N}|K_0}$ -模 $A_{\tilde{N}}$ 上的自同构 $ga \mapsto \sigma(ga) = (\sigma g \sigma^{-1})(\sigma a)$, 有其在同调群诱导的映射是恒等映射

$$\sigma^* = \text{id}: H^2(\tilde{N}|K_0) \rightarrow H^2(\tilde{N}|K_0)$$

再回忆 σ^* 与 inflation 和 corestriction 交换, 结合 (1) 与 (3) 就得到

$$\begin{aligned} \text{inv}_{\sigma N|\sigma K}(\sigma^* c) &= \text{inv}_{\tilde{N}|\sigma K}(\sigma^* c) = \text{inv}_{\tilde{N}|K_0}(\text{Cores}_{K_0}(\sigma^* c)) \\ &= \text{inv}_{\tilde{N}|K_0}(\sigma^* \text{Cores}_{K_0} c) = \text{inv}_{\tilde{N}|K_0}(\text{Cores}_{K_0} c) \\ &= \text{inv}_{\tilde{N}|K} c = \text{inv}_{N|K} c \end{aligned}$$

□

定义 2.3.8: 令 $L|K$ 为正规扩张, 则不变映射唯一决定了元素 $u_{L|K} \in H^2(L|K)$ 使得

$$\text{inv}_{L|K}(u_{L|K}) = \frac{1}{[L : K]} + \mathbb{Z}$$

称为 $L|K$ 的 **fundamental class**.

我们可以看到不同域扩张之间的基本类是如何关联的.

命题 2.3.9: 令 $N \supset L \supset K$ 为域扩张, 其中 $N|K$ 是正规扩张, 则有

(1) 若 $L|K$ 也是正规的, 则有 $u_{L|K} = (u_{N|K})^{[N:L]}$.

(2) $\text{Res}_L(u_{N|K}) = u_{L|K}$.

(3) $\text{Cores}_K(u_{N|L}) = (u_{N|K})^{[L:K]}$.

(4) 对 $\sigma \in G$, 有 $\sigma^*(u_{N|K}) = u_{\sigma N|\sigma K}$.

证明：我们只需要证明它们在不变映射下的像相同即可，这些都是直接计算的结果。□

现在我们应用 Tate 定理，就得到了类构型的主定理.

定理 2.3.10 (Main Theorem): $L|K$ 为正规扩张，则映射

$$u_{L|K} \cup -: H^q(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+2}(L|K)$$

对所有次数 $q \in \mathbb{Z}$ 都是同构.

特别地，我们有

推论 2.3.11: $H^3(L|K) = 1$, 与 $H^4(L|K) \simeq \chi(G_{L|K})$.

证明：注意到

$$H^3(L|K) \simeq H^1(G_{L|K}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(G_{L|K}, \mathbb{Z}) = 0$$

而

$$H^4(L|K) \simeq H^2(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \simeq H^1(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \chi(G_{L|K})$$

中间的同构来自于对

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

取长正合列，由于 $\mathbb{Q}$ 是唯一可除模，所以由推论 1.6.5 可见其上同调平凡。□

由于我们对 $q = 3, 4$ 或者更高的时候赋予上同调群一些具体意义，所以这个推论暂时看不到什么具体的应用，不过如果考虑一些低阶结果，我们会有

$$G_{L|K}^{\text{ab}} \simeq H^{-2}(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \simeq H^0(L|K) = A_K/N_{L|K}A_L$$

定理 2.3.12 (General Reciprocity Law): $L|K$ 为正规扩张，则杯积映射

$$u_{L|K} \cup -: H^{-2}(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(L|K)$$

给出了一个典范的同构

$$\theta_{L|K}: G_{L|K}^{\text{ab}} \rightarrow A_K/N_{L|K}A_L$$

同构 $\theta_{L|K}$ 被称为 **Nakayama map**.

我们可以给出 Nakayama 映射的具体表达，若 u 为 $u_{L|K}$ 的代表元，即 $u: G_{L|K}^2 \rightarrow A_L$ ，则由命题 1.8.7 可见

$$\theta_{L|K}(\sigma G'_{L|K}) = \left[\prod_{\tau \in G_{L|K}} u(\tau, \sigma) \right] \cdot N_{L|K}A_L$$

其中 $G' = [G, G]$. 具体的类域论中我们更常见其反方向

$$\theta_{L|K}^{-1}: A_K/N_{L|K}A_L \rightarrow G_{L|K}^{\text{ab}}$$

这个逆映射也被称为 **reciprocity isomorphism**, 将其与商映射复合就得到 **norm residue symbol**:

$$A_K \rightarrow A_K/N_{L|K}A_L \rightarrow G_{L|K}^{\text{ab}}$$

我们将其记为 $(\cdot, L|K)$, 因此我们有正合列

$$1 \rightarrow N_{L|K}A_L \rightarrow A_K \xrightarrow{(\cdot, L|K)} G_{L|K}^{\text{ab}} \rightarrow 1$$

元素 $a \in A_K$ 是一个范数当且仅当 $(a, L|K) = 1$.

引理 2.3.13: 令 $L|K$ 为正规扩张, $a \in A_K$, 并且 $\bar{a} = aN_{L|K}A_L \in H^0(L|K)$. 若 $\chi \in \chi(G_{L|K}^{\text{ab}}) = H^1(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是一个特征, 则有

$$\chi((a, L|K)) = \text{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta\chi) \in \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

其中 $\delta\chi$ 表示 χ 在下面同构下的像

$$\delta: H^1(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(G_{L|K}, \mathbb{Z})$$

通过对 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ 取长正合列得到.

证明: 为了简化记号, 我们令 $\sigma_a = (a, L|K) \in G_{L|K}^{\text{ab}} \simeq H^{-2}(G_{L|K}, \mathbb{Z})$, 用 $\bar{\sigma}_a$ 来表示 σ_a 在上面同构中的对应元素. 由范数剩余符号的定义, 可见

$$\bar{a} = u_{L|K} \cup \bar{\sigma}_a \in H^0(G_{L|K}, A_L)$$

由于杯积可以和 δ 交换, 我们有

$$\bar{a} \cup \delta\chi = (u_{L|K} \cup \bar{\sigma}_a) \cup \delta\chi = u_{L|K} \cup (\bar{\sigma}_a \cup \delta\chi) = u_{L|K} \cup \delta(\bar{\sigma}_a \cup \chi)$$

而引理 1.8.6 告诉我们存在某个 r 使得

$$\bar{\sigma}_a \cup \chi = \chi(\sigma_a) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z} \in \frac{1}{n} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = H^{-1}(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } N_{L|K}}{I_{L|K} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

因为 $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 都是平凡群, 其中 $n = [L:K]$, $N_{L|K}$ 相当于乘 n 映射. 因此同构 $\delta: H^{-1}(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(G_{L|K}, \mathbb{Z})$ 给出

$$\delta(\chi(\sigma_a)) = n \left(\frac{r}{n} + \mathbb{Z} \right) = r + n\mathbb{Z} \in H^0(G_{L|K}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

因此

$$\bar{a} \cup \delta\chi = u_{L|K} \cup (r + n\mathbb{Z}) = u_{L|K}^r$$

因此我们得到

$$\text{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta\chi) = r \cdot \text{inv}_{L|K}(u_{L|K}) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z} = \chi(\sigma_a)$$

□

范数剩余符号与之前的各种映射都有良好的相容性, 我们总结如下:

定理 2.3.14: 考虑 $N \supset L \supset K$ 为 K 的扩张塔, $N|K$ 是正规扩张, 则有

(1) 若 $L|K$ 也正规, 则下图交换

$$\begin{array}{ccc} A_K & \xrightarrow{(\cdot, N|K)} & G_{N|K}^{\text{ab}} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \pi \\ A_K & \xrightarrow{(\cdot, L|K)} & G_{L|K}^{\text{ab}} \end{array}$$

其中 π 是自然的商群投影.

(2) 考虑由 $\text{Res}: H^{-2}(G_{N|K}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{-2}(G_{N|L}, \mathbb{Z})$ 诱导的 Ver , 有

$$\begin{array}{ccc} A_K & \xrightarrow{(\cdot, N|K)} & G_{N|K}^{\text{ab}} \\ \text{incl} \downarrow & & \downarrow \text{Ver} \\ A_L & \xrightarrow{(\cdot, N|L)} & G_{N|L}^{\text{ab}} \end{array}$$

(3) 考虑典范的同态 $\kappa: G_{N|L}^{\text{ab}} \rightarrow G_{N|K}^{\text{ab}}$, 有

$$\begin{array}{ccc} A_L & \xrightarrow{(\cdot, N|L)} & G_{N|L}^{\text{ab}} \\ N_{L|K} \downarrow & & \downarrow \kappa \\ A_K & \xrightarrow{(\cdot, N|K)} & G_{N|K}^{\text{ab}} \end{array}$$

(4) 对 $\sigma \in G$, 有 $\sigma^*: G_{N|K}^{\text{ab}} \rightarrow G_{\sigma N|\sigma K}^{\text{ab}}$, $\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$, 有

$$\begin{array}{ccc} A_K & \xrightarrow{(\cdot, N|K)} & G_{N|K}^{\text{ab}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma^* \\ A_{\sigma K} & \xrightarrow{(\cdot, \sigma N|\sigma K)} & G_{\sigma N|\sigma K}^{\text{ab}} \end{array}$$

证明: 所有的证明技术我们都已经掌握, 现在挨个来看

(1) 令 $\chi \in \chi(G_{L|K}) = H^1(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\text{Inf } \chi \in H^1(G_{N|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 则有

$$\begin{aligned} \chi(\pi(a, N|K)) &= \text{Inf } \chi((a, N|K)) = \text{inv}_{N|K}(\bar{a} \cup \delta(\text{Inf } \chi)) = \text{inv}_{N|K}(\bar{a} \cup \text{Inf}(\delta\chi)) \\ &= \text{inv}_{N|K}(\text{Inf}(\bar{a} \cup (\delta\chi))) = \text{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta\chi) = \chi(a, L|K) \end{aligned}$$

这是由引理 2.3.13 和一系列良好的相容关系保证的. 由于上式对所有特征都成立, 所以自然可以得到 $\pi(a, N|K) = (a, L|K)$.

(2)(3) 我们只需要注意到下面的图交换即可

$$\begin{array}{ccccccc}
A_K & \longrightarrow & H^0(N|K) & \xleftarrow{\sim} & H^{-2}(G_{N|K}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G_{N|K}^{\text{ab}} \\
\downarrow & & \downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Ver} \\
A_L & \longrightarrow & H^0(N|L) & \xleftarrow{\sim} & H^{-2}(G_{N|L}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G_{N|L}^{\text{ab}} \\
\\
A_L & \longrightarrow & H^0(N|L) & \xleftarrow{\sim} & H^{-2}(G_{N|L}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G_{N|L}^{\text{ab}} \\
N_{L|K} \downarrow & & \downarrow \text{Cores} & & \downarrow \text{Cores} & & \downarrow \kappa \\
A_K & \longrightarrow & H^0(N|K) & \xleftarrow{\sim} & H^{-2}(G_{N|K}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G_{N|K}^{\text{ab}}
\end{array}$$

(4) 注意到

$$\sigma^*(u_{N|K} \cup z) = \sigma^*u_{N|K} \cup \sigma^*z = u_{\sigma N|\sigma K} \cup \sigma^*z$$

所以有交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
A_K & \longrightarrow & H^0(N|K) & \xleftarrow{\sim} & H^{-2}(G_{N|K}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G_{N|K}^{\text{ab}} \\
\sigma \downarrow & & \downarrow \sigma^* & & \downarrow \sigma^* & & \downarrow \sigma^* \\
A_{\sigma K} & \longrightarrow & H^0(\sigma N|\sigma K) & \xleftarrow{\sim} & H^{-2}(G_{\sigma N|\sigma K}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & G_{\sigma N|\sigma K}^{\text{ab}}
\end{array}$$

综上所述得证. □

现在, 如果 $L|K$ 是正规扩张, 则其 Galois 群的 Abel 化 $G_{L|K}^{\text{ab}}$ 是包含在 L 中的 K 的极大 Abel 扩张 $L^{\text{ab}}|K$ 对应的 Galois 群, 实际上 L^{ab} 即 $[G_{L|K}, G_{L|K}]$ 在 $G_K \rightarrow G_L$ 下的逆像对应的子域. 互反律告诉我们

$$G_{L|K}^{\text{ab}} \simeq A_K / N_{L|K} A_L$$

我们将证明这个极大交换扩张是被其范数群所唯一决定的.

A_K 的子群 I 被称为 **norm group**, 如果存在一个正规扩张 $L|K$ 使得 $I = N_{L|K} A_L$. 下面的定理告诉我们每一个范数群 $I = N_{L|K} A_L$ 实际上都是一个 K 的交换扩张给出的范数群.

定理 2.3.15: 令 $L|K$ 为正规扩张, L^{ab} 为极大交换子扩张, 则

$$N_{L|K} A_L = N_{L^{\text{ab}}|K} A_{L^{\text{ab}}} \subset A_K$$

证明: 包含关系

$$N_{L|K} A_L \subset N_{L^{\text{ab}}|K} A_{L^{\text{ab}}}$$

是显然的, 考虑范数映射即可, 互反律给出了同构

$$A_K / N_{L|K} A_L \simeq G_{L|K}^{\text{ab}} = G_{L^{\text{ab}}|K} \simeq A_K / N_{L^{\text{ab}}|K} A_{L^{\text{ab}}}$$

并且有

$$\#A_K / N_{L|K} A_L = \#A_K / N_{L^{\text{ab}}|K} A_{L^{\text{ab}}} < \infty$$

所以可以得到 $N_{L|K} A_L = N_{L^{\text{ab}}|K} A_{L^{\text{ab}}}$. □

推论 2.3.16: 指数 $[A_K : N_{L|K}A_L]$ 整除 $[L : K]$, 相等当且仅当 $L|K$ 是交换扩张.

证明: 注意到

$$[A_K : N_{L|K}A_L] = [A_K : N_{L^{\text{ab}}|K}A_{L^{\text{ab}}}] = \#G_{L^{\text{ab}}|K} = [L^{\text{ab}} : K]$$

故整除显然, 取等当且仅当 $L = L^{\text{ab}}$. □

定理 2.3.17: A_K 的范数群 I 构成了一个格², 映射

$$L \mapsto I_L = N_{L|K}A_L$$

给出了 K 的 Abel 扩张形成的格与 A_K 中范数群给出的格之间的反向同构, 即对 K 的交换扩张 L_1, L_2 而言, 有

$$(1) I_{L_1} \supset I_{L_2} \iff L_1 \subset L_2.$$

$$(2) I_{L_1 L_2} = I_{L_1} \cap I_{L_2}.$$

$$(3) I_{L_1 \cap L_2} = I_{L_1} \cdot I_{L_2}.$$

并且包含任意范数群的 A_K 的子群 I 也是范数群.

证明: 由于对应 $L_1 L_2$ 的群是 $G_{L_1} \cap G_{L_2}$, 所以很容易知道 $L_1 L_2|K$ 也是 Abel 扩张, 并且由于

$$N_{L_1 L_2|L_i} N_{L_i|K} = N_{L_1 L_2|K}$$

可见

$$I_{L_1 L_2} \subset I_{L_1} \cap I_{L_2}$$

反过来, 任取 $a \in I_{L_1} \cap I_{L_2}$, 考虑映射

$$(\pi_1, \pi_2): G_{L_1 L_2|K} \rightarrow G_{L_1|K} \times G_{L_2|K}$$

是单射, 由于

$$\pi_i((a, L_1 L_2|K)) = (a, L_i|K) = 1$$

从而可见 $(a, L_1 L_2|K) = 1$, 即 $a \in I_{L_1 L_2}$, 得证 (2). 接下来我们可见

$$I_{L_1} \supset I_{L_2} \iff I_{L_1 L_2} = I_{L_1} \cap I_{L_2} = I_{L_2} \iff [L_1 L_2 : K] = [L_2 : K] \iff L_1 \subset L_2$$

现在证明包含范数群的子群也是范数群, 设 $I_L \subset I \subset A_K$, 可以不妨设 $L|K$ 是 Abel 扩张, 根据同构 $A_L/I_L \rightarrow G_{L|K}$, 我们可以将 I/I_L 对应到 $G_{L|K}$ 的子群 $H = G_{L|M}$, 可见 $M|K$ 也是 Abel 扩张, 从而考虑

$$\pi: G_{L|K} \rightarrow G_{M|K}, \quad \text{Ker } \pi = H = G_{L|M}$$

²此处为代数结构的格.

因此有

$$\begin{aligned}
 a \in I_M &\iff (a, M|K) = 1 \\
 &\iff \pi(a, L|K) = 1 \\
 &\iff (a, L|K) \in H \\
 &\iff a \in I
 \end{aligned}$$

故得证, 最后 $J = I_{L_1} I_{L_2}$, 包含 I_{L_i} 从而也是范数群, 设 $J = I_M$, 可以立刻得到 $M \subset L_i$, 因此有 $M \subset L_1 \cap L_2$. 反过来, 有

$$L_1 \cap L_2 \subset L_i \iff I_{L_i} \subset I_{L_1 \cap L_2} \implies I_M = I_{L_1} I_{L_2} \subset I_{L_1 \cap L_2} \iff M \supset L_1 \cap L_2$$

综上可见 $M = L_1 \cap L_2$. □

最后, 我们还需要一个判断子群是否是范数群的方法, 这在后面的具体类域论中将体现为闭的有限指数子群, 我们可以证明所有这样的子群都来自扩张的范数群, 并且唯一对应一个 Abel 扩张, 称为这个子群的 **类域**, 对应的结论就是所谓的 **Existence Theorem**.

最后的最后, 我们把所有有限层次的范数剩余符号合在一起, 对于前面的每个正规扩张 $L|K$, 我们都有

$$A_K \rightarrow G_{L|K}^{\text{ab}}$$

让 L 遍历 K 的 Abel 扩张, 若 $L \subset N$ 都是 K 的 Abel 扩张, 则有自然的投影

$$G_{N|K} \twoheadrightarrow G_{L|K}$$

从而构成一个逆向系统, 我们定义³

$$G_K^{\text{ab}} = \varprojlim_{L|K \text{ normal}} G_{L|K}^{\text{ab}} = \varprojlim_{L|K \text{ abel}} G_{L|K}$$

从而对任意的 $a \in A_K$, 我们都有

$$(a, L|K) = \pi_{N,L}((a, N|K))$$

于是可以定义元素

$$(a, K) = \varprojlim (a, L|K) \in G_K^{\text{ab}}$$

如此就得到了 K 的 **universal norm residue symbol**, 若

$$\pi_L: G_K^{\text{ab}} \rightarrow G_{L|K}^{\text{ab}}$$

是投影, 则有

$$\pi_L(a, K) = (a, L|K)$$

³实际上, 这里的投射有限群 $G_K^{\text{ab}} \simeq G_K / \overline{[G_K, G_K]}$, 这里需要补充上闭包, 因为有限情况下换位子群自动是闭的.

定理 2.3.18: 考虑一般范数剩余符号 $(\cdot, K): A_K \rightarrow G_K^{\text{ab}}$, 其核为所有范数子群的交

$$D_K := \text{Ker}(\cdot, K) = \bigcap_L N_{L|K} A_L$$

并且其像在 G_K^{ab} 中是稠密的.

证明: 注意到

$$\begin{aligned} a \in D_K &\iff (a, L|K) = 1, \quad \forall L \\ &\iff a \in N_{L|K} A_L, \quad \forall L \\ &\iff a \in \bigcap_L N_{L|K} A_L \end{aligned}$$

现在考虑稠密性, 记

$$P := G_K^{\text{ab}} = \varprojlim_{L/K \text{ 有限阿贝尔}} G_{L|K}$$

集合

$$\pi_L^{-1}(\{\pi_L(\sigma)\}) = \sigma \text{ Ker } \pi_L$$

随着 L/K 遍历有限阿贝尔扩张, 构成任意 $\sigma \in P$ 的一个邻域基. 事实上, P 带有有限离散群之积的子空间拓扑, 因此对于 σ 的任意开邻域 U , 存在有限多个阿贝尔扩张 $L_1/K, \dots, L_r/K$, 使得

$$\sigma \in V := \bigcap_{i=1}^r \pi_{L_i}^{-1}(\{\pi_{L_i}(\sigma)\}) \subseteq U$$

也就是说, 只要一个元素在这些有限层次上的分量都与 σ 相同, 它就属于 U . 取合成域

$$N = L_1 \cdots L_r$$

它仍是 K 的有限阿贝尔扩张. 对每个 i , 存在自然投影

$$p_i: G_{N|K} \longrightarrow G_{L_i|K}, \quad \pi_{L_i} = p_i \circ \pi_N$$

因此, 若 $x \in P$ 满足 $\pi_N(x) = \pi_N(\sigma)$, 则

$$\pi_{L_i}(x) = p_i(\pi_N(x)) = p_i(\pi_N(\sigma)) = \pi_{L_i}(\sigma)$$

对所有 i 都成立. 于是

$$\pi_N^{-1}(\{\pi_N(\sigma)\}) \subseteq V \subseteq U$$

这就证明了上述邻域基的断言.

现在证明 $\rho_K(A_K)$ 稠密. 任取非空开集 $U \subseteq P$, 并选取 $\sigma \in U$. 由上述邻域基的性质, 可以找到有限阿贝尔扩张 N/K , 使得

$$\pi_N^{-1}(\{\pi_N(\sigma)\}) \subseteq U$$

由于 N/K 阿贝尔, 有限层次的互反同构给出

$$A_K/N_{N|K}A_N \xrightarrow{\sim} G_{N|K}$$

因此，范数剩余符号

$$(\cdot, N|K): A_K \longrightarrow G_{N|K}$$

是满射. 故存在 $a \in A_K$, 使得

$$(a, N|K) = \pi_N(\sigma)$$

根据定义,

$$\pi_N((a, K)) = (a, N|K) = \pi_N(\sigma)$$

所以

$$(a, K) \in \pi_N^{-1}(\{\pi_N(\sigma)\}) \subseteq U$$

这说明 P 的每个非空开集都与 (A_K, K) 相交, 因此

$$\overline{(A_K, K)} = G_K^{\text{ab}}$$

□